DEA 2000-2001 **Université Paul Sabatier**

Calcul stochastique II, applications aux finances

1 Introduction, but du cours, rappels

Les applications en finance sont dans ce cours, une valorisation et une justification du cours de base de calcul stochastique.
La motivation concrète est la suivante : on suppose que les marchés financiers offrent des actifs dont les prix dépendent du temps et du hasard ; on peut donc les modéliser par des processus stochastiques, prix connus en temps continu. On suppose également que l'espace des états possibles de la nature, Ω, est infini, que l'on obtient continuement l'information sur les marchés et que les échanges peuvent s'opérer à tout instant ("continuous trading"). On est ainsi dans une situation où le modèle ad hoc est indexé par le temps $t, t \in [0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$, et l'on est amené à utiliser un certain nombre d'outils stochastiques, qui peuvent d'ailleurs modéliser des situations extrèmement diverses autres que les finances.

Le plan

(i) Le processus de Wiener ou mouvement Brownien est tel que ses petits accroissements modélisent bien le "bruit", l'alea pur, l'erreur de mesure physique... le cours "calcul stochastique I" a démontré l'existence d'un tel processus en le construisant explicitement et a démontré quelques unes de ses propriétés les plus utiles.
Le calcul de Ito permet d'obtenir par intégration des processus stochastiques plus sophistiqués ; la formule de Ito permet de "différencier" une fonction d'un processus stochastique ; et enfin, on a introduit au moins les équations différentielles stochastiques linéaires ; on en introduira d'autres et on sera également amené à utiliser les martingales et le théorème de représentation.
(ii) Le chapitre suivant va utiliser ces différentes notions pour introduire le modèle de marché financier ainsi que certaines notions économiques.
iii) Le troisième chapitre aborde les changements de probabilité et problèmes de martingales. En effet, on se place en théorie financière en général sous l'hypothèse (ou bien l'on cherche à vérifier cette hypothèse !) qu'il existe un espace de probabilité où les prix sont tous des martingales, ce qui facilite souvent beaucoup les choses, et correspond de plus à une hypothèse économique importante : l'absence d'arbitrage que l'on aura défini en (ii). Donc, on introduit le théorème de Girsanov, les problèmes de martingales et on revient sur le théorème de représentation des martingales, c'est à dire que sous des hypothèses convenables, toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable et intégrable est la valeur en T d'une martingale (par exemple, le vecteur des prix sous une probabilité correcte).
iv) La formule de Feynmann-Kac donne une solution sous forme stochastique à l'EDP de la chaleur ([18] pages 254-275).
(v) On examinera des EDS plus générales liées à des problèmes d'optimisation ([18] paragraphes 5.2,5.7).
(vi) Optimisation de consommation-portefeuille, équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ([18] 5.8 A page 371, 5.8 C pages 379-387).
(vii) Couvertures d'options ([18] pages 376-379).
(viii) et si on a le temps, courbes de taux d'intérêt ([25]).

1.1 Définitions utiles et rappels

espace de probabilité,

tribu, σ-algèbre, tribu des boréliens sur R, R^d.

filtration, espace de probabilité filtré.

variable aléatoire, processus aléatoire.

notion de trajectoire, càd-làg.

processus adapté à une filtration.

Définition 1.1 *Soit X et Y deux processus. On dit que X est une* **modification** *de Y si :*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1.$$

On dit que qu'ils sont **indistinguables** *si presque sûrement leurs trajectoires coïncident :*

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t, \forall t \geq 0\} = 1.$$

Remarque 1.2 *La deuxième notion est plus forte que la première.*

Définition 1.3 *On dit qu'un processus X est "progressivement mesurable" pour la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ si $\forall t \geq 0, \forall A \in \mathcal{B}(R)$:*

$$\{(s,\omega)/0 \leq s \leq t \ ; \ X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t,$$

c'est à dire que l'application sur $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) : (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable.

Proposition 1.4 *(cf [18], 1.12) Si X est un processus mesurable adapté, il admet une modification progressivement mesurable.*

Preuve : voir Meyer 1966, page 68.

Proposition 1.5 *(cf [18], 1.13) Si X est un processus mesurable adapté et admet des trajectoire càd ou càg, il est progressivement mesurable.*

Preuve : On définit

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{(k+1)t2^{-n}}(\omega), \ s \in]\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n}], \ X_0^{(n)}(\omega) = X_0(\omega) \ ; \ k = 0, \cdots, 2^n - 1.$$

Il est clair que l'application $(s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable. Par continuité à droite, la suite $X_s^{(n)}(\omega)$ converge vers $X_s(\omega)$ pour tout (s,ω) et donc la limite est aussi $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable.

1.2 Notions de convergence

Définition 1.6 *Soit $\mathbb{P}_n$ une suite de probabilités sur un espace métrique (E, d) muni de ses boréliens $\mathcal{B}$, et soit $\mathbb{P}$ mesure sur $\mathcal{B}$. On dit que la suite $\mathbb{P}_n$* **converge faiblement** *vers $\mathbb{P}$ si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $\mathbb{P}_n(f) \to \mathbb{P}(f)$.*

Définition 1.7 *Soit X_n une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ à valeurs dans un espace métrique $(E, d, \mathcal{B})$. On dit que la suite X_n* **converge en loi** *vers X si la suite de mesures $\mathbb{P}_n X_n^{-1}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}X^{-1}$, c'est à dire si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $\mathbb{P}_n(f(X_n)) \to \mathbb{P}(f(X))$.*

- convergence dans L^p,
- convergence presque sûre,
- convergence en probabilité.

Proposition 1.8 *La convergence presque sûre entraine la convergence en probabilité.*

Proposition 1.9 *La convergence dans L^p entraine la convergence en probabilité.*

- théorèmes de Lebesgue : convergence monotone, majorée.
- limite sup et limite inf d'ensembles.

Théorème 1.10 *de Fatou :*

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n).$$

Théorème 1.11 *de Borel-Cantelli :*

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

1.3 Espérance conditionnelle

Définition 1.12 *Soit X variable aléatoire de l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ un sous tribu de $\mathcal{A}$. $E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})$ est l'unique variable aléatoire de $L^1(\mathcal{B})$ telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \ \int_B X d\mathbb{P} = \int_B E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B}) d\mathbb{P}.$$

Corollaire 1.13 *Si $X \in L^2(\mathcal{A})$, $\|X\|_2^2 = \|E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})\|_2^2 + \|X - E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})\|_2^2$.*

1.4 Temps d'arrêt

C'est une notion relative à un espace de probabilité filtré.

Définition 1.14 *Une variable aléatoire* $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B})$ *est un* **temps d'arrêt** *si pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$*, l'événement* $\{\omega / T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$*.*

Exemples :

- une constante est un temps d'arrêt,
- si O est un ouvert de $\mathcal{A}$ et le processus X continu, alors

$$T_O(\omega) = \inf\{t, X_t(\omega) \in O\}$$

est un temps d'arrêt, appelé le temps d'atteinte.

Définition 1.15 *Soit* T *un temps d'arrêt de la filtration* $\mathcal{F}_t$ *L'ensemble* $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{A}, A \cap \{\omega / T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *est appelée la* **tribu arrêtée** *en* T*.*

Proposition 1.16 *Soit* X *un processus progressivement mesurable et* T *un temps d'arrêt pour la filtration* $\mathcal{F}_t$*. Alors l'application* $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ *est* $\mathcal{F}_T$*-mesurable et le processus* $t \mapsto X_{t \wedge T}$ *est progressivement mesurable.*

Preuve : en exercice.

Définition 1.17 *Le processus* $X_{.\wedge T}$ *s'appelle le "processus arrêté en* T*" souvent noté* X^T*.*

1.5 Martingales

(cf [28] pages 8 à 12 ; [18] pages 11 à 30.)

Définition 1.18 *Soit un processus* X *réel adapté. C'est une* **martingale** *(resp sur/sous) si*

(i) $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \forall t \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $\forall s \leq t, E[X_t / \mathcal{F}_s] = X_s$. *(resp* $\leq, \geq$ *.)*

Lemme 1.19 *Soit* X *une martingale et* φ *une fonction convexe telle que* $\varphi(X_n) \in L^1$, $\forall n$, *alors* $\varphi(X)$ *est une sous-martingale ; si* φ *est concave, alors* $\varphi(X)$ *est une sur-martingale.*

Preuve en exercice.

Définition 1.20 *On dit que la martingale X est* **fermée** *par $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $X_t = E[Y/\mathcal{F}_t]$.*

Proposition 1.21 *Toute martingale admet une modification càdlàg (cf [28])*

Théorème 1.22 *de convergence des martingales : Soit X une sur (ou sous)-martingale càd telle que $\sup_t E[|X_t|] < \infty$. Alors $\lim_{t\to\infty} X_t$ existe presque sûrement et appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

Si X est fermée par Z, elle l'est aussi par $\lim_{t\to\infty} X_t$ notée X_∞ qui vaut $E[Z/\vee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t]$.

Définition 1.23 *Une famille de variables aléatoires $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ est* **uniformément intégrable** *si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_\alpha \int_{\{|U_\alpha|\geq n\}} |U_\alpha| d\mathbb{P} = 0.$$

Théorème 1.24 *On a les équivalences*

(i) La famille $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ est uniformément intégrable

(ii) $\sup_\alpha E[|U_\alpha|] < \infty$ et $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0 : A \in \mathcal{A}$ et $\mathbb{P}(A) \leq \delta \Rightarrow E[|U_\alpha| 1_A] \leq \varepsilon$.

Théorème 1.25 *Soit X une martingale càd uniformément intégrable ; alors la limite Y presque sûre de X_t quand t tend vers l'infini existe et appartient à L^1. De plus $X_t = E[Y/\mathcal{F}_t]$.*

Théorème 1.26 *Soit X une martingale. X est uniformément intégrable si et seulement si*

(i)X_t converge presque sûrement vers Y appartenant à L^1 quand t tend vers l'infini et $\{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}^+}\}$ est une martingale.

ou

(ii) X_t converge vers Y dans L^1.

(preuves en exercices.)

Théorème 1.27 *de Doob : Soit X une sous-martingale càd de variable terminale X_∞ et deux temps d'arêt S et $T, S \leq T$. Alors :*

$$X_S \leq E[X_T/\mathcal{F}_S]\mathbb{P}- \text{ presque sûrement.}$$

Preuve : pages 19-20 de [18].

Définition 1.28 *(page 33 [28].) Soit X un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une* **martingale locale** *s'il existe une suite de temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini telle que pour tout n le processus arrêté $X^{T_n}\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ soit une martingale.*

La technique qui consiste à arrêter un processus en un temps d'arrêt convenable permettra de récupérer des martingales uniformément intégrables donc facilement utilisables. On obtient des résultats vrais pour tout n puis l'on passe à la limite en utilisant les théorèmes de Lebesgue (convergences majorées ou monotones). C'est pourquoi l'on a introduit ces deux outils : temps d'arrêt et martingales locales. L'ensemble de ces dernières sera noté $\mathcal{M}_{loc}$.

Théorème 1.29 *(cf [28], th. 44, page 33) Soit $M \in \mathcal{M}_{loc}$ et T temps d'arrêt tel que M^T est uniformément intégrable.*

(i) $S \leq T \Rightarrow M^S$ uniformément intégrable.

(ii) $\mathcal{M}_{loc}$ est un espace vectoriel réel.

(iii) si M^S et M^T sont uniformément intégrables, alors $M^{S\wedge T}$ est uniformément intégrable.

Notation :

$$M_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} |M_s| \ ; \ M^* = \sup_{0\leq s} |M_s|.$$

Théorème 1.30 *(cf [28], th. 47, page 35) Si $M \in \mathcal{M}_{loc}$ telle que $E[M_t^*] < \infty \forall t$, alors M est une "vraie" martingale.*
Si de plus $E[M^*] < \infty$, alors M est uniformément intégrable.

Preuve :
(i) $\forall s \leq t, |M_s| \leq M_t^*$ élément de L^1. La suite $T_n \wedge t$ est croissante vers t et

$$E[M_{T_n\wedge t}/\mathcal{F}_s] = M_{T_n\wedge s}.$$

On passe à la limite presque sûre dans cette égalité et le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite dans L^1.
(ii) M est donc une martingale et M^* est dans L^1. Le théorème de convergence des martingales montre la convergence presque sûre de M_t vers M_∞. Il reste à montrer l'uniforme intégrabilité (se servir de la définition équivalente de l'uniforme intégrabilité).

Définition 1.31 *Soit X un processus : on dit qu'il est* **progressivement mesurable** *si $\forall t$, l'application $(\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$ est $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]}-$mesurable.*
Si X est càd ou làd adapté, alors il est progressivement mesurable.
Si X est progressivement mesurable, alors il est adapté.
Pour les processus càd ou làd, adapté équivaut à progressivement mesurable.

2 Modèle financier en temps continu.

(d'après [7] chap 12.1 à 12.5) Les prix aussi sont continus : on suppose qu'il n'y a pas de sauts.

2.1 Constitution du modèle

On se place en horizon fini : $t \in [0,T]$

On est sur un espace de Wiener, espace de probabilité filtré : $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$. De plus, on suppose que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_T = \mathcal{A}$.

Il existe un bien de consommation périssable

Sur le marché, il y a $N+1$ actifs financiers de prix p, semi-martingales sur $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$ dont on peut vendre et acheter des quantités réelles, mais il n'y a pas de coûts d'échange.

Le premier actif est à taux sans risque, type caisse d'épargne (*bond*, en anglais) :

$$dp_t^0 = p_t^0 r dt,\ r > 0,\ p_0^0 = 1.$$

C'est à dire que $p_t^0 = e^{rt}$. On note $\tilde{p}^n = \frac{p^n}{p^0}$ les **prix actualisés**.

Il y a I agents économiques ayant accès à l'information $\mathcal{F}_t$ au temps t. Pour tout $i = 1, \cdots, I$, le $i-$ème agent dispose de **ressources** $e_0^i \in \mathbb{R}^+$ au début et $e_T^i \in L_+^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin, et de même **consomme** $c_0^i \in \mathbb{R}^+$ au début et $c_T^i \in L_+^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin. Il n'y a ni ressource ni consommation intermédiaire. Une alternative à ce modèle est de supposer que les ressources sont reçues en continu et que les agents consomment également en continu, et la donnée est alors celle de vitesses de consommation et de ressource, dont on supposera que ce sont des processus adaptés intégrables en temps sur $[0,T]$.

2.2 Stratégies d'échange

Une stratégie est un portefeuille θ, processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{N+1}$, θ^n représentant la part du portefeuille investie dans le $n$ième actif financier. Les conditions à imposer sont celles qui permettent au processus réel $\int \langle \theta_s, dp_s \rangle$ d'être bien défini : cette quantité représente le gain issu de l'échange.

Définition 2.1 *Une* **stratégie admissible** θ *est un processus progressivement mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R}^{N+1}$ *sur* $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *stochastiquement intégrable par rapport au vecteur prix.*

Par exemple, on peut prendre comme dans le cours de calcul stochastique I : θ $\mathcal{F}$ *localement borné.*

On note leur ensemble $\mathcal{P}^*(p)$. Selon les besoins du problème à considérer, on peut être amené à être plus exigeant sur la définition de "admissible" (on ajoute la condition : le processus $\theta.p$ est minoré par une constante) comme on le verra dans le paragraphe 2.5 et dans l'exemple qui conclut ce chapitre. Dans le chapitre 3 on utilisera l'ensemble

$$\mathcal{L}^*(p) = \{\psi \text{ progressivement mesurable et } \forall t, \int_0^t \psi_s^i \psi_s^j d\langle \tilde{p}1, \tilde{p}^j \rangle_s < \infty \; p.s.\}$$

Pour déterminer sa stratégie, l'agent a besoin d'un critère pour classer entre eux les résultats obtenus à l'aide de cette stratégie, à savoir la consommation rendue possible à l'aide de la richesse atteinte. Donc, sur l'ensemble des consommations, noté $X \subset \mathbb{R} \times L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, on définit ce qu'on appelle une *relation de préférence* complète, continue, croissante et convexe définie ci-dessous ; on en construira une plus tard (cf proposition 2.17) ; cette notion diffère d'une relation d'ordre : cette relation est réflexive et transitive mais il manque l'antisymétrie.

Définition 2.2 *Une relation de préférence (notée $\prec$) est dite* **complète** *si pour tout c_1 et c_2 de X, on a ou bien $c_1 \prec c_2$ ou bien $c_2 \prec c_1$*
Elle est dite **continue** *si $\forall c \in X$, $\{c' \in X,\ c' \prec c\}$ et $\{c' \in X,\ c \prec c'\}$ sont des fermés de X muni de la topologie produit.*
Elle est dite **croissante** *si $c'(0) \geq c(0)$ et $c'_T(\omega) \geq c_T(\omega), \forall \omega$ implique $c \prec c'$.*
Elle est dite **convexe** *si c' et $c" \prec c$ alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\alpha c' + (1-\alpha)c" \prec c$.*

Définition 2.3 *Une stratégie est* **autofinançante** *si elle est admissible et si de plus pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la valeur du portefeuille, à savoir $V_t(\theta) = \langle \theta_t, p_t \rangle$, vérifie la relation :*

$$V_t(\theta) = \langle \theta_t, p_t \rangle = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t \langle \theta_s, dp_s \rangle.$$

Remarque: Ceci s'interprète de la manière suivante : la variation de la valeur du portefeuille vient uniquement de la variation des prix !

Ceci est peut-être plus clair en discret :

$$V_{t+1} - V_t = \langle \theta_{t+1}, p_{t+1} \rangle - \langle \theta_t, p_t \rangle = \langle \theta_{t+1}, p_{t+1} - p_t \rangle$$

équivaut à :

$$\langle \theta_{t+1}, p_t \rangle = \langle \theta_t, p_t \rangle.$$

Le portefeuille se fait de t à $t+1$ par réorganisation interne sans utiliser de ressources extérieures et sans faire de consommation de richesse.

