UNIVERSITE IBN TOFAÏL
FACULTE DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Thèse

Discipline : MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Déformations holomorphes des structures complexes

Présenté par : Houda Bellitir

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse Said ASSERDA et Dan POPOVICI de m'avoir proposé ce sujet et pour leurs aides, leurs motivations, le temps qu'ils ont consacré, leurs disponibilités, leurs réponses rapide à toutes les questions et sans oublier leurs conseils pendant la rédaction. Les mots ne pourraient assez exprimer ma reconnaissance.

J'adresse mes sincères remerciement à Ahmed ZERIAHI de l'institut de mathématiques de Toulouse pour l'intérêt qu'il a porté à ma thèse, son aide et ses encouragements ainsi que son humanisme et générosité et à Hicham AMAL du CRMEF de Kenitra, Omar ALEHYANE de la faculté des sciences d'El jadida et Vincent Guedj de l'institut de mathématiques de Toulouse pour leurs aides, conseils et encouragements.

Je remercie également les rapporteurs et les membres du Jury qui m'honorent par leur participation.

Je remercie tous les professeurs qui m'ont appris les mathématiques tout au long de mes études.

Je remercie tous les doctorants que j'ai rencontré et en particulier les doctorants de mon équipe.

Enfin, je ne saurais trouver des mots de remerciement assez chaleureux pour exprimer toute ma reconnaissance à ma famille pour son soutient constant, en particulier mes parents.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Préliminaires **8**

2.1 Variétés C^∞ et variétés complexes . . . 8

2.1.1 Variétés C^∞ . . . 8

2.1.2 Structure presque complexe . . . 9

2.1.3 Variétés complexes . . . 10

2.2 Variété kählérienne, p-SKT, p-HS, équilibré,Gauduchon et fortement Gauduchon . . . 12

2.3 Opérateur elliptique et symbole principal [Dem12] . . . 18

2.4 Groupes de cohomologie : De Rham, Dolbeault, Bott-Chern et Aeppli . . . 21

2.5 Suite spectrale de Frölicher . . . 23

3 Positivité des Cônes par Déformations des Structures Complexes **25**

3.1 Le cône E_2sG . . . 25

3.1.1 Cohomologie à valeur complexe . . . 25

3.1.2 Cohomologie et métriques fG . . . 28

3.1.3 Cohomologie réelle . . . 32

3.1.4 La dualité des cônes positifs dans la cohomologie de E_2 . . . 33

3.2 La propriété h-$\partial\bar\partial$ des variétés complexes compactes . . . 38

3.2.1 Les relations de commutation et identité de BKN pour les opérateurs d_h . . . 39

3.2.2 h-$\partial\bar\partial$-variétés . . . 43

3.2.3 Cohomologies de h-Bott-Chern et h-Aeppli . . . 46

3.2.4 Ouverture par déformation de la h-$\partial\bar\partial$-propriété . . . 49

4 Stabilité par déformations de variétés admettant des métriques p-SKT et p-HS **54**

4.1 Déformations des variétés admettant des métriques plurifermées . . . 54

4.2 Déformations des variétés p-HS et p-SKT . . . 56

4.3 Limite par déformations des cônes . . . 58

5 Annexes **66**

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse, on explore quelques connexions entre la géométrie métrique des variétés complexes compactes et certains aspects de la théorie de Hodge lié à la suite spectrale de Frölicher (un objet classique reliant la différentielle et les structures complexes, voir par exemple un rappel de la Définition §.2.5 ci-dessous) de ces variétés.

Il est bien connu que l'existence de la métrique de Kähler implique la meilleure dégénérescence possible (i.e. à la première page E_1) de cette suite spectrale. Cependant, Les variétés complexes compactes n'admettent que rarement les métriques de Kähler et aucune autre propriété métrique est actuellement connue pour impliquer la dégénérescence de certaine page de cette suite spectrale. La conjecture suivante a été proposée et résolue dans un cas particulier dans [Pop16].

Conjecture 1.0.1. *Soit X une variété complexe compacte. S'il existe une métrique SKT (i.e. une $(1, 1)$-forme ω C^∞ définie positive telle que $\partial\bar\partial\omega = 0$) sur X, alors la suite spectrale de Frölicher de X dégénère en la deuxième page E_2.*

Le cas général de cette conjecture, qui aura certainement un rôle à jouer dans la théorie de la classification des variétés complexes compactes, toujours ouvert. Dans cette thèse, on étudie une variante possible de celui-ci dans laquelle les métriques SKT sont remplacées par les métriques fortement Gauduchon (fG) et le problème de la dégénérescence est souvent confiné à la cohomologie de X en un degré proche du degré maximal. On s'inspire du résultat de Ceballos-Otal-Ugarte-Villacampa [[COUV16], Théorème 5.6] affirmant que *la suite spectrale de Frölicher de toute nilvariété de dimension réelle 6 munie d'une structure complexe invariante et portant une métrique fG dégénère en E_2* et d'une généralisation possible de cette assertion, ils se demandaient à propos de

Question 1.0.2. *([COUV16, Question 5.7]) A-t-on la suite spectrale de Frölicher de toute variété complexe compacte de dimension 3 portant une métrique fG dégénère en E_2 ?*

Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}}X = n$. Rappelons que les métriques Hermitiennes, définies comme étant des $(1, 1)$-formes ω C^∞ définies positives, existent toujours sur X. Même les *métriques de Gauduchon* ω, définies comme étant des métriques Hermitiennes vérifiant la condition supplémentaire $\partial\bar\partial\omega^{n-1} = 0$, existent toujours (cf. [Gau77b]). Cependant, les *métriques fortement Gauduchon (fG)*, introduites dans [Pop13] dans le contexte des déformations des structures complexes et définies par la condition forte $\partial\omega^{n-1}$ soit $\bar\partial$-exacte, peuvent ne pas exister. Les variétés complexes compactes qui admettent des métriques fG sont appelées des *variétés fortement Gauduchon (fG)* et la notion couvre une large éventail des variétés et élargit considérablement la classe des variétés Kählériennes compactes et leurs modèles biméromorphes (= dites des *variétés de Fujiki de classe $\mathcal{C}$*).

La section 3.1 de cette thèse étudie des éléments de la dégénérescence en E_2 de la suite spectrale de Frölicher des *variétés sGG*, une class des variétés complexes compactes introduite et étudiée dans [PU18a]. Ils sont définies comme étant toute métrique de Gauduchon est fortement Gauduchon. En particulier, les métriques fG existent sur chaque variété sGG. De plus, d'après [[PU18a], Lemme 1.3], une variété complexe compacte X de dimension n est sGG si et seulement si on a le cas particulier du $\partial\bar\partial$-lemma sur X suivant :

Pour toute $(n,\, n-1)$-forme Γ d-fermée sur X, si Γ est ∂-exacte, alors Γ est aussi $\bar\partial$-exacte.

On exploite ce fait d'au moins deux façons dans la section 3.1 :

(1) en montrant que toute variété sGG admet la propriété de la dégénérescence partielle de Frölicher en E_2, i.e. l'application d_2 agissant en bidegré $(n-2,\, n)$ sur la deuxième page de sa suite spectrale de Frölicher est identiquement nulle (cf. Proposition 3.1.3) ;

(2) en introduisant trois versions $\mathcal{S}_X \subset E_2^{n-2,\, n}(X)$, $\widetilde{\mathcal{S}}_X \subset H^{2n-2}_{DR}(X,\, \mathbb{R})$ (cf. Définition 3.1.5) et $\widehat{\mathcal{S}}_X \subset E_2^{n-2,\, n}(X)$ (cf. (3.8)) de cône de positivité qu'on appelle *cône E_2sG* d'une variété complexe compacte donnée X de dimension n. Le terme E_2sG se réfère au fait que ce cône consiste en (double) classes de cohomologie de bidegrées $(n-2,\, n)$ qui est dans la deuxième page de la suite spectrale de Frölicher de X et sont donc un raffinement de la cohomologie de Dolbeault.

L'aspect surprenant est qu'on introduit donc effectivement la notion de positivité pour les classes de cohomologie de bidegrées $(n-2,\, n)$ qui va à l'encontre des notions familières de positivité qui existent en tous bidegrés $(p,\, p)$ (mais non $(p,\, q)$ avec $p \neq q$) en géométrie complexe. Ceci est fait en utilisant les métriques fortement Gauduchon qui permettent à la notion existante de positivité en bidegrées $(n-1,\, n-1)$ de se reporter au bidegrée $(n-2,\, n)$ d'une façon naturelle. Le cône E_2sG est vide si la variété X n'est pas fortement Gauduchon. Il dépend de la structure complexe de X. On étudie cette dépendance en montrant le résultat suivant

Theorem 1.0.3. *Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille holomorphe de variétés complexes compactes de dimension n au-dessus de la boule $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ centrée à l'origine. Supposons que la fibre $X_0 := \pi^{-1}(0)$ est une* **variété sGG**.

Alors, le cône E_2sG de De Rham $\widetilde{\mathcal{S}}_{X_t} \subset H^{2n-2}_{DR}(X,\, \mathbb{R})$ de la fibre $X_t := \pi^{-1}(t) \subset \mathcal{X}$ varie de manière **semi-continue inférieurement** *avec $t \in \Delta$ variant dans un voisinage assez petit de $0 \in \Delta$.*

On veut dire par X la variété lisse qui se trouve derrière toutes les fibres X_t de la famille (connue d'être C^∞ triviale par le théorème classique Ehresmann, mais en général n'est pas holomorphiquement triviale), alors le groupe de cohomologie de De Rham réel $H^{2n-2}_{DR}(X,\, \mathbb{R})$ de dégrée $2n-2$ est indépendant de la (structure complexe de la) fibre X_t. La signification de la *semi-continuité inférieure* en relation avec la dépendance de t du cône E_2sG de De Rham $\widetilde{\mathcal{S}}_{X_t}$ est précise dans le théorème 3.1.9.

On utilise aussi la dualité de Serre (prouvé dans le prochain document commun [PU18b] de D. Popovici et L. Ugarte au moyen du laplacien pseudo-différentiel introduit dans [Pop16]) entre n'importe quel couple $(E_2^{p,\,q}(X),\, E_2^{n-p,\,n-q}(X))$ des espaces vectoriels de bidegrés complémentaires figurant sur la deuxième page de la suite spectrale de Frölicher de X. De cette façon, on montre l'analogue suivant dans notre contexte de la dualité de Lamari [[Lam99], Lemme 3.3] entre le cône pseudo-effective et la fermeture du cône de Gauduchon de toute variété complexe compacte.

Proposition 1.0.4. *Soit X une variété* **sGG** *complexe compacte de dimension n sur laquelle une métrique Hermitienne arbitraire γ est fixée. Le dual de la fermeture du cône*

$$\widehat{\mathcal{S}}_X = \left\{\left[[\Gamma^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}\right]_{d_1} \mid \exists\,\omega \text{ métrique Hermitienne telle que } \partial\Gamma^{n-2,\,n} = -\bar\partial\omega^{n-1}\right\} \subset E_2^{n-2,\,n}(X) \tag{1.1}$$

sous la dualité $E_2^{2,\,0}(X)\times E_2^{n-2,\,n}(X)\longrightarrow\mathbb{C}$ est une cône convexe fermé dans $E_2^{2,\,0}(X)$ consistant en les E_2-classes $[[\theta^{2,\,0}]_{\bar\partial}]_{d_1}$ "représentable" par les courants $\tau^{2,\,0} : C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ γ-positifs.

On se réfère à la Proposition 3.1.16 pour plus d'information et à la Définition 3.1.13 pour la notion *d'un courant γ-positif de bidegré* $(2,\,0)$. C'est un autre prolongement des notions classique de positivité dans la géométrie complexe au bidegré $(p,\,q)$ avec $p\neq q$. Le bidegré $(2,\,0)$ est important surtout sur les *variétés holomorphes symplectiques (non nécessairement Kählérienne)* et on espère qu'il sera traité dans un futur travail.

La section 3.2 de cette thèse porte sur le problème de la dégénérescence de Frölicher et la variation de la structure complexe d'après des points de vue différents qui reste attaché à la théorie des variétés sGG.

Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}}X = n$. Dans [Pop17], pour toute constante positive h, l'opérateur differentiel $d = \partial + \bar\partial$ associé à la structure lisse de X a été modifié à

$$d_h := h\partial + \bar\partial : C^\infty_k(X,\,\mathbb{C}) \to C^\infty_{k+1}(X,\,\mathbb{C}), \qquad k\in\{0,\dots,2n\}, \text{ [1]} \tag{1.2}$$

en modifiant sa partie de type $(1,\,0)$ dans la décomposition induite par la structure complexe de X. Contrairement à d, les opérateurs d_h dépendent de la structure complexe de X en partageant aussi quelques propriétés avec d. Le plus remarquable de ceux-ci est que la d_h-cohomologie de X, reposant sur la propriété d'intégrabilité $d_h^2 = 0$ et définie pour tout $k\in\{0,\dots,2n\}$ par

$$H^k_{d_h}(X,\,\mathbb{C}) = \ker(d_h : C^\infty_k(X,\,\mathbb{C}) \to C^\infty_{k+1}(X,\,\mathbb{C}))\Big/\mathrm{Im}\,(d_h : C^\infty_{k-1}(X,\,\mathbb{C}) \to C^\infty_k(X,\,\mathbb{C})),$$

est isomorphe à la cohomologie de De Rham de X via l'isomorphisme $H^k_{DR}(X,\,\mathbb{C})\ni\{u\}_{DR}\mapsto\{\theta_h u\}_{d_h}\in H^k_{d_h}(X,\,\mathbb{C})$ induit par l'isomorphisme ponctuel

$$\theta_h : \Lambda^{p,\,q}T^\star X \to \Lambda^{p,\,q}T^\star X, \qquad u\mapsto\theta_h u := h^p\,u,$$

au niveau des formes différentielles de type-pure sur X. Les opérateurs d_h prennent dans un certain sens la relation entre les structures lisses et complexes de X.

1. Dans la suite, $C^\infty_k(X,\,\mathbb{C})$ désigne l'espace des k-formes C^∞ sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$.

D'autre part, ils existent dans la littérature au moins deux notions du $\partial\bar{\partial}$-lemma étant satisfaites par une variété complexe compacte qui capture la relation entre la structure lisse et la structure complexe.

(a) Une notion précoce qui a été utilisée par de nombreux auteurs apparaît dans [[DGMS75], Lemmes 5.11 et 5.15]. Elle définie l'accomplissement du $\partial\bar{\partial}$-lemma (ou du dd^c-lemma équivalent) sur une variété complexe compacte par la condition toute forme différentielle lisse u en tout dégrée (mais *non nécessairement de type pure*) qui est à la fois ∂-fermée et $\bar{\partial}$-fermée vérifie l'implication suivante :

$$u \in \operatorname{Im} d \implies u \in \operatorname{Im}(\partial\bar{\partial}). \tag{1.3}$$

Cette implication est actuellement une équivalence puisque l'implication inverse est triviale sur toute variété.

Par exemple, c'est ce qu'on voulait dire par le $\partial\bar{\partial}$-lemma satisfaisant sur une variété donnée dans [AT12].

(b) Dans [Pop14], le terme *$\partial\bar{\partial}$-variété* a été introduit pour dire qu'une variété complexe compacte donnée X vérifie le $\partial\bar{\partial}$-lemma si pour toute forme u de *type-pure* d-fermée sur X, les propriétés d'exactitude suivantes sont équivalentes :

$$u \in \operatorname{Im} d \iff u \in \operatorname{Im}\partial \iff u \in \operatorname{Im}\bar{\partial} \iff u \in \operatorname{Im}(\partial\bar{\partial}). \tag{1.4}$$

La dernière propriété implique trivialement les autres, alors les équivalences ci-dessus sont réduites à chacune des trois autres formes d'exactitude impliquant la $(\partial\bar{\partial})$-exactitude. Puisque u est de type-pure, alors la condition de la d-fermeture sur u est équivalente à u étant supposée à la fois ∂-fermée et $\bar{\partial}$-fermée.

Toute en face, la condition (1.4) est plus restrictive que (1.3), mais (1.4) est seulement requis pour s'appliquer à des *formes de type-pure*. La version (a) du $\partial\bar{\partial}$-lemma (doit être vérifier sur toutes les formes, non nécessairement de type-pure) implique la version (b) est implicite dans [[DGMS75], Lemme 5.15].

Pour toute constante $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on introduit dans cette thèse la notion de *h-$\partial\bar{\partial}$-variété* qui implique la version (a) ci-dessus (donc aussi la version (b)) de la $\partial\bar{\partial}$-condition. L'idée est d'utiliser les opérateurs d_h pour capturer l'interaction entre la structure lisse et la structure complexe.

Définition 1.0.5. *Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une constante arbitraire. Une variété complexe compacte X avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ est appelée* **h-$\partial\bar{\partial}$-variété** *si pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$ et toute k-forme $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$, les conditions d'exactitude suivantes sont équivalente :*

$$u \in Im\, d_h \iff u \in Im\, d_{-h^{-1}} \iff u \in Im\, d \iff u \in Im\,(d_h\, d_{-h^{-1}}) = Im\,(\partial\bar{\partial}).$$

On montre dans le Corollaire 3.2.19 qu'une propriété équivalente est obtenue en enlevant la condition $u \in \operatorname{Im} d$ de la suite des équivalences ci-dessus. Notons que les formes u dans la Définition 1.0.5 ne sont pas forcément de type pure. Contrairement à ∂, $\bar{\partial}$ et $\partial\bar{\partial}$, les opérateurs d_h n'envoie pas les formes de type-pure vers les formes de type-pure, alors la preuve de l'implication "$(a)_n \implies (b)_n$ " dans [[DGMS75], Lemme 5.15] ne s'adapte pas facilement pour montrer l'implication possible "version (a) de la $\partial\bar{\partial}$-propriété $\implies$ la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété". En fait, on ne sait pas si cette dernière implication est satisfaite. A priori, la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété est plus forte lorsque $h \notin \{-1, 1\}$.

En introduisant les d_h-analogues des cohomologies standard de Bott-Chern et Aeppli et suivant le modèle de la preuve, donné par Wu dans [Wu06], de la stabilité par petites déformations de la structure complexe de la $\partial\bar{\partial}$-propriété standard, on montre que l'analogue est vérifié pour notre h-$\partial\bar{\partial}$-propriété.

Theorem 1.0.6. *Fixons une constante arbitraire $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La h-$\partial\bar{\partial}$-propriété des variétés complexes compactes est ouverte par déformations de la structure complexe.*

Voir le Théorème 3.2.16 pour plus de détails.

Une dernière explication est à propos du choix de l'accouplement d_h avec $d_{-h^{-1}}$, plutôt qu'avec le plus naturel $\overline{d}_h = h\, d_{h^{-1}}$. Ce choix nous est imposé par la formule de type Bochner-Kodaira-Nakano (**l'identité de h-BKN**) qu'on établit dans le théorème 3.2.5 comme conséquence de ce qu'on appelle les *relations de h-commutation* qu'on calcul pour les opérateurs d_h et pour une métrique Hermitienne quelconque dans le Lemme 3.2.1. Le couple $(d_h,\, d_{-h^{-1}})$ généralise le couple classique $(d,\, d^c)$ puisque pour $h = -1$, d_{-1} est un multiple constant (qui ne change ni le noyau ni l'image) de $d^c = -JdJ = i(\bar{\partial} - \partial) = i\, d_{-1}$.

L'objectif de la section 4.2 est de montrer que les variétés admettant des (p,p)-formes p-Hermitienne-Symplectique (p-HS) et p-plurifermée (p-SKT) (voir Définition 2.2.9) sont ouvertes par déformations holomorphes si les fibres X_0 sont des $\partial\bar{\partial}$-variétés comme dans le Théorème 4.2.2 et le Théorème 4.2.4 respectivement.

Notons que la propriété p-kählérienne (voir Définition 2.2.9) n'est pas stable par petites déformations (voir [AB90] pour un exemple de cette non stabilité).

C'est une première étape vers une éventuelle résolution de la propreté de la conjecture de Barlet. Avant de présenter cette conjecture rappelons qu'une variété complexe compacte X est dite dans la classe de Fujiki (de classe $\mathcal{C}$) s'il existe une application holomorphe propre biméromorphe (i.e. une modification) $\mu : \tilde{X} \longrightarrow X$ d'une variété Kählérienne compacte $\tilde{X}$ (voir [Var]).
Fujiki a introduit les variétés X de classe $\mathcal{C}$, dans [Fuj], comme étant les images méromorphes des variétés Kählérienne compacte.
D'autre part, notons par $\mathcal{C}^p(\mathcal{X}\diagup\Delta)$ l'espace relatif de Barlet des p-cycles analytiques effectifs contenus dans la fibre X_t, et :

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}\diagup\Delta) = \bigcup_{0\leq p\leq n} \mathcal{C}^p(\mathcal{X}\diagup\Delta)$$

Conjecture 1.0.7. *[Pop10] Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille analytique complexe de variétés complexes compactes telles que la fibre X_t est une variété de classe $\mathcal{C}$ pour tout $t \in \Delta$. Alors les composantes irréductibles de l'espace relatif de Barlet $\mathcal{C}(\mathcal{X}\diagup\Delta)$ des cycles dans $\mathcal{X}$ sont propres au-dessus de Δ dans le sens suivant :*

$$\begin{aligned} P:\ \ \mathcal{C}(\mathcal{X}/\Delta) &\longrightarrow \Delta \\ Z_t &\mapsto P(Z_t) = t \end{aligned}$$

envoyant chaque diviseur $Z_t \subset X_t$ contenu dans une fibre X_t vers un point de base $t \in \Delta$. La restriction de l'application P aux composantes irréductibles de $\mathcal{C}(\mathcal{X}/\Delta)$ sont propres.

On va montrer aussi dans la Proposition 4.3.5 que si les cônes des classes des (p,p)-formes :

$$\mathcal{A}_p(X) = \{[\Omega]_A / \Omega \text{ faiblement strictement positive telle que } \partial\bar{\partial}\Omega = 0\} \subset H_A^{p,p}(X,\mathbb{R}) \subset H_A^{p,p}(X,\mathbb{C})$$

$$\mathcal{C}_p(X) = \{[\Omega]_A / \Omega \text{ faiblement strictement positive telle que } \Omega\ p - HS\} \subset H_A^{p,p}(X,\mathbb{R}) \subset H_A^{p,p}(X,\mathbb{C})$$

sont égaux sur toute fibre X_t sauf éventuellement sur la fibre centrale X_0, alors ils sont égaux sur X_0 si les hypothèses $\tilde{H}_1, \cdots, \tilde{H}_{p+1}$ sont satisfaites pour tout $t \in \Delta \setminus \{0\}$ et si $h_A^{p+k-1,p-k+1}(t) := \dim H_A^{p+k-1,p-k+1}(X_t,\mathbb{C})$, $h_{BC}^{p+k,p-k+1}(t) := \dim H_{BC}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C})$ et $h_{\partial}^{p+k,p-k+1}(t) := \dim H_{\partial}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C})$ sont indépendantes de $t \in \Delta$ pour tout $k \in \{1,\cdots,p+1\}$ avec p fixé .
Finalement, on prouve, sous certaines hypothèses plus faibles que le $\partial\bar{\partial}$-lemma dans le Corollaire 4.3.8, que l'application :

$$\bigoplus_{p+q=k} H_A^{p,q}(X,\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{p+q=2n-k} H_A^{p,q}(X,\mathbb{C}) \hookrightarrow H_{DR}^k(X,\mathbb{C}) \oplus H_{DR}^{2n-k}(X,\mathbb{C})$$

est un isomorphisme.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Variétés C^∞ et variétés complexes

2.1.1 Variétés C^∞

Définition 2.1.1. *Soit (X, τ) un espace topologique séparé connexe paracompacte. On dit que (X, τ) est **une variété topologique de dimension n** si pour tout $p \in X$, il existe une ouvert $U \subset X$ contenant p et $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ homéomorphisme.*

Un atlas topologique $\mathcal{A}$ d'une variété topologique X de dimension n est un recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de X telle que $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha)$ ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On dit que $\mathcal{A}$ est maximale si (U, ϕ) est une carte de X telle que : si $\phi \circ {\phi_\alpha}^{-1} : \phi_\alpha(U \cap U_\alpha) \to \phi(U \cap U_\alpha)$ est un homéomorphisme, alors $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.

*X est une **variété différentielle** de dimension n si X est une variété topologique muni d'un atlas maximale $\mathcal{A}$ tel que : $\forall (U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$:*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

est un C^∞ difféomorphisme.

Définition 2.1.2. *Soit X une variété de classe C^∞. On appelle une métrique Riemannienne de classe C^∞ sur X la donnée, pour tout $m \in X$, d'un produit scalaire g_m (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur $T_m X$ dépendant de manière C^∞ de m i.e. pour toute carte (U, φ) de classe C^∞ sur X, la fonction $m \longmapsto g_m(\frac{\partial}{\partial x_i}(m), \frac{\partial}{\partial x_j}(m)) =: g_{ij}(m)$ est C^p de U dans $\mathbb{R}$. Les coefficients de la matrice $(g_{ij})_{ij}$ sont appelés les coefficients de la métrique dans la carte (U, φ).*

Définition 2.1.3. *Une variété Riemannienne est une variété différentielle muni d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 2.1.4. $\mathrm{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\} = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ *Le demi-plan de Poincaré muni de la métrique :*$g_h = \frac{1}{y^2} g_e$

2.1.2 Structure presque complexe

La structure presque complexe est une autre manière d'introduire les variétés complexes.

Définition 2.1.5. *Une* **structure presque complexe** *sur une variété différentielle lisse X est un endomorphisme $J : TX \longrightarrow TX$ du fibré tangent réel de X tel que $J_x^2 = -Id_{T_xX}$ pour tout $x \in X$ où $Id : T_xX \to T_xX$ est l'application identité.*

En d'autres termes une structure presque complexe équipe l'espace tangent en chaque point par une application linéaire qui se comporte comme la multiplication par $\sqrt{-1}$. Donc la dimension de X doit être pair, car un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension impaire a une valeur propre réelle qui ne peut pas être le carré de -1. La paire (X, J) est appelée une variété presque complexe.

Exemple 2.1.6. *Si X est une variété complexe, alors les cartes holomorphes identifient chaque espace tangent T_pX avec $\mathbb{C}^n$, alors on peut définir $J(v) = \sqrt{-1}v$ pour $v \in T_pM$, donnant une structure presque complexe. Le fait que les fonctions de transition sont holomorphes signifie que la multiplication par $\sqrt{-1}$ est compatible dans les différentes identifications de T_pX avec $\mathbb{C}^n$ en utilisant des différentes cartes .*

Si $z_1, ..., z_n$ sont des coordonnées holomorphes et $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ où x_i et y_i sont des fonctions réelles, avec cette identification, on a :

$$J(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad , \quad J(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Sur une variété presque complexe, il est commode de travailler avec le fibré tangent complexifié

$$T_{\mathbb{C}}X := TX \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{1,0}X + T^{0,1}X, \quad \dim_{\mathbb{C}}T^{1,0}X = \dim_{\mathbb{C}}T^{0,1}X = 2n$$

où $T^{1,0}X$, $T^{0,1}X \subset T^{\mathbb{C}}X$ sont les sous espaces propres de $Id \times J$ affectés aux valeurs propres i et $-i$. On a aussi une décomposition de l'algèbre extérieur complexifié

$$\Lambda^k T^*_{\mathbf{C}}X = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}T^*_{\mathbb{C}}X$$

où

$$\Lambda^{p,q}T^*_{\mathbb{C}}X = \Lambda^p(T^{1,0}X)^* \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q(T^{0,1}X)^*$$

Comme pour les variétés complexes, on note par $C^\infty_{p,q}(X, \mathbb{C})$ l'espace des formes différentielles de classe C^∞ et de bidegrée (p, q) à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il existe une application bilinéaire antisymétrique

$$\theta : C^\infty(X, T^{1,0}X) \times C^\infty(X, T^{1,0}X) \to C^\infty(X, T^{0,1}X)$$

qui tout couple de champs de vecteurs (ζ, η) de type $(1, 0)$ associe la composante $(0, 1)$ du crochet de Lie $[\zeta, \eta]$. Puisque

$$[\zeta, f\eta] = f[\zeta, \eta] + \zeta(f)\eta \qquad \forall\ f \in C^\infty(X, \mathbb{C})$$

on a $\theta(\zeta, f\eta) = f\theta(\zeta, \eta)$. Par suite θ est une $(2, 0)$-forme sur X à valeurs dans $T^{0,1}X$.

Si X est une variété complexe et J est la structure presque complexe usuelle, alors $\theta = 0$ car $[\partial/\partial z_j, \partial/\partial z_k] = 0$ pour tout système de coordonnées holomorphes $(z_1, \cdots, z_n)$.

Définition 2.1.7. *La forme* $\theta \in C^{\infty}_{2,0}(X, T^{0,1}X)$ *est appelée* **la torsion** *de* J*. La structure presque complexe* J *est dite* **intégrable** *si* $\theta = 0$*.*

Si $u \in C^{\infty}_{p,q}(X, \mathbb{C})$, on note ∂u, $\bar{\partial} u$ les composantes de type $(p+1, q)$ et $(p, q+1)$ de $du = \partial u + \bar{\partial} u$. Soit $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ un repère local de $T^{1,0}X$ sur une carte Ω. La torsion θ s'écrit

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \otimes \bar{\zeta}_j, \quad \alpha_j \in C^{\infty}_{2,0}(\Omega, \mathbb{C})$$

Elle définit les opérateurs

$$\theta^{'} u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \otimes (\bar{\zeta}_j \lrcorner u), \quad \theta^{''} u = \sum_{j=1}^{n} \bar{\alpha}_j \otimes (\zeta_j \lrcorner u)$$

de sorte que $\theta^{'} u$ et $\theta^{''} u$ sont de bidegrées $(p+2, q-1)$ et $(p-1, q+2)$ respectivement. De plus $\theta^{'}$ et $\theta^{''}$ sont des dérivations. Pour $\theta^{'}$:

$$\theta^{'}(u \wedge v) = \theta^{'} u \wedge v + (-1)^{\ \deg_u} u \wedge \theta^{'} v$$

Proposition 2.1.8. *On a* $d = \partial + \bar{\partial} - \theta^{'} - \theta^{''}$*.*

Donc (X, J) est intégrable si et seulement si $d = \partial + \bar{\partial}$ i.e la structure (X, J) est complexe. C'est le théorème de Newlansder-Nirenberg dont la preuve est une conséquence des estimées L^2 de Hörmander.

Theorem 2.1.9. *Toute structure presque complexe intégrable* J *sur* X *est définie par une structure analytique complexe unique.*

2.1.3 Variétés complexes

Définition 2.1.10. *. Une* **variété complexe** X *est une variété différentielle de classe* C^{∞} *et de dimension réelle* $2n$ *muni d'une structure presque complexe* J *intégrable.*

D'après le théoreme de Newlander-Nirenberg, il existe un atlas $\mathcal{A} = (U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ formés des cartes holomorphes de X vérifiant :

(i) $\phi_\alpha : U_\alpha \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ est un homéomorphisme pour tout $\alpha \in I$,

(ii) $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ est une application biholomorphe pour tout $\alpha, \beta \in I$.

Une application $f : X \longrightarrow Y$ entre deux variétés complexes est dite holomorphe si

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

est holomorphe pour toutes cartes $(U, \phi) \subset X$ et $(V, \psi) \subset Y$ telles que $f(U) \subset V$.

Un système de coordonnées holomorphes centrées autour d'un point $p \in X$ est constitué par une carte $(U, z_1, \cdots, z_n)$ de X vérifiant $z_i(p) = 0$. Si $(V, \omega_1, ..., \omega_m)$ forment un autre système de coordonnées holomorphe alors chaque ω_i est une fonction holomorphe de $z_1, ..., z_m$.

Exemple 2.1.11. *1- La sphère de Riemann.*
Soit $X = \mathrm{S}^2$ *où* $\mathrm{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ *est la sphère unité. En identifiant* $\mathbb{R}^2$ *avec* $\mathbb{C}$*, la sphère* S^2 *admet deux cartes* $U_1 = \mathrm{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$ *et*

$$\varphi : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

la projection stéréographique du pôle nord au plan xOy *et* $U_2 = \mathrm{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$ *et*

$$\psi : U_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

La composé de la projection stéréographique du pôle sud, au plan xOy*, avec la conjugaison complexe donnent deux cartes holomorphes telles que*

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

2- Espace projectif complexe.
L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *est défini comme étant l'espace des droites complexes dans* $\mathbb{C}^{n+1}$ *passant par l'origine. Plus précisément, on définit la relation d'équivalence* $\sim$ *sur* $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ *par :*

$$(Z_0, ..., Z_n) \sim (\alpha Z_0, ..., \alpha Z_n), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

Alors $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\})/_\sim$ *est l'ensemble des classes d'équivalence.*

Notons par $[Z_0 : ... : Z_n]$ *la classe d'équivalence de* $(Z_0, ..., Z_n)$*. Afin de définir la structure complexe, nous utiliserons* $n+1$ *cartes. Pour* $i \in \{0, 1, ..., n\}$*, soit*

$$U_i = \{[Z_0 : ... : Z_n] / \quad Z_i \neq 0\}$$

et

$$\begin{array}{rl} \varphi_i : & U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ [Z_0 : ... : Z_n] \mapsto & (\frac{Z_0}{Z_i}, ..., \frac{Z_{i-1}}{Z_i}, \frac{Z_{i+1}}{Z_i}, ..., \frac{Z_n}{Z_i}) \end{array}$$

Alors pour $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}^n$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(w_1, ..., w_n) = (\frac{w_1}{w_i}, ..., \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, ..., \frac{w_j}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, ..., \frac{w_n}{w_i})$$

est holomorphe.
Topologiquement, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *peut être vu comme le quotient* $\mathrm{S}^{2n+1}/\mathrm{S}^1$*, où* $\mathrm{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *est la sphère unité et* S^1 *agit comme la multiplication par unité de longueur des nombres complexe. Par suite* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *est compacte.*

3- Sous variétés de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$
Supposons que $f_1, ..., f_k$ *sont des polynômes homogènes* $Z_0, ..., Z_n$*. Même si les* f_i *ne sont pas bien définies sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *leur ensemble des zéros est bien défini.*
Soit $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *leur ensemble des zéros communs*

$$V = \{[Z_0 : ... : Z_n] / f_i(Z_0, ..., Z_n) = 0 \quad pour \quad i = 1, ..., k\}$$

Si V est une sous-variété lisse , alors c'est une variété complexe et les cartes peuvent être construites en utilisant le théorème des fonctions implicites. Étant un sous-ensemble fermé de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, la sous variété V est compacte.

