TD – Optimisation

0 – Fonctions d'une variable

Pour s'échauffer

Exercice 1. Trouver le ou les extremums des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$$a)\ f_1(x) = x^2 - 8x + 17 \quad b)\ f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$c)\ f_3(x) = \ln(1 + x^2) \quad d)\ f_4(x) = \sqrt{x} e^{4x^2 - 5x}.$$

Retrouver les résultats du a) b) et c) par des arguments simples.

Exercice 2. Répondre aux questions indépendantes suivantes.

1. Soit f une fonction C^1 sur un intervalle $[a;b]$. Soit $x_0 \in [a;b]$, on suppose que $f'(x_0) = 0$. Est ce que x_0 est un extremum ?
2. Soit f une fonction C^1 sur un intervalle $[a;b]$. On suppose que pour tout x de $[a;b]$, $f'(x) \neq 0$. La fonction f peut elle avoir un min sur $]a;b[$? sur $[a;b]$? mêmes questions pour un max ?
3. Soit $g(x) = 1/x$ définie sur $D =]0;+\infty[$. g admet elle un min sur D ? Quelle est la meilleure constante C vérifiant, pour tout $x > 0$, $g(x) > C$?

Exercice 3. Soit $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

1. Précisez le domaine de définition D_f de f.
2. Trouver les extremums (locaux ou globaux) de f sur l'intervalle I dans les cas suivants : $a)$ $I = D_f$, $b)$ $I = \mathbb{R}_-$, $c)$ $I =]3/2;+\infty[$, $d)$ $I =]2;+\infty[$.
3. Extremum(s) de $h(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$ et $g(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x+1}$ sur leur domaine de définition.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à clement.rau@iut-tlse3.fr , ou bien à venir me voir au bureau B8.

Exercice 4. Soit $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 1$. Déterminer a et b pour que $A(1;2)$ corresponde à un extremum local. Préciser la nature de cet extremum.

Exercice 5. Une entreprise fabrique un article existant déjà sur le marché et dont le prix moyen est de 100 euros. Une étude montre que la fabrication de chaque article lui reviendra à 80 euros. Les coûts fixes de production sont de 300000 euros par an. Si le prix de vente est P (en euros), on estime qu'on vendra un nombre d'articles égal à $200000 - 800P$. Deux stratégies de ventes sont possibles :

1. Fixer le prix $P = 85$ euros pour affaiblir la concurrence.
2. Fixer le prix P tel que le bénéfice soit maximum.

Calculer dans les deux cas le bénéfice au bout d'un an.

Exercice 6. Au mois d'août, un magasin souhaite écouler son stock de crèmes solaires. Quand le prix de vente est de 10 euros, 2000 articles sont vendus par semaine. Quand le prix baisse de 20 centimes, 100 articles de plus sont vendus par semaine. Quel prix de vente faut-il choisir pour avoir un chiffre d'affaire maximum en une semaine. (On supposera que le nombre d'articles vendus est une fonction linéaire du prix de vente)

Exercice 7. Une entreprise fabrique un nombre q d'articles par semaine à un coût total :

$$C = 6q^2 + 80q + 5000.$$

On suppose qu'elle a le monopole, et que le prix p n'est fixé que par le nombre q d'articles fabriqués et est donné par $p = 1080 - 4q$. Montrer que le bénéfice est maximal lorsque $q = 50$.

1 – Fonction de deux variables

Exercice 8. Dans chacun des exemples suivants, f est une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Déterminez les points critiques et leur nature.

$$a)\ f(x,y) = \frac{y}{1+x^2} \qquad b)\ f(x,y) = 3x^3y - xy + y^2 - 4$$
$$c)\ f(x,y) = e^x - xy \qquad d)\ f(x,y) = x^3 + y^2e^x.$$

Exercice 9.

1. Points critiques difficiles à trouver. Soit $f(x,y) = x\ln(y) + y\ln(x) - x^2y^2 + x + y$
   (a) Déterminez et représentez graphiquement le domaine de définition D_f de f.
   (b) Montrer que $(1,1)$ est un point critique pour f. Nature de ce point ?

2. Retrouver qu'un point n'est pas un extremum à l'aide d'outils élémentaires Soit $g(x, y) = x^3+y^3-6(x^2 - y^2)$.
   (a) Montrer que g admet 4 points critiques. Préciser leur nature.
   (b) Pour x réel, en calculant $g(x, x)$, retrouver que $(0; 0)$ n'est pas un extremum local pour g.
3. Exemples de cas possibles lorsque $det(H) = 0$ Soient $h_1(x, y) = 2x^4+y^4+(xy)^6$, $h_2(x, y) = -h_1(x, y)$, $h_3(x, y) = 2x^3 + 3y^3$, et $h_4(x, y) = x^4 - y^4$
   (a) Trouver les points critiques de h_1, h_2, h_3 et h_4. Préciser les matrices Hessiennes. Peut on conclure quant à la nature de ces points avec les conditions d'ordre 2 ?
   (b) Déterminer la nature de ces points à l'aide d'inégalités simples.

