Module complémentaire de Mathématiques

Semestre 3

Algèbre linéaire-Suites

Université Paul Sabatier - Toulouse 3
IUT de Toulouse 3 A
Département GEA Rangueil

Rau Clément
clement.rau@iut-tlse3.fr

Ces notes de cours contiennent essentiellement deux thèmes : les suites numériques et l'algèbre linéaire. L'utilisation des suites dans la modélisation de capital financier justifie leur introduction dans votre cursus. En revanche, les applications de l'algèbre linéaire dans votre section méritent quelques explications. En économie, on est par exemple amené à résoudre un systéme linéaire (ou optimiser une fonction sous certaines contraintes linéaires). Dans cette situation, il est plus commode de représenter le probléme avec une matrice. La vision d'une matrice comme un tableau est un bon départ pour un non spécialiste, mais cet aspect (bien que pratique) demeure rapidement "limité". Les matrices vues comme outil, pour représenter les applications linéaires, est déjà une meilleure vision. Ainsi pour parler de matrices, il sera necessaire d'introduire les applications linéaires, qui sont des applications entre espaces vectoriels, espaces qu'il faudra à leur tour définir.

Evidemment, dans le cadre de votre formation, on ne fera qu'un tour d'horizon rapide de ces notions mais il est parfois bon de garder à l'esprit les fondements des objets que l'on manipule pour avoir de l'intuition...(par exemple, une propriété des applications linéaires implique que une forme particulière des solutions d'un systéme linéaire).

Ces notes de cours restant bien évidemment perfectibles, je remercie toute personne me rapportant des coquilles, erreurs ou commentaires.

Table des matières

1 Espaces Vectoriels **6**
- 1.1 Le plan et l'espace . . . 6
  - 1.1.1 Qu'est-ce qu'un vecteur ? . . . 6
  - 1.1.2 Repères et coordonnées . . . 7
- 1.2 Définitions et Exemples . . . 9
  - 1.2.1 Loi de composition interne . . . 9
  - 1.2.2 Multiplication externe . . . 9
  - 1.2.3 Espace vectoriel . . . 10
  - 1.2.4 Sous espaces vectoriels . . . 11
- 1.3 Espaces engendrés . . . 13
  - 1.3.1 Familles génératrices . . . 13
  - 1.3.2 Familles libres . . . 15
  - 1.3.3 Bases et coordonnées . . . 17
- 1.4 Dimension d'un espace vectoriel . . . 18
  - 1.4.1 Définition . . . 18
  - 1.4.2 Dimensions et familles de vecteurs . . . 18
  - 1.4.3 Dimension d'un sous espace vectoriel . . . 18
- 1.5 Deux mots sur le changement de base . . . 19

2 Applications linéaires **22**
- 2.1 Rappels . . . 22
- 2.2 Définition . . . 22
- 2.3 Image et noyau d'une application linéaire . . . 23
  - 2.3.1 Noyau . . . 23
  - 2.3.2 Image . . . 24
  - 2.3.3 Théorème du rang . . . 25
  - 2.3.4 Injectivité, surjectivité d'une application linéaire . . . 26

3 Représentation des applications linéaires : Matrices **28**
- 3.1 Introduction, Définition . . . 28
- 3.2 Le changement de base . . . 30
- 3.3 Opérations sur les matrices . . . 30
  - 3.3.1 Multiplication par un réel . . . 30
  - 3.3.2 Addition . . . 30
  - 3.3.3 Multiplication . . . 31
- 3.4 Inversion de matrice . . . 32
  - 3.4.1 Définition . . . 32
  - 3.4.2 Propriétés . . . 32

3.5 Critère d'inversibilité . . . 33
3.5.1 Le déterminant . . . 33
Méthode de calcul du déterminant ordre 2 . . . 33
Méthode de calcul du déterminant ordre 3 . . . 33
Notion de cofacteur . . . 34
Développement suivant une colonne . . . 34
Propriétés du déterminant . . . 35
3.6 Calcul de l'inverse d'une matrice . . . 35
3.6.1 Méthode de Gauss . . . 35
3.6.2 Méthode des cofacteurs . . . 37
3.6.3 Un exemple . . . 38

4 Systèmes linéaires, programmation linéaire 40
4.1 Mise en équation . . . 40
4.2 Équations linéaires . . . 41
4.3 Systèmes d'équations linéaires . . . 41
4.4 Quelques méthodes de résolution des systèmes linéaires . . . 42
4.4.1 Pivot de Gauss . . . 43
Objectif du Pivot de Gauss . . . 43
Opérations autorisées . . . 43
Mécanisme du pivot de Gauss . . . 43
4.4.2 Résolution de systèmes par la méthode des déterminants . . . 46
4.4.3 Le cas particuliers des systèmes 2×2 . . . 46
Résolution graphique . . . 47
Méthode par substitution . . . 47
Méthode par combinaison . . . 48
4.5 Quelques mots sur les inéquations linéaires . . . 48
4.5.1 Systèmes d'inéquations linéaires . . . 49
4.5.2 Une méthode graphique . . . 49

5 Suites numériques 53
5.1 Généralités . . . 53
5.1.1 Définition . . . 53
5.1.2 Expression d'une suite . . . 53
Définition explicite . . . 54
Suites récurrentes . . . 54
5.1.3 Sens de variation . . . 54
5.1.4 Suites bornées . . . 55
5.1.5 Convergence . . . 55
Exemples . . . 56
5.1.6 Limites et inégalités . . . 56
5.2 Deux exemples fondamentaux . . . 56
5.2.1 Suites Arithmétiques . . . 56
Définition . . . 56
Expression du terme général . . . 57
Sens de variation . . . 57
Convergence . . . 57
Représentation graphique . . . 57
5.2.2 Suites Géométriques . . . 58
Définition . . . 58

Expression du terme général . . . 58
Sens de variation . . . 59
Convergence . . . 59
Représentation graphique . . . 59
5.2.3 Somme de N termes consécutifs . . . 59
Position du problème . . . 59
Suite arithmétique . . . 60
Suite géométrique . . . 61
5.3 Exemples . . . 62
5.3.1 Cas 1 : augmentation forfaitaire de 1,2 euros . . . 62
5.3.2 Cas 2 : augmentation de 3% . . . 63
5.3.3 Suites arithmético géométriques . . . 63
5.3.4 Une application de l'algèbre linéaire : Suites récurrentes linéaire d'ordre 2 64

Chapitre 1

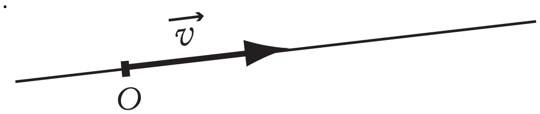
Espaces Vectoriels

Comment habille-t-on un espace vectoriel ? Avec une combinaison linéaire !

1.1 Le plan et l'espace

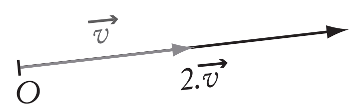
1.1.1 Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Dans le plan ou dans l'espace, un vecteur, c'est :
– une direction,
– un sens,
– une longueur.

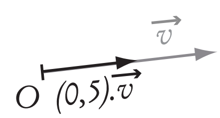


Et il existe plusieurs opération que l'on peut faire à partir des vecteurs du plan. Ainsi, étant donné un vecteur du plan (ou de l'espace), on peut

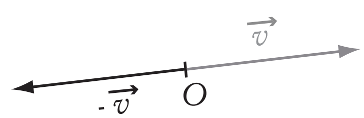
– l'agrandir en le multipliant par une constante > 1,



– le retressir en le multipliant par une constante < 1,

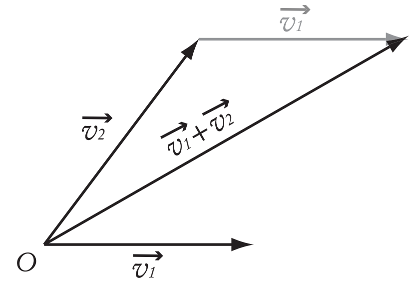


– le retourner en le multipliant par -1.



(Rappel : deux vecteurs de la forme $\overrightarrow{v}$ et $k.\overrightarrow{v}$ sont dits colinéaires.)

D'autre part, étant donnés deux vecteurs du plan (ou de l'espace), on peut les additionner pour construire un troisième vecteur du plan, en les mettant bout à bout.



Ainsi, à partir de deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, on peut construire des vecteurs de la forme

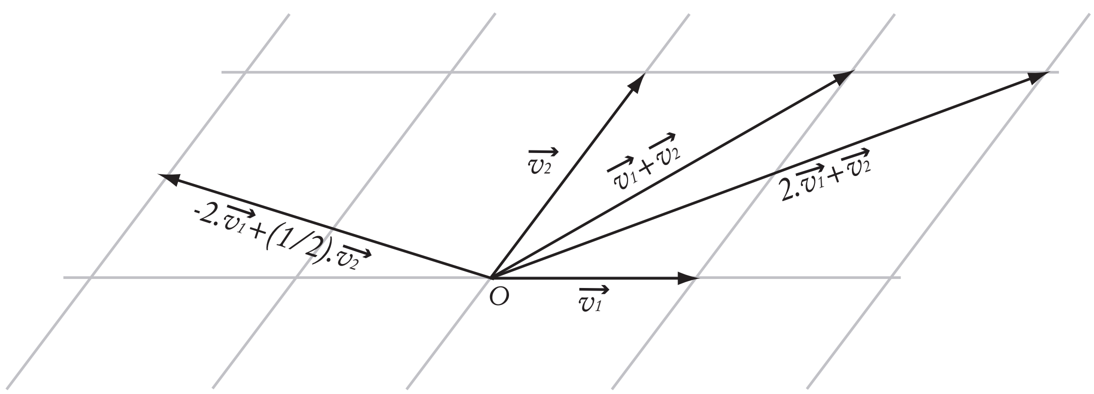
$$x.\overrightarrow{v_1} + y.\overrightarrow{v_2}$$

pour toutes valeurs de x et y. On dira qu'un tel vecteur est une *combinaison linéaire* des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. C'est cette idée qui nous permet de mettre en place la notion de repère et de coordonnées.

1.1.2 Repères et coordonnées

Dans le plan. Choisissons un point d'origine et deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ en prenant soin de ne pas les choisir colinéaires. À partir de ces deux vecteurs, on peut en construire toutes les combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, c'est-à-dire tous les vecteurs de la forme

$$\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{v_1} + y.\overrightarrow{v_2}.$$



Or si l'on fait varier x et y dans $\mathbb{R}$, on peut ainsi recouvrir tout le plan contenant $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Autrement dit, n'importe quel vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{v_1} + y.\overrightarrow{v_2}$$

pour des valeurs de x et de y bien choisies.

On dira alors que l'ensemble $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est alors un repère du plan et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, les réels x et y tels que

$$\overrightarrow{u} \;=\; x.\overrightarrow{v_1} \;+\; y.\overrightarrow{v_2}$$

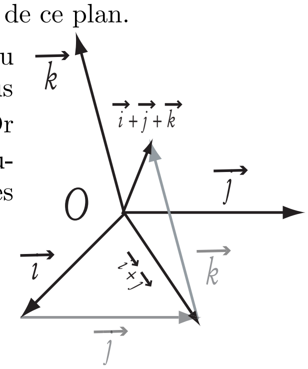
sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans le repère $\mathcal{R}$. On note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$. Ces coordonnées nous permettent par exemple de repérer n'importe quel point dans le plan. En effet, une fois que l'on s'est fixé un point d'origine O, on peut représenter tout point M du plan par le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Si l'on complète de plus le point O en un repère, on peut alors représenter tout point M par ses coordonnées dans ce repère. Ces coordonnées nous permettent alors de transformer tout problème de géométrie du plan (position relatives de plusieurs points, déplacement d'un point, d'une figure...) en un problème de calcul.

Dans l'espace. À l'aide des combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, on peut donc recouvrir tout le plan contenant $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, mais on n'a aucune chance de sortir de ce plan.

Si l'on souhaite sortir du plan, il faut ajouter un vecteur $\overrightarrow{k}$ au repère, en le prenant hors du plan. On peut alors considérer tous les vecteurs qui sont une combinaison linéaire de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$. Or tout vecteur de l'espace peut s'écrire en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$. Autrement dit, pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de l'espace, il existe des nombres (x, y, z) tels que

$$\overrightarrow{v} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$$

Ces nombres x, y et z sont les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans le repère $(0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$



Résumé.

- Si l'on choisi un vecteur $\overrightarrow{i}$, l'ensemble des vecteurs de la forme $x.\overrightarrow{i}$ (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires de *un* vecteur) nous permet de recouvrir une droite : la droite portée par le vecteur $\overrightarrow{i}$.
- Si l'on choisi deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, alors
  - si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont colinéaires (i.e. $\overrightarrow{j} = x.\overrightarrow{i}$), on ne pourra toujours recouvrir qu'une droite à l'aide de combinaisons linéaires de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$: la droite commune à $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
  - Si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ ne sont pas colinéaires, on pourra recouvrir tout un plan : le plan contenant $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
- Si l'on choisi trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$, alors
  - Si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont tous les trois colinéaires (par exemple $\overrightarrow{i}$, $2.\overrightarrow{i}$, $3.\overrightarrow{i}$), on n'a qu'une droite.
  - Si les trois vecteurs sont dans un même plan, on ne peut pas sortir de ce plan. (Remarquons que si les trois vecteurs sont dans le même plan, cela signifie que l'on peut en exprimer un (par exemple $\overrightarrow{k}$) comme combinaison linéaire des deux autres).
  - Si les trois vecteurs ne sont pas dans un même plan, alors on pourra recouvrir tout l'espace.

On voit donc que la droite, le plan et l'espace possèdent certaines caractéristiques en commun. Ce sont ces propriétés qui en font des *espaces vectoriels*. L'objectif de ce cours est de formaliser et d'étudier ces propriétes, puis d'en déduire d'autres. On appellera alors espace vectoriel tout ensemble vérifiant ces propriétés. Cela nous permettra notamment de voir certaines classes d'objet (comme l'ensemble des matrices, ou l'ensemble des solutions d'un problème donné) comme des espaces vectoriels. Et en étudiant en détails la notion d'espace vectoriels, on obtiendra des outils permettant de travailler de la même façon avec des point du plan ou de l'espace, des matrices.

1.2 Définitions et Exemples

1.2.1 Loi de composition interne

Commençons par formaliser l'addition de deux vecteur. De façon formelle, l'addition est une opération qui combine deux éléments du plan (ou de l'espace) pour en construire un troisième. C'est ce que l'on appelle une loi de composition interne (lci). On peut en outre remarquer que l'addition de deux vecteurs que l'on vient de voir possède quelques propriétés élémentaires :

– L'addition des vecteurs est commutative : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.$$

– L'addition des vecteurs est associative : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).$$

– L'addition des vecteurs possède un élément neutre. C'est-à-dire un vecteur qui ne fait rien. Il s'agit bien sur du point O (ou du vecteur nul $\overrightarrow{0}$).

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}.$$

– Tout vecteur $\overrightarrow{v}$ possède un inverse pour la l'addition, c'est-à-dire un autre vecteur tel que leur somme soit égale au vecteur nul. C'est le vecteur $-\overrightarrow{v}$.