Plus généralement, si X est une variété complexe compacte tel qu'il existe un plongement holomorphe $X \to \mathbf{P}^N(\mathbb{C})$ (i.e une immersion qui soit un homéomorphisme sur son image), on dit que X est une variété projective.

Si X est une variété complexe on désigne par $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^*X)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des (p,q)-formes u à coefficients C^∞ :

$$u = \sum_{|I|=p,|J|=q} u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

où $(z_1, \cdots, z_n)$ est un système de coordonnées holomorphes, $I = (i_1, \cdots, i_p)$, $J = (j_1, \cdots, j_q)$ sont des multi-indices arrangés de manière croissante et

$$dz_I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}, \quad d\bar{z}_J := d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_p}$$

La différentielle extérieure $du \in C^\infty(X, \Lambda^{p+q+1}T^*X)$ et

$$\partial u = \sum_{|I|=p,|J|=q,1\leq k\leq n} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$\bar{\partial} u = \sum_{|I|=p,|J|=q,1\leq k\leq n} \frac{\partial u_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

de sorte que $\partial u \in C^\infty(X, \Lambda^{p+1,q}T^*X)$ et $\bar{\partial} u \in C^\infty(X, \Lambda^{p,q+1}T^*X)$.

2.2 Variété kählérienne, p-SKT, p-HS, équilibré,Gauduchon et fortement Gauduchon

L'objectif de cette section est de rappeler des différents types des métriques lisses. Dans la suite, on suppose que X est une variété complexe compacte, avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, muni d'une structure complexe J.

On rappelle qu'une métrique Riemannienne sur X est une forme bilinéaire symétrique définie positive de classe C^∞ sur chaque espace tangent T_xX de X et qui est C^∞ en $x \in X$.

Définition 2.2.1. *Une métrique Riemannienne g sur X est dite Hermitienne si $g(JZ, JY) = g(Z, Y)$ pour tous les vecteurs tangents $Z, Y \in TX$. En d'autres termes, la structure complexe J est une transformation orthogonale sur chaque espace tangent de X.*

Soit g une métrique Hermitienne, on définit

$$\omega(Z, Y) = g(JZ, Y), \qquad \forall Z, Y \in TX$$

Alors ω est anti-symétrique et définit une 2-forme réelle de type $(1,1)$ sur X.

Définition 2.2.2. *Une métrique Hermitienne g sur X est dite Kählerienne si la $(1,1)$-forme ω est fermée i.e $d\omega = 0$ sur X. La $(1,1)$-forme ω est appelée la forme de Kähler de g.*

En général on confond g et ω. En coordonnées locales $z_1, ..., z_n$, une métrique Hermitienne est déterminée par ses composantes $g_{j,\bar{k}}$ où

$$g_{j,\bar{k}} = g(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k})$$

La condition d'être Hermitienne implique que

$$g(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}) = g(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}) = 0, \quad \forall i, j, k = 1, \cdots, m$$

En termes de composantes , on a :

$$g = \sum_{j,k} g_{j,\bar{k}} (dz_j \otimes d\bar{z}_k + d\bar{z}_k \otimes dz_j)$$

Notons que la barre sur $\bar{k}$ dans les composantes $g_{j,\bar{k}}$ est utilisé pour rappeler la distinction entre les composantes holomorphes et antiholomorphes.

La symétrie de g implique que $\bar{g}_{j,\bar{k}} = g_{k,\bar{j}}$ et la positivité de g signifie que $(g_{j,\bar{k}})_{1 \leq j,k \leq m}$ est une matrice Hermitienne définie positive en chaque point.
La 2-forme ω associée à g s'écrit :

$$\omega = i \sum_{j,k} g_{j,\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

Par suite g est Kählerienne si et seulement si

$$\frac{\partial g_{j,\bar{k}}}{\partial z_i} = \frac{\partial g_{i,\bar{k}}}{\partial z_j}, \quad \forall\ i, j, k = 1, \cdots, n$$

Le théorème suivant nous dit qu'une métrique Hermitienne est Kählerienne si et seulement si la métrique est tangente à l'ordre 2 à une métrique Hermitienne à coefficients constants en tout point de la variété.

Theorem 2.2.3. *Soit ω une $(1,1)$-forme définie positive et de classe C^∞ sur variété complexe M de dimension n. Pour que ω soit Kählerienne il faut et il suffit qu'en tout point $x_0 \in M$, il existe un système de coordonnées holomorphes $(z_1, \cdots, z_n)$ centré en x_0 tel que*

$$\omega = i \sum_{1 \leq j,k \leq n} \omega_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k \ \textit{avec}\ \omega_{jk} = \delta_{jk} + O(|z|^2).$$

Un tel système de coordonnées sera appelée un système de coordonnées géodésiques (ou normales) en x_0.

Preuve. $\Longleftarrow$: supposons que pour tout $x_0 \in M$, il existe une système de coordonnées holomorphes $(z_0, \cdots, z_n)$ centré en x_0 tel que

$$\omega = i \sum_{1 \leq j,k \leq n} \omega_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k \text{ avec } \omega_{jk} = \delta_{jk} + O(|z|^2).$$

Alors ω est définie positive et $d\omega(x_0) = 0$ car $z_j(x_0) = 0$.

$\Longrightarrow$: supposons que ω est Kählérienne. Soit $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ un système de coordonnées centré en x_0 tel que $(d\zeta_0, \cdots, d\zeta_n)$ soit une base orthonormée de $T^*_{x_0}M$. On peut écrire

$$\omega = i \sum_{1 \leq l;m \leq n} \tilde{\omega}_{lm} d\zeta_l \wedge d\bar{z}_m$$

où grâce à la formule de Taylor, on a

$$\tilde{\omega}_{lm} = \delta_{lm} + O(|z|) = \delta_{lm} + \sum_{j=1}^{n} (a_{jlm}\zeta_j + a'_{jlm}\bar{\zeta}_j) + O(|z|^2)$$

Puisque ω est réelle on a $\bar{a}_{jlm} = a'_{jlm}$ et $d\omega = 0$ entraine

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_{lm}}{\partial \zeta_j} = \frac{\partial \tilde{\omega}_{jm}}{\partial \zeta_l} \Longleftrightarrow a_{jlm} = a_{ljm}$$

On pose

$$z_m = \zeta_m + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jlm} \zeta_j \zeta_l \ , \ m = 1, \cdots, n$$

Il est clair que $(z_1, \cdots, z_n)$ est un système de coordonnées locales en x_0 et

$$\left\{ \begin{aligned} dz_m &= d\zeta_m + \tfrac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jlm}(\zeta_j d\zeta_l + d\zeta_j \zeta_l) \\ &= d\zeta_m + \tfrac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jlm} d\zeta_j \zeta_l \\ &= d\zeta_m + \tfrac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} a_{ljm} d\zeta_j \zeta_l \\ &= d\zeta_m + \sum_{j,l=1}^{n} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l \end{aligned} \right.$$

On en déduit alors que $i\sum_{m=1}^{n} dz_m\wedge d\bar z_m$ est égal à

$$\begin{cases} = i\Big(\sum_{m=1}^{n} dz_m\wedge d\bar z_m + \sum_{j,l;m=1}^{n} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l\wedge d\bar z_m + \sum_{j,l;m=1}^{n} \bar a_{jlm}\bar\zeta_j d\zeta_m\wedge d\bar z_l\Big) + O(|z|^2) \\ = i\Big(\sum_{m=1}^{n} dz_m\wedge d\bar z_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l\wedge d\bar z_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} \bar a_{jlm}\bar\zeta_j d\zeta_l\wedge d\bar z_m\Big) + O(|z|^2) \\ = i\Big(\sum_{m=1}^{n} dz_m\wedge d\bar z_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} a_{jlm}\zeta_j d\zeta_l\wedge d\bar z_m + \sum_{j,l,m=1}^{n} a'_{jlm}\bar\zeta_j d\zeta_l\wedge d\bar z_m\Big) + O(|z|^2) \\ = \omega + O(|z|^2). \end{cases}$$

□

Proposition 2.2.4. *Soit X une $\partial\bar\partial$-variété (i.e. vérifiant le $\partial\bar\partial$-lemma). Alors pour tout $p = 0,\cdots,n$ et toute forme $u\in C^\infty_{p,0}(X,\mathbb{C})$ telle que $\bar\partial u = 0$, on a $du = 0$. C'est à dire toute p-forme holomorphe est d-fermée sur une $\partial\bar\partial$-variété.*

Preuve. Soit $u\in C^\infty_{p,0}(X,\mathbb{C})$, alors $du = \partial u + \bar\partial u = \partial u$ car $\bar\partial u = 0$. D'autre part, on a $d\partial u = \bar\partial\partial u = -\partial\bar\partial u = 0$ et comme ∂u est une $(p+1,0)$-forme ∂-exacte, alors d'après le $\partial\bar\partial$-lemma, on a $\partial u\in\ \mathrm{Im}\bar\partial$, i.e. $\partial u = \bar\partial\alpha$ où α est une $(p+1,-1)$-forme. Donc $\alpha = 0$. Il en résulte que $\partial u = 0$. D'où $du = 0$. □

Une caractérisation des surfaces complexes compactes est le résultat de N. Buchdahl [Buc99] et A. Lamari [Lam99] suivant :

Proposition 2.2.5. *Soit X une surface complexe compacte.*

$$X \text{ est Kählérienne} \iff \text{le premier nombre de Betti (noté } b_1\text{) est pair.}$$

Maintenant, on donne quelques exemples et contre-exemple de variété Kählérienne.

Exemple 2.2.6. ***Métrique de Fubini-Study***. *L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ a une métrique de Kähler naturelle ω_{FS} appelé métrique de Fubini-Study. Soit ω la $(1,1)$-forme sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ définie par*

$$\omega = \pi^*(i\partial\bar\partial\log\|z\|)$$

où $\pi : \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est la projection canonique et $\|z\|^2 = \sum_{i=0}^{n}|z_i|^2$. Montrons que ω est bien définie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Sur $U_i = \{[z], z_i\neq 0\}$ on a

$$\omega_i = \frac{i}{2}\partial\bar\partial\log(1+\sum_{l=0,l\neq i}^{n}\Big(1+\frac{|z_l|^2}{|z_i|^2}\Big)) + i\partial\bar\partial\log|z_i|$$

Mais $\partial\bar\partial\log|z_i| = 0$ sur U_i car $[z]\in U_i\to z_i$ est holomorphe et sans zéros. Sur $U_i\cap U_j$, on a

$$\omega_{i_{|U_i\cap U_j}} = \frac{i}{2}\partial\bar\partial\log(1+\sum_{l=0,l\neq i,j}^{n}(1+\frac{|z_l|^2}{|z_i|^2}) + i\partial\bar\partial\log\frac{|z_j|}{|z_i|}$$

Mais

$$i\partial\bar{\partial}\log\frac{|z_j|}{|z_i|}\ |_{U_i\cap U_j}= 0$$

car l'application

$$z\in U_i\cap U_j\to\frac{z_j}{z_i}$$

est holomorphe et sans zéros par suite le logarithme de son module est pluri-harmonique. D'où

$$\omega_{i_{|U_i\cap U_j}}=\omega_{j_{|U_i\cap U_j}}$$

La $(1,1)$-forme ω est $U(n+1)$-invariante et $U(n+1)$ agit transitivement sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Pour vérifier que ω est définie positive, il suffit de vérifier que la matrice Hermitienne correspondante est définie positive en un seul point. Prenons par exemple le point $[1,0,...,0]$ et utilisons les coordonnées locales holomorphes $\zeta_i=\frac{z_i}{z_0}$ pour $i=1,...,n$ sur la carte U_0. Sur cette carte on a donc

$$\omega=\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(1+|\zeta_1|^2+...+|\zeta_n|^2)$$

qui à l'origine égale à $\frac{i}{2}\sum_i d\zeta_i\wedge d\bar{\zeta_i}=\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}|\zeta|^2$ qui est donc définie positive . Il est claire que ω est fermé car il est localement exacte. On note cette métrique par ω_{FS} appelée métrique de Fubini-Study de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Exemple 2.2.7. *Si $F:V\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est une variété projective alors la $(1,1)$-forme de $F^*(\omega_{FS})$ définit bien une métrique de Kähler sur V car $dF^*(\omega_{FS})=F^*(d\omega_{FS})=0$ et $i\partial\bar{\partial}F^*(\omega_{FS})=F^*(i\partial\bar{\partial}\omega_{FS})>0$ sur V car F est une immersion i.e $rang(dF)=dim_{\mathbb{C}}V$.*

Exemple 2.2.8. *(Voir par exemple [AB91], [Dem12], [Pop14] et [Sch07]) Soit G le groupe de Lie complexe connexe, simplement connexe (le groupe de Heisenberg) suivant :*

$$G=\left\{M=\begin{pmatrix}1&x&z\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}\in GL(3,\mathbb{C})\,/\,x,\ y,\ z\in\mathbb{C}\right\}\simeq\mathbb{C}^3$$

et soit H le sous-groupe discret de G consistant en les matrices avec des entiers dans $\mathbb{Z}[i]:=\{x+iy\,/\,x,y\in\mathbb{Z}\}$

$$H=\{\Gamma\in G\,/x,y,z\in\mathbb{Z}[i]\}\subset G$$

La variété d'Iwasawa est définie comme étant le quotient $X:=G/H$.
La 1-forme holomorphe sur G

$$G\ni M\mapsto M^{-1}dM=\begin{pmatrix}0&dx&dz-xdy\\0&0&dy\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Elle définit une 1-forme holomorphe sur X. On dispose de trois 1-formes remarquables sur X :

$$\phi_1:=dx,\quad\phi_2:=dy\ \text{et}\ \phi_3:=dz-xdy$$

qui sont holomorphes mais $d\phi_3=-\phi_1\wedge\phi_2\neq0$ sur X. Par conséquent la variété d'Iwasawa X n'est pas Kählérienne.

Maintenant, on introduit la variété p-Hermitienne-Symplectique (p-HS) et la variété p-plurifermée (p-SKT) comme suit :

Définition 2.2.9. *Soit Ω une $(p,p)-$forme réelle C^∞ faiblement strictement positive (voir la Définition 5.0.11).*

*(i) Ω est appelée $p-$**Hermitienne-symplectique** ($p-HS$) s'ils existent $\alpha^{i,2p-i} \in C^\infty_{i,2p-i}(X,\mathbb{C})$ pour $i = 0, \cdots, 2p$ telles que*

$$d(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{i,2p-i} + \Omega + \sum_{i=0}^{p-1} \overline{\alpha^{i,2p-i}}) = 0.$$

*(ii) Ω est dite p-**plurifermée** ($p-SKT$) si $\partial\bar\partial\Omega = 0$.*

(iii) X est $p-SKT$ (resp. $p-HS$) s'il existe une forme $p-SKT$ (resp. $p-HS$) sur X.

*(iv) [AB91] Une variété complexe compacte X est dite p-**Kählérienne** si elle admet une $(p,p)-$forme Ω faiblement strictement positive d-fermée appelée une forme $p-$Kählérienne.*

Lorsque $p = 1$, d'après ([ST10], Proposition 1.6), une surface complexe est Hermitienne-symplectique si et seulement si elle est Kählérienne. Donc tout exemple de variété complexe admettant une structure Hermitienne-symplectique qui n'est pas Kählérienne doit être de dimension supérieure à 2.

Définition 2.2.10. *Soit X une variété complexe compacte de dimension n.*
Soit $\omega > 0$ une $(1,1)$-forme C^∞ définie positive. ω est dite une métrique :

*(i) de **Gauduchon** [Gau77b] si $\partial\omega^{n-1}$ est $\bar\partial$-fermée sur X, c'est à dire $\partial\bar\partial\omega^{n-1} = 0$.*

*(ii) **fortement Gauduchon** (ou fG) [Pop13] si $\partial\omega^{n-1}$ est $\bar\partial$-exacte sur X.*

*(iii) **équilibrée** (terminologie de [Mich83]) ou **semi-Kählérienne** (terminologie de [Gau77a]) si $d\omega^{n-1} = 0$ sur X.*

(iv) Une variété est appelée de Gauduchon, fortement Gauduchon ou équilibrée si elle admet une métrique de Gauduchon, fortement Gauduchon ou équilibrée respectivement.

Notons que, d'après [Gau77b], il existe toujours une métrique de Gauduchon. Il est clair que si une métrique ω est fortement Gauduchon, alors ω est de Gauduchon. D'autre part, il existe des variétés qui ne sont pas fortement Gauduchon, par exemple les variétés de Calabi-Eckmann[CE53], les variétés de Hopf [Hop48] et les variétés de Tsuji [Tsu84]. Les variétés vérifiant le $\partial\bar\partial$-lemma et les variétés équilibrée sont toujours fortement Gauduchon. De plus les notions Gauduchon et fG sont équivalentes lorsque X est supposée $\partial\bar\partial$-variété [Pop13]. Puisque toute variété complexe compacte parallélisable est équilibrée ([AB91], Remarque 3.1), alors la variété d'Iwasawa 2.2.8 est équilibrée, par conséquent fortement Gauduchon. En dimension 2, on a les équivalences suivantes :

$$X \text{ Kählérienne} \iff X \text{ équilibrée} \iff X\ \partial\bar\partial\text{-variété} \iff X \text{ fG}$$

2.3 Opérateur elliptique et symbole principal [Dem12]

Soit X une variété différentielle de classe C^∞, $\dim_{\mathbb{R}} X = m$. Soient E et F des $\mathbb{K}$-fibrés vectoriels sur X, $rg(E) = r$, $rg(F) = r'$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.

Définition 2.3.1. *Un opérateur différentiel linéaire de degré δ de E vers F est un opérateur $\mathbb{K}$-linéaire :*

$$P : C^\infty(X, E) \longrightarrow C^\infty(X, F)$$
$$u \longmapsto Pu$$

de la forme :

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leq \delta} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

$E_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^r$, $F_{|U} \simeq U \times \mathbb{K}^{r'}$ *étant trivialisés localement sur un ouvert de carte $U \subset X$ muni des coordonnées locales $(x_1, ..., x_m)$ et les coefficients $a_\alpha(x)$ étant des matrices $(a_{\alpha\lambda\mu}(x))_{1\leq\lambda\leq r', 1\leq\mu\leq r}$ à coefficients C^∞ sur U.*

Remarque 2.3.2.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$$

Définition 2.3.3. *Le symbole principal de P est défini par :*

$$\sigma_P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = \delta} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad \forall \xi \in T_x^* X$$

avec $\xi = \sum_{j=1}^m \xi^j dx_j$ et $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_{a_1}} ... \xi_m^{\alpha_{a_m}}$ et *$\sigma_P(x, \xi) : E_x \longrightarrow F_x$ est un morphisme , $\forall x \in X$, $\forall \xi \in T_x^* X$. On a donc :*

$$\sigma_P : T^* X \longrightarrow Hom(E, F).$$

P est dit elliptique si , $\forall \xi \in T^* X \backslash \{0\}$, $\forall x \in X$,

$$\sigma_P(x, \xi) : E_x \longrightarrow F_x$$

est injectif.

Remarque 2.3.4. *Si $t \in \mathbb{K}$ est un paramètre ,$f \in C^\infty(X, \mathbb{K})$, $u \in C^\infty(X, E)$:*

$$e^{-tf(x)} P(e^{tf(x)} u(x)) = t^\delta \sigma_P(x, df(x)) u(x) + \textit{termes en } c_j(x)\, t^j,\ j < \delta.$$

Le symbole principal de Q o P est :

$$\sigma_{Q\ o\ P}(x, \xi) = \sigma_Q(x, \xi) \sigma_P(x, \xi) \quad (\textit{produit matriciel}).$$

Définition 2.3.5. *Supposons que X est orientée et munie d'une forme volume $dV(x) = \gamma(x) dx_1 \wedge ... \wedge dx_m$ de classe C^∞, $\gamma(x) > 0$ une densité C^∞.*

Si E est un fibré vectoriel euclidien ou hermitien, on définit :

$$L^2(M,E) = \{u : X \longrightarrow \Lambda^{p,q}T^*X \otimes E / \int_X |u(x)|^2 dV(x) < +\infty\}$$

où $u : X \longrightarrow \Lambda^{p,q}T^*X \otimes E$ est une forme à coefficients mesurables et $u(x) \in \Lambda^{p,q}T^*_x X \otimes E_x$ qui est muni d'une structure euclidienne ou Hermitienne induite par la forme volume.
On munit cet espace du produit scalaire :

$$\ll u, v \gg = \int_X \langle u(x), v(x)\rangle dV(x)$$

La norme L^2 est alors définie par :

$$\|u\|^2 = \int_X |u(x)|^2 dV(x).$$

Muni de ce produit scalaire l'espace $L^2(X,E)$ est un espace de Hilbert.

On va maintenant voir que tout opérateur différentiel admet un adjoint pour le produit scalaire de L^2 appelé adjoint formel.

Proposition-définition 2.3.6. ***(l'existence d'un adjoint formel)***
Soit $P : C^\infty(X,E) \longrightarrow C^\infty(X,F)$ un opérateur différentiel. Il existe alors un unique opérateur différentiel

$$P^* : C^\infty(X,F) \longrightarrow C^\infty(X,E)$$

appelé adjoint formel de P tel que pour toutes sections $u \in C^\infty(X,E)$ et $v \in C^\infty(X,F)$, on a :

$$\ll Pu, v \gg = \ll u, P^*v \gg$$

où $supp(u) \cap supp(v)$ est compact.

Preuve. Unicité : soit $P : C^\infty(X,E) \longrightarrow C^\infty(X,F)$ possédant deux adjoints formels :

$$P^* : C^\infty(X,F) \longrightarrow C^\infty(X,E) \quad \text{et} \quad Q^* : C^\infty(X,F) \longrightarrow C^\infty(X,E)$$

tels que $\forall u \in C^\infty(X,E)$, $\forall v \in C^\infty(X,F)$ on a :

$$\ll Pu, v \gg = \ll u, P^*v \gg = \ll u, Q^*v \gg$$

Ceci est bien défini car $C^\infty(X,E) \subset L^2(X,E)$ et $C^\infty(X,F) \subset L^2(X,F)$).
Montrons que $\forall v \in C^\infty(X,F) : P^*v = Q^*v$.
Soit $v \in C^\infty(X,F)$, alors pour $u \in C^\infty(X,E)$ on a :

$$\ll u, P^*v \gg = \ll u, Q^*v \gg \quad \Longleftrightarrow \quad \ll u, (P^* - Q^*)v \gg = 0$$

Soit $(f,g) \in L^2(X,E) \times L^2(X,F)$, par continuité de l'opérateur différentiel et par densité de $C^\infty(X,E)$ à support compact dans $L^2(X,E)$, on peut étendre P et P^* à L^2 et :

$$\ll f, (P^* - Q^*)g \gg = 0 \Longrightarrow (P^* - Q^*)g = 0, \quad \forall g \in L^2(X,F)$$

car $\ll .,. \gg$ est un produit scalaire sur $L^2(X,E)$. Donc $P^*g = Q^*g$ et en particulier $P^*v = Q^*v$.

Existence : soit $Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leq\delta} a_\alpha(x)D^\alpha u(x)$ le développement de P dans des trivialisations de E et de F dans les repères orthonormés et des systèmes de coordonnées locales sur $U \subset X$ ouvert de X. On suppose de plus que $supp\, u \cap supp\, v$ est compact dans U.

$$\begin{aligned}
\ll Pu, v \gg &= \int_U \langle Pu(x), v(x)\rangle dV(x) \\
&= \int_U \langle \sum_{|\alpha|\leq\delta} a_\alpha(x)D^\alpha u(x), v(x)\rangle dV(x) \\
&= \int_U \sum_{|\alpha|\leq\delta, 1\leq\lambda\leq r', 1\leq\mu\leq r} a_{\alpha\lambda\mu}(x)D^\alpha u_\mu(x)\bar{v_\lambda}(x)\gamma(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_m \\
(par\ stockes) &= \int_U \sum_{|\alpha|\leq\delta, 1\leq\lambda\leq r', 1\leq\mu\leq r} u_\mu(x)(-1)^{|\alpha|}\overline{D^\alpha \bar{a}_{\alpha\lambda\mu}(x)v_\lambda(x)\gamma(x)}dx_1 \wedge ... \wedge dx_m \\
&= \int_U \langle u(x), \sum_{|\alpha|\leq\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma^{-1}(x)D^\alpha \gamma(x)^t\bar{a}_\alpha(x)v(x)\rangle dV(x)
\end{aligned}$$

On pose alors sur U :

$$P^*v(x) = \sum_{|\alpha|\leq\delta} (-1)^{|\alpha|}\gamma^{-1}(x)D^\alpha \gamma(x)^t\bar{a}_\alpha(x)v(x)dV(x)$$

et on conclut par un argument de partition de l'unité. $\square$

Remarque 2.3.7.

$$\sigma_{P^*}(x,\xi) = (-1)^\delta \sum_{|\alpha|=\delta}^{t} \bar{a}_\alpha(x)\xi^\alpha = (-1)^\delta(\sigma_P(x,\xi))^*.$$

Si $rg(E) = rg(F)$, P est elliptique si et seulement si $\sigma_P(x,\xi)$ est inversible pour $\xi \neq 0$ et donc P est elliptique si et seulement si P^* est elliptique.

Puisque les opérateurs $\Delta := dd^* + d^*d$ et $\Delta'' := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ sont elliptiques, alors le théorème principal de la décomposition en trois espaces suivant va nous donner assez facilement l'isomorphisme de Hodge qui à tout élément du groupe de cohomologie de De Rham fait correspondre une et une seule forme harmonique dans ker Δ et qui a tout élément du groupe de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$ fait correspondre une et une seule (p,q)-forme harmonique dans ker Δ''

Theorem 2.3.8. *Pour tout k ,il existe une décomposition orthogonale :*

$$C_k^\infty(X,\mathbb{C}) = \ker\Delta \oplus\ Im\ d \oplus\ Im\ d^*$$

et pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a la décomposition orthogonale suivante :

$$C_{p,q}^\infty(X,\mathbb{C}) = \ker\Delta'' \oplus\ Im\ \bar{\partial} \oplus\ Im\ \bar{\partial}^*$$

2.4 Groupes de cohomologie : De Rham, Dolbeault, Bott-Chern et Aeppli

Soit X une variété complexe avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. On considère, pour $k \in \{0, \cdots, 2n\}$, l'espace $C_k^{\infty}(X, \mathbb{C})$ des formes C^{∞} de degré k à valeurs complexe sur X et, pour $p, q \in \{0, \cdots, n\}$, l'espace $C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C})$ des formes C^{∞} de bidegré (p, q). On a la décomposition suivante :

$$C_k^{\infty}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{0 \leq p,q \leq n \\ p+q=n}} C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C})$$

On considère le différentielle $d : C_k^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{k+1}^{\infty}(X, \mathbb{C})$ avec $d = \partial + \bar{\partial}$ où

$$\partial : C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{p+1,q}^{\infty}(X, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \bar{\partial} : C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{p,q+1}^{\infty}(X, \mathbb{C})$$

.

• Le groupe de cohomologie de De Rham, pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$, est :

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) = \frac{\ker\{d : C_k^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{k+1}^{\infty}(X, \mathbb{C})\}}{\operatorname{Im}\{d : C_{k-1}^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_k^{\infty}(X, \mathbb{C})\}}$$

avec $\Delta = dd^* + d^*d$ est le Laplacien associé à la cohomologie de De Rham, où d^* est l'adjoint formel de d par rapport à $\ll \cdot, \cdot \gg$.

• Le groupe de cohomologie de Dolbeault est défini, pour tout $p,\ q \in \{0, 1, \cdots, n\}$, par :

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) = \frac{\ker\{\bar{\partial} : C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{p,q+1}^{\infty}(X, \mathbb{C})\}}{\operatorname{Im}\{\bar{\partial} : C_{p,q-1}^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C})\}}$$

avec $\Delta'' = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$ le Laplacien associé à la cohomologie de Dolbeault, où $\bar{\partial}^*$ est l'adjoint formel de $\bar{\partial}$ par rapport à $\ll \cdot, \cdot \gg$.

Maintenant, on suppose que X est une variété complexe compacte munie d'une métrique Hermitienne ω avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Notons que Δ et Δ'' sont des opérateurs différentiels elliptiques et auto-adjoints. D'après le théorème d'isomorphisme de Hodge ([Dem12], Chapitre IV) les groupes de cohomologie de De Rham et de Dolbeault sont de dimension finie et on a :

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) \simeq \ker\{\Delta : C_k^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_k^{\infty}(X, \mathbb{C})\} = \mathcal{H}_{DR}^k(X, \mathbb{C}).$$
$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, \mathbb{C}) \simeq \ker\{\Delta'' : C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{p,q}^{\infty}(X, \mathbb{C})\} = \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(X, \mathbb{C}).$$

De plus on a le théorème de décomposition de Hodge suivant :

Theorem 2.4.1. ***(Décomposition de Hodge).***
Si X une variété kählérienne compacte . On a alors les isomorphismes canoniques (c'est à dire elles sont indépendantes du choix de la métrique kählérienne sur M) :

$$H_{DR}^k(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, \mathbb{C}) \quad (\textit{ Décomposition de Hodge })$$

$$\overline{H^{p,q}(X, \mathbb{C})} \simeq H^{q,p}(X, \mathbb{C}) \quad (\textit{ Symétrie de Hodge })$$

• La cohomologie de Bott-Chern (voir par exemple [Sch07]) est, la plus fine des cohomologies, définie, pour tout $p,\, q \in \{0, 1, \cdots, n\}$, par :

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) = \frac{\ker\{\partial : C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p+1,q}(X,\mathbb{C})\} \cap \ker\{\bar\partial : C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p,q+1}(X,\mathbb{C})\}}{\mathrm{Im}\ \{\partial\bar\partial : C^\infty_{p-1,q-1}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})\}}$$

On définit l'opérateur :

$$\Delta_{BC} := \partial^*\partial + \bar\partial^*\bar\partial + (\partial\bar\partial)(\partial\bar\partial)^* + (\partial\bar\partial)^*(\partial\bar\partial) + (\partial^*\bar\partial)^*(\partial^*\bar\partial) + (\partial^*\bar\partial)(\partial^*\bar\partial)^*$$

Laplacien de Bott-Chern d'ordre 4 elliptique et auto-adjoint, et on a

$$\mathcal{H}^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) = \ker\Delta_{BC} = \ker\partial \cap \ker\bar\partial \cap \ker\,(\partial\bar\partial)^*$$

De plus, on obtient l'isomorphisme de Hodge $H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C})$, et on a même la décomposition en 3 espaces :

$$C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) = \ker\Delta_{BC} \oplus\ \mathrm{Im}\ \partial\bar\partial \oplus (\ \mathrm{Im}\ \partial^* +\ \mathrm{Im}\ \bar\partial^*)$$

• La cohomologie d'Aeppli (voir par exemple [Sch07]) est, la plus "grossière" des cohomologies, définie, pour tout $p,\, q \in \{0, 1, \cdots, n\}$, par :

$$H^{p,q}_{A}(X,\mathbb{C}) = \frac{\ker\{\partial\bar\partial : C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p+1,q+1}(X,\mathbb{C})\}}{(\mathrm{Im}\ \{\partial : C^\infty_{p-1,q}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})\} + \mathrm{Im}\ \{\bar\partial : C^\infty_{p,q-1}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})\})}$$

On définit l'opérateur

$$\Delta_A := \partial\partial^* + \bar\partial\bar\partial^* + (\partial\bar\partial)^*(\partial\bar\partial) + (\partial\bar\partial)(\partial\bar\partial)^* + (\partial\bar\partial^*)(\partial\bar\partial^*)^* + (\partial\bar\partial^*)^*(\partial\bar\partial^*)$$

Laplacien d'Aeppli d'ordre 4 elliptique et auto-adjoint. On obtient

$$C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C}) = \ker\Delta_A \oplus (\ \mathrm{Im}\ \partial +\ \mathrm{Im}\ \bar\partial) \oplus\ \mathrm{Im}\ (\partial\bar\partial)^* \quad \text{et} \quad \ker\Delta_A = \ker\partial^* \cap \ker\bar\partial^* \cap \ker\,(\partial\bar\partial)$$

On obtient l'isomorphisme de Hodge : $H^{p,q}_{A}(X,\mathbb{C}) \simeq \ker\Delta_A = \mathcal{H}^{p,q}_{A}(X,\mathbb{C})$.

Pour toute variété complexe compacte de dimension n, il existe des applications linéaires canoniques :

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C}), \quad H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p+q}_{DR}(X,\mathbb{C})$$

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}_{A}(X,\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad H^{p,q}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}_{A}(X,\mathbb{C})$$

En général, ces applications ne sont ni injectives ni surjectives. Néanmoins, si X est une $\partial\bar\partial$-variété, alors les applications :

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C}), \quad H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}_{A}(X,\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad H^{p,q}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C}) \to H^{p,q}_{A}(X,\mathbb{C})$$

sont des isomorphismes et les applications :

$$H^{p,q}_{BC}(X,\mathbb{C}) \to H^{p+q}_{DR}(X,\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad H^{p,q}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C}) \to H^{p+q}_{DR}(X,\mathbb{C})$$

sont des injections.