Exercice 10.

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 15$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Extremum(s) de f ?
2. Ecrire f comme la somme de carrés. Retrouvez trivialement le résultat de la question précédente.

[*On trouvera* $f(x, y) = (x + 3)^2 + (y - 1)^2 + 5$.]

Exercice 11.

Une firme fabrique un produit qu'elle vend sur deux marchés différents. Soit q_1 (resp. q_2) le nombre de produits vendus sur le premier (resp. le second) marché. On suppose que les prix du produits sont donnés par les fonctions $p_1 = 60-2q_1$ et $p_2 = 80-4q_2$. Le coût de production est donné par la fonction $C = 50 + 40q$, où q est le nombre total de de produits. Calculer q_1 et q_2 pour que le bénéfice soit maximal.

Exercice 12. (**Elasticité**)

Soit f une fonction de plusieurs variables. En économie, on définit *l'élasticité de f par rapport à la variable x*, notée E_x comme étant le rapport de la variation relative de f et de la variation relative de x : si x varie d'une quantité Δx (la variation relative de x est $\Delta x/x$), alors f varie d'une quantité Δf (la variation relative de f est $\Delta f/f$). On en déduit que

$$E_x = \frac{\Delta f/f}{\Delta x/x}$$

Du point de vue mathméatique, E_x peut être approché par : $E_x = \frac{x}{f} \times \frac{\partial f}{\partial x}$.

Ainsi, si x varie de 1%, alors f varie de E_x%.
On considère ici la fonction de production $Q = 16K^{1/2}L^{1/8}$ où Q est la quantité produite, K représente le capital et L le travail (fonction de $Cobb-Douglas$). Calculer les élasticités de la fonction $Q(K, L)$. Calculer la variation relative de Q si la variation relative de K est 1,5% et celle de L est 0,9%.

2 – Optimisation avec contrainte se ramenant à l'étude d'une fonction d'une variable

Exercice 13.

1. Trouver $\max\limits_{\substack{x+y=p \\ x,y\geq 0}} xy$.
   (a) En déduire, quels sont les rectangles d'aire maximale ayant un périmétre donné ?
   (b) Choisiriez vous une maison à base rectangulaire ou carreé ? Pourquoi les casseroles ont une forme circulaire ?
2. Trouver (si il existe) $\min\limits_{x=e^y}(2 - e^{-xe^y})$

Exercice 14.

Étudiez et précisez la nature des extrema éventuels de la fonction définie par :

$$f(x,y) = x^2/9 + (y-1)^2,$$

sous la contrainte $x^2 + 2y = 3$, par la méthode la plus simple.

Exercice 15.

1. Déterminez le minimum de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $2x + y = 5$,
   — en remplaçant une des deux variables par l'autre dans f.
   — en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.
2. Tracer la droite $2x + y = 5$ et quelques courbres de niveaux de la surface $z = f(x,y)$. Interpréter le min.

Exercice 16.

Un firme fabrique dans deux usines différentes un produit. Soit q_1 (resp. q_2) le nombre de produits fabriqués dans la première (resp. la seconde) usine. Le coût de production pour chaque usine est donné par la fonction $C_1 = 200 + 6q_1 + 0,03q_1^2$ pour la première usine et $C_2 = 150 + 10q_2 + 0,02q_2^2$ pour la seconde. L'entreprise veut livrer 100 unités de son produit. La livraison lui coûte 4 euros par article depuis la première usine et 2 euros depuis la seconde usine. Quelles sont les quantités q_1 et q_2 pour minimiser le coût total.

Exercice 17.

Un investisseur achtète 2 types d'actions pour un montant de 400 euros. Soit X_1, X_2 les montants achetés pour chaque action. Une étude montre que le rendement moyen du placement est :

$$R = 0,2X_1 + 0,15X_2,$$

et le risque du placement est : $V = \frac{1}{5}X_1^2 + \frac{1}{10}X_2^2$.

1. Trouver X_1 et X_2 qui minimise le risque. Quel est le rendement associé ?
2. Trouver X_1 et X_2 qui minimise le risque, sous la contrainte $R = 60$. Comparer les résultats.

3 – Optimisation avec contrainte d'égalité (générale)

Exercice 18.

1. Optimiser la fonction $f(x,y) = 2x+y$, sous la contrainte $x^2+y^2 = 5$. Interpréter géométriquement la valeur de f en cet extremum.
2. Refaire l'exercice 14 avec le Lagrangien.