1.2.2 Multiplication externe

De la même façon, on peut formaliser la multiplication d'un vecteur par un réel $\overrightarrow{v} \mapsto k.\overrightarrow{v}$. Cette opération est une multiplication externe, puisque l'on utilise un élément qui n'est pas dans notre ensemble (le réel k). D'autre part, la multiplication externe que l'on a vu possède elle aussi quelques propriétés :

– La multiplication externe est distributive par rapport à l'addition des vecteurs :

$$k.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k.\overrightarrow{u} + k.\overrightarrow{v}.$$

– La multiplication externe est distributive par rapport à l'addition des réels :

$$(k + \ell).\overrightarrow{u} = k.\overrightarrow{u} + \ell.\overrightarrow{u}.$$

– La multiplication externe est associative :

$$(k\ell).\overrightarrow{u} = k.(\ell.\overrightarrow{u}).$$

– La multiplication externe possède un élément neutre : c'est le réel 1 :

$$1.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.$$

1.2.3 Espace vectoriel

C'est les opérations que l'on peut définir sur un ensemble et les propriétés de ces opérations qui font de cet ensemble un espace vectoriel. Précisément,

Définition 1 *Soit $\mathcal{V}$ un ensemble. Cet ensemble est un espace vectoriel si l'on peut le munir*
- *d'une lci commutative, associative et possédant un élément neutre et telle que tout élément de $\mathcal{V}$ soit inversible pour cette lci,*
- *d'une multiplication externe par des réels qui soit distributive (aux sens où on l'a vu plus haut), associative et possédant également un élément neutre.*

On appellera vecteur tout élément d'un espace vectoriel.

Si l'on note + et . respectivement la lci et la multiplication d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$, on appellera combinaison linéaire toute opération sur les vecteurs de $\mathcal{V}$ combinant les deux opérations, i.e. toute opération de la forme

$$k_1.\overrightarrow{v_1} + k_2.\overrightarrow{v_2} + \ldots + k_n.\overrightarrow{v_n}$$

où les $\overrightarrow{v_i}$ sont des vecteurs de $\mathcal{V}$ et les k_i sont des réels.

Dans la suite, on utilisera souvent les combinaisons linéaires pour construire un vecteur à partir d'une famille de vecteurs donnée.

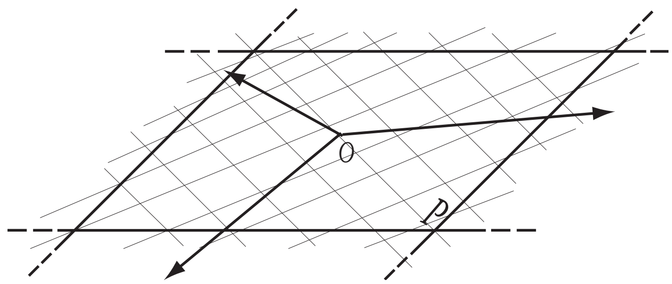
Exemples d'espaces vectoriels.

1. Le plan ou l'espace (muni d'un point d'origine O) est un espace vectoriel.
2. La droite munie d'un point d'origine est un espace vectoriel.
3. Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels.
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\, x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}\}.$$
On peut munir $\mathbb{R}^2$ d'une addition
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
et d'une multiplication par un réel
$$k.(x, y) = (kx, ky).$$
L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel.
4. De façon plus général, pour un entier n donné, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets à coordonnées dans $\mathbb{R}$, muni des mêmes opérations (coordonnée par coordonnée) est un espace vectoriel.
5. Le segment $[0, 1]$, muni des lois "+" et " $\times$ " n'est pas un espace vectoriel. En effet, plusieurs des propriétés d'un espace vectoriel ne sont pas vérifiées par $([0, 1], +, \times)$. Ainsi,
   (a) La loi + n'est pas une lci :
   $$1/2 + 1 = 3/2 \notin [0, 1].$$
   (b) Notre ensemble contient bien un élément neutre pour "+" (c'est 0), mais certains éléments de $[0, 1]$ n'ont pas d'inverse pour la loi +, par exemple $1/2$.
   (c) Notre ensemble n'est pas stable par la multiplication. Par exemple
   $$3 \times 1/2 = 3/2 \notin [0, 1].$$
6. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, est un $\mathbb{R}$-e.v

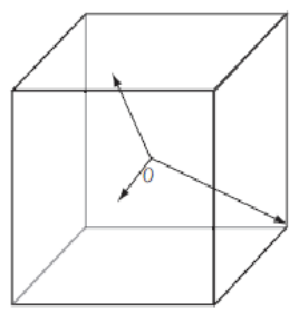
1.2.4 Sous espaces vectoriels

Plaçons nous maintenant dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$, muni d'une lci "+" et d'une multiplication " . " (par exemple, l'espace dans lequel on fixe un point O) et étudions un peu ses sous-ensembles.

On peut par exemple considérer l'ensemble des vecteurs de l'espace qui sont dans un même plan $\mathcal{P}$,



ou l'ensemble des vecteurs de l'espace qui sont contenus dans un cube centré en O.



Parmi ces sous ensemble, certains peuvent être muni d'une structure d'espace vectoriels. C'est ce qu'on appelle *les sous-espaces vectoriels* de $\mathcal{V}$.

Théorème 1 *Étant donné un espace vectoriel $\mathcal{V}$, un sous ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{V}$ est* un sous espace vectoriel *de $\mathcal{V}$ si et seulement si*

1. *L'élément neutre $\overrightarrow{0_{\mathcal{V}}}$ de $\mathcal{V}$ est dans $\mathcal{S}$.*
2. *$\mathcal{S}$ est fermé pour la loi + :*
$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{S}, \quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \mathcal{S}$$
3. *$\mathcal{S}$ est fermé pour la loi . :*
$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u} \in \mathcal{S}, \quad k.\overrightarrow{u} \in \mathcal{S}$$

Les deux derniers points peuvent être rassemblés dans la propriété suivante : pour tous $k, \ell \in \mathbb{R}$ et pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{S}$, on a
$$k.\overrightarrow{u} + \ell.\overrightarrow{v} \in S.$$

Exemples de SEV

1. Dans l'espace, tout plan contenant O est un SEV, toute droite passant par O est un SEV, le point O est un SEV.
2. Le cube de l'espace que l'on vient de voir n'est pas un SEV car il n'est pas fermé (stable) pour les opérations $+$ et .
3. L'ensemble des solution d'un système linéaire *homogène* 3×3 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 x + b_1 y + c_1 z & = & 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z & = & 0 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z & = & 0 \end{array} \right.$$

est un SEV de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
Prenons par exemple le système

$$(E) : \left\{ \begin{array}{c} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right.$$

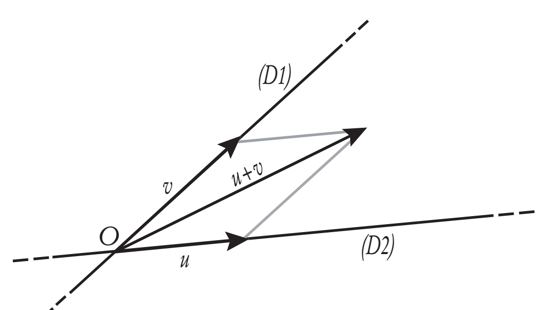
Les solutions de ce système sont

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = -x \end{array} \right.$$

Autrement dit, tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui s'écrivent $(x, 0, -x)$ pour une certaine valeur de x. Si les inconnues x, y et z de notre système représentent les coordonnées de certains points dans un repère $\mathcal{R}$ de l'espace, l'ensemble des points solution est donc l'ensemble des points de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = x. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$. C'est donc la droite portée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des vecteurs de la forme $(a, b, 0)$ pour a et b parcourant $\mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
En effet, Soit $\mathcal{S} = \{(a, b, 0),\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Le vecteur nul $(0, 0, 0)$ est bien un élément de $\mathcal{S}$. De plus, soient $k, \ell \in \mathbb{R}$ et soient $(a, b, 0)$ et $(a', b', 0)$ deux vecteurs de §. Alors

$$\begin{aligned} k.(a, b, 0) + \ell.(a', b', 0) &= (ka, kb, 0) + (\ell a', \ell b', 0) \\ &= (ka + \ell a', kb + \ell b', 0) \end{aligned}$$

est bien de la forme $(c, d, 0)$.
5. Dans le plan muni d'un point d'origine, toute droite passant par l'origine est un espace vectoriel. Cependant, la réunion de deux droites passant par l'origine (i.e. l'ensemble des vecteurs portés par l'une ou l'autre des droites) n'est pas un SEV du plan, car cet ensemble n'est pas fermé pour l'addition : la somme de deux vecteurs appartenant à deux droites différentes n'est pas sur l'une ou l'autre des droites.



1.3 Espaces engendrés

Dans cette section, nous allons revenir en détails sur la notion de repère que l'on a vu plus haut. Intuitivement, il s'agit d'étudier le fait que dans un espace vectoriel, il est possible de trouver une famille de vecteurs (souvent en nombre fini) qui va nous permette de reconstruire tous les vecteurs de l'espace via les combinaisons linéaires. La bonne façon d'aborder cette notion est de prendre le problème à l'envers.

1.3.1 Familles génératrices

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel et soit $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ une famille de vecteurs de $\mathcal{V}$. On peut construire à l'aide des $\overrightarrow{v_i}$ un sous-ensemble particulier de $\mathcal{V}$: l'ensemble des combinaisons linéaires que l'on peut former à partir de ces vecteurs. On le note $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ ou $< \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n} >$.

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) = \{\lambda_1.\overrightarrow{v_1} + \lambda_2.\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{v_n},\ \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

On peut facilement montrer que ce sous ensemble est un sous espace vectoriel de $\mathcal{V}$. En effet, en prenant tous les λ_i nuls, on obtient le vecteur nul. De plus, si l'on additionne deux combinaisons linéaires des $\overrightarrow{v_i}$, on obtient encore une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_i}$. De même, si l'on multiplie une combinaison linéaire par une constante μ, on a encore une combinaison linéaire. (Exercice : à écrire proprement).

Définition 2 *Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}-$e.v. Soit U une partie de $\mathcal{V}$, et $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$. On dit que la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\}$ est génératrice dans U (ou génére U) si*

$$Vect(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}) = U.$$

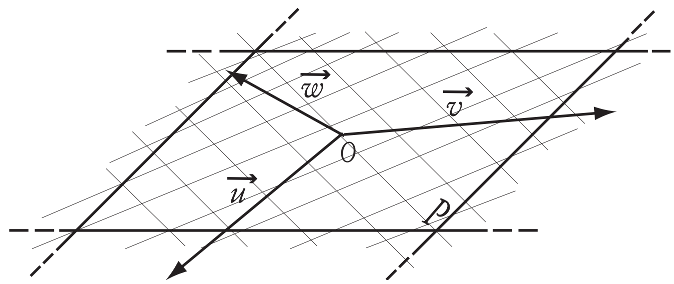
Revenons maintenant à la notion de repère. Soit donc $\mathcal{V}$ un espace vectoriel. Parmi toutes les familles de vecteurs $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ de $\mathcal{V}$, il en existe une (et même plusieurs) telles que $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n})$ soit égal à l'espace $\mathcal{V}$ tout entier. On dira que c'est une famille génératrice de $\mathcal{V}$ (ou encore que cette famille engendre $\mathcal{V}$).

On sera souvent amené à chercher une famille génératrice d'un espace donné. Ainsi, en reprenant l'exemple du plan, on voit que pour obtenir une famille génératrice du plan, il nous faut au moins deux vecteurs non colinéaires. Intuitivement, il nous faut une famille donnant au moins deux directions différentes. Concernant l'espace, on voit là qu'il nous faut au moins trois directions. De façon générale, pour obtenir une famille génératrice pour un espace vectoriel donné, il faut s'assurer que chacune des directions de notre espace vectoriel est représentée.

Exemples

1. Deux vecteurs non colinéaires appartenant à un même plan engendrent le plan tout entier.
2. N'importe quel vecteur (non nul !) d'une droite engendre la droite toute entière.
3. Dans l'espace, la famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ donnée par le dessin ci-dessous n'engendre pas l'espace tout entier. A l'aide des combinaisons linéaires, on ne pourra pas construire de vecteur sortant du plan $\mathcal{P}$.

   Par contre, la famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ engendre le plan $\mathcal{P}$ car tout vecteur de $\mathcal{P}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$.



4. Si l'on reprend l'exemple précédent dans $\mathbb{R}^3$, avec $\mathcal{S} = \{(a, b, 0),\ a, b \in \mathbb{R}\}$, on peut voir que $\mathcal{S}$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 0)$.

   Preuve : pour montrer que $\mathcal{S} = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$, il faut montrer d'une part que toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est un vecteur de $\mathcal{S}$ (i.e. $\text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \subset S$) et d'autre part que tout vecteur de S peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ (i.e. $S \subset \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$).

   (a) $\text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \subset S$: soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$. Par définition, $\overrightarrow{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. Autrement dit, il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{v} = a.\overrightarrow{v_1} + b.\overrightarrow{v_2}$. Mais alors, d'après la définition des opérations + et . que l'on a sur $\mathbb{R}^2$, on peut écrire

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{v} = a.\overrightarrow{v_1} + b.\overrightarrow{v_2} &= a.(1, 0, 0) + b.(0, 1, 0) \\ &= (a, 0, 0) + (0, b, 0) \\ &= (a, b, 0).\end{aligned}$$

   C'est donc bien un élément de S.

   (b) $S \subset \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$: soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de S. Par définition, il existe des réels a et b tel que les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ s'écrivent

   $$\overrightarrow{v} = (a, b, 0).$$

   Mais alors, toujours d'après la définition des opérations + et . que l'on a sur $\mathbb{R}^2$, on peut écrire

   $$\begin{aligned}\overrightarrow{v} = (a, b, 0) &= (a, 0, 0) + (0, b, 0) \\ &= a.(1, 0, 0) + b.(0, 1, 0) \\ &= a.\overrightarrow{v_1} + b.\overrightarrow{v_2}.\end{aligned}$$

   Notre vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit donc comme combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$. C'est donc un vecteur de $\text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$. □

L'une des propriétés fondamentales des familles génératrices est la suivante : si l'on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, on a toujours une famille génératrice. En effet, soit $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ une famille génératrice de $\mathcal{V}$. Cela signifie que tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{V}$ peut s'écrire sous la forme

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{v_1} + \lambda_2.\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{v_n}$$

pour certaines valeurs des λ_i. Or si l'on ajoute un vecteur $\overrightarrow{v_{n+1}}$ à $\mathcal{F}$, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{V}$ peut s'écrire

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{v_1} + \lambda_2.\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{v_n} + 0.\overrightarrow{v_{n+1}}.$$

Une autre façon de voir cette propriété est de dire que toute famille de vecteurs contenant une famille génératrice est une famille génératrice.