On suppose en général que les prix sont des exponentielles stochastiques (ainsi sera-t-on assuré qu'ils restent positifs !!)
Hypothèse : $\forall n$, il existe une semi-martingale x^n telle que :

$$p_t^n = \mathcal{E}_t(x^n), t \in [0, T].$$

Concrètement, les processus des prix sont solution d'équations différentielles stochastiques linéaires de la forme $dp_t^n = p_t^n dx_t^n$ avec :

$$dx_t^n = \sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t)dt, n = 1, \cdots, N; dx_t^0 = rdt.$$

Théorème 2.4 *Soit θ une stratégie admissible. Elle est autofinançante si et seulement si la valeur actualisée du portefeuille $\tilde{V}_t(\theta) = e^{-rt}V_t(\theta)$ vérifie :*

$$\tilde{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{p}_s \rangle.$$

Preuve en exercice, à l'aide de la formule de Ito.

Définition 2.5 *On dit que θ est une* **stratégie d'arbitrage** *si elle est admissible, autofinançante et vérifie :*

$$\begin{array}{ll} & \langle \theta_0, p_0 \rangle \leq 0 \ \textit{et} \ \langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0 \ \textit{presque sûrement et} \ \neq 0 \ \textit{avec une probabilité} \ > 0, \\ & \textit{ou} \\ (1) & \langle \theta_0, p_0 \rangle < 0 \ \textit{et} \ \langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0 \ \textit{presque sûrement.} \end{array}$$

De fait, on peut se contenter pour définition de

$$\begin{array}{lrcl} (2) & \langle \theta_0, p_0 \rangle & = & 0 \text{ et} \\ & \langle \theta_T, p_T \rangle & \geq & 0 \text{ presque sûrement, et } > 0 \text{ avec une probabilité } > 0 \end{array}$$

Proposition 2.6 *Lorsqu'il existe un actif sans risque, s'il existe une stratégie admissible, autofinançante θ vérifiant (1), on peut construire une stratégie admissible, autofinançante vérifiant (2).*

Preuve : exo 1 feuille 1.
Si $\langle \theta_0, p_0 \rangle = a < 0$, on définit une nouvelle stratégie qui va vérifier cette dernière propriété (2) :

$$\theta'^n = \theta^n, n = 1, \cdots, N \ ; \ \theta'^0(t) = \theta^0(t) - ae^{-rt}, \forall t \in [0, T].$$

Alors, en $t = 0$,

$$\langle \theta'_0, p_0 \rangle = \theta'^0_0, p^0_0 + \sum_1^N \langle \theta^n_0, p^n_0 \rangle = \langle \theta_0, p_0 \rangle - a = 0$$

et $\langle \theta'_T, p_T \rangle = \langle \theta_T, p_T \rangle - ae^{-rT}e^{rT} > \langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0$. Donc, $\langle \theta'_T, p_T \rangle$ est presque sûrement positif strictement. $\square$

Définition 2.7 *Un marché sans stratégie d'arbitrage est dit* **viable**.

2.3 Mesure de prix d'équilibre ou : probabilité neutre au risque

Définition 2.8 *Etant donné un système de prix $(p^0, \cdots, p^N)$ comportant l'actif sans risque p_0 une* **mesure de prix d'équilibre** *(ou* **probabilité neutre au risque***) sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ est une probabilité Q* **équivalente à** *$\mathbb{P}$ telle que les prix actualisés $e^{-rt}p^n$, notés $\tilde{p}^n$, sont des Q-martingales locales.*

On note $\mathcal{Q}_p$ leur ensemble. (En anglais on dit : risk neutral probability measure.)
L'**hypothèse** du modèle est : $\mathcal{Q}_p$ **est non vide**.
Cette hypothèse est très forte, et il est vraisemblable qu'elle est rarement vérifiée sur les marchés financiers réels. Lorsque les prix sont des semi-martingales exponentielles guidées par un mouvement brownien vectoriel, on verra les conditions assez contraignantes pour qu'il existe une telle probabilité (cf l'exemple donné au paragraphe 2.6).
Sous cette hypothèse, on choisit alors $Q \in \mathcal{Q}_p$; elle n'est pas forcément unique, mais la plupart des résultats sont indépendants de l'élément choisi dans cet ensemble $\mathcal{Q}_p$.

Proposition 2.9 *Soit Q une mesure de prix d'équilibre (probabilité neutre au risque). Pour toute stratégie θ admissible autofinançante élément de $\mathcal{P}^*(\tilde{p})$, la valeur actualisée du portefeuille est une $Q-$martingale locale.*

Preuve en exercice.

A l'aide d'une telle probabilité neutre au risque Q, on va donner des conditions suffisantes pour qu'un marché soit viable.

Théorème 2.10 *(cf [7], 12.2 et sq.) (1) Si pour toute stratégie admissible autofinançante, $\tilde{V}_t(\theta)$ est une $Q-$surmartingale, alors le marché est viable.*

(2) Si toute stratégie admissible autofinançante élément de $\mathcal{P}^*(\tilde{p})$ est telle que $\tilde{V}_t(\theta) \geq 0$ $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement, alors le marché est viable.

Preuve : (1) Le fait que $\tilde{V}_t(\theta)$ soit une $Q-$surmartingale s'écrit :

$$\forall s \leq t, \ E_Q[\tilde{V}_t(\theta)/\mathcal{F}_s] \leq \tilde{V}_s(\theta).$$

En particulier puisque la tribu initiale $\mathcal{F}_0$ est triviale, pour $s = 0$,

$$E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq \tilde{V}_0(\theta) \text{ c'est à dire } \langle \theta_0, p_0 \rangle.$$

Supposons qu'il existe une stratégie d'arbitrage : $\langle \theta_0, p_0 \rangle = 0, \langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0$.

Donc $E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq 0$ et puisque $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT} \langle \theta_T, p_T \rangle \geq 0$, $\tilde{V}_T(\theta) = 0$ et la stratégie θ ne peut être d'arbitrage.

(2) Puisque la stratégie θ est autofinançante,

$$\tilde{V}_t(\theta) = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{p}_s \rangle.$$

La proposition 2.9 montre que $\tilde{V}_t(\theta)$ est alors une $Q-$martingale locale. Comme elle est positive, c'est une surmartingale (cf la preuve du lemme 3.8) et l'on est ramené à (1) pour conclure. □

2.4 Ensemble budgétaire et équilibre

On fixe encore ici Q, mesure de prix d'équilibre et l'on précise l'ensemble X des objectifs : $X = \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

Définition 2.11 *Pour un système de prix p et un processus de ressource e, on appelle* **ensemble budgétaire** *l'ensemble de consommations sous ensemble de X :*

$$\begin{aligned} B(e,p) = \{c \in X, c = (c(0), c(T)) \quad : \quad & \exists \theta \text{ admissible autofinançante telle que } \tilde{V}_\cdot(\theta) \in \mathcal{M}(Q), \\ & c(0) = e(0) - \langle \theta_0, p_0 \rangle, \ c(T) = e(T) + \langle \theta_T, p_T \rangle \} \end{aligned}$$

Une alternative est de considérer au lieu de $c(T) = e(T) + \langle \theta_T, p_T \rangle$ comme objectif, la quantité $u(V_T(\theta))$ avec u fonction croissante concave.

Définition 2.12 *On dit que l'on est en* **situation d'équilibre** *(equilibrium en anglais) pour un ensemble donné d'agents économiques de ressources $\{e^i, i = 1, \cdots, I\}$ si pour tout i il existe une stratégie θ^i vérifiant :*

$$\begin{aligned} &(1) \quad \forall n = 0, \cdots, N, \ \forall t \in [0,T], \ \sum_{i=1}^{I} \theta^i_n(t) = 0 \ p.s. \\ &(2) \quad \theta^i \text{ est optimal dans } B(e^i, p) \text{ pour l'agent } i. \end{aligned}$$

Le premier point veut dire que le marché est "clair". Le second sous-entend l'existence d'une relation de préférence sur $B(e^i, p) \subset X$ que l'on va définir un peu plus tard.

Définition 2.13 *On dit que la consommation c est* **simulable** *("attainable", en anglais), s'il existe un processus de ressource e tel que $e(T) = 0$ et $c \in B(e, p)$.*

C'est à dire qu'il existe une stratégie θ autofinançante telle que $\tilde{V}_.(\theta) \in \mathcal{M}(Q)$ et $\langle \theta_0, p_0 \rangle = e(0) - c(0)$ et $\langle \theta_T, p_T \rangle = c(T)$.
On note $\mathbf{C(p)}$ le sous-ensemble de X des consommations "simulables" dans le marché p.

On va maintenant définir sur $C(p)$ une fonctionnelle de prix qui permettra d'induire sur X une relation de préférence relativement "naturelle" et qui donnera un sens à l'optimalité dans (2) de la définition 2.12.

Définition 2.14 *Soit $\varphi : C(p) \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(c) = c(0) + \langle \theta_0, p_0 \rangle$. On appelle φ la* **fonctionnelle de prix**.

Comme précédemment, cela veut dire qu'il existe une ressource $e(0)$ telle que $c \in B(e, p)$ et $\varphi(c) = e(0)$, c'est à dire le prix initial d'une consommation simulable.

Proposition 2.15 *L'application φ est bien définie et coïncide avec $\varphi(c) = c(0) + e^{-rT} E_Q[c(T)]$.*

Preuve : Les hypothèses assez fortes sur $C(p)$ montrent que $\tilde{V}_t(\theta) = e^{-rt} V_t(\theta)$ est une $Q-$martingale avec $c(T) = V_T(\theta)$ et $\varphi(c) = c(0) + V_0(\theta)$. Donc, $E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] = \tilde{V}_0(\theta) = V_0(\theta)$. Soit $E_Q[e^{-rT} c(T)] = V_0(\theta)$ et l'on a bien $\varphi(c) = c(0) + e^{-rT} E_Q[c(T)]$. Le résultat ne dépend donc pas de la stratégie choisie pour traduire l'appartenance de c à $B(e, p)$. $\square$

Proposition 2.16 *(cf [7] th.12.6 p.304) La fonctionnelle de prix est une forme linéaire positive continue pour la topologie de la norme produit sur $C(p)$.*

Preuve :exo2 feuille 2.
Il est clair que c est positive implique $\varphi(c) = c(0) + e^{-rT} E_Q[c(T)]$ positive et de même cette expression est linéaire en c. Enfin, la continuité se déduit de la majoration :

$$|\varphi(c)| \leq |c(0)| + \|c(T)\|_{1,Q}$$

car $e^{-rT} \leq 1$. $\square$

Proposition 2.17 *La fonctionnelle φ admet une extension ψ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times L^1(Q)$ qui est une forme linéaire positive continue, et l'on définit alors la relation de préférence, sur $C(p)$, attendue par :*

$$c_1 \prec c_2 \ si \ \psi(c_1) \leq \psi(c_2).$$

Preuve : On définit ψ sur $C(p)$ par :

$$\psi(a, Y) = a + E_Q[Y] e^{-rT}$$

qui a bien les propriétés demandées et prolonge φ grâce à la proposition précédente. $\square$

On peut en proposer d'autres : une communément utilisée est $c \mapsto c(0) + E_{\mathbb{P}}[\log(c(T)]$ à condition que $\log(c(T)$ soit intégrable.....

2.5 Marché complet

Cette notion est très liée aux propriétés de représentation prévisible des martingales.

Définition 2.18 *On dit qu'un marché est* **complet** *sous la probabilité Q pour le système de prix p si l'ensemble de consommations simulables sur le marché si*

$$C(p) = \mathbb{R}^+ \times L^1_+(\Omega, \mathcal{F}_T, Q).$$

On cherche dans ce paragraphe à caractériser les marchés complets, ou du moins à mettre en évidence des conditions suffisantes de complétude **mais dans le cas où, comme annoncé ci-dessus, on ajoute une contrainte à l'admissibilité** :
θ est **admissible** si θ est localement borné **et** s'il existe une constante $a \in \mathbb{R}^+$ telle que $\tilde{V}_t(\theta) \geq -a \quad dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement.

Théorème 2.19 *Une consommation de X est simulable si et seulement s'il existe un processus vectoriel $\alpha \in \mathcal{P}^*(\tilde{p})$ tel que :*

$$E_Q[e^{-rT}c(T)/\mathcal{F}_t] = e^{-rT}E_Q[c(T)] + \int_0^t \langle \alpha_s, d\tilde{p}_s \rangle.$$

Preuve : Si c est simulable, rappelons encore une fois qu'il existe une ressource initiale $e(0)$ et une stratégie θ admissible et autofinançante telle que la valeur du portefeuille $\tilde{V}_.(\theta)$ est une $Q-$martingale qui vérifie $V_0(\theta) + c(0) = e(0)$, et $c(T) = \langle \theta_T, p_T \rangle$.

Puisque θ est autofinançante, $d\tilde{V}_t(\theta) = \langle \theta_t, d\tilde{p}_t \rangle$.
Or $c(T) = \langle \theta_T, p_T \rangle$ soit $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT}c(T)$; puisque $\tilde{V}(\theta)$ est une martingale :

$$\tilde{V}_t(\theta) = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)/\mathcal{F}_t] = V_0(\theta) + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{p}_s \rangle$$

et $V_0(\theta) = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)]$.

On a ainsi identifié le processus α cherché comme étant la stratégie θ sur les coordonnées de 1 à N.

Réciproquement, si α existe, on définit la stratégie

$$\theta^n = \alpha^n,\ n = 1, \cdots, N\ ;\ \theta^0_t = e^{-rT}E_Q[c(T)] + \int_0^t \langle \alpha_s, d\tilde{p}_s \rangle - \sum_1^N \langle \theta^n_t, \tilde{p}^n_t \rangle.$$

On vérifie que cette stratégie permet effectivement à la consommation c d'être simulable.
Exercice : vérifier que cette stratégie proposée θ est effectivement admissible autofinançante. □

Proposition 2.20 *L'ensemble $\mathcal{Q}_p$ des mesures de prix d'équilibre est convexe.*

Preuve : en exercice.

2.6 Un exemple

On suppose que le système de prix, outre l'actif sans risque, est donné par :

$$p_t^n = \mathcal{E}_t(x^n), t \in [0, T],$$

avec :

$$dx_t^n = \sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t)dt, n = 1, \cdots, N; dx_t^0 = rdt.$$

On suppose que la matrice σ est de rang plein $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement, et plus : $\sigma\sigma^* \geq \alpha I$ où $\alpha > 0$. Les coefficients b, σ, r sont déterministes et bornés sur $[0, T] \times \Omega$.

2.6.1 Le marché est-il viable ?

C'est à dire, y a-t-il absence de stratégie d'arbitrage ?
On définit pour *stratégie admissible* les processus progressivement mesurables θ à valeurs dans $\mathbb{R}^{N+1}$ $\mathcal{F}$-localement bornés et comme dans le paragraphe précédent on ajoute une condition d'admissibilité :

$$\langle \theta, p \rangle \geq 0, \ dt \otimes d\mathbb{P} \text{ presque sûrement}$$

c'est à dire que le petit épargnant peut à chaque instant réaliser son portefeuille. On peut alors montrer :

Proposition 2.21 *Le marché est viable dès qu'il existe une mesure de prix d'équilibre.*

Dans ce contexte "viable" veut dire qu'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage qui soit $\mathcal{F}$-localement bornée et vérifie

$$(\langle \theta, p \rangle \geq 0, \ dt \otimes d\mathbb{P} \text{ presque sûrement.}$$

Preuve : c'est une conséquence du (2) du théorème 2.10. En effet, s'il existe une mesure de prix d'équilibre, $\tilde{V}(\theta)$ est une martingale locale ; l'admissibilité de θ implique que $\tilde{V}(\theta) \geq 0$. □

Il s'agit donc de montrer dans cet exemple qu'il existe une mesure de prix d'équilibre, donc de chercher Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$. Or, on a vu

$$d\tilde{p}_t = \tilde{p}_t[(b_t - r_t)dt + \sigma_t.dW_t].$$

Les coefficients sont bornés, donc on a que $\tilde{p} = \mathcal{E}(\int \sigma dW + (b - r)dt)$ est bien défini et il suffit de trouver Q qui fasse de $\int \sigma dW + \int (b - r)dt$ une martingale locale. Supposons $N = d$, alors σ_t est inversible $\forall t$ et l'on peut définir le processus

$$t \mapsto u_t = -\sigma_t^{-1}(b_t - r)$$

dont il est facile de voir qu'il vérifie $\int_0^T \|u_s\|^2 ds < +\infty$ presque sûrement. Alors le processus $L = \mathcal{E}(u.W)$ est une martingale locale ; on verra dans le chapitre suivant (cf 3.1) que dans cet exemple, u vérifie la condition de Novikov et qu'alors il existe Q équivalente à $\mathbb{P}$, $Q = L.\mathbb{P}$, $L = \mathcal{E}(u.W)$ telle que:

$$\tilde{W} = W + \int_0 \sigma^{-1}(b - r)dt$$

est un $Q-$mouvement brownien et $\tilde{p} = \mathcal{E}(\int \sigma d\tilde{W}) \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$.

Remarque 2.22 *On peut trouver des hypothèses moins fortes pour l'existence de Q.*

2.6.2 Le marché est-il complet ?

Soit la probabilité Q définie ci-dessus et le $Q-$mouvement brownien $\tilde{W}$. Le processus $u = -\sigma^{-1}(b - r)$ est déterministe, donc la filtration naturelle de $\tilde{W}$ et celle de W sont les mêmes ; on peut appliquer le théorème de représentation des martingales sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0, T]), Q)$: tout objectif se représente

$$E_Q[e^{-rT}c_T/\mathcal{F}_t] = E_Q[e^{-rT}c_T] + \int_0^t \phi_s d\tilde{W}_s.$$

Or, par construction, $d\tilde{W} = \sigma^{-1}\tilde{p}^{-1}d\tilde{p}$ et le marché est complet en utilisant la stratégie $\theta = \sigma^{-1}\tilde{p}^{-1}\phi$. □

Là aussi, on peut prendre des hypothèses moins fortes sur le processus u.

Remarque 2.23 *Si $d > N$ et σ surjective, on n'a pas unicité du vecteur u qui permette d'écrire $\sigma dW + (b - r)dt = \sigma d\tilde{W}$. Dans ce cas, le marché n'est pas complet et l'ensemble $\mathcal{Q}_p$ est en bijection avec l'ensemble $\sigma^{-1}(r - b)$.*

Exercice : dans ce modèle avec d actions et un N-mouvement brownien, quand est ce que le marché est viable ? complet ?