2.5 Suite spectrale de Frölicher

Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.
Soit $(E_r,\, d_r)$ la suite spectrale de Frölicher de X. Elle relie la cohomologie de De Rham avec sa cohomologie de Dolbeault X comme suit. La $0^{\text{ème}}$ page présente les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (de dimension infinie) $E_0^{p,\,q} = C^\infty_{p,\,q}(X,\,\mathbb{C})$ des formes C^∞ de bidegrées $(p,\,q)$ quelconque avec $0 \leq p, q \leq n$ et les applications linéaires

$$\ldots \xrightarrow{d_0} E_0^{p,\,q}(X) \xrightarrow{d_0} E_0^{p,\,q+1}(X) \xrightarrow{d_0} \ldots, \quad \text{où } d_0 = \bar{\partial}.$$

La $1^{\text{ère}}$ page est définie par la cohomologie de la $0^{\text{ème}}$ page et consiste en les groupes de cohomologie de Dolbeault (de dimension infinie).

$$E_1^{p,\,q}(X) = H^{p,\,q}(X,\,\mathbb{C}) = \ker(d_0 : E_0^{p,\,q}(X) \to E_0^{p,\,q+1}(X))/\mathrm{Im}\,(d_0 : E_0^{p,\,q-1}(X) \to E_0^{p,\,q}(X))$$

et les applications linéaires

$$\ldots \xrightarrow{d_1} E_1^{p,\,q}(X) \xrightarrow{d_1} E_1^{p+1,\,q}(X) \xrightarrow{d_1} \ldots$$

sont définies par ∂ en cohomologie comme suit : $d_1([\alpha]_{\bar{\partial}}) = [\partial\alpha]_{\bar{\partial}}$ pour tout $[\alpha]_{\bar{\partial}} \in E_1^{p,\,q}$.

Ensuite on continue, par induction, et on définit la $r^{\text{ème}}$ page comme la cohomologie de la $(r-1)^{\text{ème}}$ page, autrement dit

$$E_r^{p,\,q}(X) = \ker(d_{r-1} : E_{r-1}^{p,\,q}(X) \to E_{r-1}^{p+r-1,\,q-r+2}(X))/\mathrm{Im}\,(d_{r-1} : E_{r-1}^{p-r+1,\,q+r-2}(X) \to E_{r-1}^{p,\,q}(X)),$$

où les applications linéaires d_r sont de bidegrées $(r,\,-r+1)$ sur chaque page r. En particulier, la $2^{\text{ème}}$ page est sous la forme

$$\ldots \xrightarrow{d_2} E_2^{p,\,q}(X) \xrightarrow{d_2} E_2^{p+2,\,q-1}(X) \xrightarrow{d_2} \ldots,$$

où chaque espace $E_2^{p,\,q}(X)$ consiste en la double classe de cohomologie $\Big[[\alpha]_{\bar{\partial}}\Big]_{d_1}$ des $(p,\,q)$-formes α C^∞ vérifiant les conditions suivantes :

$$\bar{\partial}\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \partial\alpha \in \mathrm{Im}\,\bar{\partial}, \tag{2.1}$$

tandis que chaque application $d_2 : E_2^{p,\,q}(X) \longrightarrow E_2^{p+2,\,q-1}(X)$ est définie par

$$d_2\left(\Big[[\alpha]_{\bar{\partial}}\Big]_{d_1}\right) = \Big[[\partial u_1]_{\bar{\partial}}\Big]_{d_1} \quad \text{où } u_1 \text{ est une forme telle que } \partial\alpha = \bar{\partial}u_1. \tag{2.2}$$

La définition de d_2 est indépendante du choix du $\bar{\partial}$-potentiel u_1.

Il est facile de vérifier que la condition d'annulation d'un élément quelconque $\Big[[\alpha]_{\bar{\partial}}\Big]_{d_1} \in E_2^{p,\,q}(X)$ est

$$\Big[[\alpha]_{\bar{\partial}}\Big]_{d_1} = 0 \iff \exists u \in C^\infty_{p-1,\,q}(X,\,\mathbb{C}) \cap \ker\bar{\partial} \text{ et } v \in C^\infty_{p,\,q-1}(X,\,\mathbb{C}) \text{ telles que } \alpha = \partial u + \bar{\partial}v. \tag{2.3}$$

Définition 2.5.1. *(voir [Dem96]) On dit que la suite spectrale dégénère en E_r si $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$ pour tout p, q (et donc aussi $E_r^{p,q} = E_{r+l}^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ pour tout $l \geq 0$).*

Notons par $b_k := \dim H^k_{DR}(X, \mathbb{C})$ le nombre de Betti et $h^{p,q} := \dim H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X, \mathbb{C})$ le nombre de Hodge.
La dégénérescence en E_r est une propriété purement numérique équivalente à l'identité

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} E_\infty^{p,q}(X)$$

pour tout k et on a $\dim E_\infty^{p,q}(X) \leq \cdots \leq \dim E_r^{p,q}(X) \leq \cdots \leq \dim E_1^{p,q}(X)$ (pour plus de détails, voir [Dem96]). Lorsque la variété est Kähérienne, la suite spectrale de Frölicher dégénère en E_1.

Chapitre 3

Positivité des Cônes par Déformations des Structures Complexes

Les résultats ci-dessous sont en collaboration avec Dan Popovici dans [BP18] et sous la codirection de Said Asserda.

3.1 Le cône E_2sG

Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

3.1.1 Cohomologie à valeur complexe

On va d'abord traiter essentiellement la cohomologie de De Rham de X à valeurs dans $\mathbb{C}$ et l'espace standard $E_2^{n-2,\,n}(X)$ sur la deuxième page de la suite spectrale de Frölicher .

Proposition 3.1.1. *L'application linéaire canonique suivante*

$$T : H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{C}) \longrightarrow E_2^{n-2,\,n}(X), \qquad \{\alpha\}_{DR} \mapsto \Big[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}\Big]_{d_1},$$

est bien définie et son image est donnée par

$$Im\,T = \ker d_2^{n-2,\,n}, \tag{3.1}$$

où $d_2^{n-2,\,n} : E_2^{n-2,\,n}(X) \to E_2^{n,\,n-1}(X)$ est la d_2-application agissant en bidegrée $(n-2,\,n)$.

Preuve. Soit $\{\alpha\}_{DR} \in H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{C})$ une classe arbitraire et soit $\alpha = \alpha^{n,\,n-2} + \alpha^{n-1,\,n-1} + \alpha^{n-2,\,n}$ un représentant quelconque, où les $\alpha^{p,\,q}$ sont les composantes de α de types $(p,\,q)$. La condition $d\alpha = 0$ est équivalente à

$$\partial\alpha^{n-1,\,n-1} + \bar\partial\alpha^{n,\,n-2} = 0 \quad \text{ et } \quad \bar\partial\alpha^{n-1,\,n-1} + \partial\alpha^{n-2,\,n} = 0.$$

Puisque $\bar\partial\alpha^{n-2,\,n} = 0$ et $\partial\alpha^{n-2,\,n} = -\bar\partial\alpha^{n-1,\,n-1} \in \mathrm{Im}\,\bar\partial$, alors $\alpha^{n-2,\,n}$ définit une classe $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}$ dans $E_2^{n-2,\,n}(X)$.

Pour montrer que l'application T est bien définie, il reste à montrer que la définition est indépendante du choix du représentant α de la classe de De Rham $\{\alpha\}_{DR}$. Ceci est équivalent à montrer que si $\{\alpha\}_{DR} = 0 \in H^{2n-2}_{DR}(X, \mathbb{C})$ alors $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} = 0 \in E_2^{n-2,\,n}(X)$. Soit $\alpha \in C^\infty_{2n-2}(X, \mathbb{C})$ une forme d-exacte. Alors, il existe une $(2n-3)$-forme $\beta = \beta^{n,\,n-3} + \beta^{n-1,\,n-2} + \beta^{n-2,\,n-1} + \beta^{n-3,\,n}$ telle que $\alpha = d\beta$. Cela est équivalent à

$$\alpha^{n,\,n-2} = \partial\beta^{n-1,\,n-2} + \bar\partial\beta^{n,\,n-3}, \quad \alpha^{n-1,\,n-1} = \partial\beta^{n-2,\,n-1} + \bar\partial\beta^{n-1,\,n-2} \quad \text{et} \quad \alpha^{n-2,\,n} = \partial\beta^{n-3,\,n} + \bar\partial\beta^{n-2,\,n-1}. \tag{3.2}$$

Comme $\bar\partial\beta^{n-3,\,n} = 0$ pour des raisons de bidegré, alors la dernière identité en (3.2) montre, d'après (2.3), que $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} = 0$ dans $E_2^{n-2,\,n}(X)$.

Montrons l'inclusion $\ker d_2^{n-2,\,n} \subset \operatorname{Im} T$ dans (3.1). Soit $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)$ telle que $d_2([[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}) = 0$. D'après (2.1), (2.2) et (2.3), ils existent des formes $\Omega^{n-1,\,n-1} \in C^\infty_{n-1,\,n-1}(X, \mathbb{C})$, $u \in C^\infty_{n-1,\,n-1}(X, \mathbb{C})$ avec $u \in \ker\bar\partial$ et $v \in C^\infty_{n,\,n-2}(X, \mathbb{C})$ telles que

$$\partial\alpha^{n-2,\,n} = -\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1} = -\bar\partial(\Omega^{n-1,\,n-1} - u) \quad \text{et} \quad \partial\Omega^{n-1,\,n-1} = \partial u + \bar\partial v.$$

Posons $\alpha := \alpha^{n-2,\,n} + (\Omega^{n-1,\,n-1} - u) - v$, alors

$$d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad T(\{\alpha\}_{DR}) = [[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}.$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse $\ker d_2^{n-2,\,n} \supset \operatorname{Im} T$ dans (3.1). Soit $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in \operatorname{Im} T$. C'est à dire $\alpha^{n-2,\,n}$ est la composante de type $(n-2,\,n)$ de la $(2n-2)$-form d-fermée $\alpha = \alpha^{n,\,n-2} + \alpha^{n-1,\,n-1} + \alpha^{n-2,\,n}$. Comme déjà remarqué, la condition $d\alpha = 0$ est équivalente à

$$\partial\alpha^{n-1,\,n-1} + \bar\partial\alpha^{n,\,n-2} = 0 \quad \text{et} \quad \partial\alpha^{n-2,\,n} + \bar\partial\alpha^{n-1,\,n-1} = 0.$$

D'autre part, $d_2([[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}) = -[[\partial\alpha^{n-1,\,n-1}]_{\bar\partial}]_{d_1} = [[\bar\partial\alpha^{n,\,n-2}]_{\bar\partial}]_{d_1} = 0 \in E_2^{n,\,n-1}$ car $[\bar\partial\alpha^{n,\,n-2}]_{\bar\partial} = 0 \in H^{n,\,n-1}_{\bar\partial}(X, \mathbb{C})$. $\square$

Par conséquent, on obtient le critère suivant sur la dégénérescence partielle en E_2 de la suite spectrale de Frölicher de X.

Corollaire 3.1.2. *L'application canonique T définie dans la Proposition 3.1.1 est* **surjective** *si et seulement si d_2 est* **identiquement nulle** *en bidegré $(n-2,\,n)$.*

On montre maintenant que l'hypothèse sGG (Définition 5.0.16 du chapitre 5) sur la variété ambiante X est suffisante pour garantir la propriété de la dégénérescence partielle mentionnée ci-dessus.

Proposition 3.1.3. *Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Si X est* **sGG**, *alors l'application $d_2^{n-2,\,n} : E_2^{n-2,\,n}(X) \longrightarrow E_2^{n,\,n-1}(X)$ sur la $2^{\text{ème}}$ page de la suite spectrale de Frölicher de X est* **identiquement nulle** *(de manière équivalente, l'application linéaire canonique $T : H^{2n-2}_{DR}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow E_2^{n-2,\,n}(X)$ de la Proposition 3.1.1 est* **surjective**).

Preuve. Pour montrer que T est surjective, soit $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)$ et soit $\alpha^{n-2,\,n}$ une $(n-2,\,n)$-forme quelconque représentant cette classe double. Alors $\partial\alpha^{n-2,\,n}$ est $\bar\partial$-exacte, donc il existe une $(n-1,\,n-1)$-forme $\Omega^{n-1,\,n-1}$ telle que

$$\partial\alpha^{n-2,\,n} = -\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1}. \tag{3.3}$$

Comme X est sGG, alors $\bar\partial\overline{\Omega^{n-1,\,n-1}}$ est ∂-exacte. En effet, ceci est équivalent à $\partial\Omega^{n-1,\,n-1}$ étant $\bar\partial$-exacte. Notons que $\partial\Omega^{n-1,\,n-1}$ est une $(n,\,n-1)$-forme d-fermée et ∂-exacte, donc d'après (iii) du Lemme 1.3. dans [PU18a] ((iii) de la Proposition 5.0.17 du chapitre 5) $\partial\Omega^{n-1,\,n-1}$ est aussi $\bar\partial$-exacte (car X est sGG).

Par conséquent, il existe $\beta^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$ telle que

$$\partial\beta^{n-2,\,n} = -\bar\partial\overline{\Omega^{n-1,\,n-1}}. \tag{3.4}$$

Par suite, $\partial(\alpha^{n-2,\,n} + \beta^{n-2,\,n}) = -\bar\partial(\Omega^{n-1,\,n-1} + \overline{\Omega^{n-1,\,n-1}})$, d'où

$$\Gamma_1 := \overline{(\alpha^{n-2,\,n} + \beta^{n-2,\,n})} + (\Omega^{n-1,\,n-1} + \overline{\Omega^{n-1,\,n-1}}) + (\alpha^{n-2,\,n} + \beta^{n-2,\,n})$$

est une $(2n-2)$-forme telle que $d\Gamma_1 = 0$ et

$$T(\{\Gamma_1\}_{DR}) = [[\alpha^{n-2,\,n} + \beta^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X). \tag{3.5}$$

Puisque $\beta^{n-2,\,n}$ est $\bar\partial$-fermée (pour des raisons de bidegré) et $\partial\beta^{n-2,\,n}$ est $\bar\partial$-exacte (par construction), alors $\beta^{n-2,\,n}$ définit une E_2-classe.

On obtient aussi $\partial(\alpha^{n-2,\,n} - \beta^{n-2,\,n}) = -\bar\partial(\Omega^{n-1,\,n-1} - \overline{\Omega^{n-1,\,n-1}})$, donc

$$\Gamma_2 := (\overline{\beta^{n-2,\,n}} - \overline{\alpha^{n-2,\,n}}) + (\Omega^{n-1,\,n-1} - \overline{\Omega^{n-1,\,n-1}}) + (\alpha^{n-2,\,n} - \beta^{n-2,\,n})$$

est une $(2n-2)$-forme telle que $d\Gamma_2 = 0$ et

$$T(\{\Gamma_2\}_{DR}) = [[\alpha^{n-2,\,n} - \beta^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X). \tag{3.6}$$

En combinant (3.5) et (3.6),on obtient une $(2n-2)$-forme d-fermée

$$\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} = \overline{\beta^{n-2,\,n}} + \Omega^{n-1,\,n-1} + \alpha^{n-2,\,n}$$

vérifiant la condition

$$T\left(\left\{\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\right\}_{DR}\right) = \left[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}\right]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X).$$

Il en résulte que T est surjective. $\square$

Lorsque la variété X est sGG, alors on peut prendre la surjectivité de l'application linéaire canonique $T : H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{C}) \longrightarrow E_2^{n-2,\,n}(X)$ de la Proposition 3.1.1 en montrant plus loin que toute métrique Hermitienne ω sur X définit une *injection* naturelle de $E_2^{n-2,\,n}(X)$ dans $H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{C})$ qui est une section de T. On aura besoin de l'opérateur pseudo-différentiel du type Laplacien suivant

$$\widetilde\Delta := \partial p''\partial^\star + \partial^\star p''\partial + \bar\partial\bar\partial^\star + \bar\partial^\star\bar\partial : C^\infty_{p,\,q}(X,\,\mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty_{p,\,q}(X,\,\mathbb{C})$$

induit, en tout bidegré $(p,\,q)$, par une métrique Hermitienne ω quelconque sur X fixée. (Tous les adjoints formels sont calculés par rapport au produit scalaire L^2 définit par ω et il en est de même pour la projection orthogonale $p'' = p''_\omega$ sur l'espace des formes harmoniques $\ker\Delta''$, où $\Delta'' := \bar\partial\bar\partial^\star + \bar\partial^\star\bar\partial$ et le $\bar\partial$-Laplacien usuel induit par ω). Cet opérateur a été introduit dans [Pop16] où il a été démontré que toute classe double $[[\alpha^{p,q}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{p,q}(X)$ admet un *unique* représentant se trouvant dans le noyau de $\widetilde\Delta = \widetilde\Delta_\omega$ (cf. [Pop16, Théorème 1.1]).

Proposition 3.1.4. *Soit X une* **variété sGG** *complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ et soit ω une métrique Hermitienne quelconque sur X. Pour toute classe $[[\alpha^{n-2,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,n}(X)$, soit $\alpha_\omega^{n-2,n}$ le représentant* **$\widetilde\Delta_\omega$-harmonique** *de $[[\alpha^{n-2,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}$, soit $\Omega_\omega^{n-1,n-1} \in C^\infty_{n-1,n-1}(X,\mathbb{C})$ la solution* **minimale pour la norme L^2_ω** *de l'équation $\bar\partial\Omega^{n-1,n-1} = -\partial\alpha_\omega^{n-2,n}$ (cf. (3.3)) et soit $\beta_\omega^{n-2,n} \in C^\infty_{n-2,n}(X,\mathbb{C})$ la solution* **minimale pour la norme L^2_ω** *de l'équation $\partial\beta^{n-2,n} = -\bar\partial\,\overline{\Omega_\omega^{n-1,n-1}}$ (cf. (3.4)).*

L'application linéaire

$$j_\omega : E_2^{n-2,n}(X) \longrightarrow H^{2n-2}_{DR}(X,\mathbb{C}), \qquad j_\omega([[\alpha^{n-2,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}) = \{\overline{\beta_\omega^{n-2,n}} + \Omega_\omega^{n-1,n-1} + \alpha_\omega^{n-2,n}\}_{DR},$$

est **injective** *et $T\circ j_\omega$ est l'application identité de $E_2^{n-2,n}(X)$.*

Preuve. Supposons que $j_\omega([[\alpha^{n-2,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}) = 0 \in H^{2n-2}_{DR}(X,\mathbb{C})$ pour quelque $[[\alpha^{n-2,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,n}(X)$. Alors il existe une $(2n-3)$-forme lisse $u = u^{n,n-3} + u^{n-1,n-2} + u^{n-2,n-1} + u^{n-3,n}$ telle que $\overline{\beta_\omega^{n-2,n}} + \Omega_\omega^{n-1,n-1} + \alpha_\omega^{n-2,n} = du$. Ceci montre que $\alpha_\omega^{n-2,n} = \partial u^{n-3,n} + \bar\partial u^{n-2,n-1}$. Puisque $\bar\partial u^{n-3,n} = 0$, alors $[[\alpha^{n-2,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} = [[\alpha_\omega^{n-2,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} = 0$. Donc, j_ω est injective.

L'égalité $T\circ j_\omega = \mathrm{Id}_{E_2^{n-2,n}(X)}$ provient immédiatement des définitions. □

3.1.2 Cohomologie et métriques fG

On introduit maintenant les métriques fortement Gauduchon (fG) dans notre discussion.

Définition 3.1.5. *Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.*

(a) Pour toute métrique fortement Gauduchon (si elle existe) $\omega > 0$ sur X, $\bar\partial\omega^{n-1}$ est ∂-exacte. Notons par $\Gamma_\omega^{n-2,n} \in C^\infty_{n-2,n}(X,\mathbb{C})$ la (unique) solution minimale pour la norme L^2_ω de l'équation

$$\partial\Gamma_\omega^{n-2,n} = -\bar\partial\omega^{n-1}. \tag{3.7}$$

Comme $\bar\partial\Gamma_\omega^{n-2,n} = 0$ (pour des raisons de bidegré) et $\partial\Gamma_\omega^{n-2,n} \in Im\,\bar\partial$, alors $\Gamma_\omega^{n-2,n}$ définit un élément dans $E_2^{n-2,n}(X)$.

Considérons le sous-ensemble suivant

$$\mathcal{S}_X := \left\{\left[[\Gamma_\omega^{n-2,n}]_{\bar\partial}\right]_{d_1} \mid \omega \text{ est une métrique fG sur } X\right\} \subset E_2^{n-2,n}(X)$$

que l'on appelle le **cône** *E_2sG de X.*

La $(2n-2)$-forme réelle $\Gamma_\omega := \overline{\Gamma_\omega^{n-2,n}} + \omega^{n-1} + \Gamma_\omega^{n-2,n}$ est d-fermée, alors elle définit une classe de cohomologie de De Rham réelle $\{\Gamma_\omega\}_{DR}$. Considérons le sous-ensemble suivant

$$\widetilde{\mathcal{S}}_X := \left\{\{\Gamma_\omega\}_{DR} \mid \omega \text{ est une métrique fG sur } X\right\} \subset H^{2n-2}_{DR}(X,\mathbb{R})$$

que l'on appelle le **cône** *E_2sG* **de De Rham** *de X.*

(b) On définit aussi la variante suivante du cône E_2sG de X en ignorant l'exigence de la minimalité de la norme L^2_ω sur la solution $\Gamma^{n-2,\,n}$ de l'équation (3.7) :

$$\widehat{\mathcal{S}}_X = \left\{\left[[\Gamma^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}\right]_{d_1} \mid \exists\,\omega \text{ métrique Hermitienne telle que } \partial\Gamma^{n-2,\,n} = -\bar\partial\omega^{n-1}\right\} \subset E_2^{n-2,\,n}(X). \tag{3.8}$$

Toute métrique ω impliqué dans (3.8) est fG, alors on a bien évidemment $\mathcal{S}_X \subset \widehat{\mathcal{S}}_X$. On ne sait pas si l'inclusion inverse est vérifiée.

La variété X est fortement Gauduchon si et seulement si $\mathcal{S}_X$ est non vide.

On va maintenant montrer que $\mathcal{S}_X$ (resp. $\widetilde{\mathcal{S}}_X$) est en effet un cône (i.e. un sous-ensemble qui est stable par multiplications par des scalaires positives) dans $E_2^{n-2,\,n}(X)$ (resp. $H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{R})$). On a besoin de quelques préliminaires.

Lemme 3.1.6. *Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}}X = n$.*

(i) Pour toute métrique Hermitienne ω sur X et tout réel positif λ, les adjoints formels de $\bar\partial$ par rapport aux métriques $\lambda\,\omega$ et ω, ainsi que les $\bar\partial$-Laplaciens correspondants, sont liés par la formule

$$\bar\partial^\star_{\lambda\,\omega} = \frac{1}{\lambda}\,\bar\partial^\star_\omega \quad \text{et} \quad \Delta''_{\lambda\,\omega} = \frac{1}{\lambda}\,\Delta''_\omega \tag{3.9}$$

en tous bidegrés.

(ii) Pour toute métrique fortement Gauduchon ω sur X et tout réel positif λ, les formes $\Gamma^{n,\,n-2}_{\lambda\,\omega} := \overline{\Gamma^{n-2,\,n}_{\lambda\,\omega}}$ et $\Gamma^{n,\,n-2}_\omega := \overline{\Gamma^{n-2,\,n}_\omega}$ (voir Définition 3.1.5) sont liés par la formule

$$\Gamma^{n,\,n-2}_{\lambda\omega} = \lambda^{n-1}\,\Gamma^{n,\,n-2}_\omega.$$

Par conséquent, on a aussi $\Gamma_{\lambda\,\omega} = \lambda^{n-1}\,\Gamma_\omega$ pour toute métrique fG ω sur X.

Preuve. (i) Fixons un bidegré $(p,\,q)$ quelconque. Pour toutes formes α, β de bidegrées $(p,\,q-1)$ et $(p,\,q)$ respectivement, on a

$$\langle\langle\bar\partial\alpha,\,\beta\rangle\rangle_{\lambda\,\omega} = \lambda^n\int\limits_X\langle\bar\partial\alpha,\,\beta\rangle_{\lambda\,\omega}\,\frac{\omega^n}{n!} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{p+q}}\int\limits_X\langle\bar\partial\alpha,\,\beta\rangle_\omega\,\frac{\omega^n}{n!} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{p+q}}\,\langle\langle\bar\partial\alpha,\,\beta\rangle\rangle_\omega = \frac{\lambda^n}{\lambda^{p+q}}\,\langle\langle\alpha,\,\bar\partial^\star_\omega\beta\rangle\rangle_\omega$$

et

$$\langle\langle\alpha,\,\bar\partial^\star_{\lambda\,\omega}\beta\rangle\rangle_{\lambda\,\omega} = \frac{\lambda^n}{\lambda^{p+q-1}}\,\langle\langle\alpha,\,\bar\partial^\star_{\lambda\,\omega}\beta\rangle\rangle_\omega.$$

Comme $\langle\langle\bar\partial\alpha,\,\beta\rangle\rangle_{\lambda\,\omega} = \langle\langle\alpha,\,\bar\partial^\star_{\lambda\,\omega}\beta\rangle\rangle_{\lambda\,\omega}$, la formule ci-dessus implique

$$\frac{\lambda^n}{\lambda^{p+q}}\,\langle\langle\alpha,\,\bar\partial^\star_\omega\beta\rangle\rangle_\omega = \frac{\lambda^n}{\lambda^{p+q-1}}\,\langle\langle\alpha,\,\bar\partial^\star_{\lambda\,\omega}\beta\rangle\rangle_\omega, \quad \text{i.e.} \quad \langle\langle\alpha,\,\frac{1}{\lambda}\,\bar\partial^\star_\omega\beta\rangle\rangle_\omega = \langle\langle\alpha,\,\bar\partial^\star_{\lambda\,\omega}\beta\rangle\rangle_\omega$$

pour toutes formes α et β. Ceci montre la première formule dans (3.9).

Puisque $\Delta'' = \bar\partial\bar\partial^\star + \bar\partial^\star\bar\partial$ (où Δ'' et $\bar\partial^\star$ sont calculés par rapport à la même métrique), la deuxième formule dans (3.9) provient immédiatement de la première.

(ii) Par la Définition 3.1.5, $\Gamma_\omega^{n,\,n-2}$ est la solution minimale pour la norme L^2_ω de l'équation $\bar\partial\Gamma^{n,\,n-2} = -\partial\omega^{n-1}$. Par conséquent, on a la formule de Neumann

$$\Gamma_\omega^{n,\,n-2} = -\Delta_\omega^{''-1}\bar\partial_\omega^\star\,(\partial\omega^{n-1}). \tag{3.10}$$

Alors, on obtient :

$$\Gamma_{\lambda\,\omega}^{n,\,n-2} = -\Delta_{\lambda\,\omega}^{''-1}\bar\partial_{\lambda\,\omega}^\star\,(\partial(\lambda\,\omega)^{n-1}) = -\lambda^{n-1}\,\Delta_\omega^{''-1}\bar\partial_\omega^\star\,(\partial\omega^{n-1}) = \lambda^{n-1}\,\Gamma_\omega^{n,\,n-2},$$

où on a utilisé l'analogue de (3.10) pour $\lambda\,\omega$ pour obtenir la première et la troisième identité. $\square$

Lemme 3.1.7. *Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Les ensembles $\mathcal{S}_X$ et $\widehat{\mathcal{S}}_X$ sont des* **cônes** *dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_2^{n-2,\,n}(X)$, et l'ensemble $\widetilde{\mathcal{S}}_X$ est un cône dans $H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{R})$.*

De plus, le cône $\widehat{\mathcal{S}}_X$ est convexe.

Preuve. Soit $[[\Gamma_\omega^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in \mathcal{S}_X$ et $\mu > 0$ arbitraire. Soit $\lambda > 0$ l'unique réel positif tel que $\lambda^{n-1} = \mu$. On a

$$\mu\,[[\Gamma_\omega^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} = [[\lambda^{n-1}\,\Gamma_\omega^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} = [[\Gamma_{\lambda\,\omega}^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1},$$

où on a utilisé (ii) du Lemme 3.1.6 pour obtenir la dernière identité. Si ω est fortement Gauduchon, alors $\lambda\,\omega$ l'est aussi, donc $[[\Gamma_{\lambda\,\omega}^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in \mathcal{S}_X$.

Par conséquent, $\mathcal{S}_X$ est stable par multiplications par des scalaires positifs, donc $\mathcal{S}_X$ est un cône. De même pour $\widetilde{\mathcal{S}}_X$ puisque (ii) du Lemme 3.1.6 s'applique aussi à Γ_ω. $\widehat{\mathcal{S}}_X$est un cône est trivial.

Pour montrer la convexité de $\widehat{\mathcal{S}}_X$, il suffit de montrer que $\widehat{\mathcal{S}}_X$ est stable par additions. Ce qui est immédiat puisque si $\partial\Gamma_i^{n-2,\,n} = -\bar\partial\omega_i^{n-1}$ pour $i \in \{1,\,2\}$ et ω_i des métriques Hermitienne sur X, alors $\partial(\Gamma_1^{n-2,\,n} + \Gamma_2^{n-2,\,n}) = -\bar\partial\omega_0^{n-1}$, où $\omega_0 > 0$ est l'unique $(1,\,1)$-forme C^∞ définie positive sur X telle que $\omega_0^{n-1} = \omega_1^{n-1} + \omega_2^{n-1} > 0$. Donc, $[[\Gamma_1^{n-2,\,n} + \Gamma_2^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in \widehat{\mathcal{S}}_X$. $\square$

Le cône de De Rham E_2sG $\widetilde{\mathcal{S}}_X$ dépend de la structure complexe de X et on montre maintenant cette dépendance d'être semi-continue-inférieurement dans le sens décrit ci-dessous dans les familles de variétés sGG. Il suffit en fait de supposer qu'une fibre est sGG, car la propriété sGG est ouverte par déformation (cf. [[PU18a], Corollaire 1.7]), donc toutes les fibres voisines sont sGG.

Définition 3.1.8. *Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille holomorphe de variétés complexes compactes de dimension n au-dessus d'une boule $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ centrée à l'origine. Supposons que la fibre $X_0 := \pi^{-1}(0)$ est* **fortement Gauduchon**. *Soit X la variété C^∞ qui représente les fibres X_t avec $t \in \Delta$.*

Pour toute métrique fG ω sur X_0, on associe une **section locale** *τ_ω du fibré vectoriel réel constant $\mathcal{H}^{2n-2}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \Delta$ dont la fibre est l'espace de cohomologie de De Rham réel $H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{R})$ comme suit.*

Comme dans la Définition 3.1.5, on pose $\Gamma_\omega := \overline{\Gamma_\omega^{n-2,\,n}} + \omega^{n-1} + \Gamma_\omega^{n-2,\,n}$ la $(2n-2)$-forme réelle d-fermée définie par la solution minimale $\Gamma_\omega^{n-2,\,n}$ pour la norme L^2_ω de l'équation $\partial\Gamma_\omega^{n-2,\,n} = -\bar\partial\omega^{n-1}$. (On pose $\partial := \partial_0$ et $\bar\partial := \bar\partial_0$.) La composante $(\Gamma_\omega)_t^{n-1,\,n-1}$ de Γ_ω de type $(n-1,\,n-1)$ pour la structure complexe de X_t est définie positive si t est assez proche du 0, par la continuité de la dépendance de t

de $(\Gamma_\omega)_t^{n-1,\,n-1}$ *et la positivité de* $(\Gamma_\omega)_0^{n-1,\,n-1} = \omega^{n-1} > 0$. *Donc, pour tout* t *proche de* 0, *il existe une unique* $(1,\,1)$*-forme* ω_t C^∞ *définie positive sur* X_t *telle que* $\omega_t^{n-1} = (\Gamma_\omega)_t^{n-1,\,n-1} > 0$. *En particulier,* $\omega_0 = \omega$.

Comme $d\Gamma_\omega = 0$, *alors la forme* $\bar\partial_t\omega_t^{n-1}$ *est* ∂_t*-exacte (donc* ω_t *est une métrique fG sur* X_t*). Soit* $\Gamma_{\omega_t}^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X_t,\,\mathbb{C})$ *la solution minimale pour la norme* $L^2_{\omega_t}$ *de l'équation*

$$\partial_t\Gamma_{\omega_t}^{n-2,\,n} = -\bar\partial_t\omega_t^{n-1} \tag{3.11}$$

et considérons la $(2n-2)$*-forme réelle d-fermée sur* X *définie comme*

$$\Gamma_\omega(t) := \overline{\Gamma_{\omega_t}^{n-2,\,n}} + \omega_t^{n-1} + \Gamma_{\omega_t}^{n-2,\,n}$$

pour t *proche de* 0. *En particulier,* $\Gamma_\omega(0) = \Gamma_\omega$. *Finalement, on pose*

$$\tau_\omega(t) := \{\Gamma_\omega(t)\}_{DR} \in \widetilde{\mathcal{S}}_{X_t} \subset H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{R})$$

pour tout t *dans un voisinage* U *suffisamment petit (dependant de* ω*) de* 0 *dans* Δ.

Le résultat de la **semi-continuité inférieure** du cône E_2sG de De Rham $\widetilde{\mathcal{S}}_X \subset H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{R})$ lorsque la structure complexe de X varie est le suivant

Theorem 3.1.9. *Soit* $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ *une famille holomorphe de variétés complexes compactes de dimension* n *au-dessus d'une boule* $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ *centrée à l'origine. Supposons que la fibre* $X_0 := \pi^{-1}(0)$ *est une* **variété sGG**.

Pour toute métrique fG ω *sur* X_0, *la section* τ_ω *du fibré vectoriel réel constant* $\mathcal{H}^{2n-2}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \Delta$ *sur un petit voisinage de* 0 *dans* Δ *construite dans la Définition 3.1.8 est* C^∞.

En particulier, tout élément $\{\Gamma_\omega\}_{DR}$ du cône de De Rham E_2sG $\widetilde{\mathcal{S}}_{X_0}$ de X_0 se prolonge à une famille des éléments C^∞ $\{\Gamma_\omega(t)\}_{DR}$ des cônes de De Rham E_2sG $\widetilde{\mathcal{S}}_{X_t}$ des fibres voisines X_t. De plus, il existe un tel prolongement pour chaque représentant Γ_ω de la classe de De Rham donnée $\{\Gamma_\omega\}_{DR}$ définie par une métrique fG ω. Alors, le cône de De Rham E_2sG $\widetilde{\mathcal{S}}_{X_0}$ de X_0 ne peut être plus “petit” que les cônes de De Rham E_2sG $\widetilde{\mathcal{S}}_{X_t}$ des fibres voisines X_t.

Preuve. D'après la formule de Neumann, la solution minimale pour la norme $L^2_{\omega_t}$ de l'équation (3.11) est

$$\Gamma_{\omega_t}^{n-2,\,n} = -(\partial_t)^\star_{\omega_t}\Delta'^{-1}_{\omega_t}(\bar\partial_t\omega_t^{n-1}),$$

où $(\partial_t)^\star_{\omega_t}$ est l'adjoint formel de ∂_t par rapport au produit scalaire L^2 induit par la métrique ω_t, dont $\Delta'_{\omega_t} = \partial_t(\partial_t)^\star_{\omega_t} + (\partial_t)^\star_{\omega_t}\partial_t$ est le ∂-Laplacien induit par ω_t et $\Delta'^{-1}_{\omega_t}$ représente son opérateur de Green.

