Cours 1: Autour des systèmes linéaires, Algorithme du pivot de Gauss

Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Module complémentaire de maths, année 2012

Définition d'un système linéaire

On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{cases}$$

Définition d'un système linéaire

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ ... & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

Les y_i et les $a_{i,j}$ sont donnés, on cherche les x_i.

Cas particulier

Ex : Système 3×3

Cas particulier

Ex : Système 3×3

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

Variante

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & \leq & y_n \end{array}\right.$$

Variante

On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & \leq & y_n \end{array} \right.$$

Les y_i et $a_{i,j}$ sont données, on cherche les régions où se situent les x_i.

Exemple 1

Une usine fabrique trois produits P1, P2 et P3. Ces produits passent dans trois ateliers différents A,B et C, avec les temps de passages suivants :

- P1 passe 2h dans l'atelier A, 1h dans l'atelier B et 1h dans latelier C
- P2 passe 5h dans l'atelier A, 3h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C
- P3 passe 3h dans l'atelier A, 2h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C

Exemple 1

Une usine fabrique trois produits P1, P2 et P3. Ces produits passent dans trois ateliers différents A,B et C, avec les temps de passages suivants :

- P1 passe 2h dans l'atelier A, 1h dans l'atelier B et 1h dans latelier C
- P2 passe 5h dans l'atelier A, 3h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C
- P3 passe 3h dans l'atelier A, 2h dans l'atelier B et 2h dans l'atelier C

Question : Lors dun programme de fabrication, la charge horaire des différents ateliers a été de 104h pour A, 64h pour B et 55h pour C. Quelles sont les quantités de P1, P2 et P3 fabriquées ?

Exemple 1

Pour $i = 1..3$, soit n_i la quantité de produits P_i fabriqués.

Exemple 1

Pour $i = 1..3$, soit n_i la quantité de produits P_i fabriqués.
L'énoncé se traduit par le système :

$$\begin{cases} 2n_1 + 5n_2 + 3n_3 & = & 104 \\ n_1 + 3n_2 + 2n_3 & = & 64 \\ n_1 + 2n_2 + 2n_3 & = & 55 \end{cases}$$

Exemple 2

La fabrication d'un produit artistique P exige l'assemblage de pièces de type 1 et de type 2. Une pièce de type 1 coûte 6 euros et necessite 3h de travail alors qu'une pièce de type B coûte 3 euros et nécessite 4h de travail.
Contraintes économiques : on souhaite que le prix du produit P ne dépasse pas 180 euros. Par ailleurs, le temps de fabrication de P ne doit pas excéder 160h.

Exemple 2

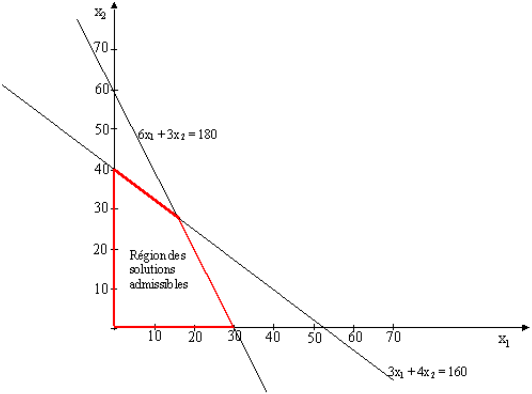
La fabrication d'un produit artistique P exige l'assemblage de pièces de type 1 et de type 2. Une pièce de type 1 coûte 6 euros et necessite 3h de travail alors qu'une pièce de type B coûte 3 euros et nécessite 4h de travail.
Contraintes économiques : on souhaite que le prix du produit P ne dépasse pas 180 euros. Par ailleurs, le temps de fabrication de P ne doit pas excéder 160h.
Question :
Quels sont les valeurs possibles pour le nombre de pièces de type 1 et 2 pour la fabrication de P

Soit x_1 et x_2 le nombre respectifs de pièces de type 1 et 2 pour fabriquer un produit P.