3 Changement de probabilité et problème de martingales

La motivation de ce chapitre est la suivante : les martingales, et les martingales locales, sont des outils puissants, et cela vaut donc la peine de modéliser la réalité en sorte que les processus en jeu soient des martingales, au moins locales. Ainsi, pour l'application du calcul stochastique aux finances, les données sont celles d'un jeu de processus qui modélisent l'évolution dans le temps des prix des actions en cours sur le marché financier, et l'on peut légitimement se poser la question : est ce qu'il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel les prix sont des martingales ? Précisément, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ qui donne cette propriété ? D'où les deux problèmes abordés dans ce chapitre :

- comment passer d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de façon simple, y a-t-il une densité $\frac{d\mathbb{P}}{dQ}$? comment se transforme alors le mouvement brownien ? et c'est le théorème de Girsanov,

- étant donnée une famille de processus adaptés sur l'espace probabilisable filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t)$, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ telle que tous ces processus soient des martingales sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, et c'est ce que l'on appelle un problème de martingales.

On se place donc a priori sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien de dimension d, B, $B_0 = 0$. La filtration est càdlàg et l'on note $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ les martingales relatives à $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Précisément, on prend $\mathcal{F}_. = \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{F}^B_.$

3.1 Théorème de Girsanov

([18] 3.5, p 190-196 ; [28] 3.6, p 108-114)
Soit X un processus mesurable adapté dans $\mathcal{P}(B)$ c'est à dire que pour tout T :

$$\int_0^T \parallel X_s \parallel^2 ds < +\infty \ \mathbb{P}\ p.s.$$

On peut donc définir la martingale locale $X.B$ et son exponentielle de Doléans :

$$\mathcal{E}_t(X.B) = \exp[\int_0^t (X^i_s dB^i_s - \frac{1}{2} \parallel X_s \parallel^2 ds)],$$

solution de l'équation différentielle stochastique

(3) $$dZ_t = Z_t X^i_t dB^i_t \ ; \ Z_0 = 1,$$

qui est aussi une martingale locale.

Sous certaines conditions, $\mathcal{E}_.(X.B)$ est une "vraie" martingale, donc $Z > 0$, $dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement, alors pour tout t, $E[Z_t] = 1$, ce qui permet d'effectuer le changement de probabilité équivalent sur la tribu $(\mathcal{F}_t,\ t \in [0, T])$: $Q_t = Z_t.\mathbb{P}$ c'est à dire si $A \in (\mathcal{F}_t,\ t \in [0, T])$, $Q_t(A) = E_{\mathbb{P}}[1_A Z_t]$.

Théorème 3.1 *(Girsanov, 1960 ; Cameron-Martin, 1944) Si le processus* $Z = \mathcal{E}(X.B)$ *solution de (3) appartient à* $\mathcal{M}(\mathbb{P})$*, alors si* $Q_T = Z_T.\mathbb{P}$*, l'équation suivante dans* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t X_s ds, \ t \leq T$$

définit un $d-$*mouvement brownien sur* $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, Q_T)$.

La preuve nécessite un lemme et une proposition préparatoires.

Lemme 3.2 *Soit* Q *une probabilité absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *et* Z *élément de* $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ *définie par* $Z_t = E_{\mathbb{P}}[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$*. Soit* $0 \leq s \leq t \leq T$ *et une variable* Y *aléatoire* $\mathcal{F}_t-$*mesurable dans* $L^1(Q)$*, alors*

$$Z_s E_Q(Y/\mathcal{F}_s) = E_{\mathbb{P}}(YZ_t/\mathcal{F}_s).$$

Il s'agit en quelque sorte d'une formule de Bayes.
Preuve :

Remarquons d'abord que $Y \in L^1(Q) \Rightarrow ZY \in l^1(\mathbb{P})$ et que le membre de gauche de l'égalité est une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$-mesurable. Soit $A \in \mathcal{F}_s$, il vient :

$$E_{\mathbb{P}}(1_A E_Q(Y/\mathcal{F}_s)Z_s) = E_Q(1_A Y)$$

car sur $\mathcal{F}_s, \ Q = Z_s\mathbb{P}$. Puis :

$$E_Q(1_A Y) = E(1_A Y Z_t)$$

par définition de Q sur $\mathcal{F}_t$ et ceci pour tout A ce qui permet d'identifier $E(YZ_t/\mathcal{F}_s)$ avec le produit $Z_s E_Q(Y/\mathcal{F}_s)$ comme l'espérance conditionnelle attendue. □

Remarque 3.3 *Le lemme montre que* $\tilde{M} \in \mathcal{M}(Z.\mathbb{P})$ *implique* $Z.\tilde{M} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$*. La réciproque est vraie lorsque les probabilités* Q *et* $\mathbb{P}$ *sont équivalentes.*

Proposition 3.4 *Soit* $T \geq 0$ *et un processus* X *de dimension* d *tel que* $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.
(i) Soit $M \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ *nulle en* 0*, alors :*

$$\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t X^i_s d\langle M, B^i\rangle_s \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q),$$

où $Q = \mathcal{E}(X.B)\mathbb{P}$.
(ii) Soit $N \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ *nulle en* 0*, et* $\tilde{N}_t = N_t - \int_0^t X^i_s d\langle N, B^i\rangle_s$ *alors :*

$$\langle \tilde{M}, \tilde{N}\rangle_t = \langle M, N\rangle_t$$

où les crochets sont chacun calculés sur leurs espaces de probabilité respectifs.

Preuve : on prend une suite de temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini telle que sur $\{(t,\omega),\ t \leq T_n(\omega)\}$ les processus $M, \int \|X\|_s^2 ds, \langle M\rangle$, sont bornés (ceci est possible : tous ces processus sont continus). Les égalités recherchées étant trajectorielles, on pourra toujours à la fin faire tendre n vers l'infini.

(i) Supposons donc $M, X, \mathcal{E}(X.B), \langle M\rangle$ bornés. On obtient par l'inégalité de Kunita-Watanabé (cf Calcul Stochastique I) :

$$|\int_0^t X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s|^2 \leq \langle M\rangle_t \int_0^t \parallel X_s^i \parallel^2 ds$$

donc $\tilde{M}$ est aussi bornée.

Par la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\mathcal{E}_t(X.B)\tilde{M}_t = \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B)(dM_u - X_u^i d\langle M, B^i\rangle_u) + \int_0^t \tilde{M}_u \mathcal{E}_u(X.B) X_u^i dB_u^i + \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B) X_u^i d\langle M, B^i\rangle_u$$

qui se simplifie et montre que $\mathcal{E}_t(X.B)\tilde{M}_t \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$. On tire par ailleurs du lemme 3.2 :

$$\tilde{E}_T[\tilde{M}_t/\mathcal{F}_s] = \frac{E[\mathcal{E}_t(X.B)\tilde{M}_t/\mathcal{F}_s)}{\mathcal{E}_s(X.B)}.$$

Ces deux derniers faits montrent que $\tilde{M} \in \mathcal{M}_{loc}^c(Q)$.

(ii) Soit alors une deuxième martingale N et l'on applique encore la formule de Itô au produit de $\mathbb{P}$ semi-martingales $\tilde{M}\tilde{N}$ (là encore on localise pour que N et $\langle N\rangle$ soient également bornés) :

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t &= \int_0^t \tilde{M}_u(dN_u - X_u^i d\langle N, B^i\rangle_u) + \int_0^t \tilde{N}_u(dM_u - \int_0^t X_u^i d\langle M, B^i\rangle_u) \\
&= \int_0^t (\tilde{M}_u dN_u + \tilde{N}_u dM_u) - \int_0^t (\tilde{N}_u X_u^i d\langle M, B^i\rangle_u + \tilde{M}_u X_u^i d\langle N, B^i\rangle_u).
\end{aligned}$$

puis on l'applique à nouveau au produit de ceci avec $\mathcal{E}_t(X.B)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_t(X.B)(\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t) &= \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B)[\tilde{M}_u dN_u + \tilde{N}_u dM_u - (\tilde{N}_u X_s^i d\langle M, B^i\rangle_s + \tilde{M}_u X_s^i d\langle N, B^i\rangle_s)] \\
&+ \int_0^t (\tilde{M}_u\tilde{N}_u - \langle M, N\rangle_u)\mathcal{E}_u(X.B) X_u^i dB_u^i + \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B) X_u^i (\tilde{M}_u d\langle N, B^i\rangle_u + \tilde{N}_u d\langle M, B^i\rangle_u
\end{aligned}$$

ce qui donne après simplification :

$$\mathcal{E}_t(X.B)(\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t) = \int_0^t \mathcal{E}_u(X.B)(\tilde{M}_u dN_u + \tilde{N}_u dM_u) + \int_0^t (\tilde{M}_u\tilde{N}_u - \langle M, N\rangle_u)\mathcal{E}_u(X.B) X_u^i dB_u^i$$

c'est à dire que ce processus appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ et le lemme 3.2 montre que :

$$\tilde{E}_T[\tilde{M}_t\tilde{N}_t - \langle M, N\rangle_t/\mathcal{F}_s] = \tilde{M}_s\tilde{N}_s - \langle M, N\rangle_s \ \mathbb{P} \text{ et } Q \ p.s.$$

C'est exactement dire que le crochet de $\tilde{M}$ et $\tilde{N}$ sous Q coïncide avec celui de M et N sous $\mathbb{P}$. $\square$

Preuve du théorème de Girsanov : la démonstration classique consiste à utiliser le théorème de Lévy (calcul stochastique I). Il suffit donc de l'appliquer au processus $\tilde{B}$ sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]), Q)$. On applique la proposition précédente à $M = N = B^i, i = 1, \cdots, d$.

(i) $\tilde{B}^i \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q), \forall i = 1, \cdots, d.$

(ii) $\langle \tilde{B}, \tilde{B} \rangle_t = \langle B, B \rangle_t = tI_d$

et le théorème de Lévy permet de conclure. $\square$

Proposition 3.5 *Sous les hypothèses du théorème de Girsanov (c'est à dire que $\mathcal{E}(X.B)$ est une martingale), pour toute Q-martingale locale continue N, il existe M, $\mathbb{P}-$martingale locale continue telle que :*

$$N = M - \int_0 X^i_s d\langle M, B^i \rangle_s.$$

Preuve en **exercice** (à rédiger) : utiliser la proposition 3.4 pour donner la forme de M si elle existe et appliquer le lemme 3.2 à $Y = M_t Z_t^{-1}$ après avoir calculé Y par Itô.

On peut regarder maintenant les choses dans un ordre "inverse", c'est à dire chercher, lorsqu'il y a des probabilités équivalentes, le lien entre les martingales sous l'une et l'autre probabilités et par rapport à la même filtration.

Proposition 3.6 *Soit $\mathbb{P}$ et Q deux probabilités équivalentes sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]))$ et la martingale continue uniformément intégrable $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$. Alors $M \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q) \Leftrightarrow MZ \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$.*

De même, $M \in \mathcal{M}^{1,c}(Q) \Leftrightarrow MZ \in \mathcal{M}^{1,c}(\mathbb{P})$.

Preuve : Soit une suite de temps d'arrêt (T_n) localisante pour M : si l'on reprend la preuve du lemme 3.2, il vient :

$$\tilde{E}_T[M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s] = \frac{E_T[Z_t M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s]}{Z_s} \tag{4}$$

Alors le fait que $M^{T_n} \in \mathcal{M}(Q)$ implique que $(MZ)^{T_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

Réciproquement, il suffit de prendre une suite de temps d'arrêt localisante pour ZM et d'appliquer à nouveau (4).

Théorème 3.7 *de Girsanov-Meyer (th 20 page 19 [28]) : Soit $\mathbb{P}$ et Q deux probabilités équivalentes, $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$ et X une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de décomposition*

$X = M + A$. Alors, X est aussi une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de décomposition $X = N + C$, où

$$N = M - \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s \ ; \ C = A + \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s.$$

Preuve : (i) puisque A est un processus à variation finie, il est clair qu'il en est de même pour C, puisque leur différence en est un.

(ii) On applique la proposition 3.6 à N et pour ce faire, on calcule le produit NZ par Itô sous $\mathbb{P}$.

$$d(NZ)_t = N_t dZ_t + Z_t(dM_t - Z_t^{-1} d\langle Z, M\rangle_t) + d\langle Z, N\rangle_t$$

Or, N est une $\mathbb{P}$-semi-martingale de partie martingale M : son crochet avec Z coïncide avec celui de M avec Z ce qui permet la simplification : $d(NZ)_t = N_t dZ_t + Z_t dN_t$, et montre que NZ est une $\mathbb{P}$-martingale locale donc N une Q-martingale locale. □

3.2 Condition de Novikov

(cf [18] pages 198-201.)

Tout le paragraphe précédent est fondé sur l'hypothèse que le processus $\mathcal{E}(X.B)$ est une vraie martingale. On doit donc donner des conditions sur X pour que cette hypothèse soit réalisée. De façon générale, $\mathcal{E}(X.B)$ est au moins une martingale locale avec pour suite localisante par exemple :

$$T_n = \inf\{t \geq 0, \ \int_0^t \| \mathcal{E}_s(X.B) X_s \|^2 \, ds > n\}$$

Lemme 3.8 *$\mathcal{E}(X.B)$ est une surmartingale et c'est une martingale si et seulement si pour tout $t \geq 0$ on a $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$.*

Preuve : Toute martingale locale positive est une surmartingale. Comme $E[\mathcal{E}_0(X.B)] = 1$, il suffit que pour tout $t \geq 0$ on ait $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$ pour que $\mathcal{E}(X.B)$ soit une martingale. □

Proposition 3.9 *Soit M une martingale locale continue pour $\mathbb{P}$ et $Z = \mathcal{E}(M)$ telle que $E[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0, E[Z_t] = 1$.*

La preuve utilise un changement de temps c'est à dire :

$$T(s) = \inf\{t \geq 0, \ \langle M\rangle_t \geq s\}$$

alors le processus $s \to W_s = M_{T(s)}$ est un mouvement brownien. On introduit pour $b < 0$ la famille de temps d'arrêt :

$$S_b = \inf\{s > 0, \ W_s - s = b\}$$

et l'on étudie la martingale arrêtée en S_b. (voir le détail de la preuve, assez longue et délicate dans [18], pages 198-199, à rédiger à titre d'exercice.)

Corollaire 3.10 *(Novikov, 1971) : Soit X un processus mesurable adapté tel que :*

$$E[\exp \frac{1}{2}\int_0^t \| X_s \|^2 ds] < \infty \text{ pour tout } t \geq 0$$

alors $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

Preuve : on applique la proposition à la martingale locale $M = X.B$ dont le crochet est $\langle M \rangle_t = \int_0^t \| X_s \|^2 ds$. Donc pour tout $t \geq 0$ on a $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$ et le lemme 3.8 montre le résultat attendu. $\square$

Pour terminer ce paragraphe, voici un exemple de processus $X \in \mathcal{P}(B)$ ne vérifiant pas la condition de Novikov, tel que $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ mais n'est pas une "vraie" martingale :

Soit le temps d'arrêt $\tau = \inf\{1 \geq t \geq 0, t + B_t^2 = 1\}$ et

$$X_t = -\frac{2}{(1-t)^2} B_t 1_{\{t \leq \tau\}} \ ; \ 0 \leq t < 1, \ X_1 = 0.$$

(i) Montrer que $\tau < 1$ presque sûrement et donc que $\int_0^1 X_t^2 dt < \infty$ presque sûrement.
(ii) Appliquer la formule de Itô au processus $t \to \frac{B_t^2}{(1-t)^2}$; $0 \leq t < 1$ pour montrer que :

$$\int_0^1 X_t dB_t - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2 dt = -\frac{1}{1-T} - 2\int_0^\tau [\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-\tau)^3}] B_t^2 dt \leq -1.$$

(iii) La martingale locale $\mathcal{E}(X.B)$ n'est pas une martingale : on déduit de (ii) que son espérance est majorée par $\exp(-1) < 1$ ce qui contredit le lemme 3.8 ; cependant pour tout $n \geq 1$ et $\sigma_n = 1 - (1/\sqrt{n})$, le processus $\mathcal{E}(X.B)^{\sigma_n}$ est une martingale.

3.3 Théorème de représentation des martingales

(cf Protter [28], pages 147-157.)
Pour plus de généralité, on suppose ici $T = +\infty$.
L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'une classe assez large de martingales peut s'écrire (se "représenter" par) $X.B$. On étudie les martingales de $\mathcal{M}^{p,c}, p \geq 1$, qui de plus sont nulles à l'origine et vérifie $\langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}} \in L^p$. Plus précisément, on se place sur l'ensemble défini comme suit :

$$\mathcal{H}_0^p(\mathbb{P}) = \{M \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \ ; \ M_0 = 0, \ \sup_t |M_t| \in L^p\}.$$

On peut montrer que cette définition est équivalente à :

$$\mathcal{H}_0^p(\mathbb{P}) = \{M \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \ ; \ M_0 = 0, \ \langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}} \in L^p\}$$

grâce à l'inégalité de Burkholder :

$$\| \sup_t |M_t| \|_p \leq c_p \| \langle M \rangle^{\frac{1}{2}} \|_p \leq C_p \| \sup_t |M_t| \|_p, p \geq 1.$$

De plus, cet espace est contenu dans l'ensemble des martingales uniformément intégrables, grâce à l'inégalité

$$\|M_\infty\|_1 \leq 2\sqrt{2} \| \langle M \rangle^{\frac{1}{2}} \|_1.$$

(th 10.19 page 276 [13]) On a en particulier pour $p = 2$:

$$\sup_t E[M_t^2] = \sup_t E[\langle M \rangle_t] = E[\langle M \rangle_\infty] < \infty.$$

On note l'ensemble des processus stochastiquement intégrables par rapport à la martingale M :

$$\mathcal{L}^*(M) = \{\psi \text{ progressivement mesurable tel que } \forall t, \int_0^t \psi_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty \text{ presque sûrement}\}.$$

Cet ensemble n'est pas directement comparable avec l'ensemble $\mathcal{P}^*(M)$, (cf. le chapitre 2) mais $\mathcal{P}^*(M) \subset \mathcal{L}^*_{loc}(M)$.

Définition 3.11 *Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{H}_0^p$ est appelé* **sous-espace stable** *si pour tout $M \in F$ et pour tout temps d'arrêt T alors $M^T \in F$.*

Théorème 3.12 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}_0^p$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) si $M \in F$ et $\forall t \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{F}_t,\ (M - M^t)1_A \in F$.