1.3.2 Familles libres

On vient de voir que pour construire une famille génératrice, il nous fallait nécessairement un nombre suffisant de vecteurs. Une fois que toutes les directions de notre espace sont représentées, tout vecteur que l'on ajoutera à notre famille génératrice n'apportera pas d'information supplémentaire. Cette redondance est ce que l'on appelle de la dépendance linéaire. Précisément,

Définition 3 *Une famille* $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ *de vecteurs de* $\mathcal{V}$ *sera dite* linéairement dépendante *(ou* liée*) si un vecteur peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.*

Une famille qui n'est pas liée sera dite libre *(ou* linéairement indépendante*).*

Ainsi, si une famille $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ est linéairement dépendante, on peut écrire (par exemple) le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ sous la forme

$$\overrightarrow{v_1} = \mu_2.\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mu_n.\overrightarrow{v_n} \qquad (*).$$

Le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ n'apporte donc pas de direction supplémentaire. En terme de sous espaces engendrés, on a alors

$$\text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) = \text{Vect}(\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}).$$

En effet, si un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{V}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_i}$, on a

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1.\overrightarrow{v_1} + \lambda_2.\overrightarrow{v_2} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{v_n}.$$

Or en remplaçant $\overrightarrow{v_1}$ par la combinaison $(*)$, on peut alors écrire $\overrightarrow{v}$ uniquement en fonction des vecteurs $\overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$.

Remarque : on peut appliquer ce raisonnement aux équations d'un système linéaire. Si l'une des équation du système peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres, alors elle n'apporte pas de contrainte supplémentaire. Ainsi, l'ensemble des solutions ne changera pas si l'on retire cette équation du système.

Parmi les famille génératrices d'un espace vectoriel donné, celles qui ne sont pas liées sont donc optimales (i.e. elles contiennent un nombre minimal de vecteurs). Quand on voudra construire une famille génératrice, on prendra donc soin d'en choisir une qui ne soit pas liée. Il nous faut donc une méthode pratique pour pouvoir déterminer si une famille de vecteurs est liée ou non.

Or notons que si une famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ est liée, on peut par exemple écrire

$$\overrightarrow{v_1} = \mu_2.\overrightarrow{v_2} + \ldots + \mu_n.\overrightarrow{v_n}.$$

Cette relation peut également s'écrire

$$\overrightarrow{v_1} - \mu_2.\overrightarrow{v_2} - \ldots - \mu_n.\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}.$$

Autrement dit, une famille est liée si l'on peut écrire le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ comme une combinaison linéaire de ses vecteurs. Notons tout de même que si l'on garde cette définition, toute famille est liée. Il suffit de prendre tous les coefficients nuls pour avoir le vecteur nul. La bonne définition est donc

Définition 4 *Une famille* $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ *de vecteurs de* $\mathcal{V}$ *sera dite* linéairement dépendante *(ou* liée*) s'il existe des réels* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls *tels que*

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}.$$

À partir de cette définition, on peut alors définir une famille libre de la façon suivante. Une famille est libre si la seule façon d'obtenir le vecteur nul à partir de ses vecteurs est de prendre tous les coefficients nuls. Ainsi,

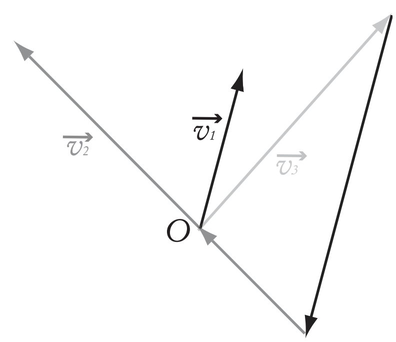
Définition 5 *Une famille* $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ *de vecteurs de* $\mathcal{V}$ *sera dite* linéairement indépendante *(ou* libre*) si*

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Une autre façon de voir cette définition est de dire qu'une famille est libre si l'on a qu'une seule façon d'écrire le vecteur nul à partir de ses vecteurs. En fait, une famille $\mathcal{F}$ est libre si chaque vecteur de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ ne peut s'écrire que d'une seule façon.

Exemples

1. Toute famille constituée d'un seul vecteur, autre que le vecteur nul, forme une famille libre.
2. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
3. Une famille de deux vecteurs est liée si les deux vecteurs sont colinéaires (i.e. ils appartiennent à une même droite).
4. Dans le plan muni d'un point d'origine O, les vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ sont liés. Sur le dessin, une combinaison linéaire de ces vecteur se représente par une mise bout à bout de vecteurs colinéaires au vecteurs donnés. Or on voit qu'il en existe une qui revient au point O.



5. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1), \overrightarrow{e_4} = (1,2,3)\}$ est liée, mais la sous-famille $\{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$ est libre.
   En effet, remarquons tout d'abord que
   $$\overrightarrow{e_4} = \overrightarrow{e_1} + 2.\overrightarrow{e_2} + 3.\overrightarrow{e_3}.$$
   La famille étudiée est donc bien liée.
   Montrons maintenant que la sous famille $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est libre. Pour cela, considérons une combinaison linéaire de ces trois vecteurs qui s'annule. C'est à dire la donnée de trois réels α, β et γ tels que
   $$\alpha.\overrightarrow{e_1} + \beta.\overrightarrow{e_2} + \gamma.\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{0}. \qquad (*)$$
   Pour montrer que notre famille est libre, on doit montrer que l'on a forcement $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Or si l'on revient aux coordonnées dans $\mathbb{R}^3$, l'équation $(*)$ se lit
   $$(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0),$$
   ce qui impose bien $\alpha = \beta = \gamma = 0$. □

Exercice : la famille $\{\overrightarrow{v_1} = (1,1,1), \overrightarrow{v_1} = (0,1,1), \overrightarrow{v_1} = (0,0,1)\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?

1.3.3 Bases et coordonnées

On appellera *b*ase d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ toute famille génératrice de $\mathcal{V}$ qui est optimale. Précisément,

Définition 6 *Étant donné un espace vectoriel $\mathcal{V}$, une famille $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ de vecteurs de $\mathcal{V}$ est une* base de $\mathcal{V}$ *si c'est une famille libre qui engendre $\mathcal{V}$.*

Grâce à tout ce que l'on vient de voir, il est clair qu'une base est ce que l'on appelait jusque là un repère. Ainsi, une fois que l'on connaît une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ de notre espace vectoriel $\mathcal{V}$, tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathcal{V}$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_i}$

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{v_1} + \ldots + \lambda_n.\overrightarrow{v_n}.$$

Les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ et l'on note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Exemples

1. La famille $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, le vecteur $(3,2)$ s'écrit

$$(3,2) = (1,0) + 2.(1,1).$$

Les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$ sont donc

$$(3,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

De façon générale, les coordonnées d'un vecteur (x,y) de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Cependant, la famille la sous-famille $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$, car elle n'est pas génératrice. Il manque un vecteur, une dimension. De même, la famille $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,2,3)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ car elle n'est pas libre.

3. Soit n un entier fixé. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on note $\overrightarrow{e_i}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ième.

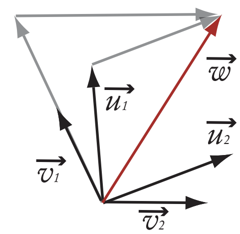
$$\overrightarrow{e_i} = (0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{ième}}}}{1},0,\ldots,0).$$

La famille $\mathcal{B}_n = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ est alors une base de $\mathbb{R}^n$. C'est *la base canonique* de $\mathbb{R}^n$ car les coordonnées de n'importe quel vecteur $(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans la base $\mathcal{B}_n$ sont

$$(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_n}.$$

4. Sur le dessin ci-contre, les famille $\mathcal{U} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ et $\mathcal{V} = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ sont des bases du plan. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{w}$ s'écrit $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ et $w = 2.\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}$. On a donc

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{V}}.$$



1.4 Dimension d'un espace vectoriel

1.4.1 Définition

Pour terminer ce chapitre, revenons sur la notion de directions dans un espace vectoriel. L'une des caractéristiques importante que l'on peut observer concernant un espace vectoriel donné est le nombre de directions indépendantes que l'on peut trouver dans cet espace. C'est sa dimension d (par exemple, $d = 2$ pour le plan, et $d = 3$ pour l'espace).

1.4.2 Dimensions et familles de vecteurs

On a vu que pour qu'une famille donnée soit génératrice, il fallait qu'elle donne toutes les directions de notre espace. Il faut donc que son cardinal soit au moins égal à la dimension. (Si l'on se donne deux vecteurs dans l'espace, on ne pourra engendrer au maximum qu'un plan de l'espace, i.e. un sous espace de dimension 2).

D'autre part, la dimension d d'un espace vectoriel nous donne le cardinal maximal d'une famille libre. En effet, puisque la dimension donne le nombre de directions indépendantes, une famille $\mathcal{F}$ d'au moins $d + 1$ vecteurs donne au maximum d dimensions. Il existe donc au moins un vecteur de $\mathcal{F}$ qui n'apporte pas de direction supplémentaire. Ce vecteur s'écrit donc comme combinaison linéaire des autres. Autrement dit, la famille n'est pas libre. On peut formaliser tout ça de la façon suivante.

Propriété 1 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension d.*

1. *Toute famille génératrice de $\mathcal{V}$ possède au moins d vecteurs.*
2. *Toute famille libre de $\mathcal{V}$ possède au plus d vecteurs.*
3. *Toute base est composée de d vecteurs.*

Cela nous permet également d'établir les propriétés suivantes.

Propriété 2

1. *Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.*
2. *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*
3. *Toute famille extraite d'une famille libre est libre.*
4. *Toute famille libre peut être complétée en une base.*

1.4.3 Dimension d'un sous espace vectoriel

Enfin la notion de dimension est une notion de taille. On peut donc établir un lien fort entre la dimension d'un espace vectoriel et la dimension de ses sous espaces. Précisément,

Propriété 3 *Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension finie d.*

1. *Tout SEV de $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel de dimension finie plus petite que d.*

2. *Tout SEV de $\mathcal{V}$ de dimension d est égal à $\mathcal{V}$.*

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et l'on note

$$\overrightarrow{u_1} = (1,2,0), \quad \overrightarrow{u_2} = (0,1,1), \quad \overrightarrow{u_3} = (0,0,1).$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ d'un vecteur quelconque (a,b,c) dans $\mathcal{B}$.

Exercice 2 On considère le système linéaire (E) suivant

$$(E) : \begin{cases} x + y - z + t - s & = & 0 \\ x + 2y - z + 2t - s & = & 0 \\ 3x + 4y - 3z + 4t - 3s & = & 0 \\ 2x + 3y - 2z + 3t - 2s & = & 0 \\ x - y - z - t - s & = & 0 \end{cases}$$

et l'on note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions.

1. À l'aide du pivot de Gauss, donner un système linéaire (E') équivalent à (E), contenant un nombre minimum d'équations ?
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est un SEV de $\mathbb{R}^5$. Peut-on avoir une idée de sa dimension ?
3. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, où

$$\overrightarrow{u_1} = (1,0,1,0,0), \quad \overrightarrow{u_2} = (1,0,0,0,1), \quad \overrightarrow{u_3} = (0,-1,0,-1,0)$$

   est une famille libre de $\mathcal{S}$.
4. En exprimant les coordonner d'un vecteur $\overrightarrow{v} = (x,y,z,t,s)$ de $\mathcal{S}$ en fonction de z, s, t uniquement, montrer que $\mathcal{F}$ engendre $\mathcal{S}$. Conclure.
5. Completer $\mathcal{F}$ en une base de $\mathbb{R}^5$.
6. Quelles sont les coordonnées d'un vecteur de S dans cette base ?

1.5 Deux mots sur le changement de base

Comme on vient de le voir dans l'exemple précédent, un espace vectoriel possède plusieurs bases (il en possède même une infinité...). Et les coordonnées d'un vecteur donné, changent si l'on change de base. D'un point de vue pratique, on est souvent amené à changer de base au cours de l'étude d'un problème (on cherchera notamment à trouver des bases plus adaptées au problème, i.e. des bases dans lesquelles nos vecteurs ont des coordonnées plus simples...). Or le problème de changement de base se réduit souvent à un problème de multiplication de matrices.

Exemples de changement de base. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique

$$\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)\}$$

et l'on considère le vecteur $\overrightarrow{v} = (3, 1, -4)$. Ses coordonnées dans la base canonique sont $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$. Soit maintenant la famille $\mathcal{B}_2$ formée des vecteurs suivants.

$$\overrightarrow{f_1} = (1, 1, 1), \quad \overrightarrow{f_2} = (0, 1, 1) \text{ et } \overrightarrow{f_3} = (0, 0, 1).$$

On peut montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et l'on veut obtenir les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans cette base.

On cherche donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ tel que

$$\overrightarrow{v} = x.\overrightarrow{f_1} + y.\overrightarrow{f_2} + z.\overrightarrow{f_3}.$$

D'où

$$\begin{aligned} (3, 1, -4) &= x.(1, 1, 1) + y.(0, 1, 1) + z.(0, 0, 1) \\ &= (x, x, x) + (0, y, y) + (0, 0, z) \\ &= (x, x + y, x + y + z). \end{aligned}$$

On en déduit le système de trois équations linéaires suivant vérifiées par x, y et z,

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x & = & 3 \\ x + y & = & 1 \\ x + y + z & = & -4 \end{array} \right.$$

et l'on en déduit les coordonnées recherchées. On verra que l'on peut donc réduire le problème à une équation matricielle :

$$\underset{\text{anciennes coordonnées}}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overrightarrow{f_1} & \overrightarrow{f_2} & \overrightarrow{f_3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \underset{\text{nouvelles coordonnées}}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}}.$$

On peut montrer que cette formule est générale. Précisément,

Théorème 2 *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de $\mathcal{V}$ et soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\mathcal{V}$.*

On note $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1}$ les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{B}_1$ et l'on note $P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ la matrice dont les colonnes sont formées des cordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Alors les coordonnées $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$ de $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{B}_2$ vérifient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}.$$

La matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}$ *est appelée* matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

Chapitre 2

Applications linéaires

Grâce au formalisme que l'on vient de mettre en place, on sait notamment représenter les points ou des figures du plan ou de l'espace par des éléments de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

L'objectif du chapitre suivant est de mettre en place des outils permettant de faire bouger des points et ces figures. Pour cela, on utilise des fonctions d'un espace vectoriel dans lui même, ou plus généralement d'un espace vectoriel dans un autre.

2.1 Rappels

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ensembles.

1. Une fonction f de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ est une opération qui à chaque élément $u \in \mathcal{U}$ associe un unique élément de $\mathcal{V}$, que l'on note $f(u)$.
2. Une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est dite injective si deux éléments distincts de $\mathcal{U}$ sont toujours envoyés sur deux éléments distincts de $\mathcal{V}$:
$$(u \neq u') \Rightarrow (f(u) \neq f(u'))$$
ou
$$(f(u)) = f(u')) \Rightarrow (u = u').$$
3. Une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est dite surjective si chaque élément de $\mathcal{V}$ peut s'écrire comme l'image d'un élément de $\mathcal{U}$:
$$\forall v \in \mathcal{V}, \exists u \in \mathcal{U} \text{ tq } v = f(u).$$
4. Une fonction f qui est à la fois injective et surjective sera dite bijective. On peut alors définir sa fonction inverse $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ définie par
$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U}, &\quad f^{-1} \circ f(u) = u, \\ \forall v \in \mathcal{V}, &\quad f \circ f^{-1}(v) = v \end{aligned}$$

2.2 Définition

Revenons à nos espaces vectoriels. Si l'objectif est de pouvoir déplacer des figures, on voudrait que la figure ne sera pas trop déformée pendant "le voyage". Pour cela, on ne considére que certaines fonctions que l'on appellera linéaires. La seule chose que l'on demandera aux fonctions linéaires est qu'elles conservent les combinaisons linéaires. D'où :

Définition 7 *Soient* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *deux espaces vectoriels, et soit* f *une fonction* $\mathcal{U} \to V$*. L'application* f *est dite* linéaire *si*

$$\begin{aligned} \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{U}, \quad & f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}), \\ \forall \overrightarrow{u} \in \mathcal{U}, \forall k \in \mathbb{R}, \quad & f(k.\overrightarrow{u}) = k.f(\overrightarrow{u}). \end{aligned}$$

Autrement dit, une application linéaire est une application entre espaces vectoriels qui respecte la combinaison linéaire :

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{U}, \, \forall k, \ell \in \mathbb{R}, \quad f(k.\overrightarrow{u} + \ell.\overrightarrow{v}) = k.f(\overrightarrow{u}) + \ell.f(\overrightarrow{v})$$

On notera $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$.