Maintenant, la $(n-1,\,n)$-forme $\bar\partial_t\omega_t^{n-1}$ varie de manière C^∞ avec t et de même pour les opérateurs différentiels Δ'_{ω_t} et $(\partial_t)^\star_{\omega_t}$. En outre, la théorie classique de Kodaira-Spencer (cf. [KS60]) appliqué sur la famille $(\Delta'_{\omega_t})_{t\in\Delta}$ C^∞ des opérateurs différentiels *elliptique* agissant en bidegré $(n-1,\,n)$ montre que la famille $(\Delta'^{-1}_{\omega_t})_{t\in\Delta}$ de leurs opérateurs de Green est encore C^∞ si les dimensions des noyaux $\ker\Delta'_{\omega_t}$ (qui sont isomorphes aux espaces ∂-cohomologie $H^{n-1,\,n}_\partial(X_t,\,\mathbb{C})$ par l'isomorphisme de Hodge) sont indépendants de t. Cependant, par conjugaison, $H^{n-1,\,n}_\partial(X_t,\,\mathbb{C})$ est $\mathbb{C}$-anti-linéaire isomorphe à $H^{n,\,n-1}_{\bar\partial}(X_t,\,\mathbb{C})$, tandis que le dernier espace vectoriel est dual à $H^{0,\,1}_{\bar\partial}(X_t,\,\mathbb{C})$ par la dualité de Serre, donc sa dimension est égale au nombre de Hodge $h^{0,\,1}_{\bar\partial}(t)$ de la fibre X_t pour tout t.

Voici où l'hypothèse sGG sur la fibre X_0 entre en jeu. D'après [[PU18a], Corollaire 1.7], les nombres de Hodge $h^{0,\,1}_{\bar\partial}(t)$ sont indépendants de t lorsque t varie dans un voisinage assez petit de 0. Donc, les opérateurs de Green $\Delta'^{-1}_{\omega_t}$ en bidegré $(n-1,\,n)$, et alors les $(n-2,\,n)$-formes $\Gamma^{n-2,\,n}_{\omega_t}$, varient de manière C^∞ avec t proche de 0. Puisque les $(n-1,\,n-1)$-formes le sont aussi (pour des raisons triviales) ω_t^{n-1}, on en déduit que les $(2n-2)$-formes lisses

$$\Gamma_\omega(t) := \overline{\Gamma^{n-2,\,n}_{\omega_t}} + \omega_t^{n-1} + \Gamma^{n-2,\,n}_{\omega_t}$$

varient de manière C^∞ avec t dans un voisinage assez petit de 0. L'application de la classe de cohomologie de De Rham étant un opérateur lisse, on conclut que $\tau_\omega(t) := \{\Gamma_\omega(t)\}_{DR}$ dépend de t de manière C^∞ variant dans un voisinage de $0 \in \Delta$ suffisamment petit. $\square$

3.1.3 Cohomologie réelle

Pour plus de flexibilité, on va maintenant traiter la version réelle de certains objets introduits dans §.3.1.1.

Définition 3.1.10. *Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.*

(a) Pour tout élément $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)$ et tout représentant $\alpha^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$ de cette classe double, on sait d'après (2.1),que $\bar\partial\alpha = 0$ (pour des raisons de bidegré) et qu'il existe une forme (non nécessairement réelle et n'est pas unique) $\Omega^{n-1,\,n-1} \in C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{C})$ telle que $\partial\alpha^{n-2,\,n} = -\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1}$.

*On appelle une telle forme $\Omega^{n-1,\,n-1}$ un $(n-1,\,n-1)$-**potentiel** de $\alpha^{n-2,\,n}$.*

*(b) On définit la partie **réelle** $E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E_2^{n-2,\,n}(X)$ en sélectionnant les classes représentable par des formes admettant un $(n-1,\,n-1)$-potentiel **réel** :*

$$E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}} := \left\{[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X) \;\mid\; \exists\alpha^{n-2,\,n} \text{ représentant ayant un potentiel réel } \Omega^{n-1,\,n-1}\right\}.$$

*Par définition, $E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel **réel** de $E_2^{n-2,\,n}(X)$.*

Considérons maintenant la version réelle de l'application T introduite dans §.3.1.1.

Lemme 3.1.11. *Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.*

(i) On a l'inclusion suivante : $E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}} \subset \ker d_2^{n-2,\,n}$.

(ii) La restriction à $H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{R})$ de l'application T définie dans la Proposition 3.1.1, c'est à dire l'application

$$T_{\mathbb{R}} : H^{2n-2}_{DR}(X,\,\mathbb{R}) \longrightarrow E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}, \quad \{\alpha\}_{DR} \mapsto \left[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}\right]_{d_1},$$

*prend ses valeurs dans l'espace **réel** $E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ et est **surjective**.*

Preuve. (i) Soit $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ avec $\partial\alpha^{n-2,\,n} = -\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1}$ pour quelque $(n-1,\, n-1)$-forme **réelle** $\Omega^{n-1,\,n-1}$. D'après (2.2), on a

$$d_2([[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1}) = -[[\partial\Omega^{n-1,\,n-1}]_{\bar\partial}]_{d_1} = [[\overline{\bar\partial\alpha^{n-2,\,n}}]_{\bar\partial}]_{d_1} = 0 \in E_2^{n,\,n-1}(X),$$

parce qu'en conjuguant l'identité définissant $\Omega^{n-1,\,n-1}$ et en utilisant le fait que $\Omega^{n-1,\,n-1}$ est réelle, on trouve $\partial\Omega^{n-1,\,n-1} = -\bar\partial\overline{\alpha^{n-2,\,n}}$.

Par conséquent, $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in \ker d_2^{n-2,\,n}$.

(ii) Soit $\{\alpha\}_{DR} \in H_{DR}^{2n-2}(X,\,\mathbb{R})$ et choisissons un représentant réel $\alpha = \alpha^{n,\,n-2}+\alpha^{n-1,\,n-1}+\alpha^{n-2,\,n}$. Comme α est réelle, alors $\alpha^{n-1,\,n-1}$ l'est aussi. Puisque α est d-fermée, alors $\partial\alpha^{n-2,\,n} = -\bar\partial\alpha^{n-1,\,n-1}$. Donc, $\alpha^{n-1,\,n-1}$ est un $(n-1,\, n-1)$-potentiel réel de $\alpha^{n-2,\,n}$, alors $T(\{\alpha\}_{DR}) = [[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$.

Pour montrer que T est surjective, soit $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ avec $\partial\alpha^{n-2,\,n} = -\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1}$ pour une $(n-1,\, n-1)$-forme **réelle** $\Omega^{n-1,\,n-1}$. Alors, la $(2n-2)$-forme

$$\alpha := \overline{\alpha^{n-2,\,n}} + \Omega^{n-1,\,n-1} + \alpha^{n-2,\,n}$$

est réelle, d-fermée et $T(\{\alpha\}_{DR}) = [[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$. □

On peut maintenant montrer que l'espace réel $E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ contient le cône E_2sG $\widehat{\mathcal{S}}_X$ de X défini dans §.3.1.1 comme étant un cône ouvert.

Lemme 3.1.12. *Soit X une variété complexe compacte avec $dim_{\mathbb{C}}X = n$. On a les inclusions $\mathcal{S}_X \subset \widehat{\mathcal{S}}_X \subset E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ et le cône $\widehat{\mathcal{S}}_X$ est un* **ouvert** *dans $E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$.*

Preuve. L'inclusion $\mathcal{S}_X \subset \widehat{\mathcal{S}}_X$ est évidente et a déjà été remarqué. Soit $[[\Gamma^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in \widehat{\mathcal{S}}_X$ quelconque. Alors, il existe un représentant $\Gamma^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$ de cette E_2-classe et une métrique ω fG sur X telles que $\partial\Gamma^{n-2,\,n} = -\bar\partial\omega^{n-1}$. Comme ω^{n-1} est **réelle**, alors $[[\Gamma^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$. Ceci montre l'inclusion $\widehat{\mathcal{S}}_X \subset E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$.

Soit $[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$ et soit $\varepsilon > 0$. Donc, il existe une forme $\Omega^{n-1,\,n-1} \in C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{C})$ **réelle** telle que $\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1} = -\partial\alpha^{n-2,\,n}$. On obtient

$$\partial(\Gamma^{n-2,\,n} + \varepsilon\,\alpha^{n-2,\,n}) = -\bar\partial(\omega^{n-1} + \varepsilon\,\Omega^{n-1,\,n-1}).$$

D'autre part, la $(n-1,\, n-1)$-forme $\omega^{n-1} + \varepsilon\,\Omega^{n-1,\,n-1}$ est réelle pour chaque ε et définie positive si $\varepsilon > 0$ est assez petit. Par suite, pour tout $\varepsilon > 0$ petit, il existe une unique $(1,\,1)$-forme définie positive $\rho_\varepsilon > 0$ telle que $\rho_\varepsilon^{n-1} = \omega^{n-1} + \varepsilon\,\Omega^{n-1,\,n-1}$. On a $\partial\rho_\varepsilon^{n-1} = -\bar\partial(\overline{\Gamma^{n-2,\,n}} + \varepsilon\,\overline{\alpha^{n-2,\,n}})$, donc $\partial\rho_\varepsilon^{n-1}$ est $\bar\partial$-exacte, alors ρ_ε est une métrique fortement Gauduchon sur X. Par conséquent,

$$[[\Gamma^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} + \varepsilon\,[[\alpha^{n-2,\,n}]_{\bar\partial}]_{d_1} \in \widehat{\mathcal{S}}_X$$

pour tout $\varepsilon > 0$ petit. Ceci montre que $\widehat{\mathcal{S}}_X$ est ouvert dans $E_2^{n-2,\,n}(X)_{\mathbb{R}}$. □

3.1.4 La dualité des cônes positifs dans la cohomologie de E_2

Il a été prouvé dans [PU18b] (en utilisant le Laplacien pseudo-différentiel $\widetilde{\Delta}$ introduit dans [Pop16] qui donne une théorie de Hodge pour la deuxième page de la suite spectrale de Frölicher) que toute variété complexe compacte X de dimension n et pour tout $p, q \in \{0, \dots, n\}$, l'accouplement bilinéaire canonique

$$E_2^{p,\,q}(X) \times E_2^{n-p,\,n-q}(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \left([[\alpha]_{\bar\partial}]_{d_1},\, [[\beta]_{\bar\partial}]_{d_1}\right) \mapsto \int\limits_X \alpha \wedge \beta, \tag{3.12}$$

est bien défini (i.e. indépendant des choix des représentants des classes de E_2-cohomologie associées) et non dégénéré. Donc, il définit une **dualité** de type Serre entre $E_2^{p,\,q}(X)$ et $E_2^{n-p,\,n-q}(X)$.

Sous cette dualité, la fermeture de notre cône $E_2sG\,\widehat{\mathcal{S}}_X \subset E_2^{n-2,\,n}(X)$, consistant en ces E_2-classes de type $(n-2,\, n)$ qui sont "positive" dans le sens de la Définition 3.1.5, admet un cône dual dans $E_2^{2,\,0}(X)$ qu'on va maintenant décrire. Pour ce dernier, on va introduire des notions ad hoc des $(2,\,0)$-formes *réelles* et *positives* et courants qui vont à l'encontre des définitions standard des formes réelles positives et courants de bidegré $(p,\, p)$, mais en proposant un analogue pas si farfelu de celui-ci en ce bidegré qui est intéressant pour la géométrie symplectique holomorphe. Un prolongement possible de cette géométrie sur les variétés sGG est l'un de nos motivations et nous espérons qu'il sera traité dans un futur travail.

Dans cette sous-section, on va établir l'analogue de E_2 pour les bidegrés $(2,\,0)$ et $(n-2,\, n)$ de la dulatité de Lamari (cf. [[Lam99], lemme 3.3]) entre le cône pseudo-effective de Demailly $\mathcal{E}(X) \subset H^{1,1}_{BC}(X,\,\mathbb{R})$ (qui consiste en les classes de cohomologie de Bott-Chern pour tout $(1,\,1)$-courant $T \geq 0$ positif d-fermé sur X, voir [Dem92]) et la fermeture du cône de Gauduchon $\mathcal{G}_X \subset H_A^{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{R})$ introduit dans [Pop15] (qui consiste en les classes de cohomologie d'Aeppli pour toutes les métriques de Gauduchon $\omega^{n-1} > 0$ sur X).

On va supposer tout au long de cette sous-section que X est une variété sGG. Cela garantira que toute métrique de Gauduchon est fortement Gauduchon [PU18a] (voir Proposition 5.0.17).

Définition 3.1.13. *Soit X une variété complexe compacte* **sGG** *de dimension n.*

(i) On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} V &= \left\{\Gamma^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C}) \mid \exists\,\omega \;\; \textit{métrique Hermitienne telle que } \partial\Gamma^{n-2,\,n} = -\bar\partial\omega^{n-1}\right\}, \\ E &= \left\{\Gamma^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C}) \mid \partial\Gamma^{n-2,\,n} \in Im\,\bar\partial\right\}, \\ E_{\mathbb{R}} &= \left\{\Gamma^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C}) \mid \exists\,\Omega^{n-1,\,n-1} \;\; \textit{forme } \textbf{réelle} \textit{ telle que } \partial\Gamma^{n-2,\,n} = -\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1}\right\}. \end{aligned}$$

Alors, $V \subset E_{\mathbb{R}} \subset E \subset C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$ et E consiste en les $(n-2,\,n)$-formes lisses qui sont E_2-fermées (leurs $\bar\partial$-fermeture est automatique pour des raisons de bidegré), or $E_{\mathbb{R}}$ consiste en telles formes **réelles** *(dans le sens ad hoc) et V consiste en telles formes* **positives** *(dans ce sens ad hoc). Notons que toute métrique ω figurant dans la définition de V est automatiquement fortement Gauduchon (où, équivalent, Gauduchon puisque X est supposée sGG).*

(ii) Fixons une métrique Hermitienne γ arbitraire sur X. Soit $p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial} : C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C}) \longrightarrow Im\,\bar\partial$ la projection orthogonale par rapport au produit scalaire L^2_γ sur le sous-espace fermé des $(n-2,\,n)$-formes $\bar\partial$-exactes, induite par la décomposition de Hodge L^2_γ-orthogonale standard en 3-espaces

$$C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C}) = \ker\Delta'' \oplus Im\,\bar\partial \oplus Im\,\bar\partial^{\star}.$$

Considérons les ensembles suivants :

$$U_{\gamma} \;=\; \bigg\{\Gamma^{n-2,\,n}\in C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})\;|\;\exists\,\omega\;\text{métrique Hermitienne telle que}\;p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}(\partial\Gamma^{n-2,\,n}) = -\bar\partial\omega^{n-1}\bigg\},$$

$$C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_{\gamma} =$$

$$\bigg\{\alpha^{n-2,\,n}\in C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})\;|\;\exists\,\beta^{n-1,\,n-1}\;\text{forme}\;\textbf{réelle}\;\text{telle que}\;p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}(\partial\alpha^{n-2,\,n}) = -\bar\partial\beta^{n-1,\,n-1}\bigg\}.$$

*Donc, $U_{\gamma}\subset C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_{\gamma}\subset C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$ et U_{γ} consiste en les $(n-2,\,n)$-formes lisses γ-**positives** (dans ce sens ad hoc), or $C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_{\gamma}$ consiste en telles formes γ-**réelles** (dans ce sens ad hoc). Contrairement aux ensembles définis dans (i), ces ensembles ne sont soumis à aucune condition de E_2-fermeture. En particulier, on a l'inclusion suivante :*

$$V\subset U_{\gamma}\quad\text{et}\quad E_{\mathbb{R}}\subset C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_{\gamma}$$

pour toute métrique Hermitienne γ sur X.

(iii) Dans le contexte de (ii), on appelle un **courant γ-réel de bidegré** $(2,\,0)$ *sur X toute forme $\mathbb{R}$-linéaire continue*

$$\tau^{2,\,0} : C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_{\gamma}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

*On dit qu'un tel courant est γ-**positif** si $\tau^{2,\,0}$ évalue non-négativement sur chaque élément de U_{γ}. (Donc, en particulier, le courant zéro $\tau^{2,\,0}=0$ est γ-positif.)*

*On dit qu'un courant $\tau^{2,\,0}$ γ-réel de bidegré $(2,\,0)$ est E_2-**exacte** si $\tau^{2,\,0}$ est identiquement nul sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E_{\mathbb{R}}$ des $(n-2,\,n)$-formes "réelles" E_2-fermées définis dans (i).*[1]

Les propriétés suivantes des ensembles ci-dessus sont immédiates à vérifier.

Lemme 3.1.14. *(a) L'ensemble E est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel* **fermé** *de $C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$, les ensembles $E_{\mathbb{R}}$ et $C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_{\gamma}$ sont des $\mathbb{R}$-sous-espaces vectoriels* **fermés** *de $C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$, or V et U_{γ} sont des cônes* **convexes ouverts** *dans $E_{\mathbb{R}}$, et $C^{\infty}_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_{\gamma}$ respectivement.*

(b) On a l'identité suivante :

$$U_{\gamma}\cap E_{\mathbb{R}} = V.$$

Preuve. (a) La fermeture de E provient du fait (lui même est une conséquence de la théorie elliptique standard sur les variétés compactes) que $\mathrm{Im}\,\bar\partial$ est *fermée* dans l'espace des formes C^{∞} dont lequel il se trouve.

1. Cette dernière notion est conforme à la dualité usuelle selon laquelle un courant est exacte (par rapport à une cohomologie donnée) si et seulement s'il est identiquement nul sur les formes C^{∞} fermées de bidegrées complémentaire (par rapport à la même cohomologie).

Pour montrer que $E_{\mathbb{R}}$ est fermé dans $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$, on a besoin d'une autre étape supplémentaire. Soit $\Gamma_j^{n-2,\,n} \to \Gamma^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$ dans la topologie C^∞ quand $j \to +\infty$, où $\Gamma_j^{n-2,\,n} \in E_{\mathbb{R}}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Pour tout j, soit $\Gamma_j^{n-1,\,n-1} = -\Delta_\gamma''^{-1}\bar\partial_\gamma^\star\partial\Gamma_j^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{C})$ la solution minimale pour la norme L^2_γ de l'équation $\bar\partial\Gamma_j^{n-1,\,n-1} = -\partial\Gamma_j^{n-2,\,n}$. (Alors, l'espace de toutes les solutions est un sous-espace affine $\Gamma_j^{n-1,\,n-1} + \ker\bar\partial \subset C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{C})$ et l'hypothèse $\Gamma_j^{n-2,\,n} \in E_{\mathbb{R}}$ veut dire que $(\Gamma_j^{n-1,\,n-1} + \ker\bar\partial) \cap C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{R}) \neq \emptyset$, où $C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{R}) \subset C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{C})$ est le sous-espace vectoriel réel des formes *réelles*.) Alors $\operatorname{Im}\bar\partial \ni \partial\Gamma_j^{n-2,\,n} \to \partial\Gamma^{n-2,\,n}$ dans la topologie C^∞ quand $j \to +\infty$, donc $\partial\Gamma^{n-2,\,n} \in \operatorname{Im}\bar\partial$ car $\operatorname{Im}\bar\partial$ est *fermée*. De plus, $\Gamma^{n-1,\,n-1} = -\Delta_\gamma''^{-1}\bar\partial_\gamma^\star\partial\Gamma^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{C})$ est la solution minimale pour la norme L^2_γ de l'équation $\bar\partial\Gamma^{n-1,\,n-1} = -\partial\Gamma^{n-2,\,n}$, alors $\Gamma_j^{n-1,\,n-1} \to \Gamma^{n-1,\,n-1}$ dans la topologie C^∞ quand $j \to +\infty$ car la restriction à $\operatorname{Im}\bar\partial$ de l'opérateur $\Delta_\gamma''^{-1}\bar\partial_\gamma^\star$ est continue dans la topologie C^∞. Comme $(\Gamma_j^{n-1,\,n-1} + \ker\bar\partial) \cap C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{R}) \neq \emptyset$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{R})$ est *fermé* dans $C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{C})$, on obtient $(\Gamma^{n-1,\,n-1} + \ker\bar\partial) \cap C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Ceci veut dire que $\Gamma^{n-2,\,n} \in E_{\mathbb{R}}$. Par conséquent, $E_{\mathbb{R}}$ est fermé dans $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$.

La fermeture de $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma$ dans $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{C})$ peut être prouver par la même méthode puisque la projection $p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}$ est continue par rapport à la topologie C^∞.

La convexité de V et U_γ provient de la linéarité des opérateurs ∂, $\bar\partial$ et $p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}$ utilisé dans leurs définitions et de la convexité de l'ensemble des métriques de Gauduchon (elle même est une conséquence de l'existence de l'unique racine $(n-1)^{\text{ème}}$ définie positive pour chaque $(n-1,\,n-1)$-forme définie positive).

Montrons maintenant que U_γ est ouvert dans $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma$. (L'ouverture de V dans $E_{\mathbb{R}}$ peut être prouvé par la même méthode.) Soit $\Gamma^{n-2,\,n} \in U_\gamma$ et $\alpha^{n-2,\,n} \in C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma$ arbitraire. Par définition, il existe une métrique Hermitienne ω et une forme réelle $\beta^{n-1,\,n-1} \in C^\infty_{n-1,\,n-1}(X,\,\mathbb{R})$ telle que

$$p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}(\partial\Gamma^{n-2,\,n}) = -\bar\partial\omega^{n-1} \quad \text{et} \quad p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}(\partial\alpha^{n-2,\,n}) = -\bar\partial\beta^{n-1,\,n-1}.$$

Alors, pour toute constante $\varepsilon > 0$, on a $p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}(\partial(\Gamma^{n-2,\,n} + \varepsilon\,\alpha^{n-2,\,n})) = -\bar\partial(\omega^{n-1} + \varepsilon\,\beta^{n-1,\,n-1})$. Comme $\beta^{n-1,\,n-1}$ est réelle et ω^{n-1} est définie positive, alors $\omega^{n-1} + \varepsilon\,\beta^{n-1,\,n-1}$ est définie positive pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Par conséquent, $\Gamma^{n-2,\,n} + \varepsilon\,\alpha^{n-2,\,n} \in U_\gamma$. Ceci montre que U_γ est un ouvert dans $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma$.

(b) Pour montrer l'inclusion "$\subset$", soit $\Gamma^{n-2,\,n} \in U_\gamma \cap E_{\mathbb{R}}$. Puisque $\Gamma^{n-2,\,n} \in E_{\mathbb{R}}$, alors $\partial\Gamma^{n-2,\,n} \in \operatorname{Im}\bar\partial$, donc $p^{(\gamma)}_{Im\,\bar\partial}(\partial\Gamma^{n-2,\,n}) = \partial\Gamma^{n-2,\,n}$. Comme $\Gamma^{n-2,\,n} \in U_\gamma$, alors $\partial\Gamma^{n-2,\,n} = -\bar\partial\omega^{n-1}$ pour une métrique Hermitienne ω. Par conséquent, $\Gamma^{n-2,\,n} \in V$. Ceci montre l'inclusion "$\subset$". L'inclusion inverse est évidente. $\square$

La dernière remarque préliminaire qu'on fait est un exemple indiquant une façon très particulière de la construction des applications linéaires *à valeurs réelles* sur $E_{\mathbb{R}}$. Ces applications se présentent, ci-dessous, sous une forme plus générale . (Voir la dernière hypothèse de la Proposition 3.1.16.)

Lemme 3.1.15. *Si une forme $\theta^{2,\,0} \in C^\infty_{2,\,0}(X,\,\mathbb{C})$ est de la forme $\theta^{2,\,0} = \partial\xi^{1,\,0}$ telle que la $(1,\,1)$-forme $\bar\partial\xi^{1,\,0}$ est* **réelle***, alors $\int_X \theta^{2,\,0} \wedge \Gamma^{n-2,\,n}$ est* **réel** *pour tout $\Gamma^{n-2,\,n} \in E_{\mathbb{R}}$.*

Preuve. Soit $\Gamma^{n-2,\,n} \in E_{\mathbb{R}}$. Alors, $\partial\Gamma^{n-2,\,n} = -\bar\partial\Omega^{n-1,\,n-1}$ pour quelque $(n-1,\,n-1)$-forme *réelle* $\Omega^{n-1,\,n-1}$. Appliquant le théorème de Stokes deux fois, on obtient

$$\int_X \theta^{2,0}\wedge\Gamma^{n-2,n} = \int_X \partial\xi^{1,0}\wedge\Gamma^{n-2,n} = -\int_X \xi^{1,0}\wedge\bar\partial\Omega^{n-1,n-1} = -\int_X \bar\partial\xi^{1,0}\wedge\Omega^{n-1,n-1}.$$

Puisque les formes $\bar\partial\xi^{1,0}$ et $\Omega^{n-1,n-1}$ sont réelles alors la dernière identité est réelle. $\square$

On est maintenant au point pour montrer le résultat de la dualité qu'on a visé. L'énoncé et la démonstration sont parallèles à ceux du Lemme 3.3 dans [Lam99].

Proposition 3.1.16. *Soit X une variété complexe compacte* **sGG** *de dimension n et γ une métrique Hermitienne arbitraire fixée sur X. Soit $\theta^{2,0}\in C^\infty_{2,0}(X,\mathbb{C})$ vérifiant la condition*

$$\int_X \theta^{2,0}\wedge\Gamma^{n-2,n}\geq 0$$

pour tout $\Gamma^{n-2,n}\in C^\infty_{n-2,n}(X,\mathbb{C})$ pour lequel il existe une métrique Hermitienne ω sur X telle que $\partial\Gamma^{n-2,n}=-\bar\partial\omega^{n-1}$ (i.e. pour tout $\Gamma^{n-2,n}\in V$). Supposons, de plus, que $\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma^{n-2,n}\in\mathbb{R}$ pour tout $\Gamma^{n-2,n}\in E_{\mathbb{R}}$.

Alors, il existe un courant γ-positif $\tau^{2,0}: C^\infty_{n-2,n}(X,\mathbb{R})_\gamma\longrightarrow\mathbb{R}$ de bidegré $(2,0)$ sur X tel que $\theta^{2,0}-\tau^{2,0}$ est E_2-exacte dans le sens où il est identiquement nul sur $E_{\mathbb{R}}$.

Notons que si on suppose que $\theta^{2,0}$ est E_2-fermée (i.e. $\bar\partial\theta^{2,0}=0$ et $\partial\theta^{2,0}\in\operatorname{Im}\bar\partial$, qui est en bidegré $(2,0)$ équivalent à supposer que $d\theta^{2,0}=0$), alors elle définit une classe $[[\theta^{2,0}]_{\bar\partial}]_{d_1}\in E_2^{2,0}$ et l'intégral $\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma^{n-2,n}$ est indépendant du choix du représentant de cette classe. Par conséquent, la Proposition 3.1.16 implique que le dual de la fermeture du cône $E_2sG\ \widehat{\mathcal{S}}_X$ defini dans (3.8) par la dualité $E_2^{2,0}(X)\times E_2^{n-2,n}(X)\longrightarrow\mathbb{C}$ est le cône convexe fermé dans $E_2^{2,0}(X)$ constitué des E_2-classes $[[\theta^{2,0}]_{\bar\partial}]_{d_1}$ "représentable" par les courants γ-positifs $\tau^{2,0}: C^\infty_{n-2,n}(X,\mathbb{R})_\gamma\longrightarrow\mathbb{R}$.

Preuve de la Proposition 3.1.16. On suit les arguments de la preuve du Lemme 3.3. de Lamari dans [Lam99]. La forme $\theta^{2,0}$ définit une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\theta^{2,0}: C^\infty_{n-2,n}(X,\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C},\qquad \Gamma^{n-2,n}\mapsto\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma^{n-2,n}.$$

L'hypothèse imposée sur $\theta^{2,0}$ se traduit par $\theta^{2,0}_{|V}\geq 0$. Donc il y a deux cas.

1^{er} *cas.* Supposons qu'il existe $\Gamma_0^{n-2,n}\in V\subset E_{\mathbb{R}}$ telle que $\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma_0^{n-2,n}=0$. Ceci montre que $\theta^{2,0}_{|E_{\mathbb{R}}}\equiv 0$.

En effet, fixons $\Gamma^{n-2,n}\in E_{\mathbb{R}}$ quelconque et soit $\Gamma_t^{n-2,n}:=(1-t)\,\Gamma_0^{n-2,n}+t\,\Gamma^{n-2,n}$ pour $t\in\mathbb{R}$. Alors $\Gamma_t^{n-2,n}\in E_{\mathbb{R}}$ pour tout $t\in[0,1]$ puisque $E_{\mathbb{R}}$ est convexe. De plus, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$f(t):=\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma_t^{n-2,n}=(1-t)\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma_0^{n-2,n}+t\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma^{n-2,n}=t\int_X\theta^{2,0}\wedge\Gamma^{n-2,n}.$$

En particulier, $f(0)=0$. Or V est un ouvert dans $E_{\mathbb{R}}$ (cf. Lemme 3.1.14) et $\Gamma_0^{n-2,\,n}\in V$, alors $\Gamma_t^{n-2,\,n}\in V$ pour tout t assez proche de 0. Puisque $\theta^{2,\,0}_{|V}\geq 0$, on en déduit que $f(t)\geq 0$ pour tout $t\in[-\varepsilon,\,\varepsilon]$ avec $\varepsilon>0$ petit. C'est à dire $t\int_X\theta^{2,\,0}\wedge\Gamma^{n-2,\,n}\geq 0$ pour tout $t\in[-\varepsilon,\,\varepsilon]$, ce qui est impossible sauf si $\int_X\theta^{2,\,0}\wedge\Gamma^{n-2,\,n}=0$. Ceci montre que $\theta^{2,\,0}_{|E_{\mathbb{R}}}\equiv 0$, donc on peut choisir $\tau^{2,\,0}=0$ (qui est γ-positif).

$2^{ème}$ *cas.* Supposons que $\theta^{2,\,0}_{|V}>0$. Soit $F\subset E_{\mathbb{R}}$ le noyau de la restriction $\theta^{2,\,0}_{|E_{\mathbb{R}}}:E_{\mathbb{R}}\longrightarrow\mathbb{R}$. Alors, F est de codimension réelle égale à 1 dans $E_{\mathbb{R}}$ et

$$U_\gamma\cap F=\emptyset.$$

Pour montrer la dernière identité, supposons qu'il existe $\Gamma^{n-2,\,n}\in U_\gamma\cap F$. Alors $\int_X\theta^{2,\,0}\wedge\Gamma^{n-2,\,n}=0$ car $\Gamma^{n-2,\,n}\in F=\ker(\theta^{2,\,0}_{|E_{\mathbb{R}}})$. D'autre part, $\int_X\theta^{2,\,0}\wedge\Gamma^{n-2,\,n}>0$ car $F\subset E_{\mathbb{R}}$, donc $\Gamma^{n-2,\,n}\in U_\gamma\cap E_{\mathbb{R}}=V$ (d'après (b) du Lemme 3.1.14) et $\theta^{2,\,0}_{|V}>0$. Ce qui est absurde.

Puisque U_γ est un sous-ensemble convexe ouvert de $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma$, F est un sous-ensemble convexe fermé de $C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma$ et U_γ et F sont disjoints, alors d'après le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue

$$l^{2,\,0}:C^\infty_{n-2,\,n}(X,\,\mathbb{R})_\gamma\longrightarrow\mathbb{R}$$

telle que $l^{2,\,0}_{|U_\gamma}>0$ et $l^{2,\,0}_{|F}=0$.

La première condition implique que le $(2,\,0)$-courant γ-réel $l^{2,\,0}$ est γ-positif.

Soit $\Gamma_1^{n-2,\,n}\in V$. Alors $\int_X\theta^{2,\,0}\wedge\Gamma_1^{n-2,\,n}>0$ et $\int_X l^{2,\,0}\wedge\Gamma_1^{n-2,\,n}>0$, donc il existe une constante $\lambda>0$ telle que $\int_X\theta^{2,\,0}\wedge\Gamma_1^{n-2,\,n}=\lambda\int_X l^{2,\,0}\wedge\Gamma_1^{n-2,\,n}$. C'est à dire $(\theta^{2,\,0}-\lambda\,l^{2,\,0})_{|\mathbb{R}\,\Gamma_1^{n-2,\,n}}=0$. D'autre part, on a $(\theta^{2,\,0}-\lambda\,l^{2,\,0})_{|F}=0$. Comme F est de codimension réelle égale à 1 dans $E_{\mathbb{R}}$, alors $(\theta^{2,\,0}-\lambda\,l^{2,\,0})_{|E_{\mathbb{R}}}=0$. Si on pose $\tau^{2,\,0}:=\lambda\,l^{2,\,0}$, on trouve le résultat. $\square$

3.2 La propriété h-$\partial\bar\partial$ des variétés complexes compactes

Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}}X=n$. On considère maintenant la construction de la *limite adiabatique* de l'opérateur différentiel $d_h=h\partial+\bar\partial$ (cf. (1.2)) qui a été introduit dans [Pop17] pour toute constante $h>0$. Permettant maintenant h d'être negative, on trouve les propriétés évidentes suivantes :

$$\begin{aligned}&(i)\quad \overline{d}_h=h\,d_{h^{-1}};\qquad (ii)\;\overline{d}_{-h}=-h\,d_{-h^{-1}};\\ &(iii)\quad d_{h_1}d_{h_2}=(h_1-h_2)\,\partial\bar\partial;\qquad \text{en particulier,}\quad d_h\,d_{-h^{-1}}=(h+\frac{1}{h})\,\partial\bar\partial;\\ &(iv)\quad \frac{h+1}{h^2+1}\,d_h+\frac{h(h-1)}{h^2+1}\,d_{-h^{-1}}=d,\end{aligned}\tag{3.13}$$

pour tout $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lorsque la métrique Hermitienne ω est fixée sur X, l'adjoint formel $d_h^\star$ de d_h par rapport à ω induit avec d_h un opérateur de type Laplacien de la manière usuelle :

$$\Delta_h:d_h\,d_h^\star+d_h^\star d_h:C^\infty_k(X,\,\mathbb{C})\longrightarrow C^\infty_k(X,\,\mathbb{C}),$$

pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$. Ce **h-Laplacien** est elliptique (cf. [Pop17]). L'identité (ii) dans (3.13) implique

$$\overline{\Delta}_{-h} = h^2 \, \Delta_{-h^{-1}}, \qquad \text{pour tout } \; h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.14}$$

On continue maintenant l'étude des opérateurs d_h, à la fois du côté métrique et intrinsèque.