(ii) F est un **sous-espace stable**.

(iii) si $M \in F$ et H borné $\in \mathcal{L}^*(M)$ alors $H.M \in F$.

(iv) si $M \in F$ et $H \in \mathcal{L}^*(M) \cap L^{p/2}(\Omega, d\mathbb{P}; L^2(\mathbb{R}^+, d\langle M \rangle))$, alors $H.M \in F$.

Preuve : Puisque $\mathcal{L}_b^*(M) \subset \mathcal{L}^*(M) \cap L^{p/2}(\Omega, d\mathbb{P}; L^2(\mathbb{R}^+, d\langle M \rangle))$, l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii) est immédiate.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : il suffit de prendre pour tout temps d'arrêt T le processus borné $H_t = 1_{[0,T]}(t)$. Alors,

$$(H.M)_t = \int_0^t 1_{[0,T]}(s) dM_s = M_{t \wedge T} \in F,$$

c'est à dire que M^T est un élément de F.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : soit t fixé, $A \in \mathcal{F}_t$ et $M \in F$. On construit le temps d'arrêt $T(\omega) = t$ si $\omega \in A$ et l'infini sinon. Il s'agit bien d'un temps d'arrêt puisque $A \in \mathcal{F}_t$. Par ailleurs, d'une part :

$$\begin{aligned} (M - M^t)1_A &= (M - M^t) \text{ si } \omega \in A, \text{ ce qui équivaut à } T(\omega) = t \\ &= 0 \text{ sinon }, \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} M - M^T &= (M - M^t) \text{ si } \omega \in A, \\ &= 0 \text{ sinon }, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que $(M - M^t)1_A = M - M^T$. Or F est stable, donc M et $M^T \in F$, donc $(M - M^t)1_A \in F$ pour tout $t \geq 0$, soit la propriété (i).

(i) $\Rightarrow$ (iv) : soit $H \in \mathcal{S}$, c'est à dire un processus simple qui s'écrit :

$$H = H_0 + \sum_i H_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

où $H_i = 1_{A_i}, A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$. Alors

$$H.M = \sum_i 1_{A_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) = \sum_i 1_{A_i}(M - M^{t_i})_{t_{i+1}}$$

qui appartient à F par (i). L'intégrale stochastique étant linéaire on obtient que pour tout processus simple $X, X.M \in F$ qui est un espace vectoriel. On procède ensuite par limite puisque $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{L}^*(M) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M \rangle)$ (cf calcul stochastique I) $\square$

Définition 3.13 *Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$. On note $S(\mathcal{A})$ le plus petit sous espace vectoriel fermé stable contenant $\mathcal{A}$.*

Définition 3.14 *Soit M et $N \in \mathcal{H}_0^2$. On dit que M et N sont* **orthogonales** $(M \perp N)$ *si* $E[M_\infty N_\infty] = 0$.
Si M et N sont des martingales locales, on dit qu'elle sont **fortement orthogonales** $(M \dagger N)$ *si $MN \in \mathcal{M}_{loc,0}$.*

Remarquons que puisque par définition $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale locale, la forte orthogonalité équivaut au fait que le crochet $\langle M, N \rangle = \langle M, N \rangle_0$ est constant. On a donc de façon naturelle (dans $\mathcal{H}_0^2$) que la forte orthogonalité de martingales de carré intégrable implique l'orthogonalité ; la réciproque est fausse : considérons $M \in \mathcal{H}_0^2$ et Y une variable de Bernoulli indépendante de M. Soit $N = YM$.
Montrer en **exercice** que M est orthogonale à N mais que l'orthogonalité n'est pas forte.

Pour $\mathcal{A}$ sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$, on note $\mathcal{A}^\perp$ son orthogonal, et $\mathcal{A}^\dagger$ son orthogonal fort.

Lemme 3.15 *Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$: $\mathcal{A}^\dagger$ est un sous-espace vectoriel fermé stable de $\mathcal{H}_0^2$.*

Preuve : (i) fermé : soit une suite $M^n \in \mathcal{A}^\dagger$ de limite M dans $\mathcal{H}_0^2$ et soit N dans $\mathcal{A}$: pour tout n, $M^n N$ est une martingale. D'autre part, pour tout $t \geq 0$, par les inégalités de Kunita-Watanabé et Cauchy-Schwarz

$$E[|\langle M^n - M, N \rangle_t|] \leq \sqrt{E[\langle M^n - M \rangle_t] E[\langle N \rangle_t]}$$

qui converge vers zéro. Donc $\langle M^n, N\rangle_t \to \langle M, N\rangle_t$ dans L^2. Or, pour tout N et tout t, $\langle M^n, N\rangle_t = 0$, et par conséquent $\langle M, N\rangle_t = 0$ et M est orthogonale à N.

(ii) stable : soit $M \in \mathcal{A}^\dagger$ et T un temps d'arrêt : $\langle M^T, A\rangle = \langle M, A\rangle^T = 0$ donc $M^T \in \mathcal{A}^\dagger$. $\square$

Lemme 3.16 *Soit deux martingales de $\mathcal{H}_0^2$. on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{l} (i) M \text{ et } N \text{ fortement orthogonaux, noté } M \dagger N, \\ (ii) S(M) \dagger N \\ (iii) S(M) \dagger S(N) \\ (iv) S(M) \perp N \\ (v) S(M) \perp S(N) \end{array}$$

Preuve en exercice.

On a en corollaire le résultat suivant : (théorème 36 page 150, [28])

Lemme 3.17 *Soit $\mathcal{A}$ un sous ensemble fermé stable de martingales de $\mathcal{H}_0^2$; alors l'orthogonal fort et l'orthogonal faible sont les mêmes sous espaces.*

Preuve du lemme : soit M fortement orthogonal à tout $X \in \mathcal{A}$, alors il est orthogonal : $\mathcal{A}^\dagger \subset \mathcal{A}^\perp$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{A}^\perp$. comme $\mathcal{A}$ est stable, l'espace stable engendré $S(M) \subset \mathcal{A}$ et $N \perp S(M)$. Or, $N \dagger M$, donc d'après le lemme 3.16, $N \in \mathcal{A}^\dagger$. D'où l'autre inclusion $\mathcal{A}^\perp \subset \mathcal{A}^\dagger$ et la conclusion du lemme. $\square$

Théorème 3.18 *Soit $M^1, \cdots, M^n \in \mathcal{H}_0^2$ telles que pour $i \neq j$, $M^i \dagger M^j$. Alors, $S(M^1, \cdots, M^n) = \{\sum_{i=1}^n H^i M^i \ ; H^i \in \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i\rangle)\}$.*

Preuve : on note $\mathcal{I}$ l'ensemble de droite. Par construction et par la propriété (iii) des ensembles fermés stables, si $\mathcal{I}$ est fermé, c'est un sous-espace stable. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \oplus_i \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i\rangle) & \longrightarrow & \mathcal{H}_0^2 \\ (H^i) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n H^i . M^i \end{array}$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit d'une isométrie en utilisant que pour $i \neq j,\ M^i \dagger M^j$:

$$\| \sum_{i=1}^{n} H^i M^i \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \| H^i M^i \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} E[\int_0^\infty |H_s^i|^2 d\langle M^i\rangle_s].$$

Donc l'ensemble $\mathcal{I}$ image par une isométrie d'un fermé est fermé donc stable et contient donc $S(M^1, \cdots, M^n)$.

Réciproquement, d'après le théorème 3.12 (iv), tout ensemble fermé F stable contenant les M^i contient les $H^i.M^i$ donc $\mathcal{I}$. □

Définition 3.19 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2$. On dit que $\mathcal{A}$ a la* **propriété de représentation prévisible** *si :*

$$\mathcal{I} = \{X = \sum_{i=1}^{n} H^i M^i,\ M^i \in \mathcal{A}, H^i \in \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i\rangle)\} = \mathcal{H}_0^2.$$

faire le lien ici avec le marché complet tel que défini dans le chapitre 2.

Proposition 3.20 *Soit $\mathcal{A} = (M^1, \cdots, M^n) \subset \mathcal{H}_0^2$ avec $M^i \dagger M^j, i \neq j$. Si tout $N \in \mathcal{H}_0^2$ fortement orthogonal à $\mathcal{A}$ est nul, alors $\mathcal{A}$ a la propriété de représentation prévisible.*

(corollaire 3 page 151, [28])
Preuve : le théorème 3.18 montre que $S(\mathcal{A})$ est l'ensemble $\mathcal{I}$ défini ci-dessus. Soit alors $N \in \mathcal{I}^\dagger = S(\mathcal{A})^\dagger$. A fortiori, N est orthogonal à $\mathcal{A}$, donc $N = 0$ par hypothèse, c'est à dire que $\mathcal{I}^\dagger = \{0\}$; donc, par le lemme 3.17, $\mathcal{I}^\perp = 0$.
Par ailleurs, notons que l'application sur $\mathcal{H}_0^2 \times \mathcal{H}_0^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(M, N) \mapsto E[M_\infty N_\infty]$ est un produit scalaire (preuve en exercice). Si donc F est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}_0^2$, alors $\mathcal{H}_0^2$ se décompose en $F + F^\perp$. Ici, $\mathcal{I}^\perp = \{0\}$, ce qui montre bien que $\mathcal{I} = \mathcal{H}_0^2$.
□

Ces propriétés d'orthogonalité et de représentation sont liées à la probabilité sous-jacente. Il faut donc voir ce qui se passe lorsque l'on change de probabilité.

Définition 3.21 *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{F}_\infty$ absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$, égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$, et telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(Q)$.*

Dans le cadre de ce cours, $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale, mais on n'est pas obligé de faire cette hypothèse dans la fin de ce paragraphe.

Lemme 3.22 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *est convexe.*

Preuve en exercice.

Définition 3.23 *$Q \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dite* **extrémale** *si*

$$Q = aQ_1 + (1-a)Q_2, a \in [0,1], Q_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow a = 0 \text{ ou } 1.$$

Une condition nécessaire de la propriété de représentation prévisible :

Théorème 3.24 *(théorème 37 page 152 [28])*
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. $S_{\mathbb{P}}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ implique que $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Preuve : th. 37 page 152 dans [28]. On suppose que $\mathbb{P}$ n'est pas extrémale et donc s'écrit $aQ_1+(1-a)Q_2$ avec $Q_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. La probabilité $Q_1 \leq \frac{1}{a}\mathbb{P}$ admet donc une densité par rapport à $\mathbb{P}$ majorée par $\frac{1}{a}$. On note Z la $\mathbb{P}$-martingale bornée définie par $Z_t = E_{\mathbb{P}}[\frac{dQ_1}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$: $Z - Z_0 \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. Remarquons que $\mathbb{P}$ et Q_1 coïncident sur $\mathcal{F}_0$ montre que $Z_0 = 1$. Soit $X \in \mathcal{A}$: c'est donc une martingale pour $\mathbb{P}$ et pour Q_1, donc ZX est une martingale pour $\mathbb{P}$ ainsi que $(Z - Z_0)X = (Z - 1)X$ ce qui montre l'orthogonalité de $Z - Z_0$ à tout X donc à $\mathcal{A}$ donc à $S(\mathcal{A})$. Cet ensemble étant $\mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$, $Z-1 = 0$ et $P = Q_1$ est extrémale.$\square$

Un début de réciproque :

Théorème 3.25 *(théorème 38, page 152 [28])*
Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ et $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Si $M \in \mathcal{M}_b^c(\mathbb{P}) \cap \mathcal{A}^\dagger$ alors $\forall t, M_t = M_0$.

Preuve : On peut supposer $M_0 = 0$ quitte à remplacer M par $M - M_0$.
Soit c un majorant de la martingale bornée M et supposons qu'elle n'est pas identiquement nulle. On peut donc définir

$$dQ = (1 - \frac{M_\infty}{2c})d\mathbb{P} \text{ et } dR = (1 + \frac{M_\infty}{2c})d\mathbb{P}.$$

Alors $\mathbb{P} = \frac{1}{2}(Q + R)$, Q et R sont absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$ et sont égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$ puisque $M_0 = 0$. Soit $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$: d'après la proposition 3.6 (et parce que M est bornée donc uniformément intégrable), $X \in \mathcal{H}_0^2(Q)$ si et seulement si $(1 - \frac{M_t}{2c})X_t \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. Or $X \dagger M$ donc on a bien cette propriété et par conséquent $X \in \mathcal{H}_0^2(Q)$. Donc Q, et de même $R, \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Ainsi y aurait-il une décomposition de $\mathbb{P}$ ce qui contredit l'hypothèse : M est nécessairement nulle.

Théorème 3.26 *(théorème 39 pages 152-153 [28])*
Soit $\mathcal{A} = (M^1, \cdots, M^n) \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ avec $M^i \dagger M^j, i \neq j$. $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ implique que $\mathcal{A}$ a la propriété de représentation prévisible.

Preuve : par la proposition 3.20 il suffit de montrer que si $N \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P}) \cap \mathcal{A}^\dagger$, alors N est nulle. Soit une telle martingale N et une suite de temps d'arrêt $T_n = \inf\{t \leq 0 \,;\, |N_t| \geq n\}$. La martingale N^{T_n} est bornée, dans $\mathcal{A}^\dagger$; $\mathbb{P}$ est extrémale. Le théorème 3.25 montre que N^{T_n} est nulle pour tout n, et donc $N = 0$ et on applique le critère de la proposition 3.20. □

On a maintenant l'application suivante.

Théorème 3.27 *(théorème 42 page 155 [28])*
Soit B un mouvement brownien de dimension n sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_{loc}^{c,2}$, il existe un vecteur $(H^i, i = 1, \cdots, n)$ progressivement mesurable, unique presque sûrement sur $[0,T] \times \Omega$ tel que :

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{n} (H^i.B^i)_t, t \in [0,T].$$

Preuve en exercice : c'est une application du théorème précédent aux composantes du mouvement brownien dont on montre que $\mathbb{P}$ est l'unique (donc extrémal) élément de $\mathcal{M}(B)$. Pour ceci, on suppose qu'il existe $Z \in L^1(\mathbb{P})$ telle que $Q = Z.\mathbb{P} \in \mathcal{M}(B)$, c'est à dire que B est à la fois une $\mathbb{P}$ et une Q-martingale ; on en déduit que $Z = 1$.

Donc on sait représenter les martingales de $\mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. Pour $M \in \mathcal{M}_{loc}^{c,2}$, on se ramène au cas précédent en localisant.

Corollaire 3.28 *Sous les mêmes hypothèses, soit $Z \in L^1(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, alors il existe un vecteur $(H^i, i = 1, \cdots, n)$ progressivement mesurable tel que :*

$$Z = E[Z] + \sum_{i=1}^{n} (H^i.B^i)_\infty.$$

Preuve : on applique le théorème à la martingale $M_t = E[Z/\mathcal{F}_t]$. □

3.4 Problème de martingales

(d'après Jacod [17], pages 337-340.)
Rappelons le problème qui a motivé ce chapitre : on dispose d'un ensemble de prix dont l'évolution est modélisée par une famille de processus continus adaptés sur un ensemble de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}^+), \mathbb{P})$, en fait des semi-martingales. Existe-t-il une probabilité Q telle que toute cette famille soit contenue dans $\mathcal{M}_{loc}^c(Q)$? C'est ce que

l'on appelle un problème de martingale. On suppose ici (mais c'est de toute façon en général le cas !) que $\mathcal{A} = \mathcal{F}_\infty$, et que la filtration est la filtration complétée régularisée à droite de la filtration naturelle engendrée par le processus brownien réunie à une tribu $\mathcal{G}$ indépendante du mouvement brownien.

On rappelle la définition de l'orthogonalité forte pour martingales locales :

Définition 3.29 *On dit que M et N martingales locales sont orthogonales fortes, noté $M \dagger N$, si MN est une martingale locale nulle en* 0.

Remarquons que ceci équivaut au fait que le le crochet $\langle M, N\rangle$ est un processus constant.

Définition 3.30 *Soit $\mathcal{X}$ une famille de processus continus adaptés sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{F}_t)$. On appelle solution du* **problème de martingale associé à** $\mathcal{X}$ *toute probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$. On note $M(\mathcal{X})$ cet ensemble de probabilités et $S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X})$ est le plus petit espace stable fermé de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ contenant $\{H.M, H \in \mathcal{L}^*(M), M \in \mathcal{X}\}$.*

Rappel : on note $\mathcal{Q}_p = \{Q \sim \mathbb{P} \ : \ \tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q)\}$. La différence avec $M(p)$ est que dans $\mathcal{Q}_p$ toutes les probabilités sont équivalentes à $\mathbb{P}$. On a $\mathcal{Q}_p \subset M(p)$.

Proposition 3.31 *$M(\mathcal{X})$ est convexe.*

Preuve en exercice (cf. Jacod [17], paragraphe 11.1.c, pages 343 et sq) .

On note $\mathbf{M_e}(\mathcal{X})$ les éléments extrémaux de cet ensemble.

Théorème 3.32 *(cf th. 11.2 de [17] page 338.) Soit $\mathbb{P} \in M(\mathcal{X})$; on a les équivalences :*

(i) $\mathbb{P} \in M_e(\mathcal{X})$
(ii) $\mathcal{H}^1(\mathbb{P}) = S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X} \cup \{1\})$ *et* $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, $\mathbb{P}$ *presque sûrement*
(iii) $\forall N \in \mathcal{M}^b(\mathbb{P}) \cap \mathcal{X}^\dagger,\ N = 0$ *et* $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, $\mathbb{P}$ *presque sûrement.*
(iii') $\forall N \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P}) \cap \mathcal{X}^\dagger,\ N = 0$ *et* $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$, $\mathbb{P}$ *presque sûrement.*

Corollaire 3.33 *De plus, les trois assertions du théorème sont équivalentes à*

$$(iv)\{Q \in M(\mathcal{X}),\ Q \sim \mathbb{P}\} = \{\mathbb{P}\},$$

$$(v)\{Q \in M(\mathcal{X}),\ Q << \mathbb{P}\} = \{\mathbb{P}\},$$

Preuve :
(ii)$\Rightarrow$(iii) Soit M une martingale bornée, (donc dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ par Burkholder) et nulle en 0, orthogonale fortement à tout élément de $\mathcal{X}$ soit $\langle M, X\rangle = 0,\ \forall X \in \mathcal{X}$.