Exercice 19.

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1$. On considère f sous la contrainte $(C)\quad 4x^2 - y^2 = 0$. Montrer que $A = (-4/5; 8/5)$ est un point stationnaire du Lagrangien. A est-il un extremum de f sous la contrainte (C) ?

Exercice 20.

On cherche à optimiser la fonction f qui à tout couple $(x;y)$ associe $f(x;y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 8$.

1. Trouver les points stationnaires du lagrangien.
2. Donner la nature de ces points à l'aide de la matrice Hessienne.
3. Etudier si ces extrema sont globaux, en calculant $f(a+h, b+k)$ où $(a;b)$ est un extremum et h, k réels tels que $(a+h, b+k)$ satisfait à la contrainte.

4 – Optimisation avec contrainte d'inégalité (simple)

Exercice 21.

Calculer les extrema suivants :

1. $\min\limits_{ab\geq 5} a^2 + b^2$. [Prouver au préalable que pour tout nombre a, b, on a : $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.]

   On pourra s'aider d'un dessin pour les questions suivantes.
2. $\max\limits_{x^2+y^2\leq 2} 3x + y$.
3. $\max\limits_{y\leq -x^2+2x} 5x - 4y$.
4. $\max\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x+3y\leq 3\\ 4x+y\leq 6}} x + y$ et $\min\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x+3y\leq 3\\ 4x+y\leq 6}} x - y$.
5. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$. Trouver $\min\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x+y\leq 1}} f(x,y)$ et $\max\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x+y\leq 1}} f(x,y)$

Exercice 22.

1. Dans un repère orthonormé où 1 cm représente 50 unités, construire (on se limitera aux points d'abscisses positives) les droites D_1 , D_2 et D_3 d'équations respectives :

   $$x + y = 500, \quad x + 2y = 750, \quad x + 1,5y = 600.$$

   Déterminer par un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites D_1 et D_3.

2. Un service de restauration rapide propose deux types de sandwiches au fromage :
   - le **mini** composé de : 1 pain rond, 40 g de steak haché et 1 tranche de fromage de 20 g,
   - le **maxi** composé de 1 pain rond, 60 g de steak haché et 2 tranches de fromage de 20 g chacune.

   On note x le nombre de mini sandwiches et y celui de maxi sandwiches vendus par jour.
3. (a) Exprimer à l'aide d'inégalités la contrainte suivante :
   on dispose chaque jour au maximum de 500 pains, de 24 kg de steak et de 15 kg de fromage.

   (b) Déterminer graphiquement l'ensemble des points vérifiant ces inégalités. Justifier la démarche.

   (c) Peut-on vendre chaque jour :
   - 350 mini sandwiches et 125 maxi ?
   - 300 mini sandwiches et 200 maxi ?
   - 250 mini sandwiches et 250 maxi ?

   (d) On réalise un bénéfice de 6 euros sur un mini sandwich et de 8 euros sur la vente d'un maxi. Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice total réalisé par jour $B(x, y)$.

   (e) Représenter les droites correspondant respectivement à un bénéfice de : 2400 euros, 3400 euros, et 3600 euros.
   En déduire en justifiant le nombre de mini sandwiches et de maxi sandwiches à vendre par jour pour obtenir un bénéfice maximal que l'on calculera.

Exercice 23.

Un restaurateur veut acheter des tables et des chaises pour son restaurant. Il veut au moins 15 tables et 70 chaises.
Un fournisseur A lui propose un lot de 1 table et 6 chaises pour 75 euros.
Un fournisseur B lui propose un lot de 1 table et 4 chaises pour 60 euros.
On désigne par x le nombre de lots A et y le nombre de lots B achetés par le restaurateur.

1. On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal. (On ne prendra que les abscisses et les ordonnées positives).
   Tracer les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = -x + 15$ et $y = -1,5x + 17,5$.
2. Soit le système (S) : $\begin{cases} x + y & \geqslant & 15 \\ 3x + 2y & \geqslant & 35 \\ x & \geqslant & 0 \\ y & \geqslant & 0 \end{cases}$
   Vérifier que les contraintes sur x et y, pour qu'il y ait suffisamment de tables et de chaises, se traduisent par le système (S) avec x et y entiers.
3. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système (S) en hachurant la partie du plan qui ne convient pas.
4. On note C le coût de x lots A et y lots B.

   (a) Exprimer C en fonction de x et de y.

   (b) Montrer que $y = -\dfrac{5}{4}x + 19$ est une équation de la droite D correspondant à un coût C de 1140 euros.

   (c) Tracer D.

   (d) Déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B à acheter pour que le coût soit minimum. Quel est ce coût minimum ?

Fin