3.2.1 Les relations de commutation et identité de BKN pour les opérateurs d_h

Fixons une métrique Hermitienne ω quelconque sur X. Tous les adjoints formels seront calculés par rapport à ω, de même pour l'adjoint (ponctuel et formel) $\Lambda = \Lambda_\omega$ de l'opérateur de multiplication $\text{Ł} = \text{Ł}_\omega := \omega \wedge \cdot$. Rappelons l'opérateur de torsion standard de type $(1,\, 0)$ (cf. [Dem84]) $\tau = [\Lambda,\, \partial\omega \wedge \cdot]$ et les relations de commutation Hermitienne (cf. encore [Dem84]) :

$$\partial^\star + \tau^\star = i\,[\Lambda,\, \bar\partial] \quad \text{ et } \quad \bar\partial^\star + \bar\tau^\star = -i\,[\Lambda,\, \partial].$$

On en déduira le résultat suivant :

Lemme 3.2.1. *Soit $(X,\, \omega)$ une variété Hermitienne complexe. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on définit* **l'opérateur h-torsion** *de type $(1,\, 0)$, induit par ω, par $\tau_h := [\Lambda,\, d_h\omega \wedge \cdot]$.*

On a les **relations de h-commutation Hermitienne** *sur les formes différentielles de degrées quelconque :*

$$(a)\; (d_h + \tau_h)^\star = -i\,[\Lambda,\, \overline{d}_{-h}]; \qquad (b)\; (\overline{d}_h + \overline{\tau}_h)^\star = i\,[\Lambda,\, d_{-h}];$$
$$(c)\; d_h + \tau_h = i\,[\overline{d}^\star_{-h},\, \omega \wedge \cdot]; \qquad (d)\; \overline{d}_h + \overline{\tau}_h = -i\,[d^\star_{-h},\, \omega \wedge \cdot].$$

Preuve. Puisque (b) est le conjugué de (a), et les implications $(a) \implies (c)$ et $(b) \implies (d)$ sont obtenues en prenant les adjoints, alors il suffit de montrer (a).

En utilisant les définitions ci-dessus et les relations de commutation Hermitienne standard, on obtient

$$d_h^\star \;=\; h\partial^\star + \bar\partial^\star = i\,[\Lambda,\, h\bar\partial] - h\tau^\star - i\,[\Lambda,\, \partial] - \bar\tau^\star = -i\,[\Lambda,\, \overline{d}_{-h}] - (h\tau^\star + \bar\tau^\star)$$

et

$$h\tau^\star + \bar\tau^\star \;=\; [(h\,\partial\omega \wedge \cdot)^\star,\, \omega \wedge \cdot] + [(\bar\partial\omega \wedge \cdot)^\star,\, \omega \wedge \cdot] = [(d_h\omega \wedge \cdot)^\star,\, \omega \wedge \cdot] = \tau_h^\star.$$

En additionnant ces identités, on obtient (a). □

Une conséquence immédiate est la suivante

Corollaire 3.2.2. *Soit $(X,\, \omega)$ une variété Hermitienne complexe. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a* **l'identité h-Bochner-Kodaira-Nakano (h-BKN)** *sur les formes différentielles en tout degrée :*

$$\Delta_h = \overline{\Delta}_{-h} + [\overline{d}_{-h},\, \overline{\tau}^\star_{-h}] - [d_h,\, \tau_h^\star].$$

Preuve. En utilisant la relation h-commutation (a) du Lemme 3.2.1 dans la deuxième identité ci-dessus, on obtient

$$\Delta_h = [d_h,\, d_h^\star] = -i\,[d_h,\, [\Lambda,\, \overline{d}_{-h}]] - [d_h,\, \tau_h^\star].$$

D'autre part, on a l'identité de Jacobi :

$$-[d_h,\, [\Lambda,\, \overline{d}_{-h}]] + [\Lambda,\, [\overline{d}_{-h},\, d_h]] + [\overline{d}_{-h},\, [d_h,\, \Lambda]] = 0.$$

Comme $[\overline{d}_{-h},\, d_h] = 0$ quand $h \neq 0$, alors le deuxième terme ci-dessus s'annule. Or, en remplaçant h par $-h$ dans la relation de h-commutation (b) du Lemme 3.2.1, on obtient $[d_h,\, \Lambda] = i\,(\overline{d}_{-h} + \overline{\tau}_{-h})^\star$. Par conséquent $-i\,[d_h,\, [\Lambda,\, \overline{d}_{-h}]] = [\overline{d}_{-h},\, (\overline{d}_{-h} + \overline{\tau}_{-h})^\star] = \overline{\Delta}_{-h} + [\overline{d}_{-h},\, \overline{\tau}_{-h}^\star]$ et la formule s'en suit. □

Une autre conséquence immédiate est l'assertion anti-commutation dans le cas Kählerien suivant.

Corollaire 3.2.3. *Soit $(X,\, \omega)$ une variété* **Kählérienne** *compacte. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a les identités suivantes :*

$$[d_h,\, d_{-h^{-1}}^\star] = 0 \quad \textit{et} \quad [d_{-h^{-1}},\, d_h^\star] = 0.$$

Preuve. La deuxième identité est l'adjoint de la première, alors il suffit de montrer la première. On remplace h par $-h^{-1}$ dans la relation de h-commutation (a) du Lemme 3.2.1, on obtient $d_{-h^{-1}}^\star = -i\,[\Lambda,\, \overline{d}_{h^{-1}}] = -\frac{i}{h}\,[\Lambda,\, d_h]$ puisque $\tau_h = 0$ pour tout h lorsque ω est Kählérienne et l'identité (i) dans (3.13) a été utilisé pour montrer la dernière identité. Par conséquent, lorsque ω est Kählérienne, on a $[d_h,\, d_{-h^{-1}}^\star] = -\frac{i}{h}\,[d_h,\, [\Lambda,\, d_h]]$.

L'identité de Jacobi donne :

$$-[d_h,\, [\Lambda,\, d_h]] + [\Lambda,\, [d_h,\, d_h]] + [d_h,\, [d_h,\, \Lambda]] = 0.$$

Comme $[d_h,\, d_h] = 0$ et $[d_h,\, \Lambda] = -[\Lambda,\, d_h]$, alors $[d_h,\, [\Lambda,\, d_h]] = 0$.

Par conséquent $[d_h,\, d_{-h^{-1}}^\star] = -\frac{i}{h}\,[d_h,\, [\Lambda,\, d_h]] = 0$. D'où le résultat. □

On va maintenant raffiner la formule de BKN ci-dessus, en s'inspirant du [Dem84], en intégrant les termes de 1^{st} ordre dans l'opérateur de type Laplacien tordu sur le terme droit de l'identité de sorte que les termes de divergence deviennent d'ordre zéro. On commence par quelques calculs préliminaires.

Lemme 3.2.4. *Soit $(X,\, \omega)$ une variété Hermitienne complexe. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a les identités :*

(i) $[L,\, \tau_h] = 3\, d_h\omega \wedge \cdot$, *(ii)* $[\Lambda,\, \tau_h] = 2i\, \overline{\tau}_{-h}^\star$, *(iii)* $[d_h,\, \overline{d}_{-h}^\star] = -[d_h,\, \overline{\tau}_{-h}^\star]$,

(iv) $[d_h,\, d_h^\star] + [d_h,\, \tau_h^\star] - [\overline{d}_{-h},\, \overline{\tau}_{-h}^\star] = [d_h + \tau_h,\, d_h^\star + \tau_h^\star] + S_\omega^{(h)}$, *où*

$$S_\omega^{(h)} := \frac{i}{2}\,[\Lambda,\, [\Lambda,\, \overline{d}_{-h} d_h\omega \wedge \cdot]] - [d_h\omega \wedge \cdot,\, (d_h\omega \wedge \cdot)^\star].$$

Preuve. (i) La définition de τ_h et l'identité de Jacobi donnent la première et la deuxième identités respectivement ci-dessous :

$$[L,\, \tau_h] = [L,\, [\Lambda,\, d_h\omega \wedge \cdot]] = -[\Lambda,\, [d_h\omega \wedge \cdot,\, L]] - [d_h\omega \wedge \cdot,\, [L,\, \Lambda]].$$

Notons que, $[d_h\omega \wedge \cdot,\, L] = d_h\omega \wedge (\omega \wedge \cdot) - \omega \wedge d_h\omega \wedge \cdot = 0$, alors le premier terme du côté droit ci-dessus est nul. D'autre part, on a $[L,\, \Lambda] = (k-n)\,\mathrm{Id}$ sur les k-formes. Donc pour toute k-forme u, on a

$$[d_h\omega\wedge\cdot,\, [L,\, \Lambda]]\, u = d_h\omega\wedge([L,\, \Lambda]\, u) - [L,\, \Lambda]\,(d_h\omega\wedge u) = (k-n)\, d_h\omega\wedge u - (k+3-n)\, d_h\omega\wedge u = -3\, d_h\omega\wedge u.$$

Il en résulte, $[d_h\omega \wedge \cdot,\, [L,\, \Lambda]] = -3\, d_h\omega \wedge \cdot$ et (i) s'ensuit.

(ii) On sait d'après la relation de h-commutation (c) du Lemme 3.2.1 que $\tau_h = i\,[\overline{d}^\star_{-h},\, \omega\wedge\cdot] - d_h$. Donc, en utilisant aussi (b) du Lemme 3.2.1, on obtient

$$[\Lambda,\, \tau_h] = i\,[\Lambda,\, [\overline{d}^\star_{-h},\, \omega \wedge \cdot]] - [\Lambda,\, d_h] = i\,[\Lambda,\, [\overline{d}^\star_{-h},\, \omega \wedge \cdot]] + i\,(\overline{d}_{-h} + \overline{\tau}_{-h})^\star.$$

D'après l'identité de Jacobi, on a

$$[\Lambda,\, [\overline{d}^\star_{-h},\, \omega \wedge \cdot]] + [\overline{d}^\star_{-h},\, [\omega \wedge \cdot,\, \Lambda]] + [\omega \wedge \cdot,\, [\Lambda,\, \overline{d}^\star_{-h}]] = 0.$$

Puisque $[\omega \wedge \cdot,\, \Lambda] = (k-n)\,\mathrm{Id}$ sur les k-formes, alors $[\overline{d}^\star_{-h},\, [\omega \wedge \cdot,\, \Lambda]] = \overline{d}^\star_{-h}$. Or, $[\omega \wedge \cdot,\, [\Lambda,\, \overline{d}^\star_{-h}]] = [[\overline{d}_{-h},\, \omega \wedge \cdot],\, \Lambda]^\star$, donc on obtient

$$[\Lambda,\, \tau_h] = -i\,[[\overline{d}_{-h},\, \omega \wedge \cdot],\, \Lambda]^\star - i\,\overline{d}^\star_{-h} + i\,(\overline{d}_{-h} + \overline{\tau}_{-h})^\star.$$

De plus, pour une forme u quelconque, on a

$$[\overline{d}_{-h},\, \omega \wedge \cdot]\, u = (\partial - h\bar\partial)\,(\omega \wedge u) - \omega \wedge (\partial u - h\bar\partial u) = (\partial\omega - h\,\bar\partial\omega) \wedge u = \overline{d}_{-h}\omega \wedge u.$$

Donc, $[\overline{d}_{-h},\, \omega \wedge \cdot] = \overline{d}_{-h}\,\omega \wedge \cdot$, par conséquent

$$\begin{aligned}[\Lambda,\, \tau_h] &= -i\,[\overline{d}_{-h}\,\omega \wedge \cdot,\, \Lambda]^\star - i\,\overline{d}^\star_{-h} + i\,(\overline{d}_{-h} + \overline{\tau}_{-h})^\star \\ &= i\,\overline{\tau}^\star_{-h} - i\,\overline{d}^\star_{-h} + i\,(\overline{d}_{-h} + \overline{\tau}_{-h})^\star = 2i\,\overline{\tau}^\star_{-h},\end{aligned}$$

où la deuxième identité provient de la définition de τ_h en remplaçant h par $-h$ puis en prenant les conjugués et les adjoints.

Ceci montre (ii).

(iii) D'après l'identité de Jacobi, on a

$$-[d_h,\, [\Lambda,\, d_h]] + [\Lambda,\, [d_h,\, d_h]] + [d_h,\, [d_h,\, \Lambda]] = 0.$$

Comme $[d_h,\, d_h] = 0$ (car $d_h^2 = 0$), et $[d_h,\, \Lambda] = -[\Lambda,\, d_h]$, alors $[d_h,\, [\Lambda,\, d_h]] = 0$. En utilisant la relation de h-commutation (b) du Lemme 3.2.1, c'est à dire $[d_h,\, \overline{\tau}^\star_{-h}] = -[d_h,\, \overline{d}^\star_{-h}]$, ou de manière équivalente $[\tau_h,\, \overline{d}^\star_{-h}] = -[d_h,\, \overline{d}^\star_{-h}]$, où la dernière identité est obtenue d'après la première en calculant les adjoints, les conjugés et en remplaçant h par $-h$. Autrement dit, on a

$$[d_h,\, \overline{d}^\star_{-h}] = -[\tau_h,\, \overline{d}^\star_{-h}] = -[d_h,\, \overline{\tau}^\star_{-h}]. \tag{3.15}$$

Ceci montre (iii).

(iv) En appliquant la partie (ii) et l'identité de Jacobi, on obtient

$$[\overline{d}_{-h},\,\overline{\tau}^{\star}_{-h}] = -\frac{i}{2}\,[\overline{d}_{-h},\,[\Lambda,\,\tau_h]] = -\frac{i}{2}\,[\Lambda,\,[\tau_h,\,\overline{d}_{-h}]] - \frac{i}{2}\,[\tau_h,\,[\overline{d}_{-h},\,\Lambda]]. \tag{3.16}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}[\tau_h,\,\overline{d}_{-h}] &\overset{(a)}{=} [\overline{d}_{-h},\,\tau_h] \overset{(b)}{=} [\overline{d}_{-h},\,[\Lambda,\,d_h\omega\wedge\cdot]] \overset{(c)}{=} [\Lambda,\,[d_h\omega\wedge\cdot,\,\overline{d}_{-h}]] + [d_h\omega\wedge\cdot,\,[\overline{d}_{-h},\,\Lambda]]\\ &\overset{(d)}{=} [\Lambda,\,\overline{d}_{-h}d_h\omega\wedge\cdot] - i\,[d_h\omega\wedge\cdot,\,d_h^{\star}+\tau_h^{\star}],\end{aligned}$$

où (a) découle de τ_h et $\overline{d}_{-h}$ étant des opérateurs de degrés impairs, (b) découle de la définition de τ_h, (c) découle de identité de Jacobi, tandis que le dernier terme dans (d) découle de la relation de h-commutation (b) du Lemme 3.2.1 et le premier terme dans (d) résulte du calcul facile suivant :

$$[d_h\omega\wedge\cdot,\,\overline{d}_{-h}]\,u = d_h\omega\wedge\overline{d}_{-h}u + \overline{d}_{-h}(d_h\omega\wedge u) = \overline{d}_{-h}d_h\omega\wedge u,$$

pour toute forme u.

Appliquant le crochet avec Λ dans la formule ci-dessus de $[\tau_h,\,\overline{d}_{-h}]$, on obtient

$$[\Lambda,\,[\tau_h,\,\overline{d}_{-h}]] = [\Lambda,\,[\Lambda,\,\overline{d}_{-h}d_h\omega\wedge\cdot]] - i\,[\Lambda,\,[d_h\omega\wedge\cdot,\,d_h^{\star}+\tau_h^{\star}]]. \tag{3.17}$$

En appliquant à nouveau la formule de Jacobi pour le dernier terme, on obtient

$$\begin{aligned}[\Lambda,\,[d_h\omega\wedge\cdot,\,d_h^{\star}+\tau_h^{\star}]] &= -[d_h\omega\wedge\cdot,\,[d_h^{\star}+\tau_h^{\star},\,\Lambda]] + [d_h^{\star}+\tau_h^{\star},\,[\Lambda,\,d_h\omega\wedge\cdot]]\\ &= -[d_h\omega\wedge\cdot,\,[\omega\wedge\cdot,\,d_h+\tau_h]^{\star}] + [d_h^{\star}+\tau_h^{\star},\,\tau_h],\\ &= -2\,[d_h\omega\wedge\cdot,\,(d_h\omega\wedge\cdot)^{\star}] + [d_h^{\star}+\tau_h^{\star},\,\tau_h],\end{aligned} \tag{3.18}$$

où le premier terme de la dernière ligne est donné par le calcul simple suivant. Pour toute forme u, on a $[\omega\wedge\cdot,\,d_h]\,u = \omega\wedge d_hu - d_h(\omega\wedge u) = -d_h\omega\wedge u$. Donc, $[\omega\wedge\cdot,\,d_h] = -d_h\omega\wedge\cdot$. Combiné avec l'identité (i), cela donne $[\omega\wedge\cdot,\,d_h+\tau_h] = 2\,d_h\omega\wedge\cdot$.

En combinant (3.17) et (3.18), on obtient

$$[\Lambda,\,[\tau_h,\,\overline{d}_{-h}]] = [\Lambda,\,[\Lambda,\,\overline{d}_{-h}d_h\omega\wedge\cdot]] + 2i\,[d_h\omega\wedge\cdot,\,(d_h\omega\wedge\cdot)^{\star}] - i\,[d_h^{\star}+\tau_h^{\star},\,\tau_h],$$

qui, à son tour, se combine avec (3.16) pour donner

$$[\overline{d}_{-h},\,\overline{\tau}^{\star}_{-h}] = -\frac{i}{2}\,[\Lambda,\,[\Lambda,\,\overline{d}_{-h}d_h\omega\wedge\cdot]] + [d_h\omega\wedge\cdot,\,(d_h\omega\wedge\cdot)^{\star}] - \frac{1}{2}\,[d_h^{\star}+\tau_h^{\star},\,\tau_h] - \frac{i}{2}\,[\tau_h,\,[\overline{d}_{-h},\,\Lambda]].$$

Puisque $-i\,[\Lambda,\,\overline{d}_{-h}] = d_h^{\star}+\tau_h^{\star}$ d'après la relation de h-commutation (a) du Lemme 3.2.1, on obtient

$$-[\overline{d}_{-h},\,\overline{\tau}^{\star}_{-h}] = [d_h^{\star}+\tau_h^{\star},\,\tau_h] + \frac{i}{2}\,[\Lambda,\,[\Lambda,\,\overline{d}_{-h}d_h\omega\wedge\cdot]] - [d_h\omega\wedge\cdot,\,(d_h\omega\wedge\cdot)^{\star}].$$

En ajoutant $[d_h,\,d_h^{\star}] + [d_h,\,\tau_h^{\star}]$ aux deux côtés de l'identité ci-dessus, on obtient

$$[d_h,\, d_h^\star] + [d_h,\, \tau_h^\star] - [\overline{d}_{-h},\, \overline{\tau}_{-h}^\star] = [d_h + \tau_h,\, d_h^\star + \tau_h^\star] + S_\omega^{(h)},$$

où $S_\omega^{(h)} := \frac{i}{2}\,[\Lambda,\, [\Lambda,\, \overline{d}_{-h} d_h\omega \wedge \cdot]] - [d_h\omega \wedge \cdot,\, (d_h\omega \wedge \cdot)^\star]$. Ceci montre (iv). $\square$

On peut maintenat énoncer le résultat principal de cette sous-section.

Theorem 3.2.5. *Soit $(X,\, \omega)$ une variété Hermitienne complexe. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a* **l'identité de h-Bochner-Kodaira-Nakano (h-BKN) raffinée** *sur les formes différentielles en tout degré :*

$$\Delta_h = [\overline{d}_{-h} + \overline{\tau}_{-h},\, \overline{d}_{-h}^\star + \overline{\tau}_{-h}^\star] + T_\omega^{(h)},$$

où $T_\omega^{(h)}$ est l'opérateur d'ordre zéro défini par

$$T_\omega^{(h)} := -\frac{i}{2}\,[\Lambda,\, [\Lambda,\, d_h\overline{d}_{-h}\omega \wedge \cdot]] - [\overline{d}_{-h}\omega \wedge \cdot,\, (\overline{d}_{-h}\omega \wedge \cdot)^\star].$$

En particulier, si la métrique ω est **Kählérienne**, *$d_h\omega = 0$ alors $\tau_h = 0$ et $T_\omega^{(h)} = 0$, donc on obtient*

$$\Delta_h = \overline{\Delta}_{-h} \quad (\textit{pour tout } h \in \mathbb{R}) \qquad \textit{et} \qquad \Delta_h = h^2\,\Delta_{-h^{-1}} \quad (\textit{pour tout } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

La dernière identité découle de la première d'après (3.14).

Preuve. En combinant (iv) du Lemme 3.2.4 avec la formule de BKN du Corollaire 3.2.2, on obtient

$$\Delta_h + [d_h + \tau_h,\, d_h^\star + \tau_h^\star] + S_\omega^{(h)} = \overline{\Delta}_{-h} + [\overline{d}_{-h},\, \overline{\tau}_{-h}^\star] - [d_h,\, \tau_h^\star] + [d_h,\, d_h^\star] + [d_h,\, \tau_h^\star] - [\overline{d}_{-h},\, \overline{\tau}_{-h}^\star].$$

Comme $[d_h,\, d_h^\star] = \Delta_h$, alors la dernière formule est réduite à

$$\overline{\Delta}_{-h} = [d_h + \tau_h,\, d_h^\star + \tau_h^\star] + S_\omega^{(h)}.$$

L'identité de h-BKN raffinée découle de cette dernière en conjuguant et en remplaçant h par $-h$. $\square$

3.2.2 h-$\partial\bar{\partial}$-variétés

Le $\partial\bar{\partial}$-lemma standard affirme que toute variété Kählérienne compacte est $\partial\bar{\partial}$-variété. On va maintenant étudier l'analogue de cette assertion dans notre contexte de d_h-cohomologie.

Theorem 3.2.6. *Soit $(X,\, \omega)$ une variété* **Kählérienne** *compacte. Soit $\Delta := dd^\star + d^\star d$. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a l'identité suivante :*

$$\Delta = \frac{(h+1)^2}{(h^2+1)^2}\,\Delta_h + \frac{(h-1)^2}{(h^2+1)^2}\,(h^2\,\Delta_{-h^{-1}}).$$

Preuve. En utilisant (iv) de (3.13) et l'identité évidente $\Delta_h = [d_h,\, d_h^\star]$ pour tout h, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta = [d,\, d^\star] \;&=\; \frac{(h+1)^2}{(h^2+1)^2}\,\Delta_h + \frac{h^2\,(h-1)^2}{(h^2+1)^2}\,\Delta_{-h^{-1}} \\ &+\; \frac{(h+1)h(h-1)}{(h^2+1)^2}\,[d_h,\, d^\star_{-h^{-1}}] + \frac{(h+1)h(h-1)}{(h^2+1)^2}\,[d_{-h^{-1}},\, d^\star_h].\end{aligned}$$

Puisque la métrique ω est supposée Kählérienne, alors d'après le Corollaire 3.2.3 on a $[d_h,\, d^\star_{-h^{-1}}] = 0$ et $[d_{-h^{-1}},\, d^\star_h] = 0$. D'où le résultat. $\square$

Une conséquence immédiate du Théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 est l'énoncé de proportionnalité suivant.

Corollaire 3.2.7. *Soit $(X,\, \omega)$ une variété* **Kählérienne** *compacte. Pour tout $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a les identités sur les formes différentielles, en tout degrée, suivante :*

$$\Delta = \frac{2}{h^2+1}\,\Delta_h = \frac{2h^2}{h^2+1}\,\Delta_{-h^{-1}} = \frac{2}{h^2+1}\,\overline{\Delta}_{-h}.$$

on fait une pause brièvement pour remarquer que l'énoncé de proportionnalité ci-dessus redémontre, en conjonction avec le résultat principal de [Pop17], le fait standard que la propriété de Kähler des variétés complexes compactes implique la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Frölicher. Encore une autre preuve sera implicite plus bas rassemblant les Théorèmes 3.2.9 et 3.2.11.

Corollaire 3.2.8. *(standard) Soit $(X,\, \omega)$ une variété* **Kählérienne** *compacte. Alors la suite spectrale de Frölicher de X dégénère en E_1.*

Preuve. On sait, d'après le Corollaire 3.2.7, que $\Delta_h = \frac{h^2+1}{2}\,\Delta$ pour tout $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ en tout degré k. En particulier, $\ker\Delta_h = \ker\Delta$ pour tout $h \neq 0$. Soit $\delta_h^{(k)} > 0$ la plus petite valeur propre positive de $\Delta_h : C_k^\infty(X,\, \mathbb{C}) \longrightarrow C_k^\infty(X,\, \mathbb{C})$ agissant sur les k-formes et soit $u_h^{(k)} \in C_k^\infty(X,\, \mathbb{C})$ le vecteur propre normalisé associé tel que son L^2_ω-norme $||u_h^{(k)}||$ égale à 1. Puisque $u_h^{(k)}$ est orthogonal au $\ker\Delta_h$, il est également orthogonal au $\ker\Delta$ pour tout $h \neq 0$. Pour tout $h > 0$, on obtient

$$\delta_h^{(k)} = \langle\langle\Delta_h u_h^{(k)},\, u_h^{(k)}\rangle\rangle_\omega = \frac{h^2+1}{2}\,\langle\langle\Delta u_h^{(k)},\, u_h^{(k)}\rangle\rangle_\omega \geq \frac{h^2+1}{2}\,\delta^{(k)} \geq \frac{1}{2}\,\delta^{(k)}, \tag{3.19}$$

où $\delta^{(k)} > 0$ est la plus petite valeur propre positive de $\Delta : C_k^\infty(X,\, \mathbb{C}) \longrightarrow C_k^\infty(X,\, \mathbb{C})$ agissant sur les k-formes. (Alors, $\delta^{(k)}$ est indépendante de h.)

Maintenant, d'après le Théorème 1.3 (et son corollaire, Proposition 5.3) dans [Pop17] on sait que la suite spectral de Frölicher de toute variété Hermitienne compacte $(X,\, \omega)$ dégénère en E_1 si et seulement si $\delta_h^{(k)}$ ne converge pas vers zéro au moins aussi vite que $O(h^2)$ lorsque $h \downarrow 0$ pour tout k. Dans notre cas, puisque la métrique ω est Kählérienne, alors (3.19) montre que pour tout k, $\delta_h^{(k)}$ reste même uniformément minorée par une constante positive quand $h \downarrow 0$. $\square$

On peut maintenant en déduire l'analogue de la d_h-cohomologie du $\partial\bar\partial$-lemma standard.

Theorem 3.2.9. *(the* **h-$\partial\bar\partial$-lemma***) Soit $(X,\,\omega)$ une variété* **Kählérienne** *compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$, tout $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et toute k-forme $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$, les conditions d'exactitude suivantes sont equivalentes :*

$$u \in \mathrm{Im}\, d_h \iff u \in \mathrm{Im}\, d_{-h^{-1}} \iff u \in \mathrm{Im}\, d \iff u \in \mathrm{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}}) = \mathrm{Im}\,(\partial\bar\partial).$$

Preuve. L'égalité $\mathrm{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}}) = \mathrm{Im}\,(\partial\bar\partial)$ découle de (iii) de (3.13), or la propriété $u \in \mathrm{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}})$ implique évidemment toutes les autres propriétés d'exactitude.

Comme $d_1 = d$ et on admet tout $h \neq 0$, il suffit alors de montrer l'implication "$u \in \mathrm{Im}\, d_h \implies u \in \mathrm{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}})$" pour $h \neq 0$ quelconque.

Puisque Δ_h et $\Delta_{-h^{-1}}$ sont des opérateurs elliptiques auto-adjoints avec $d_h^2 = d_{-h^{-1}}^2 = 0$ et la variété X est compacte, alors d'après la théorie de Hodge on a la décomposition L^2_ω-orthogonale (qui n'exige pas ω d'être Kählérienne) :

$$C^\infty_{k-1}(X,\,\mathbb{C}) = \ker \Delta_{-h^{-1}} \oplus \mathrm{Im}\, d_{-h^{-1}} \oplus \mathrm{Im}\, d^\star_{-h^{-1}} \tag{3.20}$$

dont laquelle $\ker d_{-h^{-1}} = \ker \Delta_{-h^{-1}} \oplus \mathrm{Im}\, d_{-h^{-1}}$.

Soit $u \in C^\infty_k(X,\,\mathbb{C})$ telle que $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$ et $u = d_h v$ avec $v \in C^\infty_{k-1}(X,\,\mathbb{C})$. La décomposition en 3-espaces (3.20) produit une unique décomposition

$$v = v_0 + d_{-h^{-1}} u_1 + d^\star_{-h^{-1}} u_2,$$

où la $(k-1)$-forme v_0 appartient au $\ker \Delta_{-h^{-1}}$ et u_1, u_2 sont de degrées respectifs $k-2$ et k. On obtient

$$u = d_h v = d_h v_0 + d_h d_{-h^{-1}} u_1 + d_h d^\star_{-h^{-1}} u_2 = -d_{-h^{-1}} d_h u_1 - d^\star_{-h^{-1}} d_h u_2.$$

En effet, la dernière identité ci-dessus découle de $v_0 \in \ker \Delta_{-h^{-1}} = \ker \Delta_h = \ker d_h \cap \ker d_h^\star$ (où l'hypothèse de Kähler sur ω a été utilisé pour garantir la proportionnalité des Laplaciens $\Delta_{-h^{-1}}$ et Δ_h – voir Théorème 3.2.5 – d'où l'égalité de leurs noyaux), de l'anti-commutation de d_h et $d_{-h^{-1}}$ (qui est vraie pour toute métrique ω non nécessairement Kählérienne – voir (iii) de (3.13)) et de l'anti-commutation de d_h et $d^\star_{-h^{-1}}$ (qui est une conséquence de l'hypothèse de Kähler sur ω via les relations de h-commutation – voir Corollaire 3.2.3).

Maintenant, $u + d_{-h^{-1}} d_h u_1 \in \ker d_{-h^{-1}}$ or $-d^\star_{-h^{-1}} d_h u_2 \in \mathrm{Im}\, d^\star_{-h^{-1}}$. D'autre part, $\ker d_{-h^{-1}}$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, d^\star_{-h^{-1}}$, alors la forme $u + d_{-h^{-1}} d_h u_1 = -d^\star_{-h^{-1}} d_h u_2$, qui appartient aux deux sous-espaces, doit s'annuler. En particulier, $u = -d_{-h^{-1}} d_h u_1 \in \mathrm{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}})$. $\square$

Le théorème ci-dessus conduit naturellement à ce qui suit :

Définition 3.2.10. *Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une constante arbitraire. Une variété complexe compacte X avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ est dite* **h-$\partial\bar\partial$-variété** *si pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ et toute k-forme $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$, les conditions d'exactitude suivantes sont équivalentes :*

$$u \in \mathrm{Im}\, d_h \iff u \in \mathrm{Im}\, d_{-h^{-1}} \iff u \in \mathrm{Im}\, d \iff u \in \mathrm{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}}) = \mathrm{Im}\,(\partial\bar\partial).$$

Notons que lorsque $h = 1$, $d_h = d$ et $d_{-h^{-1}} = d_{-1}$ coïncide (à une constante multiplicative près) avec d^c. La h-$\partial\bar{\partial}$-propriété introduite ci-dessus ne nécessite pas la forme u d'être de type pure. dans les cas $h \notin \{-1, 1\}$, il est destiné à renforcer la $\partial\bar{\partial}$-propriété standard .

Comme la $\partial\bar{\partial}$-propriété standard, la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété est impliquée par la condition de Kähler et implique la dégénérescence en la première page de la suite spectrale de Frölicher (cf. Théorèmes 3.2.9 ci-dessus et 3.2.11 ci-dessous). En fait, la dernière implication découle de l'implication bien connue avec la $\partial\bar{\partial}$-propriété au lieu de la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété, mais on préfère de donner une preuve indépendante.

Theorem 3.2.11. *Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une constante arbitraire. La suite spectrale de Frölicher de toute* **h-$\partial\bar{\partial}$-variété** *dégénère en E_1.*

Preuve. Soit X une h-$\partial\bar{\partial}$-variété avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Pour tout bidegré $(p,\, q)$, Choisissons une classe $[\alpha]_{\bar{\partial}} \in E_1^{p,\, q}(X)$ et un représentant α de $[\alpha]_{\bar{\partial}}$. On a $d_1([\alpha]_{\bar{\partial}}) = [\partial\alpha]_{\bar{\partial}}$.

De plus, comme $\bar{\partial}\alpha = 0$, on a $\partial\alpha = h\partial(h^{-1}\,\alpha) + \bar{\partial}(h^{-1}\,\alpha) = d_h(h^{-1}\,\alpha) \in \operatorname{Im} d_h$. En particulier, $\partial\alpha \in \ker d_h$ et $d_{-h^{-1}}(d_h(h^{-1}\,\alpha)) = ((h^2+1)/h^2)\,\partial\bar{\partial}\alpha = 0$, donc $d_h(h^{-1}\,\alpha) \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$. Alors, d'après l'hypothèse h-$\partial\bar{\partial}$ sur X, le d_h-exactitude de $\partial\alpha = d_h(h^{-1}\,\alpha)$ implique son $\partial\bar{\partial}$-exactitude. En particulier, $\partial\alpha \in \operatorname{Im}\bar{\partial}$, donc $d_1([\alpha]_{\bar{\partial}}) = [\partial\alpha]_{\bar{\partial}} = 0 \in E_1^{p+1,\, q}(X)$.

Ceci montre que tous les différentiels d_1 sont identiquement nuls, alors $E_1^{p,\, q}(X) = E_2^{p,\, q}(X)$ pour tout p, q.