Puisque $\mathcal{X} \cup \{1\}$ engendre par hypothèse l'ensemble $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, tout $N \in \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ est limite dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ de processus N_k de la forme $N_0 + \sum_i H_i.X_i$. Donc, si $T_n = \inf\{t : \langle M \rangle_t \geq n\}$,

$$\| \langle M, N - N_k \rangle_{T_n} \|_1 \leq \sqrt{n} \| N - N_k \|_{\mathcal{H}^1}$$

qui converge vers 0 et comme pour tout $k, \langle M, N_k \rangle_t = 0$ par hypothèse sur M, il vient pour tout n, $\langle M, N \rangle_{T_n} = 0$ et M est ainsi orthogonale à tout élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Comme M est bornée, elle est aussi élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, donc orthogonale à elle-même, donc nulle.

(iii)⇒(ii) Soit d'abord $M \in \mathcal{H}^2 \cap S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X} \cup \{1\})^\dagger$. En particulier, M est orthogonale aux constantes, donc nulle en 0. Ainsi $M \in \mathcal{H}_0^2 \cap \mathcal{X}^\dagger$. Soit la suite de temps d'arrêt $T_n = \inf\{t : |M_t| \geq n\}$: M^{T_n} est une martingale bornée orthogonale à $\mathcal{X}$ donc nulle par (iii).

Ainsi $\mathcal{H}^2 \cap S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X} \cup \{1\})^\dagger = \{0\}$. Or dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2$, on a vu que $S(\mathcal{X} \cup \{1\})^\dagger = S(\mathcal{X} \cup \{1\})^\perp$: donc $\mathcal{H}^2 \subset S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X} \cup \{1\})$.

Puisque $\mathcal{H}^2$ est dense dans $\mathcal{H}^1$, la double inclusion

$$\mathcal{H}^2 \subset S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X} \cup \{1\}) \subset \mathcal{H}^1$$

montre (ii).

(cf [17] page 117, (4.11) et (4.12))

(iii')⇒(iii) de façon évidente. On obtient la réciproque par localisation. (exercice)

(i)⇒(iii) On a $\mathbb{P}$ extrémale dans $M(\mathcal{X})$. Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable bornée et N' une martingale bornée, nulle en zéro, orthogonale à tout $\mathcal{X}$. On pose $N = Y - E[Y] + N'$. Remarquons que pour tout $t \geq 0$, $E_{\mathbb{P}}(N_t) = 0$. Posons alors

$$a = \|N\|_\infty \; ; \; Z_1 = 1 + \frac{N}{2a} \; ; \; Z_2 = 1 - \frac{N}{2a}.$$

Il est clair que $E(Z_i) = 1, Z_i \geq \frac{1}{2} > 0$, et donc les mesures $Q_i = Z_i\mathbb{P}$ sont des probabilités équivalentes à $\mathbb{P}$ dont la demi-somme est $\mathbb{P}$.

Du fait que Y est $\mathcal{F}_0$-mesurable et N' est orthogonale à X $\forall X \in \mathcal{X}$, N est aussi orthogonale à X $\forall X \in \mathcal{X}$, et NX est une $\mathbb{P}$- martingale. Donc $Z_iX = X \pm \frac{NX}{2a}$ est également une $\mathbb{P}$- martingale. En utilisant la proposition 3.6, $X \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q_i)$ et $Q_i \in M(\mathcal{X})$ ce qui contredit l'extrémalité de $\mathbb{P}$ sauf si $N_t = 0, \forall t \geq 0$ c'est à dire à la fois $Y = E[Y]$ et $N' = 0$ ce qui montre (iii).

(iii)⇒(i) Supposons que $\mathbb{P}$ admet la décomposition dans $M(\mathcal{X})$: $\mathbb{P} = aQ_1 + (1-a)Q_2$. Donc Q_1 est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ et la densité Z existe, majorée par $\frac{1}{a}$, d'espérance 1 et puisque $\mathcal{F}_0 = (0, \Omega)$, $Z_0 = 1$ presque sûrement : $Z - 1$ est une martingale bornée nulle en zéro.

Par ailleurs, pour tout $X \in \mathcal{X}, X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \cap \mathcal{M}^c_{loc}(Q_1)$ puisque $\mathbb{P}$ et $Q_1 \in M(\mathcal{X})$. Mais toujours la proposition 3.6 montre que $ZX \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ et $(Z-1)X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ c'est à dire que $Z-1$ est orthogonale à tout X et l'hypothèse (iii) montre alors que $Z-1=0$, ce qui veut dire que $Q_1 = \mathbb{P}$ qui est donc extrémale.

(v) $\Rightarrow$(iv) est évident.

(iv)$\Rightarrow$(iii) se montre comme (i)$\Rightarrow$(iii), preuve qui ne nécessite pas que $\mathcal{X}$ ait une propriété particulière.

(ii)$\Rightarrow$(v) Supposons qu'il existe $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$ dans $M(\mathcal{X})$ qui soit absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Soit Z la martingale densité de $\mathbb{P}'$ par rapport à $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}' = Z\mathbb{P}$ avec Z $\mathbb{P}$-martingale d'espérance 1, égale à 1 en zéro puisque $\mathcal{F}_0$ est triviale. Tout X de $\mathcal{X}$ est dans $\mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \cap \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}')$ mais la proposition 3.6 dit que $ZX \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$, donc $(Z-1)X \in \mathcal{M}^c_{loc,0}(\mathbb{P})$, c'est à dire que $Z-1$ est orthogonale à X donc à $S(\mathcal{X} \cup \{1\}) = \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Si par localisation on borne cette martingale, la martingale arrêtée est orthogonale à elle-même, donc nulle.

Remarque 3.34 *Si $\mathcal{X}$ est un ensemble fini X de processus continus, et que $S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X} \cup \{1\}) = \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, alors on a exactement*

$$S_{\mathbb{P}}(\mathcal{X} \cup \{1\}) = \{M_0 + H.X, H \in L^1(\Omega; L^2(Q_X)), M_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)\}$$

où la norme de Hilbert-Schmidt est définie par $\|H\|^2_{Q_X} = \int_0^\infty \sum_{i,j} H^i H^j d\langle X^i, X^j \rangle$. En effet, l'application de $L^1(\Omega; L^2(Q_X))\}$ dans $\mathcal{H}^1_0$, $F : H \mapsto H.X$ est une isométrie :

$$\{M_0 + H.X\} = F(L^1(\mathcal{F}_0) \times L^1(L^2(Q_X))$$

3.5 Application

Pour l'étude de l'ensemble des probabilités neutres au risque d'un marché, on va maintenant appliquer les résultats précédents - concernant le problème de martingales- à l'ensemble de processus $\mathcal{X} = \{\tilde{p}^1, \cdots, \tilde{p}^N\}$. C'est un cas où $\mathcal{X}$ est fini et, en particulier, on va pouvoir utiliser le corollaire 3.33.

Proposition 3.35 *(cf [7], corollaire 12.4) Si pour Q mesure de prix d'équilibre, l'ensemble $\mathcal{M}_{UI}(Q)$ est l'ensemble stable $S_Q(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$, et si $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale, alors Q est l'unique mesure de prix d'équilibre.*

Preuve : en exercice (c'est (ii) entraine (iv)).

On a par définition l'inclusion $S_Q(\{\tilde{p}\} \cup 1) \subset \mathcal{H}^1(\mathbb{P}) \subset \mathcal{M}_{UI}(Q)$. Donc l'hypothèse implique l'égalité et le résultat est une conséquence des équivalences du corollaire 3.33 $(ii \Rightarrow iv)$. □

Proposition 3.36 *Si $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$ alors Q est extrémale dans $M(\{\tilde{p}\})$.*

Preuve : ce n'est pas tout à fait l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$ car $\mathcal{Q}_p$ est contenu dans l'ensemble $M(\{\tilde{p}\})$ et non forcément égal. Mais la démonstration est analogue.

Supposons qu'il existe Q_1 et Q_2 dans $M(\{\tilde{p}\})$, (alors $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q_1) \cap \mathcal{M}_{loc}(Q_2)$) et $\lambda \in [0,1]$ tel que $Q = \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2$; alors $Q_1 \leq \frac{1}{\lambda}Q$. Par ailleurs $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$. Comme $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q_1)$ avec $Z = \frac{dQ_1}{dQ}$, par la proposition 3.6 on obtient que $Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$. Soit $s \leq t$ et $A_s \in \mathcal{F}_s$, et une suite de temps d'arrêt (T_n) telle que $(\tilde{p}^{T_n})$ soit bornée (possible par continuité de $\tilde{p}$). De la suite d'égalités

$$E_{Q_1}[A_s \tilde{p}_t^{T_n}] = E_Q[A_s Z_t \tilde{p}_t^{T_n}] = E_Q[A_s Z_s \tilde{p}_s^{T_n}] = E_{Q_1}[A_s \tilde{p}_s]$$

on tire que $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q_1)$. L'unicité de Q dans $\mathcal{Q}_p$ montre que $Q_1 = Q$ et Q est bien extrémale. □

Corollaire 3.37 *Si $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$ alors $\mathcal{M}_{loc}(Q) \subset \{a + H.\tilde{p},\ a \in \mathbb{R},\ H \in L^2(\mathbb{R}^+, Q_X)\}$.*

Preuve : la proposition montre que Q est extrémale dans $M(\{\tilde{p}\})$. Donc la propriété (i) du théorème 3.32 est vraie et implique (ii), c'est à dire $S_Q(\{\tilde{p}\} \cup \{1\}) = \mathcal{H}^1(Q)$ et $\mathcal{F}_0$ est triviale. Soit alors $M \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$. Il existe une suite croissante de temps d'arrêt $T_n \to T$ telle que pour tout n, $M^{T_n} \in \mathcal{H}^1(Q) = S_Q(\{\tilde{p}\} \cup \{1\})$, donc pour tout n il existe $u^n \in \mathcal{L}^*(\tilde{p})$ tel que :

$$M_t^{T_n} = M_0 + \int_0^t (u_s^n, d\tilde{p}_s).$$

Par ailleurs, $M_{T_n \wedge t}$ converge presque sûrement vers M_t. Mais puisque $M_{T_n \wedge t} = E_Q[M_T / \mathcal{F}_{T_n \wedge t}]$,

$$|M_{T_n \wedge t}| \leq E_Q[|M_T| / \mathcal{F}_{T_n \wedge t}],$$

et $M_{T_n \wedge t}$ converge vers M_t dans L^1. Le corollaire 4.23 de Jacod page 124 :

"si $N \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P})$ et $H_n \in \mathcal{P}^*(N)$ est une suite telle que $H_n.N$ converge pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers $X \in L^1(\mathbb{P})$, alors il existe $H \in \mathcal{P}^*(N)$ telle que $H.M \in \mathcal{M}$ et $H.M_\infty = X$."
dit qu'alors il existe u stochastiquement intégrable par rapport à $\tilde{p}$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t (u_s, d\tilde{p}_s).$$

□

On a finalement, pour résumer, le résultat suivant :

Théorème 3.38 *Soit Q une mesure de prix d'équilibre. Lorsque $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale (tribu des $Q-$négligeables), on a les équivalences :*

(i) Le marché est complet relativement au système de prix $\{p\}$.

(ii) $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$

(iii) $\mathcal{M}_{UI}(Q) \subset \{a + H.\tilde{p},\ H \in L^2(Q_{\tilde{p}}), a \in \mathbb{R}\}$.

Preuve : (ii) implique (iii) est le dernier corollaire.

L'équivalence de (i) et (iii) est le théorème 2.19 et la définition d'un marché complet.

(iii) implique (ii) : Si $\mathcal{M}_{UI}(Q) \subset \{a + H.\tilde{p},\ H \in L^2(Q_{\tilde{p}}), a \in \mathbb{R}\}$, alors on a a fortiori

$$\mathcal{H}^1(Q) = \{a + H.\tilde{p}, \quad H \in L^2(Q_{\tilde{p}}), a \in \mathbb{R}\} \cap \mathcal{H}^1(Q),$$

c'est à dire la propriété (ii) du théorème 3.32, donc (iv) du corollaire 3.33 est vraie, soit $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$. □

Exercice : reprendre l'exercice 3 de la feuille 1 pour trouver des conditions sur les prix pour que le marché soit complet.

3.5.1 Exemple

On reprend le marché vu en fin de chapitre 2 ; on a une deuxième manière de montrer qu'il est complet. D'après le théorème 3.38 il suffit de vérifier que $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$ Soit donc $Q' \in \mathcal{Q}_p$, $Q' = Z.\mathbb{P}$ avec $Z \in \mathcal{M}_{UI}(\mathbb{P})$. D'après le théorème de représentation des martingales, il existe un processus z tel que $dZ_t = z_t dW_t$. Or d'après la proposition 3.6 :

$$\tilde{p} \in \mathcal{M}(Q') \Longleftrightarrow Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}).$$

On calcule par la formule de Itô :

$$d(Z.\tilde{p})_t = Z_t.\tilde{p}_t[\sigma_t dW_t + (b - r)dt] + \tilde{p}_t z_t dW_t + \tilde{p}_t z_t \sigma_t dt.$$

On tire du fait que $Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ l'égalité $Z_t \tilde{p}_t (b-r) + \tilde{p}_t z_t \sigma_t = 0\ dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. Or $\tilde{p} > 0$. On peut simplifier cette égalité et en tirer

$$z_t = Z_t u_t \text{ avec } u_t = -\sigma_t^{-1}(b - r)_t$$

c'est à dire que Z est identique à L et $Q' = Q$ et le marché est complet. □

Remarque 3.39 *Si $d > N$ et σ surjective, on n'a pas unicité du vecteur u qui permette d'écrire $\sigma dW + (b - r)dt = \sigma d\tilde{W}$. Dans ce cas, le marché n'est pas complet et l'ensemble $\mathcal{Q}_p$ est en bijection avec l'ensemble $\sigma^{-1}(r - b)$.*

4 Equation de la chaleur, formule de Feynman-Kac

Il s'agit d'obtenir une façon de représenter la solution d'équations aux dérivées partielles sous forme stochastique. Le type basique de ces équations aux dérivées partielles est l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u; u(0,x) = f(x); t \in \mathbb{R}^+_*,\ x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Plus généralement, on cherche à résoudre

$$\partial_t u + ku = \frac{1}{2}\Delta u; u(0,x) = f(x); t \in \mathbb{R}^+_*, x \in \mathbb{R}^d,$$

où Δ est le laplacien.
Une solution est a priori une fonction de classe $C^{1,2}$ sur une partie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

4.1 Equation de la chaleur

([18] 4.3, p 254)
Si $u(t,x)$ est la température au temps t et à la position x d'une barre, elle vérifie (5) avec $f(x)$ la température au temps 0 et à la position x. On peut vérifier que la densité de transition par rapport à la mesure de Lebesgue λ d'un processus de Markov gaussien, $p(t;x,y)$, vérifie cette équation :

$$p(t;x,y) = \frac{d\mathbb{P}_x(W_t)}{\lambda(dy)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

(à vérifier en exercice : feuille 4, exo 1)

$$\partial_t p = (\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{(x-y)^2}{2t^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}})e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}},$$

$$\partial_x p = -\frac{x-y}{t}p; \partial^2_{xx}p = -\frac{1}{t}p + (\frac{x-y}{t})^2 p.$$

Soit

$$\partial_t p = \frac{1}{2}[(\frac{x-y}{t})^2 - \frac{1}{t}]p = \frac{1}{2}\Delta p.$$

Si maintenant f est une fonction borélienne réelle telle qu'il existe $a > 0$: $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}|f(x)|dx < \infty$, la fonction u définie sur $]0, 1/2a[\times\mathbb{R}$ par $u(t,x) = E_x[f(W_t)] = \int_{\mathbb{R}} f(y)p(t;x,y)dy$ est de classe C^∞ et vérifie (5). Voir le corrigé du problème 3.1 dans [18] page 277. On prend évidemment le couple (t,x) dans un compact $([t_0,t_1]\subset]0,1/2a[\times[0,M])$, et si $|f(x)|\leq e^{ax^2}$, on s'en sort en utilisant la majoration

$$-\frac{|x-y|^2}{2t}\leq-\frac{1}{2t_1}(|x|-|y|)^2\leq\frac{|x||y|}{t_1}-\frac{y^2}{2t_1}.$$

4.2 Cas multidimensionnel, problème de Cauchy

[18] 4.4 A, pages 267 et sq.
On généralise le problème précédent avec

$$\partial_t u+ku=\frac{1}{2}\Delta u;u(0,x)=f(x);t\in\mathbb{R}^+,x\in\mathbb{R}^d. \tag{6}$$

On peut faire le changement de fonction (transformée de Laplace)

$$z_\alpha(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}u(t,x)dt.$$

Si $\lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}u(t,x)=0$, formellement :

$$\frac{1}{2}\Delta z_\alpha=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}u"(t,x)dt=\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\partial_t u+ku)dt=$$

$$[e^{-\alpha t}u]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\alpha+k)udt=-f(x)+\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\alpha+k)udt.$$

D'où l'on tire la formule de Kac :

$$(\alpha+k)z_\alpha=\int_0^\infty e^{-\alpha t}(\alpha+k(x))u(t,x)dt=f(x)+\frac{1}{2}\Delta z_\alpha.$$

Proposition 4.1 *Si u est solution de (6) et si $\lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}u(t,x)=0$, et $|\partial_x^i u(t,x)|\leq Ke^{a\|x\|^2},i=1,2$, alors z_α est solution de*

$$\frac{1}{2}\Delta z_\alpha=(\alpha+k)z_\alpha-f$$

qui est une équation elliptique à une seule variable.

Preuve en exercice. Formellement, z_α a la même différentiabilité que $x\mapsto u(t,x)$ et

$$\partial_{xx}^2 z_\alpha(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\partial_{xx}^2 u(t,x)dt.$$

Une condition suffisante est de trouver une majoration uniforme des intégrands $e^{-\alpha t}\partial_x u(x,t)$ et $e^{-\alpha t}\partial_{xx}^2 u(x,t)$ par des fonctions intégrables.