Exemples.

1. Toute application du type
$$f_a \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$$
est une application linéaire.
2. Toute application du type
$$g \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax + by, cx + dy) \end{array}$$
est une application linéaire.
3. La projection
$$p \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y, 0) \end{array}$$
est linéaire.
4. Une rotation, dans le plan ou dans l'espace est une application linéaire.

2.3 Image et noyau d'une application linéaire

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux espaces vectoriels et soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une application linéaire. On peut alors distinguer dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ des sous ensembles fortement reliés à la fonction f. Il s'agit de son image (bien sur...) et de son noyau.

2.3.1 Noyau

On appelle *noyau* de f l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{V}$ qui sont envoyés sur $\overrightarrow{0}$ par f. On note

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{u} \in \mathcal{U} \, / \, f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\}.$$

Remarque : $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous ensemble de l'ensemble *de départ*.

Comme pour l'image, le fait que f soit linéaire nous permet de montrer que le noyau d'une application linéaire est un sous espace vectoriel $\mathcal{V}$. En effet, comme $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, le vecteur $\overrightarrow{0}$ est bien un élément du noyau de f (donc $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas vide).

Soient maintenant $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ et soient $k, \ell \in \mathbb{R}$. Pour montrer que la combinaison $k.\overrightarrow{u_1} + \ell.\overrightarrow{u_2}$ est encore dans $\mathrm{Ker}(f)$, il suffit de vérifier que son image par f est $\overrightarrow{0}$. Or

$$\begin{aligned} f(k.\overrightarrow{u_1} + \ell.\overrightarrow{u_2}) &= f(k.\overrightarrow{u_1}) + f(\ell.\overrightarrow{u_2}) \\ &= k.f(\overrightarrow{u_1}) + \ell.f(\overrightarrow{u_2}) \\ &= k.\overrightarrow{0} + \ell.\overrightarrow{0} \\ &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}(f)$ est donc également stable par combinaisons linéaires. C'est donc bien un SEV de $\mathcal{V}$.

En pratique, déterminer le noyau de f, on doit résoudre le système linéaire donné par l'équation $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.

2.3.2 Image

On appelle *image* de l'application f l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{V}$ qui sont l'image d'un vecteur par $\mathcal{V}$. On note

$$\mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{v} \in \mathcal{V} \,/\, \exists \overrightarrow{u} \in \mathcal{U} \text{ tq } \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})\}.$$

Remarque : $\mathrm{Im}(f)$ est un sous ensemble de l'espace *d'arrivée*.

Comme f est une application linéaire, l'ensemble $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de $\mathcal{V}$. En effet, pour montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de $\mathcal{V}$, il nous suffit de montrer qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire. Or comme f est linéaire, on a nécessairement $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Le vecteur $\overrightarrow{0}$ s'écrit donc comme l'image d'un élément de $\mathcal{V}$. Il est donc dans $\mathrm{Im}(f)$.

D'autre part, soient $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \in \mathrm{Im}(f)$ et soient $k, \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $k.\overrightarrow{v_1} + \ell.\overrightarrow{v_2}$ est encore dans $\mathrm{Im}(f)$. Comme $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont dans l'image de f, il existe des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ tels que $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{v_2}$. Mais alors,

$$\begin{aligned} k.\overrightarrow{v_1} + \ell.\overrightarrow{v_2} &= k.f(\overrightarrow{u_1}) + \ell.f(\overrightarrow{u_2}) \\ &= f(k.\overrightarrow{u_1}) + f(\ell.\overrightarrow{u_2}) \\ &= f(k.\overrightarrow{u_1} + \ell.\overrightarrow{u_2}). \end{aligned}$$

On vient donc d'écrire le vecteur $k.\overrightarrow{v_1} + \ell.\overrightarrow{v_2}$ comme l'image d'un vecteur de $\mathcal{U}$ par f. C'est donc bien un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

En pratique, si l'on connaît une base , $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m}\}$ une base de $\mathcal{U}$, alors $\mathrm{Im}(f)$ est le sous espace engendré par les vecteur $f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})$. En effet, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ tel que $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})$. Or comme $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$, $\overrightarrow{u}$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{e_i}$:

$$\overrightarrow{u} = x_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + x_m\overrightarrow{e_m}.$$

Mais alors, $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})$ s'écrit

$$\overrightarrow{v} = x_1 f(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + x_m f(\overrightarrow{e_m}).$$

Autrement dit, tout vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ est une combinaison linéaire des $f(\overrightarrow{e_i})$. Pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(f)$, il nous suffit alors de faire un peu de tri dans la famille $\{f(\overrightarrow{e_1}), \ldots, f(\overrightarrow{e_m})\}$.

2.3.3 Théorème du rang

Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une application linéaire. On appelle *rang de* f la dimension du SEV $\mathrm{Im}(f)$ (que l'on note $\mathrm{rg}(f)$). On verra plus loin comment le rang de f, ainsi que la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ nous donnent des renseignements importants sur les propriétés de f. Il nous faut donc des outils permettant de calculer rapidement les dimensions de ces sous espaces. Le théorème du rang est une égalité particulièrement efficace reliant les dimensions de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$, ce qui nous permettra de déterminer ces dimensions plus rapidement qu'en produisant une base. Mais avant de l'énoncer, voyons quelques inégalités "basiques" mais néanmoins efficaces :

– Tout d'abord, comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de $\mathcal{U}$, on a clairement
$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leq \dim \mathcal{U}.$$
– De même, comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathcal{V}$, on a
$$\mathrm{rg}(f) \leq \dim \mathcal{V}.$$
– Enfin, comme $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par l'image des vecteurs d'une base de $\mathcal{U}$, on a
$$\mathrm{rg}(f) \leq \dim \mathcal{U}.$$

Mais le résultat le plus fort concernant ces dimensions est le suivant :

Théorème 3 *Soit f une application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. Alors*
$$rg(f) + \dim(Ker(f)) = \dim \mathcal{U}.$$

Ce résultat nous permettra souvent de n'étudier que le noyau ou que l'image et d'en tirer des informations sur les deux sous espaces et sur la fonction elle même.

Preuve : notons $n = \dim \mathcal{U}$ et $p = \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de $\mathcal{U}$, on a $p \leq n$ et il existe une famille libre $\{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\}$ de vecteur de $\mathcal{U}$ qui forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On peut alors compléter cette famille en une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ en ajoutant $n-p$ vecteur bien choisis.

Mais alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ tel que $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})$. Or si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, on a
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= f(x_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + x_p\overrightarrow{e_p}, \ldots, x_n\overrightarrow{e_n}) \\
&= x_1 f(\overrightarrow{e_1} + \ldots + x_p f(\overrightarrow{e_p}) + x_{p+1} f(\overrightarrow{e_{p+1}}) + \ldots + x_n f(\overrightarrow{e_n}) \\
&= x_{p+1} f(\overrightarrow{e_{p+1}}) + \ldots + x_n f(\overrightarrow{e_n})
\end{aligned}$$
car les p premiers vecteurs sont envoyés sur 0. On peut en conclure que $\mathrm{Im}(f)$ est engendrée par la famille $\mathcal{B}' = \{f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})\}$. Si l'on parvient à montrer que cette famille est libre, on aura une base de $\mathrm{Im}(f)$. On aura alors
$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) &= \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}') \\
&= n - p = \dim \mathcal{U} - \dim(\mathrm{Ker}(f)).
\end{aligned}$$

Montrons donc que la famille $\mathcal{B}'$ est libre : soit $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n$ des coefficients tels que $\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \ldots + \lambda_n f(\overrightarrow{e_n}) = \overrightarrow{0}$ Comme f est linéaire, on a donc

$$f(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}) = \overrightarrow{0}_{\mathcal{V}}.$$

Autrement dit, le vecteur $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{e_n}$ est dans le noyau de f. Ce vecteur a donc des coordonnées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} &\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{e_p} \\ \Leftrightarrow &\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p \overrightarrow{e_p} - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \ldots - \lambda_n \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

On a donc une combinaison linéaire des $\overrightarrow{e_i}$ qui revient au vecteur nul. Comme cette famille est libre (c'est une base de $\mathcal{U}$) on doit avoir $\lambda_i = 0$ pour tout i, et en particulier les coefficients $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Autrement dit, la famille $f(\overrightarrow{e_{p+1}}), \ldots, f(\overrightarrow{e_n})$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le théorème du rang est démontré.

2.3.4 Injectivité, surjectivité d'une application linéaire

Rappels :

- Une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est injective "si toutes les images sont différentes". C'est à dire

$$f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.$$

- f est surjective si tous les éléments de l'espace d'arrivée sont atteints :

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}, \exists \overrightarrow{u} \in \mathcal{U} \text{ tq } \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u}).$$

- Si f est à la fois injective et surjective, elle est dite bijective. Il existe alors une fonction $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ telle que $f^{-1} \circ f : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ et $f \circ f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ "ne fassent rien".

Or si l'on s'intéresse à l'injectivité ou la surjectivité d'une application *linéaire* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, l'étude de l'image et du noyau nous permettent rapidement de régler le problème.

- Il est tout d'abord clair que l'étude de $\mathrm{Im}(f)$ nous renseigne sur la surjectivité de f. En effet, savoir si l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{V}$ sont atteints revient à savoir si $\mathrm{Im}(f)$ recouvre $\mathcal{V}$ tout entier ou non. Or comme on sait déjà que $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de $\mathcal{V}$, il nous suffit de déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Si elle correspond à la dimension de $\mathcal{V}$, alors f est surjective. Sinon (i.e. si elle est strictement plus petite), f n'est pas surjective.

  Remarque : pour toute fonction linéaire f, le SEV $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par les images de n'importe quelle base de $\mathcal{U}$. Ainsi, si $m = \dim(\mathcal{U})$, $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par m vecteurs. Il est donc de dimension au plus m. Ainsi, si $\mathcal{V}$ est trop grand, i.e. si $\dim(\mathcal{V}) > \dim(\mathcal{U})$, on ne pourra pas construire d'application linéaire $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ surjective.

- Voyons maintenant comment l'étude du noyau de f nous renseigne sur l'injectivité de f. Comme on vient de le rappeler, une fonction est injective si

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}, \qquad (\, f(\overrightarrow{u}) \; = \; f(\overrightarrow{v})\,) \;\Leftrightarrow\; (\; \overrightarrow{u} \; = \; \overrightarrow{v}\;).$$

  Or si f est linéaire, cette condition s'écrit également

$$\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}, \qquad (\, f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \; = \; \overrightarrow{0}\;) \;\Leftrightarrow\; (\; \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \; = \; \overrightarrow{0}\;).$$

ou

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathcal{V}, \qquad (f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}).$$

Autrement dit, une application linéaire est injective si son noyau ne contient que le vecteur $\overrightarrow{0}$. Là encore, il nous suffit donc de déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ pour déterminer si f est injective ou non.

Ainsi, déterminer si une fonction linéaire f est injective ou surjective (et donc bijective) n'est donc qu'une histoire de dimension. Or si l'on connaît une matrice M représentant f, en appliquant le pivot de Gauss aux colonnes de M, le résultat est immédiat puisque le nombre de colonnes non nulles nous donne la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et le nombre de colonnes nulles nous donne celle de $\mathrm{Ker}(f)$.

D'autre part, le théorème du rang (qui relie les dimensions du noyau et de l'image) nous permet d'établir un résultat étonnant pour certaines applications linéaires. Précisément, si f est une application d'un EV $\mathcal{V}$ dans lui-même (ou plus généralement si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ ont même dimension), alors soit f est bijective, soit elle est ni injective, ni surjective. Autrement dit, si f est injective ou surjective, alors elle est bijective. En effet, le théorème du rang nous dit que

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim \mathcal{V}.$$

Donc si f est injective, on a $\mathrm{Ker}(f) = \{ \overrightarrow{0} \}$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Mais alors $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathcal{V}$ et f est surjective, donc bijective.

Dans l'autre sens, si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{V}$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathcal{V}$. On a alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{ \overrightarrow{0} \}$ et f est injective, donc surjective.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 4 *Soit $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ une application linéaire. Alors*

$$f \textit{ est injective } \Leftrightarrow f \textit{ est surjective } \Leftrightarrow f \textit{ est bijective.}$$

Lorsque f est bijective, il existe donc un inverse g tel que $fog = gof = Id_{\mathcal{V}}$. On notera souvent f^{-1} pour g.

Exemples :

1. Une symétrie orthogonale est une bijection. Sa bijection réciproque est elle-même.
2. La projection sur $\mathcal{D}$ n'est ni injective, ni surjective.
3. Soit
$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-4z, y-z, 2z) \end{array}$$
   (a) Vérifier rapidement que f est linéaire.
   (b) Montrer que f est une bijection.
   (c) Déterminer l'antécédent de $(1,1,2)$, de $(0,3,-3)$.
   (d) Déterminer l'antécédent de n'importe quel vecteur $\overrightarrow{v} = (a,b,c)$.
   (e) En déduire une matrice de l'application réciproque f^{-1}.

Chapitre 3

Représentation des applications linéaires : Matrices

3.1 Introduction, Définition

Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux espaces vectoriels et soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ une application linéaire. Si l'on connaît une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m}\}$ de $\mathcal{U}$ et une base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \dots, \overrightarrow{f_n}\}$ de $\mathcal{V}$, on peut représenter f à l'aide d'une matrice reliée à ces bases. Précisément, comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{V}$, tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathcal{U}$ s'écrit

$$\overrightarrow{u} = x_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + x_n.\overrightarrow{e_m}$$

et l'image de $\overrightarrow{u}$ par f se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) &= f(x_1.\overrightarrow{e_1} + \dots + x_n.\overrightarrow{e_m}) \\ &= x_1.f(\overrightarrow{e_1}) + \dots + x_n.f(\overrightarrow{e_m}). \end{aligned}$$

Autrement dit, si l'on connaît l'image des vecteurs du base $\mathcal{B}$, on peut calculer facilement l'image de n'importe quel vecteur dont on connaît les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Or les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_m})$ sont des vecteurs de $\mathcal{V}$. On peut donc les représenter par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \; f(\overrightarrow{e_2}) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \dots, f(\overrightarrow{e_m}) = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

On appelle alors matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, le "tableau" suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & \cdots & f(\overrightarrow{e_m}) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) & = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{f_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{f_n} \end{array} \end{array}$$

Cette matrice contient toutes les informations de la fonction f. Elle nous permet tout d'abord de calculer l'image de n'importe quel vecteur dont on connaît les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$

grâce au produit de matrice : si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, alors les coordonnées $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ de $f(\overrightarrow{u})$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}$ et on notera simplement $\mathcal{M}_n$ pour $\mathcal{M}_{n,n}$. Une matrice M sera également notée $(m_{i,j})$ où $m_{i,j}$ est le terme de la ligne i et de la colonne j.