En outre, puisque $\partial\alpha$ est $\partial\bar{\partial}$-exacte, alors il existe une $(p,\, q-1)$-forme u telle que $\partial\alpha = \bar{\partial}\partial u$, donc $d_2([[\alpha]_{\bar{\partial}}]_{d_1}) = [[\partial(\partial u)]_{\bar{\partial}}]_{d_1} = 0 \in E_2^{p+2,\, q-1}(X)$ et $d_r([\dots[[\alpha]_{\bar{\partial}}]_{d_1}\dots]_{d_{r-1}}) = 0 \in E_r^{p+r,\, q-r+1}(X)$ pour tout $r \geq 2$.

Par conséquent, tous les différentiels d_r avec $r \geq 1$ sont identiquement nuls. Il en résulte que la suite spectrale de Frölicher de X dégénère en E_1. $\square$

3.2.3 Cohomologies de h-Bott-Chern et h-Aeppli

On commence par définir les analogues des cohomologies h-tordu de Bott-Chern et Aeppli et par observer quelques propriétés de base entre eux. Contrairement à leurs homologues standard, ils ne sont pas définis en un bidegré donné, mais en un degré total donné.

Définition 3.2.12. *Soit X une variété complexe compacte de dimension n. Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$, on définit les groupes de cohomologie* **h-Bott-Chern** *et* **h-Aeppli** *de degré k par la formule*

$$H^k_{h-BC}(X,\, \mathbb{C}) = \frac{\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}}{Im\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})} \qquad et \qquad H^k_{h-A}(X,\, \mathbb{C}) = \frac{\ker(d_h d_{-\frac{1}{h}})}{Im\, d_h + Im\, d_{-\frac{1}{h}}},$$

où tous les espaces vectoriels impliqués sont des sous-espaces de l'espace $C^\infty_k(X,\, \mathbb{C})$ des k-formes lisses sur X.

On observe maintenant quelques propriétés de base de ces espaces qui sont parallèles à leurs homologues standard.

Lemme 3.2.13. *Soit X une variété complexe compacte de dimension n.*

(a) Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, l'application canonique

$$T_h^{(k)} : H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{h-A}(X, \mathbb{C}), \qquad [\alpha]_{h-BC} \mapsto [\alpha]_{h-A},$$

est bien définie. De plus, si X est une ***h-$\partial\bar{\partial}$-variété*** *pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixé, alors l'application $T_h^{(k)}$ est un* **isomorphisme** *pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$.*

(b) Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C}) &= \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{BC}(X, \mathbb{C}), \\ H^k_{h-A}(X, \mathbb{C}) &= \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{A}(X, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Alors, les dimensions des espaces vectoriels $H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C})$ et $H^k_{h-A}(X, \mathbb{C})$ sont indépendant de h.

(c) Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, les applications canoniques

$$H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{d_h}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{h-A}(X, \mathbb{C}), \qquad [\alpha]_{h-BC} \mapsto [\alpha]_{d_h} \mapsto [\alpha]_{h-A},$$

sont bien définies. De plus, si X est une ***h-$\partial\bar{\partial}$-variété*** *pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixé, alors elles sont des* **isomorphismes***, en particulier leurs dimensions égales au $k^{ème}$ nombre de Betti b_k de X, pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$.*

Preuve. (a) Soit $[\alpha]_{h-BC} \in H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C})$ une classe arbitraire et soit α un représentant arbitraire de $[\alpha]_{h-BC}$. Alors $d_h\alpha = 0$ et $d_{-\frac{1}{h}}\alpha = 0$, donc $d_h d_{-\frac{1}{h}}\alpha = 0$, d'où α definit une classe dans $H^k_{h-A}(X, \mathbb{C})$. Pour montrer que $[\alpha]_{h-A}$ est indépendante du choix du représentant α de la classe $[\alpha]_{h-BC}$, il faut montrer que $[\alpha]_{h-A} = 0$ quand $[\alpha]_{h-BC} = 0$. Cependant, ceci est évident puisque $\mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}}) \subset \mathrm{Im}\, d_h + \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}}$.

Supposons maintenant que X est une **h-$\partial\bar{\partial}$-variété** pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixée. Fixons un k.

Pour montrer que $T_h^{(k)}$ est injective, supposons que $d_h\alpha = 0$, $d_{-\frac{1}{h}}\alpha = 0$ (i.e. α définit une classe $[\alpha]_{h-BC}$) et $[\alpha]_{h-A} = 0$ (i.e. $T_h^{(k)}([\alpha]_{h-BC}) = 0$). En particulier, $\alpha = d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v$ pour certaines formes u, v. Alors $\alpha - d_h u = d_{-\frac{1}{h}} v \in \ker d_h \cap \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}}$, donc, d'après h-$\partial\bar{\partial}$-hypothèse, on a $d_{-\frac{1}{h}} v \in \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$. D'autre part, $\alpha - d_{-\frac{1}{h}} v = d_h u \in \ker d_{-\frac{1}{h}} \cap \mathrm{Im}\, d_h$, donc $d_h u \in \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$ d'après h-$\partial\bar{\partial}$-hypothèse. Par conséquent, $\alpha = d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v \in \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$, donc $[\alpha]_{h-BC} = 0$.

Pour montrer que $T_h^{(k)}$ est surjective, soit $\alpha \in C^\infty_k(X, \mathbb{C})$ telle que $d_h d_{-\frac{1}{h}}\alpha = 0$. On doit montrer l'existence des $(k-1)$-formes u, v telles que $d_h(\alpha + d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v) = 0$ et $d_{-\frac{1}{h}}(\alpha + d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v) = 0$. (En effet, on aura alors $[\alpha]_{h-A} = [\alpha + d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v]_{h-A} = T_h^{(k)}([\alpha + d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v]_{h-BC})$ avec $[\alpha + d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v]_{h-BC}$ est bien définie.) Ces identités sont équivalentes à $d_h d_{-\frac{1}{h}} v = -d_h\alpha$ et $d_{-\frac{1}{h}} d_h u = -d_{-\frac{1}{h}}\alpha$. Puisque $d_h\alpha \in \mathrm{Im}\, d_h$ et $d_{-\frac{1}{h}}\alpha \in \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}}$ or les deux formes sont simultanément d_h-fermée et $d_{-\frac{1}{h}}$-fermée. Alors d'après h-$\partial\bar{\partial}$-hypothèse elles sont $(d_h d_{-\frac{1}{h}})$-exactes. D'où la surjectivité.

(b) Pour tout $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a les égalités des sous-epaces de $C^\infty_k(X, \mathbb{C})$ suivantes :

$$\begin{aligned} \ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}} &= \ker \partial \cap \ker \bar{\partial} \\ \mathrm{Im}\, d_h + \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}} &= \mathrm{Im}\, \partial + \mathrm{Im}\, \bar{\partial}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

En effet, pour toute k-forme α, la relation $\alpha \in \ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}$ est équivalente à $h\partial\alpha + \bar\partial\alpha = 0$ et $-\frac{1}{h}\,\partial\alpha + \bar\partial\alpha = 0$, leurs différence donne $(h+\frac{1}{h})\,\partial\alpha = 0$, donc $\partial\alpha = 0$ et $\bar\partial\alpha = 0$. L'inclusion inverse $\ker\partial \cap \ker\bar\partial \subset \ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}$ est évidente. D'autre part, la relation $\alpha \in \mathrm{Im}\, d_h + \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}}$ est équivalente à l'existence des $(k-1)$-formes u, v telles que $\alpha = d_h u + d_{-\frac{1}{h}} v = \partial(h\,u - \frac{1}{h}\,v) + \bar\partial(u+v)$.

Par conséquent, pour toute k-forme $\alpha = \sum\limits_{p+q=k} \alpha^{p,\,q}$ (écrite avec sa décomposition en type-pure), la condition $\alpha \in \ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}} = \ker\partial \cap \ker\bar\partial$ est équivalente à

$$\sum_{p+q=k} \partial\alpha^{p,\,q} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p+q=k} \bar\partial\alpha^{p,\,q} = 0,$$

qui sont équivalentes à $\alpha^{p,\,q} \in \ker\partial \cap \ker\bar\partial = \ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}$ pour tout p, q. De même, d'après (iii) de (3.13), $\alpha \in \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}}) = \mathrm{Im}(\partial\bar\partial)$ est équivalente à $\alpha^{p,\,q} \in \mathrm{Im}(\partial\bar\partial)$ pour tout p, q. D'où la première décomposition des espaces vectoriels dans (b). La deuxième décomposition est obtenue de la même manière d'après la deuxième identité dans (3.21) et d'après (iii) de (3.13).

(c) Les applications sont bien définies, ceci découle à la fois des inclusions $\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}} \subset \ker d_h \subset \ker\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$ et $\mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}}) \subset \mathrm{Im}\, d_h \subset (\mathrm{Im}\, d_h + \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}})$. La bijection de ces application lorsque X est supposée d'être h-$\partial\bar\partial$-variété résulte des applications simples de ces hypothèses, d'après la preuve de (a) et d'après le lemme suivant. $\square$

Lemme 3.2.14. *Si X est une h-$\partial\bar\partial$-variété, alors toute classe de d_h-cohomologie $[\alpha]_{d_h}$ (en tout degré) contient un représentant appartenant au* $\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}$.

Preuve. Soit α une k-forme lisse telle que $d_h\alpha = 0$. On souhaite montrer l'existence d'une $(k-1)$-forme lisse β telle que $d_{-\frac{1}{h}}(\alpha + d_h\beta) = 0$. Cela revient à $d_{-\frac{1}{h}} d_h\beta = -d_{-\frac{1}{h}}\alpha$. Cependant, $d_{-\frac{1}{h}}\alpha \in \ker d_h \cap \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}}$, alors la h-$\partial\bar\partial$-hypothèse assure que $d_{-\frac{1}{h}}\alpha \in \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$, ceci montre l'existence de β. $\square$

Rappelons qu'il a été prouvé par Angella et Tomassini dans [AT12] que sur toute variété complexe compacte X, on a l'inégalité suivante

$$2b_k \leq \sum_{p+q=k} h^{p,\,q}_{BC} + \sum_{p+q=k} h^{p,\,q}_{A} \tag{3.22}$$

pour tout k. D'après (b) du Lemme 3.2.13, cela se traduit dans notre langage par

$$2b_k \leq h^k_{h-BC} + h^k_{h-A}, \qquad \text{pour tout } k \in \{0, \dots, 2n\} \text{ et tout } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3.23}$$

où $h^k_{h-BC} := \dim H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C})$ et $h^k_{h-A} := \dim H^k_{h-A}(X, \mathbb{C})$. (Rappelons qu'on a toujours $b_k = \dim H^k_{d_h}(X, \mathbb{C})$ pour tout k et $h \neq 0$, voir l'Introduction.) D'autre part, le deuxième résultat de [AT12] montre l'égalité dans (3.22) pour tout k si et seulement si X satisfait la *version (a) du $\partial\bar\partial$-lemma* (voir l'Introduction).

Corollaire 3.2.15. *(a)*[2] *Soit X une variété complexe compacte de dimension n. Si X est une h-$\partial\bar\partial$-variété pour $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors X satisfait la version (a) du $\partial\bar\partial$-lemma (voir l'Introduction).*

2. Ceci est évident d'après la définition, mais on donne un nouvel argument pour montrer la cohérence de plusieurs résultats entre eux.

(b) Soit $(X_t)_{t\in\Delta}$ une famille holomorphe de variétés complexes compactes. Si une certaine fibre X_0 est une h-$\partial\bar\partial$-variété pour certain $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors les nombres de h-Bott-Chern $h^k_{h-BC}(t) :=$ dim $H^k_{h-BC}(X_t, \mathbb{C})$ et les nombres h-Aeppli $h^k_{h-A}(t) :=$ dim $H^k_{h-A}(X_t, \mathbb{C})$ restent constant au voisinage de X_0 :

$$h^k_{h-BC}(t) = h^k_{h-BC}(0) \quad et \quad h^k_{h-A}(t) = h^k_{h-A}(0)$$

pour tout $k \in \{0,\dots,2n\}$ et tout $t \in \Delta$ assez proche de 0.

Preuve. (a) Si X est une h-$\partial\bar\partial$-variété pour certain $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors d'après (c) du Lemme 3.2.13 on a $2b_k = h^k_{h-BC} + h^k_{h-A}$ pour tout k. Cela est équivalent à X vérifiant la *version (a) du $\partial\bar\partial$-lemma* par la discussion ci-dessus et le deuxième résultat principal de [AT12].

(b) D'après (b) du Lemme 3.2.13 on a $h^k_{h-BC}(t) = \sum\limits_{p+q=k} h^{p,q}_{BC}(t)$ et $h^k_{h-A}(t) = \sum\limits_{p+q=k} h^{p,q}_{A}(t)$ pour tout k et tout t. Puisque les nombres de Bott-Chern et Aeppli vérifient la propriété de semi-continuité $h^{p,q}_{BC}(0) \geq h^{p,q}_{BC}(t)$ et $h^{p,q}_{A}(0) \geq h^{p,q}_{A}(t)$ pour tout t assez proche de 0 et tout p, q, on en déduit l'analogue de la propriété pour les nombres de h-Bott-Chern et the h-Aeppli :

$$h^k_{h-BC}(0) \geq h^k_{h-BC}(t) \quad \text{et} \quad h^k_{h-A}(0) \geq h^k_{h-A}(t) \tag{3.24}$$

pour tout t assez proche de 0 et tout k.

D'autre part, puisque X_0 est une h-$\partial\bar\partial$-variété pour certain $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors on a $2b_k = h^k_{h-BC}(0) + h^k_{h-A}(0)$ pour tout k (cf. (c) du Lemme 3.2.13). Donc d'après (3.24), $2b_k \geq h^k_{h-BC}(t) + h^k_{h-A}(t)$ pour tout k et tout t assez proche de 0. Cependant, on a aussi l'inégalité inverse $2b_k \leq h^k_{h-BC}(t) + h^k_{h-A}(t)$ pour tout t et k d'après [AT12] (cf. (3.23)). D'où le résultat. □

3.2.4 Ouverture par déformation de la h-$\partial\bar\partial$-propriété

On montre maintenant l'analogue suivant pour les h-$\partial\bar\partial$-variétés du résultat d'ouverture de Wu pour les $\partial\bar\partial$-variétés (cf. [Wu06]).

Theorem 3.2.16. *Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une submersion holomorphe propre d'une variété complexe $\mathcal{X}$ à valeurs dans une boule $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ contenant l'origine. Pour tout $t \in \Delta$, soit $X_t := \pi^{-1}(t)$ la fibre au-dessus de t. Fixons une constante $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ quelconque.*

Si X_0 est une h-$\partial\bar\partial$-variété, alors X_t est une h-$\partial\bar\partial$-variété pour tout $t \in \Delta$ suffisamment proche de 0.

La preuve suivra le modèle de celui donné par Wu dans [Wu06] pour l'ouverture par déformation de la $\partial\bar\partial$-propriété standard. Par souci de cohérence, on va suivre la présentation dans §.4.3 de [Pop14] où les arguments de Wu et certains de ceux dans [DGMS75] ont été ré-expliqués, tout en soulignant les changements nécessaires dans notre h-$\partial\bar\partial$-contexte actuel.

On commence par une terminologie qui correspond à la Définition 4.7. dans [Pop14].

Définition 3.2.17. *Soit $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ une constante arbitraire. Pour tout $k = 0, 1, \dots, 2n$ donné, on dit qu'une variété complexe compact X de dimension n donnée satisfait la propriété :*

(A_k) si l'application canonique $H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{h-A}(X, \mathbb{C})$ est **injective**.

Cette propriété est équivalente à la propriété

(A'_k) $\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}} \cap (Im\, d_h + Im\, d_{-\frac{1}{h}}) = Im\,(d_h\, d_{-\frac{1}{h}})$ *en tant que sous-spaces de* $C^\infty_k(X,\, \mathbb{C})$.

(B_k) *si l'application canonique* $H^k_{h-BC}(X,\, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{h-A}(X,\, \mathbb{C})$ *est* **surjective**.

Cette propriété est équivalente à la propriété

(B'_k) $Im\, d_h + Im\, d_{-\frac{1}{h}} + (\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}) = \ker(d_h\, d_{-\frac{1}{h}})$ *en tant que sous-spaces de* $C^\infty_k(X,\, \mathbb{C})$.

(C_k) *si les applications canoniques* $H^k_{h-BC}(X,\, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{d_{-\frac{1}{h}}}(X,\, \mathbb{C})$ *et* $H^k_{h-BC}(X,\, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{d_h}(X,\, \mathbb{C})$ *sont* **injectives**.

Cette propriété est équivalente à l'occurrence simultanée de

$(C'_k)(i)$ $Im\, d_{-\frac{1}{h}} \cap \ker d_h = Im\,(d_h\, d_{-\frac{1}{h}})$ *et* $(C'_k)(ii)$ $Im\, d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}} = Im\,(d_h\, d_{-\frac{1}{h}})$

en tant que sous-spaces de $C^\infty_k(X,\, \mathbb{C})$.

(D'_k) *si* (i) $Im\, d_h + \ker d_{-\frac{1}{h}} = \ker(d_h\, d_{-\frac{1}{h}})$ *et* (ii) $Im\, d_{-\frac{1}{h}} + \ker d_h = \ker(d_h\, d_{-\frac{1}{h}})$

en tant que sous-espaces de $C^\infty_k(X,\, \mathbb{C})$.

(L_k) *si pour toute k-forme* $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$*, les conditions d'exactitude suivantes sont équivalentes :*

$$u \in Im\, d_h \iff u \in Im\, d_{-h^{-1}} \iff u \in Im\,(d_h\, d_{-h^{-1}}) = Im\,(\partial\bar\partial).$$

La propriété (L_k) est un retraitement de la paire des propriétés $(C'_k)(i)$ et $(C'_k)(ii)$. Comme déjà mentionné, les équivalences suivantes sont immédiates :

$$(A_k) \iff (A'_k), \quad (B_k) \iff (B'_k), \quad (C_k) \iff (C'_k).$$

D'autre part, les inclusions $\supset$ dans (A'_k), $\subset$ dans (B'_k), $\supset$ dans $(C'_k)(i), (ii)$ et $\subset$ dans $(D'_k)(i), (ii)$ sont toujours vérifiées. L'énoncé suivant est le h-$\partial\bar\partial$-analogue du fait démontré implicitement dans [DGMS75] dans le contexte $\partial\bar\partial$ standard et fournira un élément clé pour la preuve du Théorème 3.2.16.

Proposition 3.2.18. *(le h-$\partial\bar\partial$-analogue du Lemme 5.15 dans [DGMS75]) Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ une constante arbitraire. Soit X une variété complexe compacte de dimension n. Pour tout $k = 1, \dots, 2n$, on a les équivalences suivantes:*

$$(L_k) \iff (A_k) \iff (C_k) \iff (D'_{k-1}) \iff (B_{k-1}).$$

Preuve. Fixons un $k \in \{1, \dots, 2n\}$ quelconque. Compte tenu des explications ci-dessus, il suffit de montrer les équivalences

$$(A'_k) \iff (C'_k) \iff (D'_{k-1}) \iff (B'_{k-1}).$$

Preuve de $(A'_k) \Longrightarrow (C'_k)$. Soit $u \in C^\infty_k(X, \mathbb{C})$ telle que $d_h u = 0$ et $u = d_{-\frac{1}{h}} v$ pour une $(k-1)$-forme v. Alors $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}} \cap (\mathrm{Im}\, d_h + \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}})$. Donc (A'_k) implique $u \in \mathrm{Im}\,(d_h\, d_{-\frac{1}{h}})$. Ceci montre (i) de (C'_k). La preuve de (ii) de (C'_k) est similaire avec d_h et $d_{-\frac{1}{h}}$ inversés.

Preuve de $(C'_k) \Longrightarrow (A'_k)$. Soit $u \in C^\infty_k(X, \mathbb{C})$ telle que $d_h u = 0$, $d_{-\frac{1}{h}} u = 0$ et $u = d_h v + d_{-\frac{1}{h}} w$ pour certaines $(k-1)$-formes v et w. Alors

· $\mathrm{Im}\, d_h \ni d_h v = u - d_{-\frac{1}{h}} w \in \ker d_{-\frac{1}{h}}$, alors $d_h v \in \mathrm{Im}\, d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}} = \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$, où la dernière identité des sous-espaces étant donnée par l'hypothèse $(C'_k)(i)$.

· $\mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}} \ni d_{-\frac{1}{h}} w = u - d_h v \in \ker d_h$, alors $d_{-\frac{1}{h}} w \in \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}} \cap \ker d_h = \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$, où la dernière identité des sous-espaces étant donnée par l'hypothèse $(C'_k)(ii)$.

On obtient $u = d_h v + d_{-\frac{1}{h}} w \in \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$. Ceci montre (A'_k).

Preuve de $(C'_k) \Longrightarrow (D'_{k-1})$. Soit $u \in C^\infty_{k-1}(X, \mathbb{C})$ telle que $d_h d_{-\frac{1}{h}} u = 0$. Donc :

· $d_{-\frac{1}{h}} u$ est une k-forme et $d_{-\frac{1}{h}} u \in \ker d_h \cap \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}} = \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$, où la dernière identité des sous-espaces étant donnée par l'hypothèse $(C'_k)(i)$. Alors $d_{-\frac{1}{h}} u = d_{-\frac{1}{h}} d_h \zeta$ pour certaine $(k-2)$-forme ζ. Cela équivaut à $u - d_h \zeta \in \ker d_{-\frac{1}{h}}$.

On obtient $u = d_h \zeta + (u - d_h \zeta) \in \mathrm{Im}\, d_h + \ker d_{-\frac{1}{h}}$. Ceci montre $(D'_{k-1})(i)$.

· $d_h u$ est une k-forme et $d_h u \in \ker d_{-\frac{1}{h}} \cap \mathrm{Im}\, d_h = \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$, où la dernière identité des sous-espaces étant donnée par l'hypothèse $(C'_k)(ii)$. Donc $d_h u = d_h d_{-\frac{1}{h}} w$ pour certaine $(k-2)$-forme w. Cela équivaut à $u - d_{-\frac{1}{h}} w \in \ker d_h$.

On obtient $u = d_{-\frac{1}{h}} w + (u - d_{-\frac{1}{h}} w) \in \mathrm{Im}\, d_{-\frac{1}{h}} + \ker d_h$. Ceci montre $(D'_{k-1})(ii)$.

Preuve de $(D'_{k-1}) \Longrightarrow (C'_k)$. Soit $u \in C^\infty_k(X, \mathbb{C})$ telle que $d_h u = 0$ et $u = d_{-\frac{1}{h}} v$ pour certaine $(k-1)$-forme v. Alors $v \in \ker(d_h d_{-\frac{1}{h}}) = \mathrm{Im}\, d_h + \ker d_{-\frac{1}{h}}$, où la dernière identité des sous-espaces est $(D'_{k-1})(i)$. Donc, il existe une $(k-2)$-forme w et une $(k-1)$-forme ζ telles que

$$v = d_h w + \zeta \quad \text{et} \quad d_{-\frac{1}{h}} \zeta = 0.$$

En appliquant $d_{-\frac{1}{h}}$, on obtient : $u = d_{-\frac{1}{h}} v = d_{-\frac{1}{h}} d_h w \in \mathrm{Im}\,(d_h d_{-\frac{1}{h}})$. Ceci montre $(C'_k)(i)$.

En inversant les rôles de d_h et $d_{-\frac{1}{h}}$, on obtient $(C'_k)(ii)$ de la même manière d'après $(D'_{k-1})(ii)$.

Preuve de $(D'_{k-1}) \Longrightarrow (B'_{k-1})$. Soit $u \in C^\infty_{k-1}(X, \mathbb{C})$ telle que $d_h d_{-\frac{1}{h}} u = 0$. D'après $(D'_{k-1})(ii)$, il existe une $(k-2)$-forme v et une $(k-1)$-forme w telles que

$$u = d_{-\frac{1}{h}} v + w \quad \text{et} \quad w \in \ker d_h.$$

Donc $d_h d_{-\frac{1}{h}} w = 0$, alors d'après $(D'_{k-1})(i)$ on peut écrire

$$w = d_h \zeta + \rho \quad \text{avec} \quad \rho \in \ker d_{-\frac{1}{h}}$$

pour certaine $(k-2)$-forme ζ et certaine $(k-1)$-forme ρ. On obtient $\rho = w - d_h\zeta \in \ker d_h$ (car $w \in \ker d_h$). D'où $\rho \in \ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}$.

En mettant les morceaux ensemble, on a

$$u = d_{-\frac{1}{h}}v + d_h\zeta + \rho \in \operatorname{Im} d_{-\frac{1}{h}} + \operatorname{Im} d_h + (\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}).$$

Ceci montre (B'_{k-1}).

Preuve de $(B'_{k-1}) \Longrightarrow (D'_{k-1})$. Cette implication est triviale parce que $\operatorname{Im} d_{-\frac{1}{h}} + (\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}) \subset \ker d_{-\frac{1}{h}}$ et $\operatorname{Im} d_h + (\ker d_h \cap \ker d_{-\frac{1}{h}}) \subset \ker d_h$.

La Preuve de la Proposition 3.2.18 est achevée. $\square$

Notons que l'occurrence simultanée des propriétés (L_k) pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$ est une condition a priori plus faible que la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété puisqu'elle n'inclut pas l'équivalence $u \in \operatorname{Im} d \iff u \in \operatorname{Im}(d_h\, d_{-h^{-1}})$. Cependant, on peut facilement montrer comme conséquence de la Proposition 3.2.18 que ces deux conditions sont en fait équivalentes.

Corollaire 3.2.19. *Soit $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ une constante arbitraire. Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Fixons $k \in \{0, \dots, 2n\}$ quelconque et supposons que pour toute k-forme $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$, les conditions d'exactitude suivantes sont équivalentes :*

$$u \in \mathit{Im}\, d_h \iff u \in \mathit{Im}\, d_{-h^{-1}} \iff u \in \mathit{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}}) = \mathit{Im}\,(\partial\bar{\partial}).$$

Alors, pour toute k-forme $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$, on a aussi l'équivalence "$u \in \mathit{Im}\, d \iff u \in \mathit{Im}\,(d_h\, d_{-h^{-1}}) = \mathit{Im}\,(\partial\bar{\partial})$".

En particulier, si l'hypothèse est faite pour tout $k \in \{0, \dots, 2n\}$, alors X est une h-$\partial\bar{\partial}$-variété.

Preuve. Puisque l'implication $u \in \operatorname{Im}(d_h\, d_{-h^{-1}}) \Longrightarrow u \in \operatorname{Im} d$ est triviale, on doit montrer seulement l'implication inverse pour toute k-forme $u \in \ker d_h \cap \ker d_{-h^{-1}}$. Soit $u \in \operatorname{Im} d$ une telle k-forme. Alors, d'après l'identité (iv) dans (3.13), $u \in \operatorname{Im} d_h + \operatorname{Im} d_{-h^{-1}}$, donc u definit une classe $[u]_{h-BC} \in H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C})$ qui correspond à la classe zéro dans $H^k_{h-A}(X, \mathbb{C})$ sous l'application canonique $H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k_{h-A}(X, \mathbb{C})$. Donc par (A_k), qui est vérifiée puisqu'elle est équivalente à notre hypothèse (L_k) d'après la Proposition 3.2.18, cette application est injective. Par conséquent, $[u]_{h-BC} = 0 \in H^k_{h-BC}(X, \mathbb{C})$, donc $u \in \operatorname{Im}(d_h\, d_{-h^{-1}})$. $\square$

On est maintenant bien équipé pour montrer l'ouverture par déformation de la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété des variétés complexes compactes.

Preuve du Théorème 3.2.16. Les arguments sont analogues dans le contexte h-$\partial\bar{\partial}$ de ceux donnés par Wu dans le contexte $\partial\bar{\partial}$ classique. Comme dans [Wu06], l'idée principale est d'exploiter, pour tout k fixé, l'équivalence

$$(L_k) \iff (A_k) \iff (B_{k-1}),$$

C'est à dire la discordance d'un degré entre la caractérisation de la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété pour les k-formes en termes de l'injectivité de l'application h-BC$\rightarrow$ h-A et en termes de sa surjectivité. Cela provoque un argument par induction sur k, puisque la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété est triviale en degré $k = 0$ (i.e. pour les fonctions).

Pour montrer que X_t est une h-$\partial\bar{\partial}$-variété pour tout $t \in \Delta$ assez proche de 0, supposons qu'on a la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété en degré k sur X_t pour les opérateurs $d_h(t)$ et $d_{-\frac{1}{h}}(t)$ induits par la structure complexe de X_t pour tout t proche de 0. On va montrer que la même chose est vraie en degré $k+1$.

L'hypothèse h-$\partial\bar{\partial}$ sur X_0 en degré k implique, d'après (c) du Lemme 3.2.13 et du (b) du Corollaire 3.2.15 respectivement, les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-BC}(X_0, \mathbb{C}) &= \dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-A}(X_0, \mathbb{C}), \\
\dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-BC}(X_0, \mathbb{C}) &= \dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-BC}(X_t, \mathbb{C}) \qquad \text{pour tout } t \text{ proche de } 0, \\
\dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-A}(X_0, \mathbb{C}) &= \dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-A}(X_t, \mathbb{C}) \qquad \text{pour tout } t \text{ proche de } 0.
\end{aligned}$$

D'où, $\dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-BC}(X_t, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} H^k_{h-A}(X_t, \mathbb{C})$ pour tout $t \in \Delta$ proche de 0.

D'autre part, par la Proposition 3.2.18, l'hypothèse d'induction (L_k) sur X_t est équivalente à l'application linéaire canonique $H^k_{h-BC}(X_t, \mathbb{C}) \to H^k_{h-A}(X_t, \mathbb{C})$ étant *injective* (propriété (A_k)). Comme ce sont des espaces vectoriels de *dimension finie* de *dimensions égales*, alors l'application linéaire $H^k_{h-BC}(X_t, \mathbb{C}) \to H^k_{h-A}(X_t, \mathbb{C})$ doit aussi être *surjective*. Il en résulte que la propriété (B_k) est vérifiée sur X_t pour tout $t \in \Delta$ proche de 0. Or, d'après la Proposition 3.2.18, ceci est équivalent à la propriété (L_{k+1}), i.e. à la h-$\partial\bar{\partial}$-propriété en degré $k+1$ sur X_t pour tout $t \in \Delta$ proche de 0. $\square$

Chapitre 4

Stabilité par déformations de variétés admettant des métriques p-SKT et p-HS

Dans ce chapitre, on suppose que $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ est une famille analytique complexe de variétés complexes compactes au dessus de Δ (voir Définition 5.0.20 du chapitre 5). Donc, par un résultat d'Ehresmann ([Voi07], théorème 9.3) toutes les fibres $X_t := \pi^{-1}(t)$, pour tout $t \in \Delta$, sont C^∞-difféomorphe à une variété C^∞ fixée X.

4.1 Déformations des variétés admettant des métriques plurifermées

Commençons par rappeler quelques notions de base (la Définition 2.2.9 en $p = 1$) :

Définition 4.1.1. *Soit $\omega > 0$ une métrique Hermitienne sur une variété complexe X.*

1- ω est dite plurifermée (ou bien SKT) si $\partial\bar\partial\omega = 0$.

2- ω est dite Hermitienne-symplectique (H-S pour simplicité) (cf. définition in [ST10]) s'il existe $\alpha^{0,2} \in C^\infty_{0,2}(X, \mathbb{C})$ telle que

$$d(\overline{\alpha^{0,2}} + \omega + \alpha^{0,2}) = 0$$

ceci est équivalent à l'existence d'une 2-forme réelle C^∞ Ω sur X telle que $d\Omega = 0$ et $\Omega^{1,1} = \omega > 0$.

3- X est une variété plurifermée (resp. H-S) s'il existe une métrique plurifermée (resp. H-S) sur X.

4- X est dite une $\partial\bar\partial-$variété si le $\partial\bar\partial-$lemma est vérifié sur X, c'est à dire pour tout p, q et pour toute (p, q)-forme u C^∞ sur X telle que $du = 0$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$u \text{ est } d\text{-exacte} \Leftrightarrow u \text{ est } \partial\text{-exacte} \Leftrightarrow u \text{ est } \bar\partial\text{-exacte} \Leftrightarrow u \text{ est } \partial\bar\partial\text{-exacte}$$

D. Popovici a montré dans [Pop15], sur toute $\partial\bar\partial$-variété, que la métrique plurifermée est équivalente à la métrique Hermitienne-symplectique. Autrement, on a :

Lemme 4.1.2. *Soit X une $\partial\bar{\partial}-$variété, alors*

$$\omega \text{ est plurifermée} \iff \omega \text{ est Hermitienne-symplectique}$$

Preuve. $\Longleftarrow$) Toujours vérifié.
Supposons qu'il existe $\alpha^{0,2} \in C^\infty_{0,2}(X, \mathbb{C})$ telle que $d(\alpha^{0,2} + \omega + \overline{\alpha^{0,2}}) = 0$. Alors

$$\begin{cases} \partial\overline{\alpha^{0,2}} = 0 \\ \partial\alpha^{0,2\alpha} + \bar{\partial}\omega = 0 \end{cases}$$

En appliquant ∂ sur l'identité ci-dessus, on obtient $\partial\bar{\partial}\omega = 0$.

Inversement, supposons que $\partial\bar{\partial}\omega = 0$ et X est une $\partial\bar{\partial}-$variété, alors $\partial\omega \in \ker\bar{\partial}$. D'autre part $\partial\omega$ est une $(2,1)$-forme qui est d-fermée et ∂-exacte , donc d'après le $\partial\bar{\partial}$-lemma $\partial\omega$ doit être $\bar{\partial}-$exacte. C'est à dire qu'il existe une $\alpha^{2,0} \in C^\infty_{2,0}(X, \mathbb{C})$ telle que $\partial\omega = -\bar{\partial}\alpha^{2,0} = -\overline{\partial\alpha^{0,2}}$ avec $\alpha^{0,2} := \overline{\alpha^{2,0}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(\alpha^{0,2} + \omega + \overline{\alpha^{0,2}}) &= \partial\alpha^{0,2} + \bar{\partial}\alpha^{0,2} + \partial\omega + \bar{\partial}\omega + \partial\overline{\alpha^{0,2}} + \bar{\partial}\overline{\alpha^{0,2}} \\ &= (\partial\omega + \bar{\partial}\overline{\alpha^{0,2}}) + (\overline{\partial\omega + \bar{\partial}\overline{\alpha^{0,2}}}) + \bar{\partial}\alpha^{0,2} + \partial\overline{\alpha^{0,2}} \\ &= \bar{\partial}\alpha^{0,2} + \partial\overline{\alpha^{0,2}}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\partial\alpha^{2,0} = 0$. En effet, on a $\bar{\partial}\partial\alpha^{2,0} = -\partial\bar{\partial}\alpha^{2,0} = \partial^2\omega = 0$. Alors $\partial\alpha^{2,0}$ est une $(3,0)$-forme d-fermée et ∂-exacte, donc par le $\partial\bar{\partial}$-lemma elle est $\bar{\partial}$-exacte. D'où $\partial\alpha^{2,0} = 0$. Ceci montre que ω est H-S. □

Dans la suite de cette section, on va montrer que la propriété Hermitienne-symplectique est ouverte par déformations holomorphe. Commençons par :

Lemme 4.1.3.