Théorème 4.2 *de Feynman (1948)-Kac (1949) : Soit* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+), g \in \mathcal{C}([0,T[\times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$*. Soit alors le problème de Cauchy :*

$$(7) \qquad -\partial_t v + kv = \frac{1}{2}\Delta v + g; ; v(T,x) = f(x); t \in [0,T[, x \in \mathbb{R}^d.$$

Si $v \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, *et si il existe* $K > 0, a \in]0, \frac{1}{2Td}[$ *tels que*

$$(*) \qquad max_{0 \leq t \leq T}|v(t,x)| + max_{0 \leq t \leq T}|g(t,x)| \leq Ke^{a\|x\|^2}, \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

alors

$$v(t,x) = E_x[f(W_{T-t})\exp(-\int_0^{T-t} k(W_s)ds) + \int_0^{T-t} g(t+s, W_s))\exp(-\int_0^s k(W_u)du)ds]$$

et c'est l'unique solution de (7) ayant cette régularité.

Remarque 4.3 *On pourrait penser que cette proposition de fonction v est toujours solution ; le problème est qu'elle n'est pas forcément de classe* $C^{1,2}$ *ni ne vérifie la condition (*).*

Preuve : Sachant que v est de classe $C^{1,2}$ on applique la formule de Itô entre 0 et s (à t fixé) :

$$\begin{aligned} v(t+s, W_s)\exp(-\int_0^s k(W_u)du) &= v(t,x) + \int_0^s \partial_t v(t+u, W_u)\exp(-\int_0^u k(W_v)dv)du \\ &- \int_0^s v(t+u, W_u)\exp(-\int_0^u k(W_v)dv)k(W_u)du \\ &+ \int_0^s \partial_x v(t+u, W_u)\exp(-\int_0^u k(W_v)dv)dW_u \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^s \Delta v(t+u, W_u)\exp(-\int_0^u k(W_v)dv)du \end{aligned}$$

En utilisant (7), on simplifie pour obtenir :

$$v(t,x) = v(t+s, W_s)\exp(-\int_0^s k(W_u)du) + \int_0^s g(t+u, W_u)\exp(-\int_0^u k(W_v)dv)du$$

à une martingale locale près. On prend donc une suite de temps d'arrêt localisante $T_n = \inf\{t, \|W_t\| \geq n\sqrt{d}\}$ croissante et on prend l'espérance sous $\mathbb{P}_x$ (c'est à dire que $W_0 = x$, $\mathbb{P}_x$ presque sûrement), de l'égalité ci-dessus au temps $S_n = \inf(T_n, T-t)$:

$$v(t,x) = E_x[v(t+T_n, W_{T_n})\exp(-\int_0^{T_n} k(W_u)du)1_{T_n \leq T-t}] +$$

$$+E_x[v(T, W_{T-t})\exp(-\int_0^{T-t} k(W_u)du)1_{T_n > T-t}] +$$

$$+E_x[\int_0^{S_n} g(t+u, W_u)\exp(-\int_0^u k(W_v)dv)du].$$

Le troisième terme converge vers la quantité attendue si g est positive (convergence monotone) ou vérifie la condition du théorème (convergence majorée);
Le deuxième terme tend vers la quantité attendue (convergence majorée).
On montre que le premier terme tend vers 0 : en effet, il est majoré par

$$Ke^{adn^2}\mathbb{P}_x\{T_n \leq T-t\}.$$

Or l'événement

$$\{T_n \leq T-t\} = \{\max_{s\in[0,T-t]} \|W_s\|^2 < dn^2\} \subset \cup_{i=1}^d \{\max_{s\in[0,T-t]} |W_s^i|^2 < n^2\}$$

ce qui se voit en passant aux complémentaires... Puis il est connu (voir la loi du maximum du brownien par exemple pages 95 et sq dans [18]) que

$$\mathbb{P}\{\max_{s\in[0,T-t]} |W_s^i| < n\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{n}{\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \leq 2e^{-\frac{n^2}{2(T-t)}}$$

ce qui montre la convergence vers 0.

□

La condition de majoration par une exponentielle est vérifiée dès que les fonctions ont une croissance au plus polynomiale.

Corollaire 4.4 *Sous les mêmes hypothèses, si l'équation parabolique*

$$\partial_t u + ku = \frac{1}{2}\Delta u + g \ ; \ u(0,x) = f(x), \tag{8}$$

admet une solution de classe $C^{1,2}$, alors cette solution est unique et de la forme :

$$u(t,x) = E_x[f(W_t)\exp(-\int_0^t k(W_s)ds) + \int_0^t g(T-t+s, W_s)\exp(-\int_0^s k(W_u)du)ds].$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Feynman-Kac ; on pose $v(t,x) = u(T-t,x)$, alors $-\partial_t v + kv = \frac{1}{2}\Delta v + g, v(T,x) = f(x)$ devient (8) et on applique le théorème 4.2.

L'interprétation est, lorsque $g = 0$, que la fonction u donne la température au temps t et au point x dans un milieu qui ne conduit pas parfaitement la chaleur mais la dissipe à la vitesse k.

4.3 Cas réel

(cf [18] 4.4 B pages 271 et sq.)
On peut résoudre avec des hypothèses correctes l'équation (6) en explicitant z_α, la transformée de laplace de la solution.

Définition 4.5 *On dit que f est* **continue par morceaux** *au sens où elle admet une limite à droite et à gauche en tout point et un nombre fini de discontinuités dans tout intervalle compact.*

Théorème 4.6 *(Kac, 1951)*
Si f et k sont continues par morceaux, $k \geq 0$, et s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+y)| e^{-|y|\sqrt{2\alpha}} dy < \infty,$$

alors

$$z_\alpha(x) = E_x[\int_0^\infty f(W_t) \exp^{-\alpha t - \int_0^t k(W_s)ds} dt]$$

est C^2 par morceaux et vérifie

$$(\alpha + k) z_\alpha = \frac{1}{2} z''_\alpha + f.$$

Remarque 4.7 *On peut remplacer l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}} |f(x+y)| e^{-|y|\sqrt{2\alpha}} dy < \infty$ par $E_x[\int_0^\infty |f(W_t)| e^{-\alpha t} dt] < \infty$ car par une transformée de Laplace*

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\alpha t} e^{-x^2/2t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-|x|\sqrt{2\alpha}}$$

et en utilisant le théorème de Tonelli

$$E_x[\int_0^\infty e^{-\alpha t} |f(W_t)| dt] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\alpha t} |f(x+y)| \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-y^2/2t} dt dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x+y)| \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-|y|\sqrt{2\alpha}} dy.$$

Preuve : on utilise l'opérateur "résolvante" G_α pour g continue par morceaux et vérifiant $\int |g(x+y)| e^{-|y|\sqrt{2\alpha}} dy < \infty$ pour tout x :

$$(G_\alpha g)(x) = E_x[\int_0^\infty g(W_t) e^{-\alpha t} dt] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-y|\sqrt{2\alpha}} g(y) dy$$

qui vérifie
(9)
$$(G"_\alpha g)(x) = -2g(x) + 2\alpha (G_\alpha g)(x).$$

En effet,

$$\begin{aligned} (G_\alpha g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^x e^{-(x-y)\sqrt{2\alpha}} g(y) dy + \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)\sqrt{2\alpha}} g(y) dy, \\ (G_\alpha g)'(x) &= -\int_{-\infty}^x e^{-(x-y)\sqrt{2\alpha}} g(y) dy + \int_x^{+\infty} e^{-(y-x)\sqrt{2\alpha}} g(y) dy, \\ (G_\alpha g)''(x) &= -2g(x) + 2\alpha (G_\alpha g)(x). \end{aligned}$$

et le lemme suivant :

Lemme 4.8 *([18] pages 272-273) Si f et kz vérifient $\int |g(x+y)|e^{-|y|\sqrt{2\alpha}}dy < \infty$, alors*

$$G_\alpha(|kz|)(x) < \infty \ ; \ G_\alpha(kz) = G_\alpha f - z.$$

Preuve : la première assertion est conséquence de l'hypothèse.
On développe le processus à variations finies $\exp(\int_0^t k(W_u)du) - 1$ entre 0 et t, puis on le multiplie par $\exp(-\int_0^t k(W_u)du)$; il vient :

$$0 \leq \int_0^t k(W_s)\exp(-\int_s^t k(W_u)du)ds = 1 - \exp(-\int_0^t k(W_u)du) \leq 1$$

Par ailleurs,

$$G_\alpha f(x) - z(x) = E_x[\int_0^\infty f(W_t)e^{-\alpha t}(1 - \exp(-\int_0^t k(W_u)du)dt] =$$

$$= E_x[\int_0^\infty f(W_t)e^{-\alpha t}\int_0^t k(W_s)\exp(-\int_s^t k(W_u)du)dsdt].$$

On utilise successivement le théorème de Fubini et la propriété de Markov pour obtenir :

$$\begin{aligned}
G_\alpha f(x) - z(x) &= E_x[\int\int_{0\leq s\leq t} k(W_s)(\exp[-\alpha t - \int_s^t k(W_u)du]f(W_t)dt)ds] = \\
&= E_x[\int_0^\infty k(W_s)(\int_s^\infty f(W_t)e^{-\alpha t}\exp[-\int_s^t k(W_v)dv]dt)ds] = \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha s}E_x[k(W_s)(\int_0^\infty f(W_{s+v})e^{-\alpha v}\exp[-\int_0^v k(W_{s+u})du]dv)ds] = \\
&= E_x[\int_0^\infty e^{-\alpha s}k(W_s)E_x[\int_0^\infty f(W_{s+v})e^{-\alpha v}\exp[-\int_0^v k(W_{s+u})du]dv/\mathcal{F}_s]ds] = \\
&= E_x[\int_0^\infty e^{-\alpha s}k(W_s)z(W_s)ds = G_\alpha(kz)(x).
\end{aligned}$$

□

Preuve du théorème 4.6 (suite) : on applique la relation (9) à la fonction f :

$$(G_\alpha f)(x) = E_x[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(W_t)dt], (G"_\alpha f)(x) = -2f(x) + 2\alpha(G_\alpha f)(x).$$

Puis on l'applique à la fonction kz tout en utilisant le lemme qui donne que $G_\alpha(kz) = G_\alpha f - z$:

$$(G_\alpha kz)"(x) = (G_\alpha f)"(x) - z"(x) = -2kz(x) + 2\alpha(G_\alpha f - z)(x).$$

La différence de ces deux relations donne bien

$$z" = -2f + 2kz + 2\alpha z.$$

Donc, z, c'est à dire z_α de la proposition 4.1, est de classe C^2 par morceaux puisque f et k sont continues par morceaux et vérifie l'équation différentielle de la proposition 4.1.

En conclusion, l'équation différentielle dont est solution z admet une solution unique, à savoir pour tout x, la transformée de Laplace de $u(.,x)$ qui ainsi est de classe C^2 par morceaux. $\square$

Par inversion de la transformée de Laplace, il vient à x fixé :

$$u(t,x) = \lim_n \frac{(-1)^{n-1} n^n}{(n-1)! t^n} \partial^{n-1}_{\alpha^{n-1}} z(n/t, x), \tag{10}$$

ce qui permet de contrôler la régularité de u. Par ailleurs, avec $|f(x)| \leq e^{-ax^2}$ et $a < 1/2T$, $u(.,x)$ est continue sur $[0,T[$.
Preuve de la relation (10) : On considère que la suite de droite est $E[u(\overline{Y_n}, x)$ avec Y_i une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $(1/t)$. Puis on applique la loi des grands nombres.

5 Equations différentielles stochastiques ; lien avec les EDP

Le but de ce chapitre est d'étudier les EDS guidées par un mouvement brownien $d-$ dimensionnel W de la forme

$$\begin{array}{lrcl} (11) & dX_t & = & b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, t \in [0, T], \\ (12) & X_0 & = & \eta, \text{variable aléatoire indépendante de } W, \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Il est bien entendu que pour tout (t, x) $b(t, x)$ est un vecteur et $\sigma(t, x)$ une matrice.

5.1 Définition d'une solution

([18] 5.2, p 284-290)
On se place toujours sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini W, mouvement brownien de dimension d, avec $\mathcal{F}$ la filtration complète et continue à droite engendrée par W et une tribu initiale indépendante de W.

Définition 5.1 *Un processus adapté sur l'espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est appelé* **solution forte** *de l'EDS (11) si*

. $\mathbb{P}\{X_0 = \eta\} = 1$,
. $\int_0^T [\|b(s, X_s)\| + \|\sigma\|^2(s, X_s)]ds < +\infty$,
. $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \sigma(s, X_s)dW_s$, $\mathbb{P}$ *presque sûrement.*

Dans cette définition, l'unicité est trajectorielle : en effet, si X et Y sont deux solutions fortes de (11) telles que $X_0 = Y_0$, et

$$\mathbb{P}\{\omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), \ \forall t\} = 1,$$

alors il y a unicité forte.
Exemple : soit en dimension 1, $(n = d = 1)$

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t$$

avec b borélienne, lipschitzienne en x uniformément en temps, ou décroissante en sa deuxième composante, alors on a une solution forte. En effet, si X^1 et X^2 sont deux solutions, elles vérifient :

$$X_t^1 - X_t^2 = \int_0^t (b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2))ds$$

qui se majore avec la propriété de Lipschitz de b :

$$|X_t^1 - X_t^2| \leq \int_0^t K|X_s^1 - X_s^2|ds$$

et on peut conclure avec le lemme de Gronwall (ci-dessous en exercice).

Avec l'autre hypothèse, comme b est décroissante, $\forall x, y, [b(t,x) - b(t,y)](x-y) \leq 0$, alors si l'on calcule le carré :

$$(X_t^1 - X_t^2)^2 = 2\int_0^t (X_s^1 - X_s^2)(b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2))ds \leq 0$$

d'où l'égalité des deux solutions.

Lemme 5.2 *de Gronwall : Soit une fonction g telle que*

$$0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds, 0 \leq t \leq T,$$

alors $g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s)e^{\beta(t-s)}ds, 0 \leq t \leq T$.

Preuve en exercice.

$$0 \leq \partial_t(e^{-\beta t}\int_0^t g(s)ds) = (g(t) - \beta \int_0^t g(s)ds)e^{-\beta t}$$

On utilise l'hypothèse pour majorer ceci par $\alpha(t)e^{-\beta t}$ et donc en intégrant l'inégalité :

$$0 \leq e^{-\beta t}\int_0^t g(s)ds \leq \int_0^t \alpha(s)e^{-\beta s}ds$$

et on utilise une deuxième fois l'hypothèse pour conclure. □

5.2 Théorème de Itô

[18] 5.2 B, pages 286 et sq.
Lorsque $\sigma = 0$, on est ramené à une équation différentielle ordinaire, et on s'inspire des méthodes classiques pour la résolution de l'équation différentielle stochastique, à savoir l'itération de Picard.

Théorème 5.3 *d'unicité : ([18] th 2.5 page 287)*
On suppose que les coefficients b et σ sont localement lipschitziens sur $\mathbb{R}^d$, c'est à dire qu'il existe pour tout n une constante réelle K_n telle que pour tout x et y dans la boule $B(0,n)$ on a

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K_n\|x-y\|.$$

Alors l'équation (11) admet au plus une solution forte.

Preuve en exercice : elle utilise le lemme de Gronwall. On suppose donc que X et Y sont deux solutions fortes de (11) de même condition initiale x. On définit la suite de temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{t : \|X_t\| \text{ ou } \|Y_t\| \geq n\}.$$

Cette suite tend presque sûrement vers l'infini et on calcule

$$X_t^{T_n} - Y_t^{T_n} = \int_0^{t\wedge T_n} (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds + \int_0^{t\wedge T_n} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))dW_s$$

et on majore la norme dans L^2 de $X_t^{T_n} - Y_t^{T_n}$ en utilisant entre autres la propriété de Lipschitz.

$$\begin{aligned}
(X_t^{T_n} - Y_t^{T_n})^2 &= 2\int_0^{inf(t,T_n)} (X_s^{T_n} - Y_s^{T_n})(b(s, X_s^{T_n}) - b(s, Y_s^{T_n}))ds + \\
&+ \int_0^{inf(t,T_n)} \|\sigma(s, X_s^{T_n}) - \sigma(s, Y_s^{T_n})\|^2 ds + \text{ une martingale} \\
\|X_t^{T_n} - Y_t^{T_n}\|_2^2 &\leq (2K_n + K_n^2)\int_0^t \|X_s^{T_n} - Y_s^{T_n}\|_2^2 ds,
\end{aligned}$$

et l'on conclut avec le lemme de Gronwall : pour tout n, $X_s^{T_n} - Y_s^{T_n} = 0$ presque sûrement, d'où l'unicité forte. $\square$

Il faut ajouter des hypothèses pour avoir aussi l'existence. Par exemple, l'équation $X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 ds$ explose en $t = 1$ puisqu'il s'agit de $X_t = \frac{1}{1-t}$, et on n'a pas de solution sur $[0, 1]$.

Théorème 5.4 *d'existence ([18] th 2.9 page 289)*
Supposons que les coefficients b *et* σ *sont globalement lipschitziens sur* $\mathbb{R}^d$, *et satisfont des conditions de croissance au plus linéaire : il existe une constante positive* K *telle que pour tout* $t \geq 0, x$ *et* y *dans* $\mathbb{R}^n$,

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\|x - y\|$$
$$(13) \qquad \|b(t,x)\|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K(1 + \|x\|^2.$$

Alors il existe un processus X *adapté sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *qui est une solution forte de (11).*
De plus, X *est de carré intégrable : pour tout* $T > 0$, *il existe une constante* C *ne dépendant que de* K *et* T *telle que*

$$(14) \qquad E\|X_t\|^2 \leq C(1 + E\|\eta\|^2), \forall 0 \leq t \leq T.$$

Preuve : le principe est fondé sur l'itération de Picard et de la convergence de la suite récurrente ainsi obtenue.

$$X_t^{k+1} = \eta + \int_0^t b(s, X_s^k)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^k)dW_s,$$

et donc la différence $X_t^{k+1} - X_t^k = A_t^k + M_t^k$ avec

$$A_t^k = \int_0^t [b(s, X_s^k) - b(s, X_s^{k-1})]ds \ ; \ M_t^k = \int_0^t [\sigma(s, X_s^k) - \sigma(s, X_s^{k-1})]dW_s.$$

Alors

$$\|X_t^{k+1} - X_t^k\|^2 \leq 2\|A_t^k\|^2 + 2\|M_t^k\|^2$$

Un lemme en exercice : problème 2.10 page 289 de [18] qui est corrigé page 388 :

Lemme 5.5 $\forall T > 0, \exists C > 0$, *dépendant de* T *et* K *telle que les itérations de l'algorithme ci-dessus vérifient*

$$(15) \qquad E[\|X_t^k\|^2] \leq C(1 + E[\|\eta\|^2])e^{Ct}.$$

Preuve du théorème : Tout d'abord, le lemme et les hypothèses sur les coefficients (13) montrent que pour tout k, $b(s, X_s), \sigma(s, X_s)$ sont de carré intégrable et en particulier, M^k est une vraie martingale.