Soit x_1 et x_2 le nombre respectifs de pièces de type 1 et 2 pour fabriquer un produit P. On doit avoir :

$$\begin{cases} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ 6x_1 + 3x_2 & \leq & 180 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 160 \end{cases}$$

Soit x_1 et x_2 le nombre respectifs de pièces de type 1 et 2 pour fabriquer un produit P. On doit avoir :



$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ 6x_1 + 3x_2 & \leq & 180 \\ 3x_1 + 4x_2 & \leq & 160 \end{array}\right.$$

But

Trouver une méthode "automatique" pour résoudre les systèmes linéaires

But

Trouver une méthode "automatique" pour résoudre les systèmes linéaires

-> Fabriquer un algorithme

Partons des 3 exemples suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 & = & 9 \\ 2x_1 + x_2 & = & 13 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ -2x_1 - 6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ -2x_1 - 6x_2 & = & 8 \end{array}\right.$$

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point,

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes),

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues,

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues,infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues,infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Méthode graphique

Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues,infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Inconvénients de cette méthode :

Méthode graphique

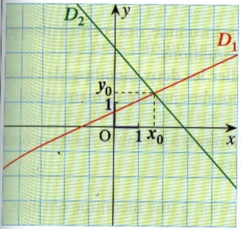
Géométriquement, on peut obtenir la "forme" des solutions. *On retrouvera ces résultats à l'aide de la structure du noyau d'une application linéaire (cours à venir)*.

- Tracer les droites correspondantes au système
- Point(s) d'intersection éventuel(s)
  - Les 2 droites sont sécantes en un point, il y a un unique couple solution.
  - Les 2 droites sont paralléles (et disjointes), pas de solutions au système.
  - Les 2 droites sont confondues,infinité de solutions, tout point de "la" droite est solution.

Inconvénients de cette méthode : précision des résultats...

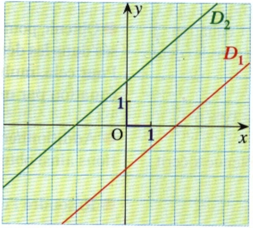
Méthode graphique

D_1 et D_2 sont sécantes, le système admet un seul couple solution.



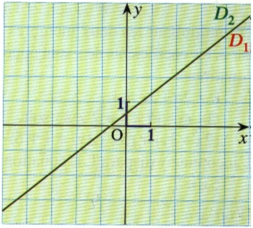
Solution : $(x_0 ; y_0)$.

D_1 et D_2 sont parallèles et distinctes, le système n'admet aucun couple solution.



Pas de solution.

D_1 et D_2 sont confondues, le système admet une infinité de couples solutions.



Solution : tous les couples vérifiant l'équation de D_1 ou D_2.

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$,

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

D'où $x_1 = 5$.

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

  D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale",

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

  D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2" = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1.

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

  D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2" = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :

$$\{(5 - 3\lambda, \lambda); \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2 " = " -2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :

$$\{(5 - 3\lambda, \lambda); \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(Paramétrage non unique)

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie: \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

  D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2 " = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :

$$\{(5 - 3\lambda, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

  (Paramétrage non unique)
- Pour (S_3), toute substitution aboutit à une égalité non valide,

Méthode par substitution

- Pour (S_1), on peut par exemple tirer de L_2 que $x_2 = 13 - 2x_1$, puis re injecter dans L_1 pour obtenir une équation du 1^{er} degrés en x_1,

$$ie : \quad 3x_1 - 2(13 - 2x_1) = 9.$$

  D'où $x_1 = 5$. puis $x_2 = 3$.
- Pour (S_2), toute substitution aboutit à une égalité "triviale", on remarque alors que $L_2 " = " - 2L_1$ et le système se réduit par ex à L_1. On peut paramétrer les solutions ainsi :

$$\{(5 - 3\lambda, \lambda);\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

  (Paramétrage non unique)
- Pour (S_3), toute substitution aboutit à une égalité non valide, pas de solutions.