S'il existe une métrique ω_0 H-S sur X_0, alors il existe une métrique ω_t H-S sur X_t pour $t \sim 0, t \in \Delta$

De plus, la métrique H-S ω_t peut être choisie et la famille $(\omega_t)_t$ varie de manière lisse avec t.

Preuve. Supposons qu'il existe une métrique ω_0 H-S sur X_0. Alors il existe $\alpha_0^{0,2} \in C^\infty_{0,2}(X_0, \mathbb{C})$ telle que

$$d(\alpha_0^{0,2} + \omega_0 + \overline{\alpha_0^{0,2}}) = 0$$

Posons $\Omega := \alpha_0^{0,2} + \omega_0 + \overline{\alpha_0^{0,2}}$, on obtient une $2-$forme réelle Ω $d-$fermée sur X_0. Donc Ω ne dépend pas de la structure complexe de la fibre. Soit $(\Omega_t^{1,1})_{t\in\Delta}$ une famille C^∞ des composantes de Ω de J_t-type $(1,1)$, i.e. $\Omega_t^{1,1} = (\Omega)_t^{1,1}$, alors $(\Omega_t^{1,1})_{t\in\Delta}$ varient de manière C^∞ avec t. Donc par continuité de la famille $(\Omega_t^{1,1})_{t\in\Delta}$, la strict positivité de $\Omega_0^{1,1}$ implique la strict positivité de $\Omega_t^{1,1}$ pour tout $t \in \Delta$ assez proche de 0. Par conséquent, on obtient une métrique ω_t H-S pour $t \sim 0$ et $t \in \Delta$. □

Par conséquent, on obtient

Conclusion 4.1.4. *Soit X_0 une $\partial\bar{\partial}$-variété et supposons qu'il existe une métrique plurifermée ω_0. Alors ω_0 est H-S sur X_0.*
Puisque la métrique H-S est ouverte par déformations holomorphes, donc X_t admet une métrique ω_t H-S pour $t \in \Delta$ assez proche de 0.
D'autre part, rappelons que toute métrique Hermitienne-Symplectique est plurifermée, donc ω_t est SKT pour $t \sim 0$, $t \in \Delta$

On obtient le :

Theorem 4.1.5. *Si X_0 est $\partial\bar{\partial}$-variété et plurifermée, alors X_t est plurifermée pour $t \in \Delta$ assez proche de 0.*

D'après le théorème de Wu dans [Wu06], la propriété $\partial\bar{\partial}$-lemma sur les variétés complexes compactes est ouverte par déformations, autrement dit :

$$X_0 \text{ est } \partial\bar{\partial}\text{-variété} \implies X_t \text{ est } \partial\bar{\partial}\text{-variété pour } t \in \Delta,\, t \sim 0$$

Par conséquent, on obtient le résultat suivant :

Theorem 4.1.6. *Si X_0 est une $\partial\bar{\partial}$-variété et plurifermée, alors X_t est aussi $\partial\bar{\partial}$-variété et plurifermée pour $t \sim 0$ et $t \in \Delta$.*

4.2 Déformations des variétés p-HS et p-SKT

Dans cette section, on va montrer que la propriété p-SKT (i.e. $(p,p)-$forme Ω réelle C^∞ qui est faiblement strictement positive telle que $\partial\bar{\partial}\Omega = 0$) sur une variété complexe compacte de dimension n vérifiant le $\partial\bar{\partial}-$lemma est ouverte par déformations holomorphes.

Lemme 4.2.1. *Soit X une $\partial\bar{\partial}$-variété avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Fixons $p \in \{1, \cdots, n-1\}$.*
S'il existe ω une forme $p-$SKT, alors ω est une forme $p-$hermitienne-symplectique.

Preuve. Supposons qu'il existe une forme ω p-plurifermée sur X. C'est à dire, il existe une $(p,p)-$forme ω réelle C^∞ faiblement strictement positive telle que $\partial\bar{\partial}\omega = 0$. Notons que $\partial\omega$ est une $(p+1,p)-$forme d-fermée, d'après le $\partial\bar{\partial}-$lemma, $\partial\omega$ est $\bar{\partial}-$exacte, i.e. il existe une $\alpha^{p+1,p-1} \in C^\infty_{p+1,p-1}(X,\mathbb{C})$ telle que $\partial\omega = -\bar{\partial}\alpha^{p+1,p-1}$. Puisque $\partial\alpha^{p+1,p-1}$ est d-fermée, alors d'après $\partial\bar{\partial}-$lemma il existe une $\alpha^{p+2,p-2} \in C^\infty_{p+2,p-2}(X,\mathbb{C})$ telle que $\partial\alpha^{p+1,p-1} = -\bar{\partial}\alpha^{p+2,p-2}$.
On continue jusqu'on trouve l'existence de $\alpha^{2p,0} \in C^\infty_{2p,0}(X,\mathbb{C})$ telle que $\partial\alpha^{2p-1,1} = -\bar{\partial}\alpha^{2p,0}$. D'autre part $\partial\alpha^{2p,0}$ est d-fermée donc d'après $\partial\bar{\partial}-$lemma elle est $\bar{\partial}$-exacte. Or, la seule $(2p,0)-$forme $\bar{\partial}-$exacte est zéro, donc $\partial\alpha^{2p,0} = 0$.

$$\begin{gathered} d\left(\textstyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{i,2p-i} + \omega + \sum_{i=0}^{p-1} \overline{\alpha^{i,2p-i}}\right) \\ = \partial\alpha^{2p,0} + \bar{\partial}\alpha^{0,2p} + \partial\overline{\alpha^{0,2p}} + \bar{\partial}\overline{\alpha^{0,2p}} + \partial\alpha^{1,2p-1} + \bar{\partial}\alpha^{1,2p-1} + \partial\overline{\alpha^{1,2p-1}} \\ +\bar{\partial}\overline{\alpha^{1,2p-1}} + \cdots + \partial\alpha^{p-3,p+3} + \bar{\partial}\alpha^{p-3,p+3} + \partial\overline{\alpha^{p-3,p+3}} + \bar{\partial}\overline{\alpha^{p-3,p+3}} \\ +\partial\alpha^{p-2,p+2} + \bar{\partial}\alpha^{p-2,p+2} + \partial\overline{\alpha^{p-2,p+2}} + \bar{\partial}\overline{\alpha^{p-2,p+2}} + \bar{\partial}\alpha^{p-1,p+1} \\ +\partial\alpha^{p+1,p-1} = 0. \end{gathered}$$

□

Le premier résultat principal de cette section est le théorème suivant.

Theorem 4.2.2. *Soit X une variété complexe compacte lisse de dimension n. On fixe $p \in \{1, \cdots, n-1\}$. S'il existe ω_0 une forme $p-HS$ sur X_0, alors il existe une forme ω_t $p-HS$ sur X_t, pour $t \in \Delta$ suffisamment petit.*

Preuve. Supposons qu'il existe ω_0 une forme $p-$HS sur X_0, ceci veut dire qu'il existe $\alpha^{i,2p-i} \in C^{\infty}_{i,2p-i}(X,\mathbb{C})$ pour $i = 0, \cdots, 2p$ telles que $d(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{i,2p-i} + \omega + \sum_{i=0}^{p-1} \overline{\alpha^{i,2p-i}}) = 0$.
Posons $\Omega := \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{i,2p-i} + \omega + \sum_{i=0}^{p-1} \overline{\alpha^{i,2p-i}}$ la $2p$-forme réelle d-fermée. Ω ne dépend pas de la structure complexe de la fibre.
Soit $(\Omega_t)_{t\in\Delta}$ une famille C^{∞} de composantes de Ω de J_t-type (p,p), $\Omega_t := (\Omega)^{p,p}_t$, donc $(\Omega_t)_{t\in\Delta}$ varient de manière C^{∞} avec t.
Par la continuité de la famille $(\Omega_t)_{t\in\Delta}$, la positivité (au sens de Lelong 5.0.11) de $\Omega^{p,p}$ implique la positivité (au sens de Lelong 5.0.11) de $\Omega^{p,p}_t$ pour tout $t \in \Delta$ assez proche de 0. En effet :
Supposons que ω_0 est une $(p,p)-$forme faiblement strictement positive de structure complexe J_0. On veut montrer que la $(p,p)-$forme ω_t est faiblement strictement positive de structure complexe J_t pour tout t assez proche de 0 .
ω_0 est faiblement strictement positive, c'est à dire pour tous $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-p} \in C^{\infty}_{1,0}(X_0,\mathbb{C})$ linéairement indépendant, on a :

$$\omega_0 \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge i\alpha_{n-p} \wedge \overline{\alpha_{n-p}} > 0$$

Soit $(U^{(1)}, \cdots, U^{(N)})$ des ensembles ouverts de $\mathcal{X}$ et $z_1(t), \cdots, z_n(t)$ des coordonnées holomorphes locales sur $U^{(\nu)}_t \subset X_t$. Alors $\alpha_j(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha^k_j(t) dz_k(t)$.

Posons $0 \in U_0 := \displaystyle\bigcap_{\substack{\nu\in\{1,\cdots,N\} \\ \{j_1,\cdots,j_{n-p}\}\subset\{1,\cdots,p\}}} U^{(\nu)}_{j_1,\cdots,j_{n-p}}$, U_0 est un ensemble ouvert.

S'il existe $(z^{(\nu)}_1(t), \cdots, z^{(\nu)}_n(t), t)$ des coordonnées sur $U^{(\nu)}_t \subset X_t$, pour chaque t fixé. Alors : $\forall \{j_1, \cdots, j_{n-p}\} \subset \{1, \cdots, p\}$, $\forall \nu \in \{1, \cdots, N\}$

$$\omega_t \wedge i dz^{(\nu)}_{j_1}(t) \wedge d\bar{z}^{(\nu)}_{j_1}(t) \wedge \cdots \wedge i dz^{(\nu)}_{j_{n-p}}(t) \wedge d\bar{z}^{(\nu)}_{j_{n-p}}(t) > 0, \text{ if } t = 0$$

Donc, par continuité :

$$\omega_t \wedge i dz^{(\nu)}_{j_1}(t) \wedge d\bar{z}^{(\nu)}_{j_1}(t) \wedge \cdots \wedge i dz^{(\nu)}_{j_{n-p}}(t) \wedge d\bar{z}^{(\nu)}_{j_{n-p}}(t) > 0$$

$\forall t \in U^{(\nu)}_{j_1,\cdots,j_{n-p}}$ ouvert de Δ. Il en résulte :

$$\omega_t \wedge i dz^{(\nu)}_{j_1}(t) \wedge d\bar{z}^{(\nu)}_{j_1}(t) \wedge \cdots \wedge i dz^{(\nu)}_{j_{n-p}}(t) \wedge d\bar{z}^{(\nu)}_{j_{n-p}}(t) > 0$$

$\forall t \in U_0 \subset \Delta$, $\forall \{j_1, \cdots, j_{n-p}\} \subset \{1, \cdots, p\}$. □

Par conséquent, on obtient :

Conclusion 4.2.3. *Si X_0 est une variété p-SKT vérifiant $\partial\bar{\partial}$-lemma, alors X_0 est une variété p-HS. Donc X_t est une variété p-HS pour $t \in \Delta$ assez proche de 0. Il s'en suit que X_t est une variété p-SKT pour $t \in \Delta$ assez proche de 0.*

D'autre part, d'après [Wu06], la propriété $\partial\bar{\partial}$-lemma est ouverte par déformations. D'où le résultat suivant :

Theorem 4.2.4. *Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille holomorphe de variétés complexes compactes de dimension n. Fixons $p \in \{1, \cdots, n-1\}$.*
Si X_0 est une variété $p-$SKT vérifiant le $\partial\bar{\partial}-$lemma, alors X_t est une variété $p-$SKT vérifiant le $\partial\bar{\partial}-$lemma, pour $t \in \Delta$ assez petit.

4.3 Limite par déformations des cônes

Reppelons qu'une $(p,p)-$forme Ω réelle C^∞ faiblement strictement positive est dite $p-$Hermitian-symplectic ($p-$HS) si et seulement s'ils existent $\alpha^{i,2p-i} \in C^\infty_{i,2p-i}(X,\mathbb{C})$ pour $i = 0, \cdots, 2p$ telles que

$$d(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{i,2p-i} + \Omega + \sum_{i=0}^{p-1} \overline{\alpha^{i,2p-i}}) = 0$$

$$\Omega \text{ est } p-\text{HS} \Longleftrightarrow \begin{cases} \partial\alpha^{2p,0} = 0 \\ \partial\alpha^{2p-1,1} + \bar{\partial}\alpha^{2p,0} = 0 \\ \vdots \\ \partial\alpha^{p+1,p-1} + \bar{\partial}\alpha^{p+2,p-2} = 0 \\ \partial\Omega + \bar{\partial}\alpha^{p+1,p-1} = 0 \end{cases}$$

Ceci est équivalent à la propriété suivante :

$$(E_k) : \quad \bar{\partial}\alpha^{p+k,p-k} = -\partial\alpha^{p+k-1,p-k+1} \qquad \forall k = 1, \cdots, p \tag{4.1}$$

Maintenant, soit Ω une (p,p)-forme. On définit les cônes $\mathcal{A}_p(X)$ et $\mathcal{C}_p(X)$ par :

$$\mathcal{A}_p(X) = \{[\Omega]_A/\Omega \text{ faiblement strictement positive telle que } \partial\bar{\partial}\Omega = 0\} \subset H^{p,p}_A(X,\mathbb{R}) \subset H^{p,p}_A(X,\mathbb{C}) \tag{4.2}$$

$$\mathcal{C}_p(X) = \{[\Omega]_A/\Omega \text{ faiblement strictement positive telle que } \Omega\ p\text{-HS}\} \subset H^{p,p}_A(X,\mathbb{R}) \subset H^{p,p}_A(X,\mathbb{C}) \tag{4.3}$$

Notons que $\mathcal{C}_p(X) \subset \mathcal{A}_p(X)$ et l'ensemble $\mathcal{A}_p(X)$ est un cône ouvert convexe. En effet,

Convexité. Soit $[\Omega]_A, [\tilde{\Omega}]_A \in \mathcal{A}_p(X)$ et $\lambda > 0$, il est clair que $\Omega + \lambda\tilde{\Omega}$ reste faiblement strictement positive et $\partial\bar{\partial}(\Omega + \lambda\tilde{\Omega}) = 0$, i.e : $[\Omega + \lambda\tilde{\Omega}]_A \in \mathcal{A}_p(X)$.

Ouverture. Soit $[\Omega]_A \in \mathcal{A}_p(X)$, $[\gamma]_A \in H^{p,p}_A(X,\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. On veut montrer que : $[\Omega]_A + \varepsilon[\gamma]_A \in \mathcal{A}_p(X)$. Notons que $\partial\bar{\partial}(\Omega + \varepsilon\gamma) = 0$ puisque $[\Omega]_A \in \mathcal{A}_p(X)$ et $[\gamma]_A \in H^{p,p}_A(X,\mathbb{C})$.

Il reste à montrer que $\Omega + \varepsilon\gamma$ est faiblement strictement positive.
On a, par hypothèse, $\Omega \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge i\alpha_{n-p} \wedge \overline{\alpha_{n-p}} > 0$ où $\alpha_1, \cdots \alpha_{n-p} \in C^{\infty}_{1,0}(X, \mathbb{C})$ sont linéairement indépendant. Alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on obtient :

$$(\Omega+\varepsilon\gamma)\wedge i\alpha_1\wedge\overline{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge i\alpha_{n-p}\wedge\overline{\alpha_{n-p}} = \Omega\wedge i\alpha_1\wedge\overline{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge i\alpha_{n-p}\wedge\overline{\alpha_{n-p}}+\varepsilon\gamma\wedge i\alpha_1\wedge\overline{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge i\alpha_{n-p}\wedge\overline{\alpha_{n-p}} > 0.$$

Soit $[\gamma_1]_A, \cdots, [\gamma_N]_A$ une base de $H^{p,p}_A(X, \mathbb{C})$ et $[\Omega]_A \in \mathcal{A}_p(X)$, donc si $0 < \epsilon_j < \epsilon_0$ pour $j = 1, \cdots, N$, alors $[\Omega]_A + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j [\gamma_j]_A \in \mathcal{A}_p(X)$, car $\partial\bar{\partial}(\Omega + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j \gamma_j) = 0$ et $\Omega + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \epsilon_j \gamma_j$ est faiblement strictement positive. D'où $\mathcal{A}_p(X)$ est un cône ouvert.

On montre maintenant que les cônes $\mathcal{A}_p(X)$ et $\mathcal{C}_p(X)$ sont égaux si les hypothèses (H_k) (4.4), pour $k = 1, \cdots, p+1$, sont vérifiées comme suit.

Proposition 4.3.1. *Soit X une variété complexe compacte avec $\dim_{\mathbb{C}} X = n$*

(i) Si $(H_1), \cdots,$ et (H_{p+1}) sont vérifiées, alors on a l'égalité suivante des cônes : $\mathcal{A}_p(X) = \mathcal{C}_p(X)$, où

$$(H_k): \quad \forall \Gamma \in C^{\infty}_{p+k,p-k+1}(X, \mathbb{C}) \text{ telle que } d\Gamma = 0,\ \Gamma \in Im\partial \Rightarrow \Gamma \in Im\bar{\partial} \tag{4.4}$$

pour $k = 1, \cdots, p+1$

(ii) Si $\mathcal{A}_p(X) = \mathcal{C}_p(X)$, alors (H_1) est vérifiée.

Preuve.

(i) Supposons que les hypothèses $(H_1), \cdots,$ et (H_{p+1}) sont vérifiées. Soit $[\Omega]_A \in \mathcal{A}_p(X)$. Puisque $\partial\bar{\partial}\Omega = 0$, alors $\partial\Omega$ est une $(p+1, p)-$forme d-fermée et ∂-exacte. D'après l'hypothèse (H_1), il existe $\alpha^{p+1,p-1} \in C^{\infty}_{p+1,p-1}(X, \mathbb{C})$ telle qu'on a l'équation (E_1) : $\bar{\partial}\alpha^{p+1,p-1} = -\partial\Omega$. Soit $\alpha^{p+1,p-1} \in C^{\infty}_{p+1,p-1}(X, \mathbb{C})$ une solution arbitraire de l'équation (E_1). D'autre part, on a $\partial\alpha^{p+1,p-1} \in C^{\infty}_{p+2,p-1}(X, \mathbb{C})$. Ceci implique que $\partial\alpha^{p+1,p-1}$ est une $(p+2, p-1)$-forme d-fermée et ∂-exacte. Donc, d'après l'hypothèse (H_2) on a $\partial\alpha^{p+1,p-1} \in Im\bar{\partial}$, alors il existe $\alpha^{p+2,p-2} \in C^{\infty}_{p+1,p-1}(X, \mathbb{C})$ qui résout (E_2) i.e. $\partial\alpha^{p+1,p-1} = -\bar{\partial}\alpha^{p+2,p-2}$.
On suit le même cheminement jusqu'on trouve l'équation (E_p), par l'hypothèse (H_p), une solution $\alpha^{2p,0}$ telle que $\bar{\partial}\alpha^{2p,0} = -\partial\alpha^{2p-1,1}$ implique que $\bar{\partial}\partial\alpha^{2p,0} = 0$, donc $\partial\alpha^{2p,0}$ est une $(2p+1, 0)$-forme d-fermée et ∂-exacte. Ceci implique que $\partial\alpha^{2p,0} \in Im\,\bar{\partial}$, donc $\partial\alpha^{2p,0} = 0$.
Par conséquent $d(\sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{i,2p-i} + \Omega + \sum_{i=0}^{p-1} \overline{\alpha^{i,2p-i}}) = 0$, i.e $[\Omega]_A \in \mathcal{C}_p(X)$. D'où l'égalité $\mathcal{A}_p(X) = \mathcal{C}_p(X)$.

(ii) Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} H^{p,p}_A(X, \mathbb{C}) &\xrightarrow{T=\partial} H^{p+1,p}_{\bar{\partial}}(X, \mathbb{C}) \\ [\Omega]_A &\longmapsto [\partial\Omega]_{\bar{\partial}} \end{aligned}$$

Montrons que cette application est bien définie. Soit $[\Omega]_A \in H^{p,p}_A(X, \mathbb{C})$, alors $\partial\bar{\partial}\Omega = 0$, i.e $\bar{\partial}(\partial\Omega) = 0$, donc $[\partial\Omega]_{\bar{\partial}} \in H^{p,p}_{\bar{\partial}}(X, \mathbb{C})$. D'autre part, si $[\Omega_1]_A = [\Omega_2]_A$, alors il existe une $(p-1, p)$-forme u et une $(p, p-1)$-forme v telles que $\Omega_1 - \Omega_2 = \partial u + \bar{\partial} v$. Donc $\partial(\Omega_1 - \Omega_2) = \partial\bar{\partial} v = \bar{\partial}(-\partial v) \in Im\bar{\partial}$. Ceci montre que $[\partial\Omega_1]_{\bar{\partial}} = [\partial\Omega_2]_{\bar{\partial}}$.
Il en résulte que l'application T est bien définie.

Maintenant, on veut montrer que l'application T est identiquement nulle si et seulement si l'hypothèse (H_1) est vérifiée. En effet, soit $\Gamma \in C^{\infty}_{p+1,p}(X,\mathbb{C})$ telle que $\Gamma = \partial\Omega$, alors $\bar\partial\Gamma = \bar\partial\partial\Omega = -\partial\bar\partial\Omega$. Or Γ est une forme d-fermée de type pure $(p+1,p)$, i.e $\partial\Gamma = 0$ et $\bar\partial\Gamma = 0$, donc $\partial\bar\partial\Omega = 0$.
D'autre part $T \equiv 0$ équivaut à dire $T([\Omega]_A) = [\partial\Omega]_{\bar\partial} = 0 \in H^{p+1,p}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C})$, donc $\partial\Omega \in Im\bar\partial$.
Inversement, supposons que pour tout $\Gamma \in C^{\infty}_{p+1,p}(X,\mathbb{C})$, $d\Gamma = 0$ telle que $\Gamma \in Im\partial \Rightarrow \Gamma \in Im\bar\partial$.
Alors $\Gamma = \partial\Omega$ implique que $\Gamma = \partial\Omega \in Im\bar\partial$, donc $[\partial\Omega]_{\bar\partial} = 0 = T([\Omega]_A)$. Ceci montre que $T \equiv 0$.
Puisque $\mathcal{A}_p(X) = \mathcal{C}_p(X)$, on a alors

$$\mathcal{A}_p(X) \cap \ker T = \{[\Omega]_A/\Omega \text{ faiblement strictement positive telle que } \partial\bar\partial\Omega = 0 \text{ et } \partial\Omega \in Im\bar\partial\} \supset \mathcal{C}_p(X).$$

Donc $\mathcal{C}_p(X) \subset \mathcal{A}_p(X) \cap \ker T \subset \mathcal{A}_p(X)$. Comme $\mathcal{A}_p(X) = \mathcal{C}_p(X)$, alors $\mathcal{A}_p(X) \cap \ker T = \mathcal{A}_p(X)$.
Donc $\ker T = H^{p,p}_A(X,\mathbb{C})$ ce qui est équivalent à l'hypothèse (H_1).

$\square$

On considère maintenant, pour $k = 1, \cdots, p+1$, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} H^{p+k-1,p-k+1}_A(X,\mathbb{C}) &\xrightarrow{\widehat{T}_k} H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X,\mathbb{C}) \\ [\Omega]_A &\longrightarrow [\partial\Omega]_{BC} \end{aligned}$$

Cette application est bien définie. En effet :
Supposons que $\partial\bar\partial\Omega = 0$, i.e. $\bar\partial(\partial\Omega) = 0$, alors $\partial\Omega \in \ker\bar\partial$ c'est à dire $\partial\Omega \in \ker\partial \cap \ker\bar\partial$. De plus, si $\Omega = \partial u + \bar\partial v$ avec u et v sont des $(p+k-2,p-k+1)$-forme et $(p+k-1,p-k)$-forme respectivement, alors $\partial\Omega = \partial\bar\partial v \in Im\partial\bar\partial$. D'où l'application $\widehat{T}_k$ est bien définie.

Considérons l'application linéaire :

$$\begin{aligned} I^{p+k,p-k+1}: \quad H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X,\mathbb{C}) &\longrightarrow H^{p+k,p-k+1}_{\partial}(X,\mathbb{C}) \\ [\Gamma]_{BC} &\longrightarrow [\Gamma]_{\partial} \end{aligned}$$

On a $\partial\Gamma = 0$, et $\bar\partial\Gamma = 0$. Pour montrer que l'application $I^{p+k,p-k+1}$ est bien définie, il reste encore à montrer que la définition est indépendante du choix du représentant de la classe $[\Gamma]_{BC}$. En d'autres termes, il est facile de voir que si $\Gamma = \partial\bar\partial u$ avec u une $(p+k-1,p-k)$-forme, alors $\Gamma \in Im\,\partial$. D'où l'application $I^{p+k,p-k+1}$ est bien définie.
On en déduit :

Remarque 4.3.2. *L'application $\widehat{T}_k$ est identiquement nulle si et seulement si pour tout $\Omega \in C^{\infty}_{p+k-1,p-k+1}(X,\mathbb{C})$, on a $\partial\Omega \in Im\partial\bar\partial$, ceci est équivalent à :*

$$(\tilde{H}_k): \quad \forall\Gamma \in C^{\infty}_{p+k,p-k+1}(X,\mathbb{C}) \text{ telle que } d\Gamma = 0, \text{ on a } \Gamma \in Im\partial \Rightarrow \Gamma \in Im\partial\bar\partial \tag{4.5}$$

$\Longleftrightarrow$ *$I^{p+k,p-k+1}$ est injective.*
$\Longleftrightarrow$ $\ker I^{p+k,p-k+1} = \{0\}$.

$$\begin{tikzcd} H^{p+k-1,p-k+1}_A(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\widehat{T}_k=\partial"] \arrow[dr, "g"'] & H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X,\mathbb{C}) \arrow[d, "I^{p+k,p-k+1}"] \\ & H^{p+k,p-k+1}_{\partial}(X,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

où $g = I^{p+k,p-k+1} \circ \widehat{T}_k$. *On a* $\ker I^{p+k,p-k+1} = \{[\Gamma]_{BC}/[\Gamma]_\partial = 0\}$ *et* $Im\,\widehat{T}_k = \{[\partial\Omega]_{BC}/\Omega \in \ker\partial\bar{\partial} \subset C^\infty_{p+k-1,p-k+1}(X,\mathbb{C})\} \subset \ker I^{p+k,p-k+1}$.

Inversement, si $[\Gamma]_{BC} \in \ker I^{p+k,p-k+1}$, *alors il existe une* $(p+k-1, p-k+1)$*-forme* Ω *telle que* $\Gamma = \partial\Omega$. *Puisque* $[\Gamma]_{BC} \in H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X,\mathbb{C})$, *alors* $0 = \bar{\partial}\Gamma = \bar{\partial}\partial\Omega$. *Ceci montre que* $[\Gamma]_{BC} = [\partial\Omega]_{BC} = \widehat{T}_k([\Omega]_A)$. *Par conséquent, on toujours :*

$$\ker I^{p+k,p-k+1} = Im\widehat{T}_k$$

De plus, l'hypothèse $(\tilde{H}_k)$ *(4.5) est vérifiée si et seulement si* $\ker I^{p+k,p-k+1} = Im\,\widehat{T}_k = \{0\}$.

On peut maintenant montrer le résultat suivant :

Theorem 4.3.3. *Soient* $(X_t)_{t\in\Delta}$ *une famille holomorphe de variétés complexes compactes avec* $\dim_{\mathbb{C}} X_t = n$ *et* $(\omega_t)_{t\in\Delta}$ *une famille lisse des métriques sur* $(X_t)_{t\in\Delta}$ *pour* $t \in \Delta$. *Si pour tout* t *assez proche de* 0 *on a :*

$$\begin{cases} h_A^{p+k-1,p-k+1}(0) = h_A^{p+k-1,p-k+1}(t) := dim_{\mathbb{C}} H_A^{p+k-1,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ h_{BC}^{p+k,p-k+1}(0) = h_{BC}^{p+k,p-k+1}(t) := dim_{\mathbb{C}} H_{BC}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ h_\partial^{p+k,p-k+1}(0) = h_\partial^{p+k,p-k+1}(t) := dim_{\mathbb{C}} H_\partial^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \end{cases}$$

$$Alors \quad \begin{cases} \Delta \ni t \xmapsto{\mathcal{H}_A} H_A^{p+k-1,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ \Delta \ni t \xmapsto{\mathcal{H}_{BC}} H_{BC}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ \Delta \ni t \xmapsto{\mathcal{H}_\partial} H_\partial^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \end{cases}$$

sont des fibrés vectoriels C^∞. *De plus, on a les applications linéaires :*

$$\begin{tikzcd} H_A^{p+k-1,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \arrow[r, "\widehat{T}_k(t)=\partial"] \arrow[dr, "g_k(t)"'] & H_{BC}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \arrow[d, "I^{p+k,p-k+1}(t)"] \\ & H_{\partial_t}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

varient de manière lisse avec $t \in \Delta$, *où* $g_k = I^{p+k,p-k+1} \circ \widehat{T}_k$.

Preuve. Notons que les opérateurs

$$\begin{cases} \Delta_{A,t} = \partial_t\partial_t^* + \bar{\partial}_t\bar{\partial}_t^* + \bar{\partial}_t^*\partial_t^*\partial_t\bar{\partial}_t + \partial_t\bar{\partial}_t\bar{\partial}_t^*\partial_t^* + \partial_t\bar{\partial}_t^*\bar{\partial}_t\partial_t^* + \bar{\partial}_t\partial_t^*\partial_t\bar{\partial}_t^* \\ \Delta_{BC,t} = \partial_t\bar{\partial}_t\bar{\partial}_t^*\partial_t^* + \bar{\partial}_t^*\partial_t^*\partial_t\bar{\partial}_t + \bar{\partial}_t^*\partial_t\partial_t^*\bar{\partial}_t + \partial_t^*\bar{\partial}_t\bar{\partial}_t^*\partial_t + \bar{\partial}_t^*\bar{\partial}_t + \partial_t^*\partial_t \\ \Delta'_t = \partial_t\partial_t^* + \partial_t^*\partial_t \end{cases}$$

sont elliptiques [Sch07], alors on a les isomorphismes de Hodge :

$$\begin{cases} H_A^{p+k-1,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p+k-1,p-k+1}_{\Delta_{A,t}}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ H_{BC}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p+k,p-k+1}_{\Delta_{BC,t}}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ H_{\partial_t}^{p+k,p-k+1}(X_t,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p+k,p-k+1}_{\Delta'_t}(X_t,\mathbb{C}). \end{cases}$$

où $\mathcal{H}^{p+k,p-k+1}_{\Delta_{BC,t}}(X_t,\mathbb{C})$ et $\mathcal{H}^{p+k-1,p-k+1}_{\Delta_{A,t}}(X_t,\mathbb{C})$ sont l'espace des formes harmonique de Bott-Chern et l'espace des formes harmonique d'Aeppli respectivement et $\mathcal{H}^{p+k,p-k+1}_{\Delta'_t}(X_t,\mathbb{C}) = \ker \Delta'_t$.
D'autre part, comme $h^{p+k-1,p-k+1}_A(0) = h^{p+k-1,p-k+1}_A(t)$, $h^{p+k,p-k+1}_{BC}(0) = h^{p+k,p-k+1}_{BC}(t)$, et $h^{p+k,p-k+1}_{\partial}(0) = h^{p+k,p-k+1}_{\partial}(t)$ pour tout t suffisamment proche de 0. Alors, d'après Kodaira-Spencer ([K86], théorème 7.4), on a :

$$\begin{cases} t \overset{\mathcal{H}_A}{\longmapsto} H^{p+k-1,p-k+1}_A(X_t,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p+k-1,p-k+1}_{\Delta_{A,t}}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ t \overset{\mathcal{H}_{BC}}{\longmapsto} H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X_t,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p+k,p-k+1}_{\Delta_{BC,t}}(X_t,\mathbb{C}) \\ \\ t \overset{\mathcal{H}_\partial}{\longmapsto} H^{p+k,p-k+1}_{\partial}(X_t,\mathbb{C}) \simeq \mathcal{H}^{p+k,p-k+1}_{\Delta'_t}(X_t,\mathbb{C}) \end{cases}$$

sont des fibrés vectoriels C^∞. Rappelons que les applications linéaires $\widehat{T}_k(t)$ et $I^{p+k,p-k+1}(t)$ sont bien définies. Soit h_t la projection orthogonale de $C^\infty_{p+k-1,p-k+1}(X_t)$ dans $H^{p+k-1,p-k+1}_A(X_t,\mathbb{C})$ et F_t la projection orthogonale de $C^\infty_{p+k,p-k+1}(X_t)$ dans $H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X_t,\mathbb{C})$.

$$\begin{tikzcd} C^\infty_{p+k-1,p-k+1}(X_t) \arrow[r, "f_t=\partial_t"] \arrow[d, "h_t"'] & C^\infty_{p+k,p-k+1}(X_t) \arrow[d, "F_t"] \\ H^{p+k-1,p-k+1}_A(X_t,\mathbb{C}) \arrow[r, "\widehat{T}_k(t)"'] & H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X_t,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

On a $F_t\circ f_t = \widehat{T}_k(t)\circ h_t$, f_t est C^∞ et par Kodaira-Spencer [K86] F_t et h_t varient de manière C^∞ avec $t\in\Delta$. Donc $\widehat{T}_k(t)$ varie de manière C^∞ avec t. Soit P_t la projection orthogonale de $C^\infty_{p+k,p-k+1}(X_t)$ dans $H^{p+k,p-k+1}_{\partial_t}(X_t,\mathbb{C})$.

$$\begin{tikzcd} C^\infty_{p+k,p-k+1}(X_t) \arrow[d, "F_t"'] \arrow[dr, "P_t"] & \\ H^{p+k,p-k+1}_{BC}(X_t,\mathbb{C}) \arrow[r, "I^{p+k,p-k+1}(t)"'] & H^{p+k,p-k+1}_{\partial_t}(X_t,\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

On a $P_t = I^{p+k,p-k+1}(t)\circ F_t$ et, d'après Kodaira-Spencer [K86], les applications P_t et F_t sont C^∞ avec $t\in\Delta$, alors l'application $I^{p+k,p-k+1}(t)$ est aussi C^∞ avec $t\in\Delta$. Par conséquent $g(t)$ varie de manière lisse avec $t\in\Delta$. □

On obtient les sections $\widehat{T}_k = (\widehat{T}_k(t))_{t\in\Delta} \in C^\infty(\Delta, End(\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_{BC}))$ et $I^{p+k,p-k+1} = (I^{p+k,p-k+1}(t))_{t\in\Delta} \in C^\infty(\Delta, End(\mathcal{H}_{BC},\mathcal{H}_\partial))$.