Remarque : dans le cas où $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, (i.e. f est une application d'un EV dans lui-même), on prendra $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ et on parlera de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple. Considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, z, y) & \longmapsto & (x + 2y, y + 3z, 2x - z) \end{array}$$

En se fixant la base canonique $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, on va construire la matrice de f dans $\mathcal{B}_3$. Pour cela, il suffit de calculer l'image de chacun des vecteurs de $\mathcal{B}_3$:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,2) \\ f(0,1,0) &= (2,1,0) \\ f(0,0,1) &= (0,3,-1) \end{aligned}$$

et de calculer les coordonnées de ces images dans $\mathcal{B}_3$ (le fait que l'on travaille dans la base canonique rend cette opération des plus faciles...) :

$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}, \quad f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}, \quad f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_3$ est alors

$$M_{\mathcal{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de l'image de n'importe quel vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$ de $\mathbb{R}^3$ sont alors données par le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ y + 3z \\ 2x - z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$$

3.2 Le changement de base

Comme on vient de le voir, pour toute application linéaire f de $\mathcal{V}$ dans lui même, on peut construire une matrice représentant f, une fois que l'on s'est fixé une base de $\mathcal{V}$. Or si l'on change de base, la matrice associée à f change également. Comme pour les changement de coordonnées, il existe une formule basée sur le produit de matrices permettant de trouver la matrice de f associée à la nouvelle base. On ne developpera pas ce thème dans le cadre de ce cours.

Exercice : Aprés avoir lu la section sur la multiplication des matrices, écrire les relations entre les matrices d'une application linéaire dans deux bases différentes.

3.3 Opérations sur les matrices

Pour illustrer cette partie, on considérera deux applications $f(x,y) = a_1x + b_1y$ et $g(x,y) = a_2x + b_2y$ et les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

associées.

3.3.1 Multiplication par un réel

On a vu que pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)(x,y) = \lambda a_1 x + \lambda b_1 y$$

par conséquent, la matrice associée à λf est

$$\lambda M_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \end{pmatrix}$$

Propriété 4 *Considérons $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ $M = (m_{i,j})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lambda M = (\lambda m_{i,j})$$

3.3.2 Addition

Noua avons vu que pour ajouter deux applications linéaires, il fallait qu'elles aient le même nombre de variables et le même nombre de composantes et alors on a :

$$(f+g)(x,y) = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y$$

par conséquent, la matrice associée à $f+g$ est

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

Propriété 5 *Considérons $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ $A = (a_{i,j})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ $B = (b_{i,j})$ alors*

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$$

Propriété 6 *Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,p}$, on a :*
- *Commutativité : $A + B = B + A$,*
- *Associative : $(A+B) + C = A + (B+C) = A + B + C$,*
- *Element neutre : matrice avec que des 0 (notée $0_{n,p}$),*
- *Symétrique : matrice $-A = (-a_{i,j})$.*

Propriété 7 *Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

Exercice : Que dire de la structure algébrique de $\mathcal{M}_{n,p}$?

3.3.3 Multiplication

L'idée de la multiplication est de définir une opération sur les matrices qui corresponde avec la composition des applications linéaires associées. C'est à dire, si M est la matrice associée à f et N la matrice associée à g alors MN est la matrice associée à $f \circ g$.

Pourquoi parle-t-on de multiplication ?
Prennons le cas $n = p = 1$. Alors $f(x) = ax$ sa matrice est trivialement (a) et $g(x) = bx$ sa matrice est trivialement (b). Et on a

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(bx) \\ &= a.(bx), \\ &= (ab).x \end{aligned}$$

La matrice associée à $f \circ g$ est (ab).

Nous avons vu au paragraphe **??** que si $f(x, y) = ax + by$ est linéaire et si

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} a_1 u + b_1 v \\ a_2 u + b_2 v \end{pmatrix}$$

est linéaire alors

$$f \circ g(u, v) = (a.a_1 + b.a_2)u + (a.b_1 v + b.b_2)v.$$

On a donc le produit :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.a_1 + b.a_2 & a.b_1 v + b.b_2 \end{pmatrix}$$

La définition est le suivante :

Définition 8 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ alors on définit $C = AB$ par :*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque 1 *C est une matrice de $\mathcal{M}_{n,q}$.*

Attention 1 *La matrice BA n'est en général par calculable (sauf si n=p=q) a cause de la dimension).*
Dans le cas $n = p = q$, en général $AB \neq BA$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 1 *Voici maintenant un exemple et une présentation des calculs :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 6 & 9 & 11 \\ 7 & 5 & 11 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propriété 8 *Soient A, B, C trois matrices de bonnes dimensions, on a :*
- *Associative : $(AB)C = A(BC) = ABC$,*
- *Element neutre : matrice avec que des 1 sur la diagonale (matrice unité) (notée I_n),*
- *Distributif par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$.*

Cela marche donc comme les réels sauf qu'en général nous n'avons pas la commutativité :

$$AB \neq BA$$

3.4 Inversion de matrice

3.4.1 Définition

La notion de "bijectivité" d'une application linéaire se translate aux matrices de la manière suivante :

Définition 9 *Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible ou régulière ou encore non singulière, s'il existe une matrice B d'ordre n telle que*

$$AB = BA = I_n,$$

où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

Propriété 9 *Dans ce cas, la matrice B est unique et est appelée la matrice inverse de A, et est notée A^{-1}.*

C'est une notion fondamentale car, si une matrice A est inversible, nous pouvons écrire, pour X un vecteur indéterminé et B un vecteur connu :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff A^{-1}AX = A^{-1}B \\ &\iff I_nX = A^{-1}B \\ &\iff X = A^{-1}B \end{aligned}$$

C'est à dire que nous avons résolu un système d'equations linéaires.

Remarque 2
1. *A^{-1} n'existe pas toujours (normal, un système n'a pas toujours des solutions).*
2. *$A^{-1}B \neq BA^{-1}$ il faut donc etre très vigilents dans les calculs.*

Grâce au calcul matriciel, les applications linéaires se manipulent comme des nombres réels avec les règles opératoires que nous venons de définir qui sont un peu plus compliquées que pour les réels.

3.4.2 Propriétés

Propriété 10 *La matrice inverse d'une matrice inversible A est elle-même inversible, et*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Propriété 11 *Le produit de deux matrices inversibles A et B (de même ordre) est une matrice inversible et son inverse est donné par la relation suivante (on remarquera que l'ordre des matrices est inversé)*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Propriété 12 *Le produit d'un scalaire non nul k et d'une matrice inversible A est inversible, et son inverse est égal au produit de l'inverse de ce scalaire et de l'inverse de cette matrice.*

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}.$$

Remarque 3
1. *Le calcul de l'inverse est un exercice "difficile".*
2. *Un logiciel comme Excel permet ce calcul (voir plus tard).*
3. *Il existe un critère d'inversibilité : le déterminant (voir plus tard).*

3.5 Critère d'inversibilité

3.5.1 Le déterminant

Définition 10 *Le déterminant est une application de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$ qui a une matrice A associe un réel noté $det(A)$ ou $|A|$.*

La définition trop compliquée ne sera pas explicitée. L'essentiel est le théorème suivant :

Théorème 5 *A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$.*

Nous allons maintenant expliciter les méthodes de calcul d'un déterminant.

Méthode de calcul du déterminant ordre 2

Propriété 13 *Le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est $ad - bc$.

$ad - bc = 0$ est en effet caractéristique de l'inversibilité de la matrice A puisque :

$$\begin{aligned} ad - bc = 0 &\Longleftrightarrow ad = bc \\ &\Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

Les équations sont proportionnelles, la matrice n'est pas inversible.

Méthode de calcul du déterminant ordre 3

Propriété 14 *Le déterminant de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

est $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$.

Pour s'en souvenir, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

et le déterminant est la différence ente la somme des diagonales vers le bas et des diagonales vers le haut.

Notion de cofacteur

Définition 11 *Soit $A \in \mathcal{M}_n$.*
Considérons $A_{i,j}$ la sous-matrice de $\mathcal{M}_{n-1}$ déduite de A en ayant enlevé la ligne i et la colonne j. Le cofacteur associé à $a_{i,j}$ est le nombre $C_{i,j}$ défini par :

$$C_{i,j} = (-1)^{i+j}\, det(A_{i,j}).$$

Développement suivant une colonne

Théorème 6

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j} \quad \textit{pour tout } j, \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} C_{i,j} \quad \textit{pour tout } i. \end{aligned}$$

L'intéret de cette formule est qu'elle permet de calculer le déterminant quel que soit l'ordre de la matrice puisque le cofacteur est de dimension $n-1$ et de proche en proche on arrive a des matrices d'ordre 2 dont on connait le déterminant.

Exemple 2 *Calculons le déterminant de :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La dernière colonne contenant un 0, elle est interessante pour le développement, un terme nul dans la somme. Le théorème nous dit que :

$$\begin{aligned} det(A) &= 3.\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 3.(2 \times 2 - 7 \times 4) + 1.(1 \times 7 - 2 \times 5) \\ &= 3 \times (-24) + 1 \times (-3) \\ &= -75 \end{aligned}$$

$det(A) \neq 0$, *la matrice est donc inversible.*

Propriétés du déterminant

Propriété 15

$$det({}^tA) = det(A)$$
$$det(AB) = det(A)det(B)$$
$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

3.6 Calcul de l'inverse d'une matrice

3.6.1 Méthode de Gauss

La transformation de Gauss-Jordan consiste à transformer ce système en un système équivalent dont le bloc gauche est l'identité, c'est-à-dire qu'il faut modifier les matrices $(A|I)$ pour qu'elles deviennent de la forme $(I|A^{-1})$ en utilisant les transformations élémentaires.

En effet, une transformation élémentaire sur les lignes revient à multiplier à droite par une matrice inversible. S'il nous faut q étape(s) pour passer de A à I on a donc q multiplication(s) à droite par une matrice inversible noté T_q.

$$I = A \times \underbrace{T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_q}_{A^{-1}}$$

On voit donc bien que $I \times T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_q = A^{-1}$ et donc en faisant rigoureusement les mêmes opérations sur I, le résultat ne sera rien d'autre que A^{-1}. C'est le principe de la méthode. Pour résoudre le système, nous n'avons pas besoin de calculer A^{-1} il nous suffit d'avoir $A^{-1}X$.

On notera :
- L_i^k la ligne i de la matrice A à l'itération k,
- $a_{i,j}^k$ le scalaire $a_{i,j}$ de la matrice A à l'itération k.

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

Pour k allant de 1 à n
  S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{ik}^{k-1} \neq 0$,
    échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$
    $L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$
    Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$
      $L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \times L_k^k$
  Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Après l'étape k de l'algorithme, la colonne k a tous ses coefficients nuls sauf un : celui de la diagonale, qui vaut 1... Le tour est joué.

Exemple 3 *On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On commence par présenter les choses sous la forme "Gauss".

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le coefficient $a_{2,2}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$ pour simplifier la suite des calculs. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7+\frac{27}{4} & -2+\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul. La matrice est donc inversible, c'est déjà bien. Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{5}{2} & -18 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

On a réussit à obtenir l'identité à gauche, la matrice de droite est donc A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

3.6.2 Méthode des cofacteurs

Théorème 7 *L'inverse d'une matrice A s'écrit sous une forme très simple à l'aide de la matrice des cofacteurs, appelée comatrice de A et notée A^**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^tA^* = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} \\ C_{12} & \ddots & & C_{j2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ C_{1i} & \cdots & \cdots & C_{ji} \end{pmatrix}$$

où $det(A)$ est le déterminant de A.

Cette écriture permet un calcul aisé de l'inverse d'une matrice de petite dimension. Pour des matrices de plus grandes dimensions, cette méthode essentiellement récursive devient inefficace.

L'équation des cofacteurs ci-dessus permet de calculer l'inverse des matrices de dimensions 2 x 2 :

Corollaire 1 *Si $ad - bc \neq 0$,*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ A^* = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix},\ {}^tA^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemple 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

De même, l'inverse d'une matrice de dimensions 3 x 3 s'écrit :

Corollaire 2 *Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, alors si $\det A = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \neq 0$, on a :*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} ei-fh & fg-di & dh-eg \\ ch-bi & ai-cg & bg-ah \\ bf-ce & cd-af & ae-bd \end{bmatrix}^t = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

Exemple 5 *On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice est -2.

Les cofacteurs sont :

$$\begin{array}{llllllll} C_{1,1} = & + & (-1) & C_{2,1} = & - & (-4-4) & C_{3,1} = & + & (-4) \\ C_{1,2} = & - & (2-4) & C_{2,2} = & + & (2-16) & C_{3,2} = & - & (2-8) \\ C_{1,3} = & + & (2) & C_{2,3} = & - & (2+16) & C_{3,3} = & + & (8) \end{array}$$

La comatrice est donc

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 8 & -14 & -18 \\ -4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

et par le théorème, l'inverse de A est la transposé de A^* divisée par le déterminant :

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 2 & -14 & 6 \\ 2 & -18 & 8 \end{pmatrix}$$

3.6.3 Un exemple

(A lire en deuxiéme lecture car utilise le pivot de gauss)
Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux espaces vectoriels. Si l'on connaît une base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\}$ de $\mathcal{U}$ et une base $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n}\}$ de $\mathcal{V}$ la matrice de f dans ces bases nous permet rapidement de déterminer le noyau et l'image de cette application, grâce notamment au pivot de Gauss. Précisément, en appliquant le pivot de Gauss aux colonnes de $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, on obtient une matrice du type

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \star & \vdots & & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \star & & \vdots & 0 \\ \star & \star & \star & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes non nulles de cette matrice nous donnent alors les coordonnées d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En particulier, le nombre de colonnes non nulles donne la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

D'autre part, le nombre de colonnes nulles de cette matrice nous donne la dimension du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

Exemple. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y - z, 3x + y).$$

Commençons par calculer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, il nous faut calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}_3$ et leurs coordonnées dans $\mathcal{B}_3$:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) = (1,2,3) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} \\ f(0,1,0) = (2,-1,1) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} \\ f(0,0,1) = (1,-1,0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_3$ est donc

$$M_{\mathcal{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le pivot de Gauss aux colonnes de M, on obtient la matrice

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut alors en conclure que $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$, soient $(1, 2, 3)$ et $(0, 1, 1)$.

De plus, on voit également que $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 (car il y a une colonne nulle). Pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, on peut alors résoudre le système linéaire donné par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \left(\frac{1}{5}\, z, -\frac{3}{5}\, z,\, z \right),\, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On retrouve le fait que la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ soit 1 et l'on en obtient une base : $\left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)$.