Méthode par addition

$$(S_1)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 &= 13 \end{cases}$$

Méthode par addition

$(S_1)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 &= 13 \end{cases}$ On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

Méthode par addition

$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 & = & 9 \\ 2x_1 + x_2 & = & 13 \end{array}\right.$ On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad et \quad L_2 \leftarrow -2L_1 + 3L_2.$$

Méthode par addition

$$(S_1)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 9 \\ 2x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$$

On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad et \quad L_2 \leftarrow -2L_1 + 3L_2.$$

Ce qui donne : $\begin{cases} 7x_1 = 35 \\ 7x_2 = 21 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Méthode par addition

$(S_1)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 &= 13 \end{cases}$ On remplace le système par un système équivalent en essayant d'éliminer une variable...

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \quad et \quad L_2 \leftarrow -2L_1 + 3L_2.$$

Ce qui donne : $\begin{cases} 7x_1 &= 35 \\ 7x_2 &= 21 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 3 \end{cases}$

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcr} x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ -2x_1 - 6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1 + 3x_2 = 5$

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.

- $(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & 8 \end{array}\right.$,

- $(S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & -10 \end{array}\right.$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

  Ainsi (S_2) se réduit à $x_1+3x_2=5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.
- $(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2 & = & 5 \\ -2x_1-6x_2 & = & 8 \end{array}\right.$, on procéde aux même opérations :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

- $(S_2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ -2x_1 - 6x_2 = -10 \end{cases}$, on procéde à :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ainsi (S_2) se réduit à $x_1 + 3x_2 = 5$ puis on paramétre les solutions comme précédemment.

- $(S_3)\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ -2x_1 - 6x_2 = 8 \end{cases}$, on procéde aux même opérations :

$$L_1 \leftarrow L_1 \quad et \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Ce qui donne : $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 0 = -2 \end{cases}$
D'où le système n'admet pas de solutions.

Pivot de Gauss sur les sytémes linéaires

- Le principe général du pivot de Gauss est de transformer le système que l'on veut résoudre en un système *triangulaire* qui a les MEMES SOLUTIONS.

Pivot de Gauss sur les sytémes linéaires

- Le principe général du pivot de Gauss est de transformer le système que l'on veut résoudre en un système *triangulaire* qui a les MEMES SOLUTIONS.

But

- Pour un système 3×3, cela revient à passer d'un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = & d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & = & d_3 \end{array}\right.$$

But

- Pour un système 3×3, cela revient à passer d'un système du type
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = & d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & = & d_3 \end{array}\right.$$
à un système du type
$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z & = & \delta_1 \\ \beta_2 y + \gamma_2 z & = & \delta_2 \\ \gamma_3 z & = & \delta_3 \end{array}\right.$$
(si possible...)

But

- Pour un système 3×3, cela revient à passer d'un système du type
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = & d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & = & d_3 \end{cases}$$
à un système du type
$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z & = & \delta_1 \\ \beta_2 y + \gamma_2 z & = & \delta_2 \\ \gamma_3 z & = & \delta_3 \end{cases}$$
(si possible...)
- Une fois que l'on a un système triangulaire, on obtient directement la dernière inconnue. On peut ensuite passer à la substitution en remontant ligne par ligne.

Opérations autorisées

Pour transformer un système donné en un système triangulaire, on dispose d'un certain nombre d'opérations que l'on peut faire sur les équations du système sans changer ses solutions. Précisément, on peut

Opérations autorisées

Pour transformer un système donné en un système triangulaire, on dispose d'un certain nombre d'opérations que l'on peut faire sur les équations du système sans changer ses solutions. Précisément, on peut

- permuter deux équations,
- multiplier une équation par un nombre non nul,
- ajouter une ligne à une autre.

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations.

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{\begin{array}{ccc} x-y+z & = & 2 \\ 2x+y-z & = & 1 \\ 4x+3y+z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations.
Au niveau de la matrice, cela revient à utiliser la première ligne pour faire apparaître des 0 sous le premier coefficient de la première ligne.