Comme conséquence, on obtient la déformation par limite de X_t vérifiant l'hypothèse $(\tilde{H}_k)$ (4.5).

Corollaire 4.3.4. *Soit $(X_t)_{t\in\Delta}$ une famille holomorphe de variétés complexes compactes et $(\omega_t)_{t\in\Delta}$*

une famille lisse des métriques sur $(X_t)_{t\in\Delta}$, $\dim_{\mathbb{C}} X_t = n$, $t \in \Delta$.

$$\text{Supposons que :}\quad \begin{cases} h_A^{p+k-1,p-k+1}(0) = h_A^{p+k-1,p-k+1}(t) \\ \\ h_{BC}^{p+k,p-k+1}(0) = h_{BC}^{p+k,p-k+1}(t) & \forall t \sim 0 \\ \\ h_{\partial}^{p+k,p-k+1}(0) = h_{\partial}^{p+k,p-k+1}(t) \end{cases}$$

Si X_t *vérifie l'hypothèse* $(\tilde{H}_k)$, $\forall t \in \Delta \setminus \{0\}$, *alors* X_0 *vérifie aussi l'hypothèse* $(\tilde{H}_k)$.

Preuve. Rappelons que X_t vérifie l'hypothèse $(\tilde{H}_k)$ si et seulement si l'application $\widehat{T}_k(t)$ est identiquement nulle.
De plus, si $\widehat{T}_k(t) \equiv 0$, pour tout $t \in \Delta \setminus \{0\}$, alors par continuité de $\widehat{T}_k(t)$, on a $\widehat{T}_k(0) \equiv 0$ qui est équivalente à X_0 vérifiant l'hypothèse $(\tilde{H}_k)$. D'où le résultat. □

Par conséquent on obtient la :

Proposition 4.3.5. *Fixons* $p \in \{1, \cdots, n-1\}$ *et soit* $k \in \{1, \cdots, p+1\}$ *tels que* $p + k \leq n$.

(1) $\forall k \in \{1, \cdots, p+1\}$, $(\tilde{H}_k) \Rightarrow (H_k)$

(2) $(\tilde{H}_1) + \cdots + (\tilde{H}_{p+1}) \Rightarrow (H_1) + \cdots + (H_{p+1}) \Rightarrow \mathcal{A}_p(X) = \mathcal{C}_p(X)$

(3) Soit $\mathcal{A}_p(X_t) = \mathcal{C}_p(X_t)$ $\forall t \in \Delta \setminus \{0\}$. *Alors :*

$$\left.\begin{array}{ll} \forall k \in \{1, \cdots, p+1\} & \\ (\tilde{H}_1) + \cdots + (\tilde{H}_{p+1}) & \forall t \in \Delta \setminus \{0\} \\ & \\ h_A^{p+k-1,p-k+1}(0) = h_A^{p+k-1,p-k+1}(t) & \\ & \\ h_{BC}^{p+k,p-k+1}(0) = h_{BC}^{p+k,p-k+1}(t) & \forall t \sim 0 \\ & \\ h_{\partial}^{p+k,p-k+1}(0) = h_{\partial}^{p+k,p-k+1}(t) & \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_p(X_0) = \mathcal{C}_p(X_0)$$

Remarque 4.3.6. *Dans le cas ou* $n = 3$ *et* $p = 2$, $k \in \{1, 2, 3\}$ *et* $2 + k \leq 3$, k *doit être égale à* 1.
Donc, $\mathcal{A}_2(X) = \{[\Omega]_A/\Omega > 0$ *telle que* $\partial\bar{\partial}\Omega = 0\} = \mathcal{G}_X$ *est le cône de Gauduchon (5.5).*
$\mathcal{C}_2(X) = \{[\Omega]_A/\Omega > 0$ *et il existe* $\alpha^{1,3} \in C^{\infty}_{1,3}(X, \mathbb{C})$ *telle que* $d(\alpha^{1,3} + \Omega + \overline{\alpha^{1,3}}) = 0\} = \mathcal{SG}_X$ *est le cône fortement Gauduchon (fG) (5.6). De plus, on a l'équivalence suivante :*

$$\mathcal{A}_2(X) = \mathcal{C}_2(X) \Leftrightarrow X \text{ est sGG i.e } \mathcal{SG}_X = \mathcal{G}_X \text{ (Définition 5.0.16 du chapitre 5)}$$

Proposition 4.3.7. *Soit* $p, q \in \{1, \cdots, n\}$ *fixés. Si l'implication :*

$$u \in Im\,\partial \quad \Rightarrow \quad u \in Im\,\partial\bar{\partial}$$

est vérifiée pour toutes formes de type (p, q), (q, p), $(p+1, q)$, *et* $(q+1, p)$ *d-fermées pour tous* p, q *tels que* $p + q = k$. *Alors il existe une application linéaire injective canonique :*

$$H_A^{p,q}(X, \mathbb{C}) \hookrightarrow H_{DR}^{p+q}(X, \mathbb{C})$$
$$[\alpha]_A \mapsto \{\alpha\}_{DR}$$

où α *est une forme d-fermée (par hypothèse, une telle forme* α *existe).*

Preuve. L'application

$$\begin{aligned} H_A^{p,q}(X,\mathbb{C}) &\longrightarrow H_{DR}^{p+q}(X,\mathbb{C}) \\ [\alpha]_A &\mapsto \{\alpha\}_{DR} \end{aligned}$$

est bien définie puisque $\partial\bar\partial\alpha = 0$. Alors, par l'hypothèse $\operatorname{Im}\partial \subset Im\,\partial\bar\partial$, il existe une $(p, q-1)$-forme v telle que $\partial\alpha = -\partial\bar\partial v$. D'autre part, $\bar\alpha$ est une (q, p)-forme et $\partial\bar\alpha$ est une $(q+1, p)$-forme ∂-exacte. Donc, par hypothèse, $\partial\bar\alpha$ est $\partial\bar\partial$-exacte. Alors, par conjugaison, $\bar\partial\alpha$ reste $\partial\bar\partial$-exacte, i.e. il existe une $(p-1, q)$-forme u telle que $\bar\partial\alpha = \partial\bar\partial u$. Ceci montre que $d(\alpha + \partial u + \bar\partial v) = 0$, c'est à dire, toute classe de cohomologie d'Aeppli contient un représentant d-fermé.

Soit α une (p, q)-forme telle que $d\alpha = 0$ et $\alpha = \partial u + \bar\partial v$. Alors $\partial\alpha = 0 = \partial\bar\partial v$ et $\bar\partial\alpha = 0 = \bar\partial\partial u$. Notons que ∂u est une (p, q)-forme d-fermée et ∂-exacte, donc $\partial u \in Im\,\partial\bar\partial$. Il en résulte que $\partial u \in \operatorname{Im} d$. Or, $\bar\partial v$ est une (p, q)-forme d-fermée $\bar\partial$-exacte. Donc $\bar\partial v \in \operatorname{Im}\partial\bar\partial$, alors $\bar\partial v \in \operatorname{Im} d$. Par conséquent $\alpha \in \operatorname{Im} d$. Il s'en suit que l'application ci-dessus est bien définie.
Injectivité : Pour tout $\alpha \in C^\infty_{p,q}(X,\mathbb{C})$ telle que $\partial\bar\partial\alpha = 0$ et $\alpha \in \operatorname{Im} d$. On a alors $\alpha \in Im\partial + \operatorname{Im}\bar\partial$. Donc l'application est injective une fois qu'elle est bien définie. □

On peut maintenant en déduire ce qui suit.

Corollaire 4.3.8. *Fixons $k \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$.*

(1) Supposons que l'implication

$$u \in Im\,\partial \quad \Rightarrow \quad u \in Im\,\partial\bar\partial$$

est vérifiée pour toutes formes d-fermées de types (p, q), (q, p), $(p+1, q)$ et $(q+1, p)$ pour tous p, q tels que $p + q = k$. Alors il existe une injection canonique :

$$\bigoplus_{p+q=k} H_A^{p,q}(X,\mathbb{C}) \hookrightarrow H_{DR}^k(X,\mathbb{C})$$

(2) Supposons que $(*_k)$ est vérifiée, où

$$\begin{array}{ll} (*_k): & \textit{l'implication } u \in Im\,\partial \Rightarrow u \in Im\,\partial\bar\partial \textit{ est vérifiée pour toutes formes } d\textit{-fermées} \\ & \textit{de types } (p,q), (q,p), (p+1,q), \textit{ et } (q+1,p) \\ & \textit{pour tous } p,q \textit{ tels que } p+q=k \textit{ ou } p+q=2n-k \end{array} \tag{4.6}$$

Alors il existe une injection canonique :

$$\bigoplus_{p+q=k} H_A^{p,q}(X,\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{p+q=2n-k} H_A^{p,q}(X,\mathbb{C}) \hookrightarrow H_{DR}^k(X,\mathbb{C}) \oplus H_{DR}^{2n-k}(X,\mathbb{C})$$

D'après Angella-Tomassini [AT12], on a :

$$2b_k \le \sum_{p+q=k} h_A^{p,q} + \sum_{p+q=2n-k} h_A^{p,q}$$

cette application est un isomorphisme et $2b_k = \sum_{p+q=k} h_A^{p,q} + \sum_{p+q=2n-k} h_A^{p,q}$.

Une autre conséquence immédiate est la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale de Frölicher.

Corollaire 4.3.9. *Si l'hypothèse* $(*_k)$ *(4.6) est vérifiée pour tout* $k \in \{0, 1, \cdots, 2n\}$*.*
Alors $E_1(X) = E_\infty(X)$ *(i.e. la suite spectrale de Frölicher dégénère en* E_1*) (Définition 2.5.1).*

Finalement, le résultat ci-dessus (Corollaire 4.3.8) implique le résultat suivant :

Proposition 4.3.10. *On a toujours :* $(*_{2p}) \Longrightarrow (\tilde{H}_k)$ *(4.5), pour tout* $k \in \{1, \cdots, p+1\}$*.*
Si X_0 *vérifie les conditions* $(*_{2p})$ *et* $(*_{2p+1})$*, alors :*

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \cdots, p+1\} \\ h_A^{p+k-1,p-k+1}(0) = h_A^{p+k-1,p-k+1}(t) & \\ & \\ h_{BC}^{p+k,p-k+1}(0) = h_{BC}^{p+k,p-k+1}(t) & \forall t \sim 0 \\ & \\ h_\partial^{p+k,p-k+1}(0) = h_\partial^{p+k,p-k+1}(t) & \end{cases}$$

Chapitre 5

Annexes

Commençons par rappeler la définition d'une (p,p)-forme faiblement strictement positive au sens de Lelong.

Définition 5.0.11. *Lelong (voir [Dem12]) Soit V une espace vectoriel complexe de dimension n et V^* son dual.*
Une $(p,p)-$forme $\alpha \in \Lambda^{p,p}V^*$ est dite faiblement strictlement positive si pour tout $0 \neq \tau_j \in V^*$, $1 \leq j \leq q = n-p$, linéairement indépendant

$$\alpha \wedge i\tau_1 \wedge \bar{\tau}_1 \wedge \cdots \wedge i\tau_q \wedge \bar{\tau}_q$$

est une $(n,n)-$forme strictement positive.

Remarque 5.0.12. *Toute $(1,1)-$forme strictement positive et $(n-1,n-1)-$forme (par dualité) sont faiblement strictement positive.*

Maintenant, on va énoncer le résultat de Michelsohn dans [Mich83] montrant que toute $(n-1,n-1)$-forme C^∞ strictement positive est la racine $(n-1)^{\text{ème}}$ d'une unique $(1,1)$-forme C^∞ strictement positive.

Proposition 5.0.13. *Soit X une variété complexe compacte de dimension n. Soit Ω une $(n-1,n-1)$-forme C^∞ strictement positive. Alors il existe une unique $(1,1)$-forme C^∞ strictement positive ω telle que :*

$$\Omega = \omega^{n-1}$$

Preuve. Posons $C_1 := \{\varphi \in C^\infty_{1,1}(X,\mathbb{C})/\varphi$ est strictement positive $\}$ le cône des $(1,1)$-formes C^∞ strictement positive et $C_2 := \{\Phi \in C^\infty_{n-1,n-1}(X,\mathbb{C})/\Phi$ est strictement positive $\}$ le cône des $(n-1,n-1)$-formes C^∞ strictement positive. L'objectif est de montrer que l'application :

$$\begin{array}{ll} C_1 & \longrightarrow C_2 \\ \varphi & \longmapsto \varphi^{n-1} \end{array}$$

est bijective. Soit (V,J) l'espace vectoriel complexe de dimension complexe n. Pour plus de commodité, on suppose que V est réel.

Alors, pour tout $x \in X$ et pour toute $(1,1)$-forme réelle φ, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x)\, dz_j \wedge d\bar{z}_j \tag{5.1}$$

La forme φ est strictement positive si et seulement si $\lambda_j > 0$, pour tout j.
De même pour chaque $(n-1, n-1)$-forme Φ, on a :

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j(x)\, dz_j \wedge d\bar{z}_j \tag{5.2}$$

La forme Φ est strictement positive si et seulement si $\Lambda_j > 0$, pour tout j. Donc une $(n-1, n-1)$-forme Φ (5.2) définie positive est exprimée par :

$$\Phi = \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{n-1} \quad \text{avec} \quad \Lambda_j = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{\lambda_j}, \quad \forall j$$

Donc $\lambda_j = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_n}{\Lambda_j} = \frac{\left((\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{\Lambda_j} = \frac{(\Lambda_1 \cdots \Lambda_n)^{\frac{1}{n-1}}}{\Lambda_j}$. D'où la bijection. $\square$

Maintenant, on décrit les idées principales de la preuve donnée par P. Gauduchon dans ([Gau77b], [Gau84]) montrant l'existence et l'unicité d'une métrique de Gauduchon sur une variété complexe compacte. Pour cela on introduit quelques terminologies ad hoc.

Soit (X, J, g) une variété presque-hermitienne (p.h) connexe, compacte, de dimension réelle $2n$, J une structure presque complexe (voir Définition (2.1.5)) et g une métrique Riemannienne invariante par J. Notons par $(\quad,\quad)$ le produit scalaire ponctuel des formes sur X, $<\quad,\quad>$ le produit scalaire global des formes sur X et $F = g(J\cdot, \cdot)$ est la 2-forme fondamentale.

On appelle une 1-forme θ *forme de torsion* la trace de la torsion de la connexion de Chern, ou autrement :

$$\theta = \delta\, F\, J = J\delta\, F$$

où δ est l'adjoint de la différentielle extérieure sur les formes pour le produit scalaire global $<\quad,\quad>$, soit encore [Gau77a] $d\,F^{n-1} = \theta \wedge F^{n-1}$.

Définition 5.0.14. *On dit qu'une structure p.h (X, J, g) est d'excentricité nulle si sa forme de torsion est cofermée, i.e. $\delta\theta = 0$.*

Le Laplacien complexe opérant sur les fonctions scalaires f est :

$$L(f) = -(d\,d^c f, F) \qquad\qquad \forall f \in C^\infty(X) \tag{5.3}$$

et l'adjoint formel de L est $L^*(f) = -\delta(J\delta(fF))$. Alors

$$L(f) = \Delta\, f + (d\, f, \theta) \quad \text{et} \quad L^*(f) = \Delta\, f - (d\, f, \theta) + \delta\theta . f$$

où $\Delta := \delta d + d\delta$ est le Laplacien Riemannien. En particulier, on a $\delta\theta = L^*(1)$.

Un tel opérateur L est un opérateur de Hopf, c'est à dire un opérateur réel elliptique du second ordre à coefficients C^∞ sans terme d'ordre zéro, i.e. $L(1) = 0$. Cet opérateur L vérifie la propriété suivante (Théorème de E. Hopf [Hop27]) sur une variété X connexe compacte : si $L(f)$ est non négatif (ou non positif) alors elle est identiquement nulle et f est constante.
D'autre part, une structure p.h est d'excentricité nulle si et seulement si le scalaire d'excentricité (i.e. l'unique scalaire réel f_0 vérifiant $L^*(f_0) = 0$ et $< f_0, 1 >= Vol(X, g)$) est identiquement égale à 1 (i.e. $f_0 \equiv 1$).

Soit L_φ, L^*_φ et $< \quad , \quad >_\varphi$ les éléments correspondants à L, L^* et $< \quad , \quad >$ relatifs à la métrique conforme $\tilde{g} = \varphi^{\frac{2}{n-1}}.g$. En utilisant 5.3, on trouve :

$$L_\varphi = \varphi^{-\frac{2}{n-1}}.L \quad \text{ et } \quad L^*_\varphi = \varphi^{-\frac{2n}{n-1}} L^* \circ \varphi^2 \tag{5.4}$$

Theorem 5.0.15. *([Gau77b],[Gau84]) Toute famille conforme de structures hermitiennes sur une variété complexe compacte X contient une unique (à homothétie près) métrique de Gauduchon si la dimension complexe n de X est supérieure à 1.*

Lorsque $n = 1$, toute structure presque-hermitienne est Kählérienne, donc d'excentricité nulle ($dd^cF^{n-1} = 0$).

Preuve. Soit L le Laplacien complexe défini ci-dessus (5.3). D'après la propriété cité au-dessus (Théorème de E. Hopf), on a $\ker L = \mathbb{R}$ dans $C^\infty(X)$. C'est à dire le noyau $\ker L$ de L se réduit au fonctions constantes. Comme l'indice de L, de L^* et de Δ sont égaux, alors l'indice de L est nul. Donc la dimension du $\ker L^*$ est égale à 1. Or, d'après le théorème de E. Hopf, l'orthogonal du $\ker L^*$ dans $C^\infty(X)$ est l'image de L ne contient aucune fonction partout non-négative.
Donc $f \in \ker L^*$, $f \neq 0 \implies < f, 1 > \neq 0$. Alors un élément non nul dans $\ker L^*$ est soit partout positif soit partout négatif. Il en résulte que $L^*\varphi^2 = 0$ si et seulement si la métrique $\tilde{g} = \varphi^{\frac{2}{n-1}}.g$ est d'excentricité nulle ce qui est équivalent à $dd^c(\varphi^2 F^{n-1}) = 0$. □

Rappelons qu'une métrique ω (une $(1,1)$-forme C^∞ définie positive) est dite de Gauduchon si $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1} = 0$ et fortement Gauduchon (fG) si $\partial\omega^{n-1} \in \operatorname{Im} \bar{\partial}$ (2.2.10). Le cône de Gauduchon de X introduit dans [Pop15]

$$\mathcal{G}_X := \{[\omega^{n-1,n-1}]_A \in H_A^{n-1,n-1}(X, \mathbb{R}) / \omega \text{ est une métrique de Gauduchon sur } X\} \tag{5.5}$$

est une cône ouvert convexe dans $H_A^{n-1,n-1}(X, \mathbb{R})$. Puisque la métrique de Gauduchon existe toujours [Gau77b], alors $\mathcal{G}_X \neq \emptyset$.

On considère l'application linéaire canonique suivante :

$$\begin{aligned} T : \quad H_A^{n-1,n-1}(X, \mathbb{C}) &\longrightarrow H_{\bar{\partial}}^{n,n-1}(X, \mathbb{C}) \\ [\alpha]_A &\longmapsto [\partial\alpha]_{\bar{\partial}} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que cette application est bien définie. Le cône fortement Gauduchon est défini dans [Pop15] par :

$$\mathcal{SG}_X := \mathcal{G}_X \cap \ker T \subset \mathcal{G}_X \subset H_A^{n-1,n-1}(X, \mathbb{C}) \tag{5.6}$$

S'il n'existe aucune métrique fG, alors $\mathcal{SG}_X = \emptyset$.

Définition 5.0.16. *([PU18a], Définition 1.2) Soit X une variété complexe compacte de dimension n. On dit que X est une variété* **sGG** *si le cône fortement Gauduchon de X coincide avec le cône de Gauduchon de X, c'est à dire, $\mathcal{SG}_X = \mathcal{G}_X$.*

En dimension 2, la notion de Kählérianité est la notion sGG sont équivalentes. Or, en dimension ≥ 3, la propriété sGG est plus faible que la Kählérianité.

Le résultat suivant, donne des descriptions de la propriété sGG.

Proposition 5.0.17. *([PU18a], Lemme 1.3) Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est une variété sGG.

(ii) l'application T est identiquement nulle.

(iii) On a le cas particulier suivant du $\partial\bar\partial$-lemma :
pour toute $(n, n-1)$-forme γ d-fermée, si γ est ∂-exacte, alors γ est $\bar\partial$-exacte.

(iv) toute métrique de Gauduchon ω sur X est fortement Gauduchon.

Le Théorème suivant est une caractérisation numérique des variétés sGG en termes de nombre de Betti $b_1 := \dim\, H^1_{DR}(X, \mathbb{C})$ et nombre de Hodge $h^{0,1}_{\bar\partial} := \dim\, H^{0,1}_{\bar\partial}(X, \mathbb{C})$.

Theorem 5.0.18. *([PU18a], Théorème 3.1) Soit X une variété complexe compacte de dimension n.*

(i) L'application $\mathbb{C}$-linéaire canonique :

$$\begin{aligned} F:\quad H^1_{DR}(X,\mathbb{C}) &\longrightarrow H^{0,1}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C}) \oplus \overline{H^{0,1}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C})} \\ \{\alpha\}_{DR} &\longmapsto ([\alpha^{0,1}]_{\bar\partial}, \overline{[\overline{\alpha^{0,1}}]_{\bar\partial}}) \end{aligned}$$

est bien définie. De plus F est injective, par conséquent $b_1 \leq 2h^{0,1}_{\bar\partial}$ sur toute variété complexe compacte.

(ii) L'application $\mathbb{C}$-linéaire canonique :

$$\begin{aligned} F^*:\quad H^{n,n-1}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C}) \oplus \overline{H^{n,n-1}_{\bar\partial}(X,\mathbb{C})} &\longrightarrow H^{2n-1}_{DR}(X,\mathbb{C}) \\ ([\beta]_{\bar\partial}, \overline{[\gamma]_{\bar\partial}}) &\longmapsto \{\beta+\gamma\}_{DR} \end{aligned}$$

est bien définie. De plus, F^* est le dual de F. Donc F^* est surjective.

(iii) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X \text{ est une variété sGG} &\iff F^* \text{ est injective} \\ &\iff F \text{ est bijective} \\ &\iff b_1 = 2h^{0,1}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 5.0.18 ci-dessus, on peut en déduire que la propriété sGG est ouverte par déformations holomorphes.

Corollaire 5.0.19. *([PU18a], Corollaire 1.7) Soit $(X_t)_{t\in\Delta}$ une famille holomorphe de variétés complexes compactes (voir la Définition 5.0.20 ci-dessous). Fixons $t_0 \in \Delta$. Si X_0 est une variété sGG, alors :*

(i) *X_t est une variété sGG pour tout $t \in \Delta$ assez proche de t_0.*

(ii) *$h^{0,1}_{\bar\partial}(t) = h^{0,1}_{\bar\partial}(0)$ et $h^{0,1}_{BC}(t) = h^{0,1}_{BC}(0)$*

Preuve.

$$\begin{aligned} X_{t_0} \text{ est une variété sGG} \quad & \overset{(a)}{\Longleftrightarrow} b_1 = 2h^{0,1}_{\bar\partial}(X_{t_0}) \geq h^{0,1}_{\bar\partial}(X_t) = b_1 \quad \forall t \sim t_0 \\ & \Longleftrightarrow h^{0,1}_{\bar\partial}(X_t) = b_1 \\ & \overset{(b)}{\Longleftrightarrow} X_t \text{ est une variété sGG} \quad \forall t \sim t_0 \end{aligned}$$

où (a) découle du Théorème 5.0.18 et les nombres de Hodge $h^{0,1}_{\bar\partial}(X_t)$ varient de manière semi-continue supérieurement avec t dans Δ ([KS60], Theorème 4) et (b) résulte du Théorème 5.0.18.

Définition 5.0.20. *Soit $\mathcal{X}$ une variété complexe et Δ un domaine dans $\mathbb{C}^m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.*
On dit que $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ est une famille analytique (holomorphe) complexe de variétés complexes compactes au dessus de Δ si π est une submersion holomorphe propre, c'est à dire les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) *Pour tout $t \in \Delta$, $X_t := \pi^{-1}(t)$ est une sous-variété complexe compacte de $\mathcal{X}$, i.e. un sous-ensemble analytique connexe compact de $\mathcal{X}$.*

(ii) *Le rang de la matrice Jacobienne de π est égal à m en tout point de $\mathcal{X}$.*

(iii) *Il existe un recouvrement ouvert localement fini $\{\mathcal{U}_j / j = 1, 2, \cdots\}$ de $\mathcal{X}$ et des fonctions lisses à valeurs complexe $\xi^1_j(p), \cdots, \xi^n_j(p)$, définies sur $\mathcal{U}_j$ telles que pour tout t, l'ensemble :*

$$\{p \in \mathcal{U}_j \longrightarrow (\xi^1_j(p), \cdots, \xi^n_j(p))/\mathcal{U}_j \cap \pi^{-1}(t) \neq \emptyset\}$$

est un système de coordonnées holomorphe local de X_t.

Bibliographie

[AB90] L.Alessandrini, G.Bassanelli — Small Deformations of a Class of Compact non Kähler Manifolds — Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 109, Number 4, August 1990, pp. 1059-1062

[AB91] L.Alessandrini, G.Bassanelli — Compact p-Kähler manifolds — Geometriac Dedicata 38, 199–210 (1991).

[AT12] D. Angella,A. Tomassini — On the $\partial\bar{\partial}$-lemma and Bott-Chern Cohomology — A. Invent. math. 2013

[Buc99] N. Buchdahl — On Compact Kähler Surfaces — Ann. Inst. Fourier 49, no. 1 (1999) 287-302.

[BP18] H. Bellitir, D. Popovici — Positivity Cones under Deformations of Complex Structures — arXiv preprint arXiv :1803.05524 (2018).

[CE53] E. CALABI and B. ECKMANN — A class of compact, complex manifolds which are not algebraic — Ann. of Math. 58 (1953), 494–500.

[COUV16] M. Ceballos, A. Otal, L. Ugarte, R. Villacampa — Invariant Complex Structures on 6-Nilmanifolds : Classification, Frölicher Spectral Sequence and Special Hermitian Metrics — J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 1, 252–286.

[Dem84] J.P.Demailly Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne — Séminaire d'analyse P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (editors) 1983/1984, Lecture Notes in Math., no. **1198**, Springer Verlag (1986), 88-97.

[Dem92] J.P.Demailly Regularization of Closed Positive Currents and Intersection Theory — J. Alg. Geom., **1** (1992), 361-409.

[Dem96] J.P.Demailly — Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation — in Introduction à la théorie de Hodge", J. Bertin, J.-P. Demailly, L. Illusie, C. Peters, Panoramas et Synthèses 3, SMF (1996).

[Dem12] J.P.Demailly — Complex Analytic and Differential Geometry — Book online https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html.

[DGMS75] P. Deligne, Ph. Griffiths, J. Morgan, D. Sullivan — Real Homotopy Theory of Kähler Manifolds — Invent. Math. **29** (1975), 245-274.

[Fuj] A.Fujiki — Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces — Publ. Res.Inst.Math. Sci., Kyoto Univ. 14 (1978), 1–52.

[Gau77a] P. Gauduchon — Fibrés Hermitiens à endomorphisme de Ricci non négatif— Bull. Soc. Math. France 105 (1977), 113–140.

[Gau77b] P. Gauduchon — Le théorème de l'excentricité nulle — C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. **285** (1977), 387-390.

[Gau84] P. Gauduchon— La 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte— Mathematische Annalen, vol. 267, no 4, (1984), p. 495-518.

[Hop27] E. Hopf — Elementare Bemerkungen über die Lösung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus — Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. KI. 19, (1927), 147-152 .

[Hop48] H. Hopf — Zur topologie der komplexen mannigfaltigkeiten — In : " Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday ", Interscience Publishers Inc., New York, 1948, 167–185.

[K86] K. kodaira — Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures — Grundlehren der Math. Wiss. 283, Springer (1986).

[KS60] K. Kodaira, D.C. Spencer — On Deformations of Complex Analytic Structures, III. Stability Theorems for Complex Structures — Ann. Math. **71**, No. 1 (1960), 43-76.

[Lam99] A. Lamari — Courants kählériens et surfaces compactes — Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **49**, 1 (1999), 263-285.

[Mich83] M. L. Michelsohn — On the existence of special metrics in complex geometry — Acta Math. 143 (1983), 261–295.

[Pop10] Dan Popovici — Limits of Moishezon manifolds under holomorphic deformations — arXiv eprint math.AG/1003.3605v1.

[Pop13] D. Popovici — Deformation Limits of Projective Manifolds : Hodge Numbers and Strongly Gauduchon Metrics — Invent. Math. 194 (2013), 515- 534.

[Pop14] D. Popovici — Deformation Openness and Closedness of Various Classes of Compact Complex Manifolds ; Examples — Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. XIII (2014), 255-305.

[Pop15] D.Popovici — Aeppli Cohomology Classes Associated with Gauduchon Metrics on Compact Complex Manifolds — Bull. Soc. Math. France 143 (2015), no. 4, 763-800.

[Pop16] D.Popovici — Degeneration at E_2 of Certain Spectral Sequences — International Journal of Mathematics **27**, no. 14 (2016), 1650111, 31 pp.

[Pop17] D. Popovici — Adiabatic Limit and the Frölicher Spectral Sequence — arXiv e-print CV 1709.04332v1

[PU18a] D. Popovici, and L. Ugarte — Compact Complex Manifolds with Small Gauduchon Cone — Proceedings of the London Mathematical Society (3) (2018) doi :10.1112/plms.12110.

[PU18b] D.Popovici and L. Ugarte — Symmetry and Duality for a 5-Dimensional Nilmanifold — in preparation.

[Sch07] M. Schweitzer — Autour de la Cohomologie de Bott-Chern — ArXiv e-print math.AG/0709.3528v1.

[ST10] J. Streets, G. Tian — A Parabolic Flow of Pluriclosed Metrics — Int. Math. Res. Notices, 16 (2010) 3101-3133.

[Tsu84] H. TSUJI — Complex structures on $S^3 \times S^3$ — Tohoku Math. J. (2) 36 (1984), 351–376.

[Var] J.Varouchas — Sur l'image d'une variété kählérienne compacte — In : LNM, Vol.1188,Springer, 1986, 245–259.

[Voi07] Claire Voisin — Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry — I. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 76. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Wu06] C.C.Wu — On the Geometry of Superstrings with Torsion — Thesis, Departement of Mathematics,Harvard University, Cambridge MA 02138, (April 2006).

Déformations holomorphes des structures complexes

Résumé. Cette thèse est une première étape vers une éventuelle résolution de la conjecture selon laquelle l'espace des p-cycles relatifs (i.e. contenus dans les fibres) dans une famille holomorphe de variétés complexes compactes lisses est propre au-dessus de la base. Ceci aurait des conséquences profondes sur la géométrie des variétés complexes compactes.

Le premier chapitre est consacré à rappeler les notions préliminaires dont nous aurons besoin par la suite. Au chapitre 2, on étudie les relations entre la propriété sGG des variétés complexes compactes, définie dans un travail antérieur par D. Popovici et L. Ugarte par toute métrique de Gauduchon est fortement Gauduchon, et une dégénérescence possible de la suite spectrale de Frölicher. Dans la première approche qu'on propose, on montre la dégénérescence partielle en E_2 et on introduit un cône de positivité dans la E_2-cohomologie de bidegrée $(n-2, n)$ de la variété qu'on montre alors qu'il varie par déformations de la structure complexe de manière semi-continue inférieurement. Dans la deuxième approche qu'on propose, on introduit un analogue de la propriété $\partial\bar{\partial}$-lemma des variétés complexes compactes pour toute constante réelle non nulle h en utilisant la déformation partielle d_h, introduite récemment par D. Popovici, de la différentielle standard d de Poincaré. On montre ensuite, entre autres choses, que cette $h-\partial\bar{\partial}$-propriété est ouverte par déformation. Au chapitre 3, on montre dans une famille analytique complexe (lisse) de $\partial\bar{\partial}$-variétés complexes compactes que les propriétés "p-Hermitienne-symplectique" et "p-plurifermée" sont ouvertes par déformations. D'autre part, on montre que les cônes des classes de cohomologies $\mathcal{A}_p$ et $\mathcal{C}_p$ des (p,p)-formes Ω faiblement strictement positives telles que Ω est p-plurifermée et p-Hermitienne-symplectique respectivement sont égaux sur la fibre centrale s'ils sont égaux sur les autres fibres vérifiant d'autres hypothèses.

Mots-clés. Structure complexe, déformations, suite spectrale de Frölicher, $h-\partial\bar{\partial}$-variété, cohomologie de h-Bott-Chern, cohomologie de h-Aeppli, forme faiblement strictement positive, forme p-SKT, forme p-Hermitienne-symplectique, forme p-Kählérienne, métrique de Gauduchon, métrique fortement Gauduchon