Chapitre 4

Systèmes linéaires, programmation linéaire

4.1 Mise en équation

Lorsque l'on veut utiliser les mathématiques pour résoudre un problème concret, la première étape consiste à traduire ce problème en données mathématiques exploitables. C'est ce que l'on appelle *la mise en équation*. Une bonne mise en équation se fait de la façon suivante :

1. Répertorier toutes les variables du problème, et les nommer de façon claire.
2. Déterminer toutes les contraintes du problème, et les traduire en équations (i.e. égalités) ou inéquations (i.e. inégalités).

Exemple : une entreprise de location de vélos veut renouveler son stock de vélos. Le gérant souhaite proposer à ses clients deux types de vélos : des vélos de ville qu'il achète à 500 euros pièce, et des VTT qu'il achète à 750 euros pièce. Il dispose pour cela d'un budget de 30000 euros. Quelle quantité de vélos de ville et de VTT peut-il acheter ?

Pour résoudre ce problème, on peut le mettre en équation de la façon suivante :

1. Ensemble de variables : notre problème contient deux variables :
   - $x =$ le nombre de vélos de ville,
   - $y =$ le nombre de VTT.
2. Mise en équation : notre problème contient une contrainte : les 30000 euros à dépenser. Le problème peut donc être modélisé par l'équation

$$500x + 750y = 30000.$$

Résoudre notre problème revient alors à déterminer tous les couples (x, y) qui vérifient cette équation.

$$\begin{array}{llll} \text{Ainsi, si} & x = 15 & \text{alors} & y = 30 \\ & x = 30 & & y = 20 \\ & x = 45 & & y = 10 \\ & \dots & & \end{array}$$

Chacun de ces couples (x, y) est une solution de notre problème. L'ensemble des couples constituant une solution est l'ensemble solution. Pour les systèmes ne contenant que deux inconnues, on peut représenter l'ensemble solution par une courbe du plan (en mettant les x en abcisse et les y en ordonnée).

- Pour des raisons évidentes, la droite "solution" est la droite d'équation $500x + 750y = 30000$, ou $y = -\frac{2}{3}x + 40$.
- Étant donnée la nature de nos inconnues, on ne regarde que la partie de la droite correspondant à $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

4.2 Équations linéaires

Lors d'une mise en équation, si l'équation que l'on obtient est de la forme $ax + by = c$ (comme dans l'exemple précédent), on dit que le problème (ou l'équation) est un problème **linéaire** à deux variables. Comme dans l'exemple précédent, tout problème linéaire à deux variables peut être représenté par une droite du plan.

De façon générale, toute équation du type

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les inconnues, et $a_1, \ldots, a_n$ et c sont les coefficient (i.e. des nombres connus), sera dite équation linéaire (à n variables). Si le nombre d'inconnues est plus petit que 3, on pourra avoir une représentation géométrique de l'équation. Précisément,

- Une équation linéaire à 1 variable est une équation de la forme $ax = b$. Elle possède en générale une unique solution, que l'on peut représenter par un point sur la droite réelle.
- Une équation linéaire à 2 variables est une équation de la forme $ax + by = c$. L'ensemble des solutions peut être représenté par une droite dans le plan.
- Une équation linéaire à 3 variables est une équation de la forme $ax + by + cz = d$. L'ensemble des solutions peut être représenté par un plan dans l'espace à 3 dimensions.

Exercices : Retrouvez les structures de l'ensemble des solutions à l'aide du théoréme du rang.

Exemples : Représenter graphiquement les solutions des équations linéaires suivantes :

- $(E_1)\ :\ 2x = 10.$
- $(E_2)\ :\ 3x + y = 9.$
- $(E_3)\ :\ 2x - y + 3z = 6.$

4.3 Systèmes d'équations linéaires

Un *système linéaire* est un ensemble d'équations linéaires ayant le même nombre d'inconnues.

Exemples :

- $\left\{ \begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 11 \\ 5x & -y & = & 2 \end{array} \right.$ est un système de deux équations à 2 inconnues.

- $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +5y & -z & +\frac{1}{2}t & = & 15 \\ 5x & -y & & -t & = & 2 \\ -x & +y & -4z & +\frac{2}{3}t & = & 0 \end{array}\right.$ est un système de 3 équations à 4 inconnues.
- Un système linéaire de m équations à n inconnues s'écrit sous la forme

$$(S) = \left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}\right.$$

  où les x_i sont les inconnues, et les a_{ij} et les c_i sont les coefficients.

Résoudre un système linéaire de m équations à n inconnues, c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient *simultanément* les m équations.

Ecriture matricielle d'un système linéaire : Un système d'équations linéaires peut aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$Ax = c$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} ; \; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Remarque 4 *Seulement les trois cas suivants sont possibles pour n'importe quel système donné d'équations linéaires :*
- *Le système n'a pas de solution.*
- *Le système a un unique n-uplet solution.*
- *Le système a une infinité de n-uplets solutions.*

4.4 Quelques méthodes de résolution des systèmes linéaires

Il existe différentes méthodes de résolution des systèmes. Lorsque l'on a, à résoudre un sytème 2×2 ou un système 3 peu "évolué", un peu de reflection et de bon sens permettent de résoudre le système à moindre frais, à l'aide par exemple de substitutions réfléchies, ou d'additions/soustraction de certaines lignes, de méthodes géométriques etc... Mais lorsque le système est compliqué, la tache devient vite pénible si l'on n'a pas de ligne de conduite pour mener les calculs.

Il existe une méthode générale, donnée par un algorithme (donc programmable sur machine) pour résoudre n'importe quel système : il s'agit de la méthode dite du "Pivot de Gauss".

Remarque 5 *Dans certains cas, le pivot de Gauss est un marteau pilon pour écraser une mouche et on préfére utiliser une méthode adaptée au système qui permet de le résoudre plus rapidement. Bref, on adapte au cas par cas...*

4.4.1 Pivot de Gauss

Objectif du Pivot de Gauss

Le principe général du pivot de Gauss est de transformer le système que l'on veut résoudre en un système *triangulaire*.

Pour un système 3×3, cela revient à passer d'un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

à un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z & = & \delta_1 \\ \beta_2y + \gamma_2z & = & \delta_2 \\ \gamma_3z & = & \delta_3 \end{array}\right.$$

à l'aide de combinaisons.

Une fois que l'on a un système triangulaire, on obtient directement la dernière inconnue. On peut ensuite passer à la substitution en remontant ligne par ligne.

Le point central de cette méthode est, que l'on obtient par transformation élémentaire sur les lignes ou les colonnes, un système équivalent (ie : qui a les mêmes solutions).

Opérations autorisées

Pour transformer un système donné en un système triangulaire, on dispose d'un certain nombre d'opérations que l'on peut faire sur les équations du système sans changer ses solutions. Précisément, on peut

- permuter deux équations,
- multiplier une équation par un nombre non nul,
- ajouter une ligne à une autre.

En pratique, on commencera par passer à la notation matricielle. On effectuera alors les différentes opérations précédentes sur les lignes de la matrice associée à notre système, le but étant de faire apparaître un certain nombre de zéros dans la matrice.

Mécanisme du pivot de Gauss

Cadre général, l'algorithme

On veut résoudre un système d'équations $A.X = C$, où C est un vecteur fixé, et X le vecteur inconnu. On crée un tableau à n lignes et $n+1$ colonnes en bordant la matrice A par le vecteur C.

La transformation de Gauss-Jordan consiste à transformer ce système en un système équivalent dont le bloc gauche est l'identité, c'est-à-dire qu'il faut modifier la matrice $(A|I)$ pour qu'elle devienne de la forme $(I|A^{-1})$ en utilisant les transformations élémentaires.

En effet, une transformation élémentaire sur les lignes revient à multiplier à droite par une matrice inversible. S'il nous faut q étapes pour passer de A à I on a donc q multiplications à droite par une matrice inversible noté T_q.

$$I = A \times \underbrace{T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_q}_{A^{-1}}$$

On voit donc bien que $I \times T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_q = A^{-1}$ et donc en faisant rigoureusement les mêmes opérations sur I, le résultat ne sera rien d'autre que A^{-1}. C'est le principe de la méthode (même principe que pour les matrices).

Exercice Réfléchir aux formes possibles des matrices T_i

Pour résoudre le système, nous n'avons pas besoin de calculer A^{-1} il nous suffit d'avoir $A^{-1}X$. Pour résoudre le système d'équations $A.X = C$, où C est un vecteur fixé, et X le vecteur inconnu. On crée un tableau à n lignes et $n+1$ colonnes en bordant la matrice A par le vecteur C.

On notera :
- L_i^k la ligne i de la matrice A à l'itération k,
- $a_{i,j}^k$ le scalaire $a_{i,j}$ de la matrice A à l'itération k.

L'algorithme de Gauss-Jordan est le suivant :

Pour k allant de 1 à n
  S'il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{ik}^{k-1} \neq 0$,
    échanger cette ligne i et la ligne k : $L_i \leftrightarrow L_k$
    $L_k^k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}^{k-1}} L_k^{k-1}$
    Pour i allant de 1 à n et $i \neq k$
      $L_i^k \leftarrow L_i^{k-1} - a_{ik}^{k-1} \times L_k^k$
  Sinon A n'est pas inversible, abandonner.

Après l'étape k de l'algorithme, la colonne k a tous ses coefficients nuls sauf un : celui de la diagonale, qui vaut 1... Le tour est joué.

Un exemple pour vous éclairer Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice associée.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations. Au niveau de la matrice, cela revient à utiliser la première ligne pour faire apparaître des 0 sous le premier coefficient de la première ligne. C'est ce premier coefficient que l'on appelle le pivot.

Dans l'exemple ci-dessus, on peut ainsi soustraire 2 fois la première ligne à la deuxième :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$

On a ainsi fait apparaître un premier 0 sous notre pivot. On fait alors apparaître un nouveau 0 en soustrayant 4 fois la première ligne à la troisième :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1)$$

On a maintenant terminé la première étape du pivot de Gauss : on a mis des 0 sur toute la première colonne, à l'exception de notre pivot.

Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

On recommence alors la première étape, sur la matrice plus petite : dans notre exemple, notre nouveau pivot est le 3, que l'on utilise pour faire apparaître des 0 en dessous. Ainsi,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2) \end{array}$$

On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second pivot. Une fois que c'est fait, on oublie la seconde ligne et la seconde colonne de la matrice, et l'on recommence sur la matrice plus petite.

Le processus s'arrête lorsque l'on a une matrice triangulaire (i.e. une matrice ne contenant que des 0 sous la diagonale), et donc un système triangulaire. On revient alors à la notation système, et l'on peut faire de la substitution. Dans notre exemple, la dernière ligne de notre matrice nous donne l'équation

$$4z = 2, \quad \text{soit} \quad z = \frac{1}{2}.$$

La seconde ligne nous donne

$$3y - 3z = -3,$$

et en substituant à z la valeur trouvée, on obtient

$$3y = -\frac{3}{2}, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

enfin, la première ligne nous donne

$$x - y + z = 2,$$

et en substituant, on obtient

$$x = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

La solution de notre système est donc le triplet

$$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Remarque : pour simplifier les calculs, on préfère travailler avec un pivot égal à 1. Si ça n'est pas le cas, on peut utiliser la permutation des lignes pour avoir un pivot égale à 1. Il faut pour cela que l'un des coefficients placés sous le pivot soit égal à 1 et permuter la ligne du pivot avec la ligne correspondante.

Si aucun coefficient se trouvant sous le pivot n'est égal à 1, on peut toujours diviser la ligne du pivot par ce pivot pour le transformer en 1. De façon générale, on pourra d'ailleurs utiliser cette opération pour simplifier un peu les lignes. Dans notre exemple, la seconde étape commence avec la ligne $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right)$ On peut donc la diviser par 3 et travailler avec la ligne $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

4.4.2 Résolution de systèmes par la méthode des déterminants

Théorème 8 *Considérons le système $AX = B$ avec $A \in \mathcal{M}_n$. On a alors, pour tout $i = 1 \dots n$,*

$$X_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

où A_i est la matrice obtenir en remplacant la colonne i par la colonne B.

Exemple 6 *Considérons le système*

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 2 & -14 & 6 \\ 2 & -18 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On a

$$det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 2 & -14 & 6 \\ 2 & -18 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} -2 & 8 & -4 \\ -3 & -14 & 6 \\ 5 & -18 & 8 \end{vmatrix} = -6$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -12$$

$$det(A_3) = \begin{vmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 2 & -14 & -3 \\ 2 & -18 & 5 \end{vmatrix} = 12$$

On a donc

$$x_1 = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$x_3 = \frac{12}{-6} = -2$$

4.4.3 Le cas particuliers des systèmes 2×2

Un système de deux équations à deux inconnues, (dit 2×2) est un système du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Dans cette section, on appliquera les différentes méthodes de résolution au système

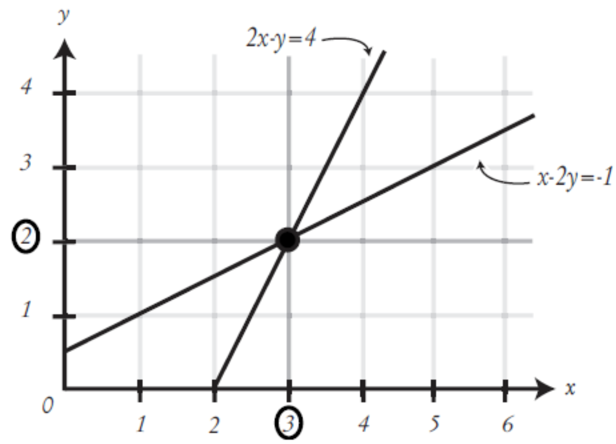
$$(S) = \begin{cases} x - 2y & = & -1 \\ 2x - y & = & 4 \end{cases}$$

On présente içi trois façons différentes de résoudre un système 2×2. Une première méthode est géométrique. Les deux autres se font par calcul. L'une s'appelle par substitution, l'autre par combinaison.

Résolution graphique

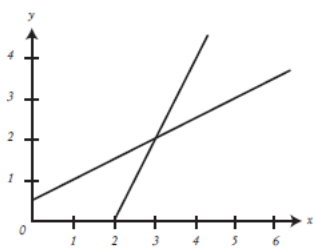
Résoudre un système 2×2, c'est trouver les couples (x, y) qui vérifient simultanément deux équation linéaires.

Géométriquement, cela revient à chercher le point d'intersection de deux droites du plan. Il suffit donc de tracer les deux droites dans un repère orthonormé et de lire les coordonnées du point d'intersection. Ainsi, pour le système (S), on obtient le dessin ci-contre, et l'on trouve une unique solution : le point $(3, 2)$.

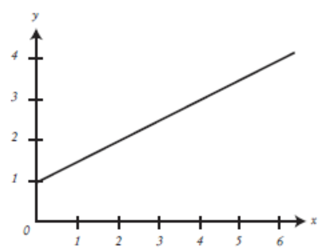


Remarque 6 *A l'aide de la représentation graphique de deux droites, on peut discuter du nombre de solution d'un système* 2×2.