Un exemple concret avant le cas général

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice (=tableau) associée.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 2 \\ 2x+y-z & = & 1 \\ 4x+3y+z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations.
Au niveau de la matrice, cela revient à utiliser la première ligne pour faire apparaître des 0 sous le premier coefficient de la première ligne.C'est ce premier coefficient que l'on appelle le pivot.

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$
- On a ainsi fait apparaître un premier 0 sous notre pivot.

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$
- On a ainsi fait apparaître un premier 0 sous notre pivot.
- On fait alors apparaître un nouveau 0 en soustrayant 4 fois la première ligne à la troisième :

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
- $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1)$$

- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1)$
- On a maintenant terminé la première étape du pivot de Gauss : on a mis des 0 sur toute la première colonne, à l'exception de notre pivot.

- Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

- Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

- On recommence alors la première étape, sur la matrice plus petite : dans notre exemple, notre nouveau pivot est le 3, que l'on utilise pour faire apparaître des 0 en dessous. Ainsi,

- Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

- On recommence alors la première étape, sur la matrice plus petite : dans notre exemple, notre nouveau pivot est le 3, que l'on utilise pour faire apparaître des 0 en dessous. Ainsi,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2) \end{array}$$

- On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second et l'on recommence sur la matrice plus petite.

- On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second et l'on recommence sur la matrice plus petite.
- Le processus s'arrête lorsque l'on a une matrice triangulaire (i.e. une matrice ne contenant que des 0 sous la diagonale), et donc un système triangulaire.

- On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second et l'on recommence sur la matrice plus petite.
- Le processus s'arrête lorsque l'on a une matrice triangulaire (i.e. une matrice ne contenant que des 0 sous la diagonale), et donc un système triangulaire.
- On revient alors à la notation système, et l'on peut faire "remonter" les équations par substitution des variables.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

- Dans notre exemple, la dernière ligne de notre matrice nous donne l'équation

$$4z = 2, \quad \text{soit} \quad z = \frac{1}{2}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

- Dans notre exemple, la dernière ligne de notre matrice nous donne l'équation

$$4z = 2, \quad \text{soit} \quad z = \frac{1}{2}.$$

- La seconde ligne nous donne

$$3y - 3z = -3,$$

  et en substituant à z la valeur trouvée, on obtient
  $3y = -\frac{3}{2}, \quad$ d'où $\quad y = -\frac{1}{2}.$

- Enfin, la première ligne nous donne

$$x - y + z = 2,$$

et en substituant, on obtient

$$x = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

- Enfin, la première ligne nous donne

$$x - y + z = 2,$$

et en substituant, on obtient

$$x = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

- La solution de notre système est donc le triplet

$$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Notations

- On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

Notations

- On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \dots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

  Les y_i sont données, on cherche les x_i.
- Notation matricielle.

Notations

- On veut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \ldots & & . \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

  Les y_i sont données, on cherche les x_i.
- Notation matricielle. Soient

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} ; \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

- on veut résoudre en X l'équation : $AX = Y$

Algorithme du pivot de Gauss

On crée un tableau à n lignes et $n+1$ colonnes en bordant la matrice A par le vecteur C.
On notera :

- L_i^k la ligne i de la matrice A à l'itération k,
- $a_{i,j}^k$ le scalaire $a_{i,j}$ de la matrice A à l'itération k.

Algorithme

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

Pour k allant de 1 à n

S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k}^{k-1} \neq 0$,

échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$

$L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$

Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$

$L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{i,k}^{k-1} \times L_k^k$

Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Algorithme

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

Pour k allant de 1 à n

S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k}^{k-1} \neq 0$,

échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$

$L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$

Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$

$L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{i,k}^{k-1} \times L_k^k$

Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Après l'étape k de l'algorithme, la colonne k a tous ses coefficients nuls sauf celui de la diagonale, qui vaut 1 (et les coefficients inférieurs)... Le tour est joué.

Remarque

L'algoritme fonctionnerait sur un système "non carré".

Application future : Inversion des matrices, à suivre...