Cours 3: Inversion des matrices dans la pratique...

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module complémentaire de maths, année 2012

1. Rappel de l'épisode précédent sur l'inverse d'une application linéaire/matrice
   - Notion d'inverse d'une application linéaire
   - Inverse d'une matrice
   - Critère d'inversibilité : le déterminant
2. Pivot de Gauss sur les matrices
   - But de l'algorithme
   - Présentation de la méthode
   - Diposition des calculs : un exemple
   - L'algorithme général

1. Rappel de l'épisode précédent sur l'inverse d'une application linéaire/matrice
   - Notion d'inverse d'une application linéaire
   - Inverse d'une matrice
   - Critère d'inversibilité : le déterminant
2. Pivot de Gauss sur les matrices
   - But de l'algorithme
   - Présentation de la méthode
   - Diposition des calculs : un exemple
   - L'algorithme général

Rappel : Notion d'application bijective

Definition

Soit $f : U \to V$ une application linéaire. On dit que f est bijective si pour tout y de V, il existe un unique x dans U tel que $f(x) = y$.

Rappel : Notion d'application bijective

Definition

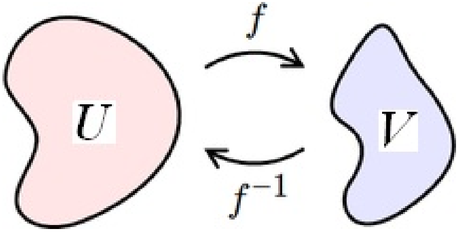
Soit $f : U \to V$ une application linéaire. On dit que f est bijective si pour tout y de V, il existe un unique x dans U tel que $f(x) = y$.

Notion d'inverse d'un application linéaire bijective

Dans le cas où f est bijective, on peut lui fabriquer une application inverse notée f^{-1}

$$f^{-1} : V \to U$$

qui à chaque y de V associe l'unique x de U tel que $y = f(x)$.

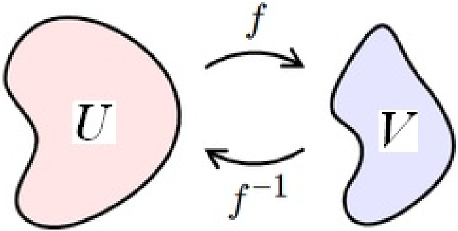


Notion d'inverse d'un application linéaire bijective

Dans le cas où f est bijective, on peut lui fabriquer une application inverse notée f^{-1}

$$f^{-1} : V \to U$$

qui à chaque y de V associe l'unique x de U tel que $y = f(x)$.



Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x$,

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x$,

$$ie : \quad f^{-1} o f = Id_U$$

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x$,

$$ie : \quad f^{-1} of = Id_U$$

- pour tout y dans V, $\quad f(f^{-1}(y)) = y$,

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $\quad f^{-1}(f(x)) = x,$

$$ie : \quad f^{-1}of = Id_U$$

- pour tout y dans V, $\quad f(f^{-1}(y)) = y,$

$$ie : \quad fof^{-1} = Id_V$$

Propriétés évidentes de l'inverse

On a :

- f^{-1} est bijective
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- pour tout x dans U, $f^{-1}(f(x)) = x$,

$$ie : \quad f^{-1} o f = Id_U$$

- pour tout y dans V, $f(f^{-1}(y)) = y$,

$$ie : \quad f o f^{-1} = Id_V$$

- si f est linéaire, alors f^{-1} l'est aussi.

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque une matrice est une représentation d'une application linéaire (dans de certaines bases), la notion d'inverse d'une application linéaire se translate aux matrices...

Définition de l'inverse d'une matrice

On considère une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Soit B_d et B_a des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Définition de l'inverse d'une matrice

On considère une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Soit B_d et B_a des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
- Soit A la matrice de f dans les bases B_d et B_a

Définition de l'inverse d'une matrice

On considère une application linéaire bijective $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- Soit B_d et B_a des bases respectives de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
- Soit A la matrice de f dans les bases B_d et B_a
- Soit B la matrice de f^{-1} dans les bases B_a et B_d

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1} o f = Id_{\mathbb{R}^n} \quad f o f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1} o f = Id_{\mathbb{R}^n} \quad f o f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

$$BA = Id_n \quad AB = Id_m,$$

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1} of = Id_{\mathbb{R}^n} \quad fof^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

$$BA = Id_n \quad AB = Id_m,$$

où $Id_p = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (de taille p)

Définition de l'inverse d'une matrice

Puisque la multiplication matricielle a été construite pour prolonger la composition des applications, des égalités

$$f^{-1}of = Id_{\mathbb{R}^n} \quad fof^{-1} = Id_{\mathbb{R}^m}$$

on déduit :

$$BA = Id_n \quad AB = Id_m,$$

où $Id_p = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (de taille p)

Definition

La matrice B s'appelle la matrice inverse de A. On la note parfois A^{-1}.