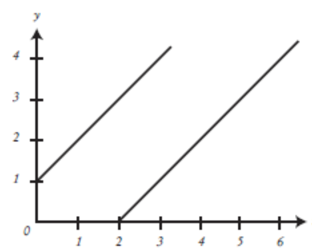
$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



Méthode par substitution

La première méthode calculatoire est dite *par substitution.* Il s'agit de transformer l'une des deux équations en une équation du type $x = \dots$ (ou $y = \dots$) et remplacer, dans l'autre équation, x (ou y) par l'expression obtenue. On fait ainsi disparaître l'une des inconnue de l'une des équations. On peut alors résoudre cette dernière équation. On trouve une première inconnue, et en utilisant ce premier résultat, on trouve la seconde inconnue.

Exemple : dans le système (S), on peut modifier la première équation en une équation du type $x = \dots$ Précisément,

$$(S) \iff \begin{cases} x & = & 2y - 1 \\ 2x - y & = & 4 \end{cases}$$

On peut alors remplacer, dans la seconde équation, x par $2y-1$ (on fait ainsi disparaître x dans cette équation :

$$(S) \iff \begin{cases} x & = & 1+2y \\ 2\times(2y-1)-y & = & 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 2y-1 \\ 3y & = & 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 2y-1 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

On peut alors remplacer y par sa valeur dans la première équation, et l'on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x & = & 4-1 & = & 3 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

On retrouve pour unique solution le couple $(3,2)$.

Méthode par combinaison

La seconde méthode, dite *par combinaison* consiste à ajouter à une équation un multiple de l'autre. Le but est, là encore de faire disparaître l'une des inconnues de l'une des équations.

Exemple : dans notre système (S), on peut soustraire 2 fois la première équation à la seconde, afin de faire disparaître les x dans la seconde équation :

$$(S) \iff \begin{cases} x-2y & = & -1 \\ 2x-y-2(x-2y) & = & 4-2\times(-1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x-2y & = & -1 \\ 3y & = & 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y & = & -1 \\ y & = & 2 \end{cases}$$

Là encore, en remplaçant y par sa valeur dans la seconde équation, on obtient x :

$$(S) \iff \begin{cases} x & = & 2\times 2-1 \\ y & = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 3 \\ y & = & 1 \end{cases}$$

On obtient encore comme unique solution le couple $(3,2)$.

4.5 Quelques mots sur les inéquations linéaires

À deux variables, une inéquation linéaire a la forme

$$ax+by \leq c \quad \text{ou} \quad ax+by \geq c$$

D'un point de vue graphique, l'ensemble des solution d'une inéquation à deux variables est constitué de la droite d'équation $ax+by=c$ et tous les points qui sont d'un coté de la droite. C'est donc un demi-plan. Le sens de l'inégalité indique quel coté de la droite il faut considérer.

Exemples : Hachurer l'ensemble solution des inéquations suivantes :

$2x+2y \leq 1$ $\qquad$ $2x+2y \geq 1$ $\qquad$ $2x-y \leq 1$

4.5.1 Systèmes d'inéquations linéaires

Résoudre un système d'inéquations linéaires, c'est résoudre simultanément plusieurs inéquations. A deux variables, cela revient donc à déterminer l'intersection de plusieurs demi-plans.

Exemple :

$$\begin{cases} y - 3x \leq -2 \\ y + x \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y \geq 4 \\ 2x + y \leq 4 \\ y \leq x \\ y \geq -4 \end{cases}$$

L'intersection d'un nombre fini de demi-plan (et donc l'ensemble des solutions d'un système 2×2 d'inéquations linéaires) est un *ensemble convexe*. L'ensemble convexe peut être borné ou non borné selon qu'il s'étend ou non jusqu'à l'infini. Les sommets d'un ensemble convexe sont les points de rencontre des droites frontières qui le constituent.

Exemple : considérons le système d'inéquations linéaires suivant.

$$\begin{cases} 2x + y \leq 16 \\ x + 2y \leq 11 \\ x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0,\, y \geq 0 \end{cases}$$

Pour déterminer l'ensemble des solutions de ce système, on commence par déterminer les demi-plans définis pas chacune des inéquations. On obtient alors l'ensemble convexe des solutions. Pour terminer l'étude, on détermine les sommets de cet ensemble convexe. Pour cela, on lit graphiquement les coordonnées de ces points, et l'on vérifie à l'aide du système. (Chaque point doit être l'unique solution du système 2×2 donné par les droites produisant l'intersection).

4.5.2 Une méthode graphique

Dans cette section, nous allons voir une autre approche, plus complète et plus réaliste des problème de gestion. Cette démarche s'appelle parfois "programmation linéaire". Commençons par un exemple.

Exemple : Le directeur d'une manufacture de meubles décide de fabriquer deux nouveaux modèles de bibliothèque : le modèle A et le modèle B.
- Le modèle A nécessite 1 heure de sciage, 2 heures d'assemblage et 1 heure de finition.
- Le modèle B nécessite 2 heures de sciage, 1 heure d'assemblage et 1 heure de finition.

La manufacture dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sciage, de 22 heures à l'atelier d'assemblage et de 12 heures à l'atelier de finition. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun des modèles sont de 200 euros pour le modèle A et de 300 euros pour le modèle B. Le directeur désire déterminer le nombre de bibliothèques de chaque modèle qu'il doit fabriquer par jour pour obtenir un profit maximal.

On peut rassembler les données dans le tableau suivant.

	sciage	assemblage	finitions	
modèle A	1h	2h	1h	x
modèle B	2h	1h	1h	y
ressources	20h	22h	12h	

Contrairement aux exemples précédents, on ne cherche plus ici à utiliser toute la ressource disponible, mais on cherche à maximise le profit. Cela nous donne donc un système d'inéquations :

$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \end{cases}$$

ainsi que les contraintes de positivité

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

On peut alors déterminer graphiquement la partie convexe du plan qui contient toutes les solutions de ce système. Il représente toutes les productions que l'on peut faire à l'aide des ressources dont on dispose. On a par exemple les couples $(2,5)$, $(8,3)$, $(2,8)$, $(0,9)$,... Le problèmes est alors de déterminer la ou les solutions qui donnent un profit maximal. Le profit est donné par l'équation

$$P = 200x + 300y$$

pour des couples (x, y) pris dans l'ensemble des solutions. Voici quelques profits, associés aux solutions vues plus haut

modèle A	modèle B	Profit
2	5	$2 \times 200 + 5 \times 300 = 1900$ euros
8	3	$8 \times 200 + 3 \times 300 = 2500$ euros
2	8	$2 \times 200 + 8 \times 300 = 1800$ euros
0	9	$0 \times 200 + 9 \times 300 = 2700$ euros
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Il n'est bien sur pas pensable de calculer les profits correspondant à chacun des points solutions.

Prenons alors la question dans l'autre sens : existe-t-il une solution permettant de réaliser un profit de

$$a)\ 4000\ euros\ ? \qquad b)\ 2000\ euros\ ? \qquad c)\ 3200\ euros\ ?$$

Pour réaliser ces profits, on cherche les couples (x, y) qui, en plus de satisfaire les inéquations précédentes, vérifient les équations

$$\begin{array}{lll} a)\ 200x + 300y = 4000 & \text{soit} & 2x + 3y = 40 \\ b)\ 200x + 300y = 2000 & \text{soit} & 2x + 3y = 20 \\ c)\ 200x + 300y = 3200 & \text{soit} & 2x + 3y = 32 \end{array}$$

Sur notre graphe, cela nous donne donc trois droites parallèles, et les profits réalisables sont ceux pour lesquels ces droites coupent la partie convexe donnant les solutions du système d'inéquations.

Précisément, il n'est pas possible de réaliser un profit de 4000 euros avec les contraintes que l'on a. On peut par contre réaliser un profit de 2000 euros de plusieurs façons différentes. Enfin, on ne peut réaliser un profit de 3200 euros que d'une seule façon.

De façon générale, les profits sont représentés par un ensemble de droites parallèles, qui montent ou qui descendent selon que le profit cherché, augmente ou diminue. Le profit maximum accessible est donc donné par la droite la plus haute qui rencontre encore l'ensemble convexe. Dans notre exemple, il s'agit de 3200 euros, obtenu en produisant 4 unités du modèle A et de 8 unités du modèle B.

La programmation linéaire est un outil permettant une étude systématique de ce type de problème. Précisément, la programmation linéaire permet d'optimiser (i.e. obtenir le maximum ou le minimum) d' une équation linéaire, soumise à des contraintes également linéaires (équations ou inéquations), et donne des méthodes algorithmiques pour déterminer la ou les solutions optimales. Le tableau ci-contre rassemble les données d'un problème pouvant être résolu grâce à la programmation linéaire.

Fonction w à optimiser

$$w = a_0x + b_0y + c_0z + \dots$$

Contraintes de fonctionnement

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \dots \leq k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots \leq k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \dots \leq k_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Contraintes de positivité

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0, \dots$$

Du fait de la forme d'un ensemble convexe (forme de tous les ensembles-solutions des systèmes linéaires), la solution d'un problème de programmation linéaire sera toujours atteint en un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables, à condition bien sûr que cet ensemble existe et soit borné.

Si l'ensemble des solutions réalisables n'est pas borné, il se peut qu'un maximum (ou minimum) ne soit jamais atteint, mais là encore, si cet optimum est atteint, il l'est en un somment de l'ensemble convexe. Pour les systèmes à 2 inconnues, une première méthode, géométrique est donc d'utiliser les droites comme dans l'exemple ci-dessus. On détermine la pente de la fonction à optimiser, et on la fait glisser sur l'ensemble convexe des solutions possibles jusqu'à atteindre le dernier sommet. Une autre méthode consiste à faire la liste de tous les sommet de l'ensemble solution, et de calculer pour chacun de ces sommets la valeur de la fonction à optimiser.

Exemple.

Un fermier dispose d'un champ de 120 hectares, de 480 euros destinés à l'achat de semences et de 2400 heures de main-d'œuvre agricole pour effectuer son travail. Il doit utiliser son champ pour deux cultures :

– une culture A pour laquelle la semence revient à 5 euros par hectare et qui nécessite 8 heures de main-d'œuvre par hectare

– une culture B pour laquelle la semence coûte 3 euros par hectare et qui nécessite 24 heures de main d'œuvre par hectare.

Sachant que la culture A rapporte 100 euros par hectare et la culture B rapporte 150 euros par hectare, le fermier désire savoir combien d'hectare de son champ il devra consacrer à chaque culture pour maximiser son profit.

Commençons par dresser le tableau des contraintes.

	terrain (hect)	coût (euros)	M.O. (h)	
culture A	1	5	8	x
culture B	1	3	24	y
contraintes	120	480	2400	

Les inconnues étant ici le nombre x d'hectares consacrés à la culture A et le nombre y d'hectares consacrés à la culture B.

On obtient le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x + y \leq 120 \\ 5x + 3y \leq 480 \\ 8x + 24y \leq 2400 \end{cases}$$

ainsi que les contraintes de positivité

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Enfin, la fonction profit que l'on veut rendre maximale est

$$P = 100x + 150y.$$

À l'aide des contraintes, on détermine ensuite la partie convexe du plan qui contient toutes les solutions possibles pour la répartition des deux cultures :

Il nous reste ensuite à faire la liste des sommets de l'ensemble convexe, et calculer pour chacun de ces sommets le profit réalisable. Notons que certains sommets ne se lisent pas directement sur le graphe. Il faut alors résoudre le système 2×2 donné par les équations des deux droites formant ce sommet.

Ici, on obtient quatre sommets

$$S_1 = (0, 100), \quad S_2 = (30, 90), \quad S_3 = (60, 60), \quad S_4 = (96, 0)$$

et pour chacun de ces sommets, on a le profit correspondant

$$P_1 = 15\,000\ euros, \quad P_2 = 16\,500\ euros, \quad P_3 = 15\,000\ euros, \quad P_4 = 9\,600\ euros$$

Le profit maximum que l'on peut réaliser est donc de 16 500 euros, obtenu en faisant 30 hect. de culture A et 90 de culture B.

Chapitre 5

Suites numériques

Les suites sont des objets mathématiques qui permettent par exemple, de modéliser de nombreuses situations financières. Supposons par exemple que l'on place un capital de 8 000 euros à un taux simple de 6% par an. Comment calculer le capital que l'on aura au bout d'un an ? 2 ans ? 5 ans ? 20 ans ? Comment savoir au bout de combien de temps on pourra s'offrir un tour du monde à 15 000 euros ?

Les suites permettent de répondre rapidement à ces questions, et donnent un modèle que l'on pourra ensuite appliquer à tous les problèmes de ce type et bien d'autres.

5.1 Généralités

5.1.1 Définition

Définition 12 *Une suite est une application de* $\mathbb{N}$ *vers* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}, \\ n &\to u(n) \qquad \textit{souvent noté } u_n. \end{aligned}$$

La suite sera notée u *ou bien* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. u_n *s'appelle le terme général de la suite.*

5.1.2 Expression d'une suite

Une suite est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième, u_2 le troisième, etc... Enfin, on note u_n le terme général et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite.

En les choisissant les uns après les autres, on peut construire n'importe quelle suite de nombres. Par exemple,

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 2, u_5 = 14, \ldots$$

Une suite construite au hasard est une suite aléatoire. Mais, dans ce chapitre, on va étudier des suites de nombre construites sur la logique.

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.

Il y a deux façons de construire une suite logique.

Définition explicite

Une première façon de définir une suite est de donner son terme général directement en fonction de n.

Exemples :
- $(u_n)\ :\ u_n = 2n+1$. Ici, on a donc $u_0 = 2\times 0+1$, $u_1 = 2\times 1+1 = 3$, $u_2 = 2\times 2+1 = 5$, $u_{10} = 2\times 10+1 = 21$, etc...
- $(u_n)\ :\ u_n = 3\times 5^n$. Ici, on a $u_0 = 3\times 5^0 = 3$, $u_1 = 15$, $u_2 = 75$, etc...

Le principal avantage de ce type de définition qu'il permet de calculer rapidement n'importe quel terme de la suite.

Suites récurrentes

Une autre façon de définir une suite est de donner la règle permettant de passer d'un terme au suivant. Dans ce cas, on donne le terme général u_n en fonction du terme précédent u_{n-1}. Un procédé classique est le suivant :

$$(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

L'étude d'une telle suite commence par l'étude de la fonction f. ((u_n) est appelée suite récurrente d'ordre 1) Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois, on définit

$$u_n = u_{n-1} + 2.$$

Pour qu'une telle suite soit définie correctement, il faut également donner le premier terme.

Exemples :
- $(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = u_{n-1} + 2 \end{cases}$
  Ici, on a $u_1 = 3$, $u_2 = 3+2 = 5$, $u_3 = 5+2 = 7$, etc...
- $(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = 3, \\ u_n = 5u_{n-1} \end{cases}$
  Ici, on a $u_1 = 15$, $u_2 = 5\times 15 = 75$, etc...

On voit ici que si l'on veut calculer un terme (par exemple u_{10}), il faut calculer tous les termes précédents.

Cependant, les suites récurrentes sont souvent plus pratiques pour modéliser une situation donnée. Par la suite, on verra comment modéliser une situation (financière) à l'aide de suites récurrentes, puis comment transformer cette suite en une suite explicite pour pouvoir l'exploiter et prévoir le comportement du système que l'on aura modélisé.