On lui applique l'inégalité maximale de martingale :

$$E[max_{0 \leq s \leq t}\|M_s^k\|^2] \leq C_2 E[\int_0^t \|\sigma(s, X_s^k) - \sigma(s, X_s^{k-1})\|^2 ds] \leq C_2 K^2 \int_0^t E[\|X_s^k - X_s^{k-1}\|^2]ds.$$

Par ailleurs,

$$max_{0 \leq s \leq t}\|A_s^k\|^2 \leq K^2 t \int_0^t \|X_s^k - X_s^{k-1}\|^2 ds.$$

Donc, avec une constante du genre $C = 2K^2(C_2 + T)$,

$$E[max_{0\leq s\leq t}\|X_s^{k+1} - X_s^k\|^2] \leq C\int_0^t E[\|X_s^k - X_s^{k-1}\|^2 ds.$$

Si l'on itère cette majoration, il vient :

$$E[max_{0\leq s\leq t}\|X_s^{k+1}-X_s^k\|^2] \leq C\int_0^t C\int_0^s E[\|X_u^k-X_u^{k-1}\|^2 duds \leq C^k\frac{t^k}{k!}E[max_{0\leq s\leq t}\|X_s^1-\eta\|^2].$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicev, il vient :

$$\mathbb{P}\{max_{0\leq s\leq t}\|X_s^{k+1} - X_s^k\| > \frac{1}{2^{k+1}}\} \leq 2^{k+1}C^k\frac{t^k}{k!}C^*$$

où $C^* = E[max_{0\leq t\leq T}\|X_t^1 - \eta\|^2]$. C'est une série convergente, par le lemme de Borel-Cantelli, il vient presque sûrement

$$\limsup\{max_{0\leq s\leq t}\|X_s^{k+1} - X_s^k\| > \frac{1}{2^{k+1}}\} = \emptyset$$

Donc, X^k, suite de Cauchy dans $\mathcal{C}[0,T]$, converge en probabilité, vers une trajectoire continue, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$. Puis le lemme de Fatou montre que

$$E[\liminf(\|X_t^k\|)^2] \leq \liminf E[\|X_t^k\|^2] \leq \limsup E[\|X_t^k\|^2] \leq E[\limsup(\|X_t^k\|)^2].$$

Par le lemme 5.5, à la limite, $E[\|X_t\|^2] \leq C(1 + E[\|\eta\|^2])e^{Ct}$.
Notons qu'ainsi, $\|X_t\|$ intégrable est presque sûrement fini.

Il reste à vérifier que cette limite vérifie bien toutes les conditions de la définition :

. par construction, $X_0 = \eta$ presque sûrement ;

. en utilisant la croissance au plus linéaire des coefficients et le fait que $\|X_t\|$ est continu donc presque sûrement borné, on obtient $\int_0^T[|b(s,X_s)| + \sigma^2(s,X_s)]ds < +\infty$,

. enfin, on fait tendre k vers l'infini dans la définition récurrente pour obtenir $X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \sigma(s,X_s)dW_s$, $\mathbb{P}$ presque sûrement. Il y a un travail pour pouvoir appliquer le théorème de Lebesgue (problème 2.11 de [18] corrigé page 388).

$\square$

Exercice (Proposition 2.13 [18] page 291, Yamada-Watanabé, 1971) :
En dimension 1 les hypothèses pour l'unicité peuvent être affaiblies pour le coefficient σ de diffusion.

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq h(|x-y|)$$

où h est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, $h(0) = 0, \forall \varepsilon > 0, \int_0^\varepsilon h^{-2}(u)du = +\infty$.
Indications : les propriétés de h donne
- l'existence d'une suite $(a_n), a_0 = 1$, décroissante vers 0, telle que $\int_{a_n}^{a_{n-1}} h^{-2}(u)du = n$,
et d'une suite de fonctions ρ_n continues, à support dans $[a_n, a_{n-1}]$ et vérifiant $0 \leq \rho_n(x) \leq \frac{2}{nh^2(x)}$, d'intégrale 1.
Puis on pose pour tout n $\psi_n(x) = \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u)dudy$ qui est impaire et de classe C^2 ; (ψ_n) forme une suite décroissante ; $|\psi'_n(x)| \leq 1$, $\psi"_n$ est aussi majorée.
Alors on calcule par Ito $\psi_n(X_t^1 - X_t^2)$ si l'on a deux solutions fortes.

Théorème 5.6 *de comparaison ([18] prop 2.18 page 293)*
Sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *on suppose qu'il existe deux solutions* X^1 *et* X^2 *aux EDS en dimension* 1

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b^i(s, X_s^i)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^i)dW_s, i = 1, 2, \tag{16}$$

avec les conditions suivantes :

. *les coefficients* b^i *et* σ *sont des fonctions continues réelles sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, b^1 *est lipschitzienne en* x *uniformément sur* $\mathbb{R}^+$,

. $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq h(|x-y|)$ *où* h *est une fonction strictement croissante de* $\mathbb{R}^+$ *dans* $\mathbb{R}^+, h(0) = 0, \forall \varepsilon > 0, \int_0^\varepsilon h^{-2}(u)du = +\infty$,

. $X_0^1 \leq X_0^2$ *presque sûrement,*

. $b^1(t,x) \leq b^2(t,x), \forall 0 \leq t \leq T, \forall x$ *réel,*

. *le coefficient* b^2 *est localement lipschitzien sur* $\mathbb{R}$,
alors

$$\mathbb{P}\{X_t^1 \leq X_t^2, \forall 0 \leq t \leq T\} = 1.$$

Preuve : Les hypothèses font qu'il existe pour chacune des équations au plus une solution forte, X^1, X^2, de carré intégrable sur $\Omega \times [0,t]$ pour tout t et donc on a également

$$E[\int_0^t |\sigma(s, X_s^i)|^2 ds < \infty.$$

Soit un découpage de $[0,1], (a_n)$ où a_n est décroissante et $a_0 = 1$ et telle que, vues les propriétés de h, $\int_{a_n}^{a_{n-1}} h^{-2}(x)dx = n$ (voir l'exercice ci-dessus).
Pour tout n, on introduit une fonction auxiliaire ρ_n à support dans $[a_n, a_{n-1}]$ telle que $0 \leq \rho_n(x) \leq \frac{2}{nh^2(x)}$.
On pose alors $\phi_n(x) = \int_0^x \int_0^y \rho_n(u)dudy\mathbf{1}_{x\geq 0}$. Cette fonction est de classe $C^2, 0 \leq \phi_n'(x) \leq 1,\ 0 \leq \phi"_n(x) = \rho_n(x)$ et $\lim_n \phi_n(x) = x^+$ (exercice).
$(0 \leq \phi_n'(x) = \int_0^x \rho_n(u)du\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} \leq 1\ ;\ 0 \leq \phi_n"(x) = \rho_n(x) \leq \frac{2}{nh^2(x)})$

On pose $\Delta_t = X_t^1 - X_t^2$ et on calcule par Itô

$$\phi_n(\Delta_t) = \phi_n(\Delta_0) + \int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b^1(s, X_s^1) - b^2(s, X_s^2))ds + \frac{1}{2}\int_0^t \phi"_n(\Delta_s)(\sigma^1(s, X_s^1) - \sigma^2(s, X_s^2))ds$$

à une martingale près.
Puisque $X_0^1 \leq X_0^2$ et $\phi_n' \geq 0$, le premier terme est négatif.
Et comme $\phi_n"(x) = \rho_n(x) \leq \frac{2}{nh^2(x)}$, et $|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq h(|x-y|)$, le troisième terme est majoré par

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{2}{nh^2(\Delta_s)} h^2(\Delta_s)ds = \frac{t}{n}.$$

Le deuxième terme se récrit :

$$\int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b^1(s, X_s^1) - b^2(s, X_s^2))ds =$$

$$\int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b^1(s, X_s^1) - b^1(s, X_s^2))ds + \int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b^1(s, X_s^2) - b^2(s, X_s^2))ds$$

dont le deuxième terme à droite est négatif par hypothèse et le premier majoré par $K\int_0^t (\Delta_s)^+ ds$, (si $\Delta_s \leq 0, \phi_n'(\Delta_s) = 0$, et si $\Delta_s > 0, \int_0^t \phi_n'(\Delta_s)(b^1(s, X_s^1) - b^2(s, X_s^2))ds \leq K\int_0^t \Delta_s^+ ds$.)

Finalement il vient

$$E[\phi_n(\Delta_t)] - \frac{t}{n} \leq K\int_0^t E[(\Delta_s)^+]ds.$$

On fait tendre n vers l'infini pour obtenir (avec Fatou)

$$E[(\Delta_t)^+] \leq K\int_0^t E[(\Delta_s)^+]ds$$

et on conclut par Gronwall : $E[(\Delta_t)^+] = 0$, c'est à dire $X_t^1 \leq X_t^2$ presque sûrement. $\square$

On trouve dans Protter [28] une preuve alternative (page 269) : On pose

$$U_t = X_t^2 - X_t^1, N_t = \int_0^t (\sigma(s, X_s^2) - \sigma(s, X_s^1)) U_s^{-1} dW_s, C_t$$

$$C_t = x_0^2 - x_0^1 + \int_0^t (b^2(s, X_s^2) - b^1(s, X_s^1)) ds.$$

On voit facilement que $U_t = C_t + \int_0^t U_s dN_s$ ce qui est une équation différentielle stochastique linéaire dont l'unique solution est

$$U_t = \mathcal{E}_t(N)[x_0^2 - x_0^1 + \mathcal{E}_s^{-1}(N) dC_s.$$

Soit l'application lipschitzienne

$$K : x \mapsto (b^2(t, x_t \mathcal{E}_t(N) + X_t^1, X_s^2) - b^1(t, X_t^1)).$$

on remarque que $K(0) = b^2(t, X_t^1, X_s^2) - b^1(t, X_t^1) \geq 0$. Soit $V_t = \mathcal{E}_t^{-1}(N) U_t = x_0^2 - x_0^1 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(N) dC_s$: $K(V_t) dt = dC_t$. On obtient l'équation différentielle ordinaire $V_t = x_0^2 - x_0^1 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(N) k(V_s) ds$, $V_0 = 0$, si V s'annulle en $T, V_T' \geq 0$, V est donc croissante et reste positive. Comme l'exponentielle est positive, U l'est aussi. □

5.3 Lien avec les EDP

(cf [18] 5.7 pages 363 et sq.)
Dans cette section, on utilise une solution de l'EDS étudiée avec condition initiale $X_t = x$:

(17) $$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u) du + \sigma(u, X_u) dW_u$$

avec des hypothèses analogues aux cas précédents : les coefficients sont continus, de croissance au plus linéaire en espace, tels que il existe une solution à l'équation, unique en loi, c'est à dire **solution faible** : il existe une probabilité $\mathbb{P}_x$ sur l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle

. X est $\mathcal{F}-$adaptée continue, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

. si $S_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$, X^{S_n} vérifie les conditions (ii) et (ii) des solutions fortes.

La limite croissante des temps S_n s'appelle le temps d'explosion. On a $\mathbb{P}_x$-presque sûrement pour tout n

$$X_{t \wedge S_n} = x + \int_t^{t \wedge S_n} b(u, X_u) du + \int_t^{t \wedge S_n} \sigma(u, X_u) dW_u$$

5.3.1 Problème de Dirichlet

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 5.7 *Un opérateur différentiel $\mathcal{A} = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\partial^2_{ij}$ d'ordre 2 est dit elliptique en x si*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d_*, \ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j > 0.$$

Si $\mathcal{A}$ est elliptique en tout point de D, on dit qu'il est elliptique dans D.
S'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta\|\xi\|^2,$$

on dit qu'il est uniformément elliptique.

Le **problème de Dirichlet** est celui de trouver une fonction u de classe C^2 sur D ouvert borné, de valeur f sur ∂D, et vérifiant dans D :

$$\mathcal{A}u - ku = -g$$

avec $\mathcal{A}$ elliptique.

Proposition 5.8 *(Proposition 7.2, page 364 [18])*
Soit u solution du problème de Dirichlet $(\mathcal{A}, D)$ et X solution de (17) avec l'opérateur $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} \sigma^i_l\sigma^j_l(x)\partial^2_{ij} + \nabla.b(x)$; T_D le temps de sortie de D par X. Si

$$E_x(T_D) < \infty \tag{18}$$

pour tout $x \in D$, alors pour tout $x \in \bar{D}$,

$$u(x) = E_x[f(X_{T_D})\exp(-\int_0^{T_D} k(X_s)ds) + \int_0^{T_D} g(X_t)\exp(-\int_0^t k(X_s)ds)dt).$$

Preuve en exercice (problème 7.3 de [18], corrigé page 393).
Remarquons d'abord que la continuité de X fait que $X_{T_D} \in \partial D$.
Indication : montrer que

$$M : t \mapsto u(X_{t\wedge T_D})\exp(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds) + \int_0^{t\wedge T_D} g(X_s)\exp(-\int_0^s k(X_u)du)ds, t \geq 0$$

est une martingale uniformément intégrable pour $\mathbb{P}_x$: on calcule $E_x(M_0) = E_x(M_\infty)$; sur $\{t < T_D\}$, on fait la différentielle de Itô de M et on utilise que sur $D, \mathcal{A}u - ku + g = 0$.
$M_0 = u(x)$ xar $X_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$,

$$dM_t = \exp(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds)[\mathcal{A}u(X_{t\wedge T_D})dt + \nabla u(X_{t\wedge T_D})\sigma(t, X_{t\wedge T_D})dW_t + g(X_{t\wedge T_D}) - k(X_{t\wedge T_D})u(X_{t\wedge T_D})d$$

les fonction ∇u et σ sont continues donc bornées sur le compact $\bar{D}$, donc le deuxième terme ci-dessus est une martingale, de plus les autres termes se simplifient puisque $\mathcal{A}u - ku + g = 0$ et pour tout $t, E_x[M_t] = u(x)$.

Cette martingale est uniformément intégrable car bornée dans L^2, on peut faire tendre t vers l'infini et appliquer le théorème d'arrêt puisque $E_x[T_D] < \infty$. □

Remarque 5.9 *(Friedman, 1975)*
Une condition suffisante pour avoir l'hypothèse (18) est $\exists l, \exists \alpha \ : \ a_{l,l}(x) \geq \alpha > 0$. *Cette condition est plus forte que l'ellipticité, mais moins forte que l'uniforme ellipticité dans* D.

on pose :

$$b^* = \max\{|b_l(x)|, x \in \bar{D}\}, q = \min\{x_l, x \in \bar{D}\},$$

on choisit $\nu > 4b^*/\alpha, h(x) = -\mu \exp(\nu x_l), x \in D$, μ à choisir plus tard. Alors h est de classe C^∞, et $-\mathcal{A}h(x)$ se calcule et se minore :

$$-\mathcal{A}h(x) = (\frac{1}{2}\nu^2 a_{ll} + \nu b_l(x))\mu e^{\nu x_l} \geq (\frac{8(b^*)^2}{\alpha} - \frac{4b^*}{\alpha}b^*)\mu e^{\nu x_l} \geq \frac{4(b^*)^2}{\alpha}\mu e^{\nu q} \geq 1.$$

On choisit alors μ assez grand pour que $-\mathcal{A}h(x) \geq 1$; $x \in D$, h et ses dérivées sont bornées dans D, et on peut appliquer Itô à h

$$h(X_t^{T_D}) = h(x) + \int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds + \int_0^{t\wedge T_D} \nabla h(X_s)\sigma(X_s)dW_s.$$

On en tire

$$t \wedge T_D \leq h(x) - h(X_t^{T_D}) = -\int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds$$

à une martingale uniformément intégrable près. Donc $E_x[t \wedge T_D] \leq 2\|h\|_\infty$ et l'on fait tendre t vers l'infini.

5.3.2 Problème de Cauchy et représentation de Feynman-Kac

On retrouve l'analogue du précédent chapitre, plus précisément un analogue de la formule de Feynman-Kac. ([18] 5.7 B)

Théorème 5.10 *(théorème 7.6 page 366 [18])*
Soient $T > 0, L > 0, \lambda \geq 1,$ des fonctions continues

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ g : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ h : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+,$$

telles que

$$(i)|f(x)| \leq L(1 + \|x\|^{2\lambda}) \text{ ou } f \geq 0,$$
$$(i)|g(t,x)| \leq L(1 + \|x\|^{2\lambda}) \text{ ou } g \geq 0.$$

Soient par ailleurs b et σ telles que la solution faible de l'équation différentielle stochastique associée existe et soit unique.
Soit v solution du problème de Cauchy dans $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, ($\mathcal{A}_t = \frac{1}{2}\sigma\sigma^*\partial^2 + b\nabla$)

$$-\partial_t v + hv = \mathcal{A}_t v + g, (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d,$$

et $\exists M > 0, \exists \mu \geq 1 : |v(t,x)| \leq M(1 + \|x\|^{2\mu}), (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,
alors si $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

$$v(t,x) = E_{t,x}[f(X_T)\exp(-\int_t^T h(s,X_s)ds) + \int_t^T g(s,X_s))\exp(-\int_t^s h(u,X_u)du)ds].$$

En particulier, quand une telle solution existe, elle est unique.

Preuve [18] page 367 : on applique la formule de Itô à

$$s \mapsto v(s,X_s)\exp[-\int_t^s h(u,X_u)du]$$

entre t et T ; on pose $T_n = \inf\{s \geq t, \|X_s\| \geq n\} \wedge T$ et on opère comme dans les preuves précédentes.