Déterminant

Il existe un critère tres pratique pour savoir si une matrice est inversible. Le fondement de ce critère ne rentre pas dans le cadre de ce cours, mais son utilisation fait partie du cours.

Déterminant

Il existe un critère tres pratique pour savoir si une matrice est inversible. Le fondement de ce critère ne rentre pas dans le cadre de ce cours, mais son utilisation fait partie du cours.

- A chaque matrice A, on associe un nombre appelé determinant de A et noté $det(A)$.

$$\begin{array}{rcl} det : \mathcal{M}_n & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & det(A). \end{array}$$

Déterminant

Il existe un critère tres pratique pour savoir si une matrice est inversible. Le fondement de ce critère ne rentre pas dans le cadre de ce cours, mais son utilisation fait partie du cours.

- A chaque matrice A, on associe un nombre appelé determinant de A et noté $det(A)$.

$$\begin{array}{rcl} det : \mathcal{M}_n & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & det(A). \end{array}$$

- Ce nombre a la propriété "magique" suivante :

$$A \; est \; inversible \Leftrightarrow det(A) \neq 0.$$

Calcul de déterminants de matrices d'ordre 2 et 3

- $$det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$$

Calcul de déterminants de matrices d'ordre 2 et 3

- $$det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$$

- $$\begin{aligned} det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}) = a_1 b_2 c_3 & + \quad b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ & - \quad (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1) \end{aligned}$$

Pour s'en souvenir, on peut écrire : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ et remarquer que le déterminant est la différence entre la somme des diagonales vers le bas et des diagonales vers le haut.

Pour s'en souvenir, on peut écrire : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ et remarquer que le déterminant est la différence entre la somme des diagonales vers le bas et des diagonales vers le haut.

$$\begin{aligned} det(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}) = a_1 b_2 c_3 & + & b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ & - & (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1) \end{aligned}$$

Quelques exemples

- $det(\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = 11$, donc la matrice est inversible.

Quelques exemples

- $det(\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = 11$, donc la matrice est inversible.
- $det(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix}) = 0$, donc la matrice n'admet pas d'inverse.

Quelques exemples

- $det(\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = 11$, donc la matrice est inversible.
- $det(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1/4 \end{pmatrix}) = 0$, donc la matrice n'admet pas d'inverse.
- $det(\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}) = -2$, donc la matrice est inversible.

Calcul de déterminant de matrices d'ordre supérieur

- A l'aide des cofacteurs (voir poly pour la déf), on peut calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 4, à l'aide des déterminants de matrices d'ordre 3.

Calcul de déterminant de matrices d'ordre supérieur

- A l'aide des cofacteurs (voir poly pour la déf), on peut calculer le déterminant d'une matrice d'ordre 4, à l'aide des déterminants de matrices d'ordre 3.
- Plus généralement, les cofacteurs permettent de caculer le déterminant d'une matrice d'ordre n à l'aide des déterminants de matrices d'ordre $n-1$.

△ Voir poly pour plus de détails

Quelques propriétés des déterminants

- $det(Id) = 1$

Quelques propriétés des déterminants

- $det(Id) = 1$
- $det(AB) = det(A)det(B)$

Quelques propriétés des déterminants

- $det(Id) = 1$
- $det(AB) = det(A)det(B)$
- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

- Avec un logiciel ...

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

- Avec un logiciel ...
- Algorithme du pivot de Gauss.

Comment calculer l'inverse d'une matrice

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

- Méthode des cofacteurs, calcul déterminants de diverses sous matrices de A.

(voir poly...)

- Avec un logiciel ...
- Algorithme du pivot de Gauss.