5.1.3 Sens de variation

Propriété 16 – *Une suite u est stationnaire s'il existe un entier p tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+p} = u_p.$$

– *Une suite u est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

– *Une suite u est décroissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

5.1.4 Suites bornées

Une suite (u_n) sera dit

– *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n \leq M.$$

– *minorée* s'il existe un nombre m (indépendant de n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; u_n \geq m.$$

– *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée ; autrement dit s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; m \leq u_n \leq M.$$

Pour des raisons pratiques, on utilisera plutot la définition suivante :

$$(u_n) \text{ est bornée } \iff \exists A > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \; |u_n| \leq A.$$

Exemples :

– La suite (u_n) : $u_n = \dfrac{1}{n}$ est bornée.

– La suite (v_n) : $v_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$ est bornée.

– La suite (w_n) : $w_n = \sin(n^2 - n + 1)$ est bornée.

5.1.5 Convergence

Définition 13 *Une suite u est convergente si cette suite a une limite l quand n tend vers l'infini.*
Si cette suite est convergente, la limite est unique.
Si la limite est infinie, on parle de suite divergente.

Formellement, une suite (u_n) admet comme limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq n_0, \; |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Dans cette définition, $\forall \epsilon > 0$ se lit "pour ϵ aussi petit que l'on veut" et $|u_n - \ell| < \epsilon$ se lit "la distance entre u_n et ℓ est plus petite que ϵ". Autrement dit, cette définition nous dit que quitte à prendre n assez grand, la suite (u_n) se rapproche de ℓ aussi près que l'on veut et reste proche de ℓ.

Exemples

Par exemple, la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

a ses termes qui se rapprochent de 0 quand n grandit. On dit alors que (u_n) a pour limite 0 et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Contrairement à la suite (u_n) précédente, la suite (v_n) définie par $v_n = n^2$ ne se rapproche d'aucun nombre. Les termes v_n sont de plus en plus grands. Dans ce cas, on note

$$\lim_{n\to+\infty} = +\infty.$$

Enfin, si l'on observe la suite (w_n) définie par $w_n = (-1)^n$, on voit que cette suite prend alternativement les valeurs 1 et -1. Une telle suite n'a donc pas de limite.

Propriété 17 *On a :*

1. *Toute suite croissante et majorée, converge.*

2. *Toute suite décroissante et minorée, converge.*

5.1.6 Limites et inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes et soient ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives. Si $u_n \leq v_n$ pour tout n, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Remarque : si $u_n < v_n$ pour tout n, on peut avoir $\ell_1 = \ell_2$. Penser à $u_n = -\dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

De même, on a un théorème d'encadrement connu sous le nom de théorème des gendarmes :

Théorème 9 *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$.
2. *(u_n) et (w_n) sont convergentes et $\lim_n u_n = \lim_n w_n = \ell$.*

Alors la suite (v_n) converge également et $\lim_n v_n = \ell$.

5.2 Deux exemples fondamentaux

5.2.1 Suites Arithmétiques

Définition

Définition 14 *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on passe de chaque terme au suivant **en ajoutant** la même quantité r (raison) alors la suite est dite arithmétique.*

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Pour prouver qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n.

Exemple 7 *Capital placé à intéret simple (tirelire)*

Expression du terme général

Théorème 10 *Soit u une suite arithmétique de raison r, alors*

$$u_n = u_0 + nr$$

De manière plus générale, le n ième terme s'obtient à partir du p iéme en ajoutant $n-p$ fois la raison r :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Démonstration :
Par récurrence sur n.
- La propriété est vraie au rang $n = 0$ en effet, on a alors $u_0 = u_0$ ce qui est vrai.
- On suppose maintenant que $u_n = u_0 + nr$. A-t-on bien $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$?

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + r, \\ u_{n+1} &= u_0 + nr + r, \\ u_{n+1} &= u_0 + (n+1)r. \end{aligned}$$

Elle est donc vraie au rang $n + 1$.

Si la propriété est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$. En vertue du principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

◀

Sens de variation

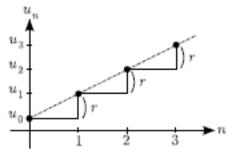
Propriété 18 *Soit u une suite arithmétique de raison r, alors*
- *Si $r > 0$, la suite u est croissante.*
- *Si $r < 0$, la suite u est décroissante.*
- *Si $r = 0$, la suite u est stationnaire.*

Convergence

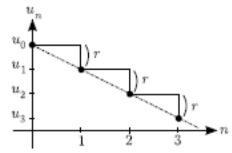
Propriété 19 *Soit u une suite arithmétique de raison r, alors*
- *Si $r > 0$, la suite u diverge vers $+\infty$.*
- *Si $r < 0$, la suite u diverge vers $-\infty$.*
- *Si $r = 0$, la suite u converge vers u_0.*

Représentation graphique

Comme pour les fonctions, on peut représenter les suites numériques dans un plan, muni d'un repère, en plaçant n en abscisse, et u_n en ordonnée. Concernant les suites arithmétique, on voit sur le dessin ci-dessous que les points représentant une suite arithmétique de raison r sont alignés, sur une droite de coefficient directeur r.



Raison $r > 0$.



Raison $r < 0$.

5.2.2 Suites Géométriques

Définition

Définition 15 *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on passe de chaque terme au suivant* ***en multipliant*** *par la même quantité q (raison) alors la suite est dite géométrique.*

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Pour prouver qu'une suite est géométrique, il suffit de montrer que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n.

Exemple 8 *Capital placé à intéret composé (remboursement pret)*

Expression du terme général

Théorème 11 *Soit u une suite géométrique de raison q, alors*

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

De manière plus générale, le n iéme terme s'obtient à partir du p iéme en multipliant $n-p$ fois la raison q :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Démonstration :
Par récurrence sur n.
- La propriété est vraie au rang $n = 0$ en effet, on a alors $u_0 = u_0$ ce qui est vrai.
- On suppose maintenant que $u_n = u_0 \times q^n$. A-t-on bien $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$?

$$u_{n+1} = q \times u_n,$$
$$u_{n+1} = u_0 \times q^n \times q,$$
$$u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}.$$

Elle est donc vraie au rang $n+1$.
Si la propriété est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$. En vertue du principe du raisonnement par récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

◄

Sens de variation

Propriété 20 *Soit u une suite géométrique de raison q, alors*
- *Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$, la suite u est stationnaire égale à 0.*
- *Si $u_0 \neq 0$ et $q = 1$, la suite u est stationnaire égale à u_0.*
- *Si $u_0 \neq 0$, $q \neq 1$ et $q > 0$ la suite est monotone :*
  - *croissante si $u_0 \times (q - 1) > 0$,*
  - *décroissante sinon.*
- *Si $u_0 \neq 0$, $q \neq 1$ et $q < 0$ la suite est alternée.*

Démonstration :
On a

$$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^n \times (q - 1)$$

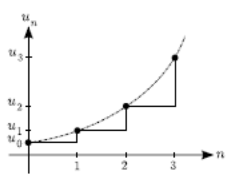
D'ou le résultat en discutant le signe de chaque terme.

◄

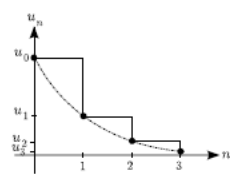
Convergence

Propriété 21 *Soit u une suite géométrique de raison q, alors*
- *Si $|q| < 1$, la suite u converge vers 0.*
- *Si $|q| > 1$, la suite u diverge vers $-\infty$ ou $+\infty$ selon le signe de u_0.*
- *Si $q = 1$, la suite u converge vers u_0.*
- *Si $q = -1$, la suite est alternée (elle vaut $-u_0$ puis u_0, etc...) elle ne converge pas.*

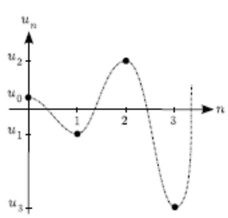
Représentation graphique



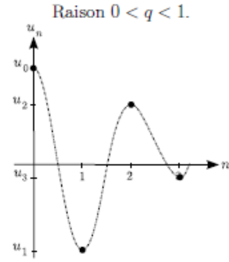
Raison $q > 1$.



Raison $0 < q < 1$.



Raison $q < -1$.



Raison $-1 < q < 0$.

5.2.3 Somme de N termes consécutifs

Position du problème

Dans ce paragraphe, on se pose la question, étant donnée une suite u, de la somme de termes consécutifs, c'est à dire le calcul de

$$S = u_p + ... + u_d$$

Propriété 22 *Dans la somme S, il y a $N = d - p + 1$ termes.*

Démonstration :
Par récurrence sur N, sans difficulté.

◀

Suite arithmétique

On considère maintenant une suite u arithmétique de raison r.

Propriété 23 *On considère une somme de type S. On note P le premier terme de la somme et D le dernier. alors*

1. *il y a $N = \frac{D-P}{r} + 1$ termes dans la somme.*
2. $$S = \frac{N \times (P + D)}{2} \tag{5.1}$$
$$S = \frac{N \times (2P + (N-1)r)}{2} \tag{5.2}$$

Démonstration :

1. $$D = u_d = u_0 + dr,$$
$$P = u_p = u_0 + pr.$$

   Maintenant $S = u_p + \cdots + u_d$ il y a $N = d - p + 1$. Or on a

   $$D - P = u_0 + dr - (u_0 + pr) = (d - p)r$$

   donc
   $$d - p = \frac{D - P}{r}$$
   et donc le nombre de termes de la somme $P + \cdots + D$ est :
   $$\frac{D - P}{r} + 1.$$

2. En ordonnant dans l'ordre croissant les termes, on a :

   $$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{p+k} + \cdots + u_d.$$

   En ordonnant dans l'ordre décroissant les termes, on a :

   $$S = u_d + u_{d-1} + \cdots + u_{d-k} + \cdots + u_p.$$

   On ajoute ces deux equations et on a :

   $$2S = (u_p + u_d) + (u_{p+1} + u_{d-1}) + \cdots + (u_{p+k} + u_{d-k}) + \cdots + (u_d + u_p).$$

   Il suffit alors de remarquer que

   $$u_{p+k} + u_{d-k} = u_p + kr + u_d - kr = u_p + u_d$$

et donc
$$2S = N \times (u_p + u_d) = N \times (P + D)$$
D'où la relation (5.1).
Pour obtenir (5.2) il suffit de remarquer que
$$u_p + u_d = u_p + u_p + (d - p)r = 2u_p + (N - 1)r = 2P + (N - 1)r.$$

◀

Remarque 7
$$S = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suite géométrique

On considère maintenant une suite u géométrique de raison $q \neq 1$.

Propriété 24 *On considère une somme de type S. On note P le premier terme de la somme et D le dernier. alors*

1. *il y a $N = \frac{ln(D) - ln(P)}{ln(q)} + 1$ termes dans la somme.*
2. $$S = \frac{P - qD}{1 - q} = \frac{P(1 - q^N)}{1 - q}$$

Démonstration :

1. $$D = u_d = u_0 \times q^d,$$ $$P = u_p = u_0 \times q^p.$$
   Maintenant $S = u_p + \cdots + u_d$ il y a $N = d - p + 1$. Or on a
   $$\frac{D}{P} = \frac{q^d}{q^p},$$ $$\frac{D}{P} = q^{d-p},$$ $$ln(D) - ln(P) = (d - p)ln(q).$$
   donc
   $$d - p = \frac{ln(D) - ln(P)}{ln(q)}$$
   et donc le nombre de termes de la somme $P + \cdots + D$ est :
   $$\frac{ln(D) - ln(P)}{ln(q)} + 1.$$
2. Par récurrence sur N.

– Pour $N = 1$, on a $S = P = D$. Or

$$S = \frac{P - qD}{1 - q} = P$$

La propriété est donc vraie pour $N = 1$.

– On suppose la propriété vraie au rang N donc

$$S = \frac{P - qD}{1 - q}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} S' &= S + D', \\ &= S + qD, \\ &= \frac{P - qD}{1 - q} + qD, \\ &= \frac{P - qD + qD - q^2 D}{1 - q}, \\ &= \frac{P - q^2 D}{1 - q}, \\ &= \frac{P - qD'}{1 - q}, \end{aligned}$$

Le résultat est donc vrai au rang $N + 1$.

◄

Remarque 8 *Pour $x \neq 1$,*

$$S = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Remarque 9 *Si $q = 1$ alors $S = N \times P$.*

5.3 Exemples

Un éditeur revoit ses tarifs au 1er janvier de chaque année. Un livre est vendu au prix unitaire P_0 de 22 euros au 1er janvier 2005. On note P_n le prix unitaire au 1er janvier de l'année $2005+n$.

5.3.1 Cas 1 : augmentation forfaitaire de 1,2 euros

On a alors $P_{n+1} = P_n + 1,2$ par conséquent

$$P_n = 22 + 1,2 \times n$$

Par exemple, le 1er 2010, $n = 5$ et donc $P_5 = 28$ euros.

A partir de quelle date le prix dépassera 40 euros ?

$$\begin{aligned} P_n &\geq 40, \\ 22 + 1,2 \times n &\geq 40, \\ n &\geq 15. \end{aligned}$$

Le prix dépassera 40 euros au 1er janvier 2020.

5.3.2 Cas 2 : augmentation de 3%

Notons R_n le prix à l'instant n dans cette configuration. On a alors $R_{n+1} = R_n \times 1,03$, par conséquent :

$$R_n = 22 \times 1,03^n$$

Par exemple, le 1er 2010, $n = 5$ et donc $R_5 = 25,50$ euros.

A partir de quelle date le prix dépassera 40 euros ?

$$\begin{aligned} R_n &\geq 40, \\ 22 \times 1,03^n &\geq 40, \\ 1,03^n &\geq \frac{40}{22}, \\ n \times \ln(1,03) &\geq \ln\left(\frac{40}{22}\right), \\ n &\geq \frac{\ln\left(\frac{40}{22}\right)}{\ln(1,03)}, \\ n &\geq 20,22. \end{aligned}$$

On prend donc $n = 21$ et on peut affirmer que le prix dépassera 40 euros au 1er janvier 2026.

5.3.3 Suites arithmético géométriques

Définition 16 *On considère une suite* $(u_n) : n \in \mathbb{N}$. *Une suite arithmético-géométrique est de la forme.*

$$u_{n+1} = q \times u_n + r$$

où q *et* r *sont des constantes.*

Exemple 9 *Remboursement pret.*

Théorème 12 *Soit* u *une suite arithmético-Géométrique de paramètres* q *et* r, *alors*

$$u_n = q^n \times \left(u_0 + \frac{r}{q-1}\right) - \frac{r}{q-1}.$$

Démonstration :
Considérer la suite

$$v_n = u_n + \frac{r}{q-1}$$

On peut montrer que cette suite est géométrique.

◀

On verra des exemples en TD.

5.3.4 Une application de l'algèbre linéaire : Suites récurrentes linéaire d'ordre 2

On cherche la forme générale des suites $(u_n)_n$ satisfaisant la relation :

$$u_{n+2} = bu_{n+1} + cu_n,$$

où $u_0,\ u_1$ sont donnés et $b,\ c$ sont des réels fixés. On supposera $b^2 + 4c \geq 0$. Soit E l'ensemble des suites satisfaisant cette condition.

1. Proposez une (ou deux) suite(s) "connue(s)" qui vérifient la relation
2. A l'aide du théorème du rang, donner la forme générale d'une suite de E. [Indication : on pourra considérer l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E \\ (u_0, u_1) & \to & (u_n)_n \end{array}$]