Objet des sections suivantes

- Soit A une matrice carré (supposée inversible),

- Soit A une matrice carré (supposée inversible), on cherche à obtenir la matrice :

$$A^{-1}$$

Rappel sur la représentation d'une application linéaire par une matrice

Rappel : Si A représente la matrice d'un application linéaire f (bijective) dans une certaine base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$,

Rappel sur la représentation d'une application linéaire par une matrice

Rappel : Si A représente la matrice d'un application linéaire f (bijective) dans une certaine base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, les colonnes de A sont les $f(e_i)$,

Rappel sur la représentation d'une application linéaire par une matrice

Rappel : Si A représente la matrice d'un application linéaire f (bijective) dans une certaine base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, les colonnes de A sont les $f(e_i)$,

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) \quad = \begin{array}{cccccc} & f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ & \left(\begin{matrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \\ \\ \cdots \end{matrix} & \left.\begin{matrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{matrix}\right) & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

Donc, en notant $A^{-1} = B$, on a :

Donc, en notant $A^{-1} = B$, on a :

$$A^{-1} = B = M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) \quad = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f^{-1}(e_1) & f^{-1}(e_2) & \cdots & f^{-1}(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

- Trouver la matrice A^{-1} revient donc à calculer les $f^{-1}(e_i)$ pour $i = 1..n$

- Trouver la matrice A^{-1} revient donc à calculer les $f^{-1}(e_i)$ pour $i = 1..n$
- Trouver la matrice A^{-1} revient donc à résoudre les n systèmes linéaires $f(x) = e_i$ pour $i = 1..n$

- Trouver la matrice A^{-1} revient donc à calculer les $f^{-1}(e_i)$ pour $i = 1..n$
- Trouver la matrice A^{-1} revient donc à résoudre les n systèmes linéaires $f(x) = e_i$ pour $i = 1..n$
- On va utiliser la méthode du pivot de Gauss introduit dans la section précédente pour chacun de ces n sytèmes.

- Trouver la matrice A^{-1} revient donc à calculer les $f^{-1}(e_i)$ pour $i = 1..n$
- Trouver la matrice A^{-1} revient donc à résoudre les n systèmes linéaires $f(x) = e_i$ pour $i = 1..n$
- On va utiliser la méthode du pivot de Gauss introduit dans la section précédente pour chacun de ces n sytèmes.
- Pour éviter de "re faire" n fois les calculs, on méne les calculs simultanément en les présentant ainsi :

On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence par présenter les choses sous la forme "Gauss".

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Au lieu de mettre à droite de la matrice un seul vecteur Y comme pour les sytèmes linéaires de la section précédente, on a mis cette fois, tous les vecteurs e_i (dont on cherche les antécédants)

On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence par présenter les choses sous la forme "Gauss".

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Au lieu de mettre à droite de la matrice un seul vecteur Y comme pour les sytèmes linéaires de la section précédente, on a mis cette fois, tous les vecteurs e_i (dont on cherche les antécédants)

Remarque : On peut retenir que l'on met la matrice Id à droite de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$ pour simplifier la suite des calculs. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7 + \frac{27}{4} & -2 + \frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7+\frac{27}{4} & -2+\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul. La matrice est donc inversible !

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7 + \frac{27}{4} & -2 + \frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul. La matrice est donc inversible ! On pourrait alors résoudre chaque système en "remontant" les équations comme dans la section précédente...Là encore, on peut mener directement ces calculs sur ces "tableaux".

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient,

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{5}{2} & -18 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- On a réussi à obtenir l'identité à gauche, la matrice de droite est donc A^{-1}.
  ie :

- Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- On a réussi à obtenir l'identité à gauche, la matrice de droite est donc A^{-1}.
  ie :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Notation de l'algo général

On notera :

- L_i^k la ligne i de la matrice A à l'itération k,
- $a_{i,j}^k$ le scalaire $a_{i,j}$ de la matrice A à l'itération k.

Algo général

L'algorithme de Gauss-Jordan (pour aller jusqu'à une matrice triangulaire) est le suivant :

Pour k allant de 1 à n
S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k}^{k-1} \neq 0$,
échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$
$L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$
Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$
$L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{i,k}^{k-1} \times L_k^k$
Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Après l'étape k de l'algorithme, la colonne k a tous ses coefficients nuls sauf celui de la diagonale qui vaut 1 et ceux en dessous de la diagonale...