6 Optimisation de stratégies consommation-portefeuille.

(d'après [27] chap 4, [18]chap.5.8 pages 371 et sq., [21] chap. 5)

6.1 Constitution du modèle de marché

Rappel : les prix sont continus, on suppose qu'il n'y a pas de sauts. Le premier actif est à taux sans risque, type caisse d'épargne (bond, en anglais) :

$$dp_t^0 = p_t^0 r_t dt,\ r_t > 0,\ p_0^0 = 1.$$

C'est à dire que $p_t^0 = e^{\int_0^t r_s ds}$. De plus, on note $R_t = 1/p_t^0$ et $\tilde{p}^n = \frac{p^n}{p^0}$ les **prix actualisés**.

Pour les N actifs risqués on fait l'hypothèse suivante :
Hypothèse : $\forall n$, il existe une semi-martingale x^n telle que :

$$p_t^n = \mathcal{E}_t(x^n), t \in [0, T].$$

Concrètement, les N processus des prix sont solution d'équations différentielles stochastiques linéaires de la forme $dp_t^n = p_t^n dx_t^n$ avec par exemple :

$$dx_t^n = \sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t) dt, n = 1, \cdots, N, j = 1, \cdots, d; dx_t^0 = r_t dt,$$

où W est un d-mouvement brownien, b, r et σ sont des processus adaptés tels que les intégrales aient toutes un sens.

6.1.1 Le marché est-il viable ?

Il s'agit de montrer dans ce modèle qu'il existe une mesure de prix d'équilibre, donc de chercher Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $\tilde{p} \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$. Or, on a par la formule de Itô

$$d\tilde{p}_t = \tilde{p}_t[(b_t - r_t)dt + \sigma_t dW_t].$$

Supposons que les coefficients sont bornés, donc on a que $\tilde{p} = \mathcal{E}(\int \sigma dW + (b - r)dt)$ est bien défini et il suffit de trouver une probabilité Q qui fasse de $\int \sigma dW + (b - r)dt$ une martingale locale. Supposons $N = d$ et σ_t inversible, alors on peut définir le processus vectoriel

$$\theta_t = -\sigma_t^{-1}(b_t - r_t).$$

A partir d'ici, chaque fois que cela est nécessaire, r_t désigne le processus vectoriel dont les N coordonnées sont égales à r_t.
Si θ vérifie (par exemple) la condition de Novikov alors il existe Q équivalente à $\mathbb{P}$, $Q = L.\mathbb{P},\ L = \mathcal{E}(\theta.W)$ telle que:

$$\tilde{W} = W - \int_0 \theta_t dt$$

est un $Q-$mouvement brownien et $\tilde{p} = \mathcal{E}(\int \sigma d\tilde{W}) \in \mathcal{M}_{loc}(Q)$.

Remarque 6.1 *On peut trouver des hypothèses moins fortes pour l'existence de Q. De fait, il suffit de supposer que* $L = \mathcal{E}(\theta.W)$ *est une martingale strictement positive, où* θ *est tel que* $dt \otimes d\mathbb{P}$ *presque sûrement* $\sigma_t\theta_t = b_t - r_t$*, où* θ *est un processus adapté tel que* $\sigma(t,\omega)\theta(t,\omega) = b(t,\omega) - r(t,\omega), dt \otimes d\mathbb{P}$ *presque sûrement.*

6.1.2 Le marché est-il complet ?

D'après le théorème 3.38 que l'on a vu dans le chapitre précédent, il suffit de vérifier que $\mathcal{Q}_p = \{Q\}$ Soit donc $Q' \in \mathcal{Q}_p$, $Q' = Z.\mathbb{P}$ avec $Z \in \mathcal{M}_{UI}(\mathbb{P}), Z > 0$. D'après le théorème de représentation des martingales, il existe un processus ϕ tel que $dZ_t = Z_t\phi_t dW_t$. Or d'après la proposition 3.6 :

$$\tilde{p} \in \mathcal{M}(Q') \Longleftrightarrow Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}).$$

On calcule par la formule de Itô :

$$d(Z.\tilde{p})_t = Z_t.\tilde{p}_t[\sigma_t dW_t + (b-r)_t dt] + \tilde{p}_t Z_t \phi_t dW_t + \tilde{p}_t Z_t \phi_t \sigma_t dt.$$

On tire du fait que $Z.\tilde{p} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ l'égalité $Z_t\tilde{p}_t[(b_t - r_t) + \phi_t\sigma_t] = 0 \; dt \otimes d\mathbb{P}$ presque sûrement. Or $Z.\tilde{p} > 0$. On peut simplifier cette égalité et en tirer

$$(*) \qquad \sigma_t\phi_t = -(b-r)_t.$$

Dès que σ est inversible, on a $\phi = \theta$, c'est à dire que Z est identique à L et $Q' = Q$ et le marché est complet.

Ainsi, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, il y a équivalence entre la complétude du marché et l'unicité de la solution de $(*)$.

Remarque 6.2 *Si* $d > N$ *et si* $b_t - r_t$ *appartient à l'image de* σ_t*, on n'a pas unicité du vecteur* θ *qui permet d'écrire* $\sigma dW + (b-r)dt = \sigma d\tilde{W}$*. Dans ce cas, le marché n'est pas complet et l'ensemble* $\mathcal{Q}_p$ *est en bijection avec l'ensemble* $\sigma^{-1}\{r\mathbf{1} - b\}$.

Exercice lorsque $d < N$, montrer qu'il existe une opportunité d'arbitrage.

6.2 Stratégies d'échange

Rappel : une stratégie est un couple portefeuille-consommation (θ, c), où θ est processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{N+1}$, θ^n représentant la part du portefeuille investie dans le $n$ième actif financier. Les conditions à imposer sont celles qui permettent au processus réel $\int\langle\theta_s, dp_s\rangle$ d'être bien défini : cette quantité représente le gain issu de l'échange. La consommation est donnée par sa vitesse c, processus $\mathcal{F}-$adapté positif tel que presque sûrement $\int_0^T c_s ds < \infty$.

Définition 6.3 *Une* **stratégie admissible** *est un processus à valeurs dans* $(\mathbb{R}^{N+1}, \mathbb{R}^+)$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ *de première composante stochastiquement intégrable par rapport au vecteur prix, de deuxième composante intégrable en temps, et tel que la richesse qui découle de cette stratégie est* $dt \otimes d\mathbb{P}-$*presque sûrement minorée par une constante réelle. Pour résumer :* θ *doit être telle que l'intégrale stochastique* $\theta.p$ *est une semi-martingale* $dt \otimes d\mathbb{P}-$*presque sûrement minorée par une constante réelle. Si* Q *et une probabilité neutre au risque, une condition suffisante (outre bien sûr la minoration) est que* $\theta \in \mathcal{L}^1(\tilde{p}, Q)$.

Définition 6.4 *Une stratégie admissible est* **autofinançante** *si de plus pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$, *la valeur du portefeuille :*

$$V_t(\theta) = \langle \theta_t, p_t \rangle = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t \langle \theta_s, dp_s \rangle.$$

Remarque: Ceci s'interprète de la manière suivante : la consommation est exactement financée par les ressources et la variation du portefeuille !

6.2.1 CNS d'admissibilité

On se place sur un marché sans opportunité d'arbitrage, Q étant une proba neutre au risque.
Le petit épargnant suit la stratégie θ et consomme à la vitesse c_t au temps t. A l'instant t sa richesse est :

$$X_t = V_t(\theta) = \langle \theta_t, p_t \rangle.$$

Si θ est autofinançante,

$$dX_t = \langle \theta_t, dp_t \rangle - c_t dt.$$

Soit

$$dX_t = \theta_t^0 p_t^0 r_t dt + \sum_1^N \theta_t^n p_t^n [\sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t) dt] - c_t dt.$$

On peut réutiliser $X_t = \langle \theta_t, p_t \rangle$ et noter $\pi_t^n = \theta_t^n p_t^n, n \geq 1$ la quantité de richesse sur l'actif n ; alors $\theta_t^0 p_t^0 = X_t - \sum_n \pi_t^n$.

D'où l'on tire :

$$dX_t = (X_t r_t - c_t) dt + \sum_1^N \pi_t^n [\sigma_j^n(t) dW_t^j + (b^n(t) - r) dt]$$

soit sous la probabilité neutre au risque définie plus haut $Q = L.\mathbb{P}$:

$$dX_t = (X_t r_r - c_t) dt + \sum_1^N \pi_t^n [\sigma_j^n(t) d\tilde{W}_t^j]$$

avec $X_0 = x$, équation différentielle stochastique dont la solution est :

$$X_t = p_t^0[x + \int_0^t R_s(\pi_s, \sigma_s d\tilde{W}_s) - \int_0^t R_s c_s ds].$$

exercice : se vérifie avec la formule de Itô

On a grâce à cette formulation une CNS pour que la stratégie (π, c) soit admissible dans le cas d'un marché complet.

Proposition 6.5 *Pour toute stratégie admissible (π, c), la consommation actualisée "objectif" $\int_0^T R_s c_s ds$ vérifie*

$$(*) \qquad\qquad E_Q[\tilde{X}_T + \int_0^T R_s c_s ds] \leq x$$

Réciproquement, dans un marché complet, la consommation actualisée "objectif" $\int_0^T R_s c_s ds$ étant fixée, il existe un portefeuille π tel que (π, c) est une stratégie admissible qui permet de simuler (atteindre) X_T en partant de x.

Preuve : en exercice. C.N. [18] page 374.
Soit une stratégie (π, c) admissible autofinançante : alors la richesse actualisée $\tilde{X}_t \geq a$, et

$$\tilde{X}_t + \int_0^t R_s c_s ds = x + \int_0^t R_s(\pi_s, \sigma_s d\tilde{W}_s)$$

est une $(\mathcal{F}, Q)-$martingale locale minorée donc c'est une surmartingale

$$E_Q[\tilde{X}_T + \int_0^T R_s c_s ds] \leq x.$$

C.S. [18] proposition 8.6 page 375.
Réciproquement, si la condition (*) est vraie, on pose $D = \tilde{X}_T + \int_0^T R_s c_s ds$ et $M_t = E_Q[D/\mathcal{F}_t]$ qui est une $(\mathcal{F}, Q)-$martingale uniformément intégrable donc, en marché complet, on a l'existence d'un porte-feuille de couverture admissible. □

Sinon, attention ! le théorème de représentation est a priori valable seulement dans la filtration propre du brownien...Dans ce cas, on repasse sous la probabilité de départ $\mathbb{P} = Z_T^{-1}Q$:

$$M_t = Z_t^{-1} E_{\mathbb{P}}[Z_T D/\mathcal{F}_t]$$

et l'on représente sous $\mathbb{P}$ la $(\mathcal{F}, \mathbb{P})-$martingale uniformément intégrable $E_{\mathbb{P}}[Z_T D/\mathcal{F}_t]$:

$$Z_t M_t = E_{\mathbb{P}}[Z_T D/\mathcal{F}_t] = E_Q[D] + \int_0^t Y_s^j dW_s^j$$

Tout calcul fait, on obtient la représentation de M_t comme $E_Q[D] + \int_0^t \phi_t^j d\tilde{W}_t^j$, et l'existence d'un portefeuille admissible π est soumis à la possibilité d'identifier le processus d-vectoriel Y ci-dessus au processus $\sum_i \sigma_j^i(t)\pi_t^i$, c'est à dire au fait que ce processus Y soit presque sûrement dans l'image de la transposée de σ et que l'on trouve une image réciproque qui ait les bonnes propriétés de mesurabilité et intégrabilité.

6.3 Politiques optimales dans le cadre d'un marché complet sans arbitrage

[18] 5.8.C pages 379-381.
On est ramené alors au problème suivant : le petit épargnant juge de la qualité de sa stratégie par ce que les économistes appellent l'utilité ; il cherche à maximiser :

$$(c, X_T) \to E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(X_T)]$$

où les fonction d'utilité U_i sont positives, strictement concaves, strictement croissantes et de classe C^1. On peut également supposer que $U_i'(\infty) = 0, U_i'(0) = +\infty, \exists c \ : \ U_i'(x) = 0, \forall x \geq c, c \in \overline{\mathbb{R}_*^+}$.
Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\sup_{(c,X_T)} \{E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(X_T)] \text{ sachant } E_Q[\tilde{X}_T + \int_0^T R_s c_s ds] \leq x. \tag{19}$$

Ceci se résout par la méthode de Lagrange. Soit :

$$\mathcal{L} : C_1 \times C_2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

définie par :

$$\mathcal{L}(c, X, \lambda) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(X_T)] - \lambda(E_Q[\int_0^T R_s c_s ds + \tilde{X}_T] - x)$$

où $C_1 = L^1([0,T] \times \Omega, dt \times dQ)$ et $C_2 = L^1(Q)$. On obtient par exemple par le théorème de Kuhn et Tucker (point selle) des conditions suffisantes pour qu'un couple $(c*, X^*)$ soit optimal. Une fois c^* connue, on en déduit un portefeuille optimal par la CNS de la proposition 6.5. En marché complet, l'unicité de la mesure Q assure directement l'existence d'un processus prévisible u tel que la martingale $E_Q[\tilde{X}_T + \int_0^T R_s c_s^* ds/\mathcal{F}_t]$ se représente par rapport au $Q-$ mouvement brownien $\tilde{W}$: $x + \int_0^t u_s d\tilde{W}_s$ et un portefeuille optimal est alors donné par :

$$\pi_s^* = p_s^0 \sigma_s^{-1} u_s.$$

Proposition 6.6 *Soit la fonction de valeur du problème*

$$V(x) = \sup_{(\pi,c)} E[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(X_T^{\pi,c})], \ x = X_0^{\pi,c},$$

où (π, c) décrit l'ensemble des stratégies admissibles, et soit
$\mathcal{D}(x) = \{(c, Y) : x = E_Q[\int_0^T e^{-\int_0^t r_s ds} c_s ds + e^{-\int_0^T r_s ds} Y]\}$, *alors*

$$V(x) = \sup_{c,Y \in \mathcal{D}(x)} E[\int_0^T U_1(c_s)ds + U_2(Y)].$$

Preuve : [18] prop 8.16 page 380.

□

On étudie le cas où $U_1 = U, U_2 = 0$ et on ajoute des hypothèses sur L ($Q = L.\mathbb{P}$) en sorte que l'intégrabilité des processus en cause soit assurée, selon le choix de U : on suppose par exemple

$$(*) \qquad \forall y > 0, R_. L_. I(yR_. L_.) \in L^1([0,T] \times \Omega, dt \otimes d\mathbb{P}),$$

où $R_. = e^{-\int_0^. r_s ds}$.
On introduit les fonctions auxiliaires suivantes :

$$I = (U')^{-1} \; ; \; \mathcal{X} : y \mapsto E_Q[\int_0^T e^{-\int_0^t r_s ds} I(yL_s e^{-\int_0^s r_u du} ds)].$$

On vérifie $I(0) = c, I(\infty) = 0, U \circ I(y) - yI(y) \geq U(a) - ya$, conséquence de la formule des accroissements finis et de la concavité : $U(a) - U \circ I(y) \leq (a - I(y))U' \circ I(y)$.

On pose $\mathcal{Y} = (\mathcal{X})^{-1}$ qui existe d'après l'exercice qui suit.
Exercice : montrer que $\mathcal{X}$ est continue strictement décroissante sur un intervalle $[0, d] \subset \overline{\mathbb{R}}^+$.

Théorème 6.7 *Soit $x \geq 0$ et supposons que $\mathcal{X}$ soit finie sur $\mathbb{R}^+_*$. Alors, $c^*_s = I(\mathcal{Y}(x) L_s e^{\int_0^s r_u du})$ est une consommation optimale.*

Preuve : [18] th. 8.18 page 381.
Dans ce cas, $X^*_T = 0$: on consomme tout au fur et à mesure. □

Dans le cas de deux fonctions d'uitlité on introduit

$$I_i = (U_i')^{-1} \ ; \ \mathcal{X} : y \mapsto E_{\mathbb{P}}[L_T R_T I_2(y L_T R_T) + \int_0^T L_s R_s I(y L_s R_s) ds)]$$

et le travail est analogue.

6.4 Résolution dans le cas à coefficients constants

[18] 5.8.D page 381 et sq, [5] section 4.6.
Tous les coefficients du modèle sont constants, la matrice σ est inversible, $\theta = \sigma^{-1}(b - r\mathbf{1})$.
On considère l'opérateur différentiel d'ordre 2

$$Af(t,x) = -\partial_t f(t,x) + rx\partial_x f(t,x) - \frac{1}{2}\|\theta\|^2 x^2 \partial^2_{xx} f(t,x).$$

Soit une fonction d'utilité U et $I = (U')^{-1}$ On fait ici l'hypothèse qu'il existe des fonctions de classe $C^{1,2}, G$ et S solution des EDP

$$AG = U \circ I, G(T,y) = 0 \ ; \ AS(t,y) = yI(y), S(T,y) = 0, y > 0,$$

et que toutes les fonctions $G, \partial_y G, S, \partial_y S$ vérifient : il existe $M > 0, \lambda > 0$ tels que

$$\max_{0 \le t \le T} H(t,y) \le M(1 + y^\lambda + y^{-\lambda}).$$

On peut alors montrer

Proposition 6.8 *Soit H de classe $C^{1,2}$ solution de l'EDP*

$$-\partial_t H(t,y) + ry\partial_y H - \frac{1}{2}\|\theta\|^2 y^2 \partial^2_{y^2} H = g(t,y), t \in [0,T], y > 0, H(T,y) = 0,$$

où g est une fonction positive, et H vérifiant il existe $M > 0, \lambda > 0$ tels que

$$\max_{0 \le t \le T} H(t,y) \le M(1 + y^\lambda + y^{-\lambda}).$$

Alors H admet la représentation

$$H(t,y) = E[\int_t^T g(s, Y_s^{t,y}) ds]$$

où $Y_t^{t,y} = y$ et

$$dY_s^{t,y} = Y_s^{t,y}(-rds + \theta dW_s).$$

Preuve en exercice : l'indication est d'appliquer la formule de Itô à $H(s, Y_s^{t,y})$ entre t et T. (problème 8.19, page 382, corrigé page 394 [18])

On applique ceci aux fonctions G et S ci-dessus pour obtenir (g sera respectivement $U \circ I$ et $y \mapsto yI(y)$) :

$$G(t, y) = E[\int_t^T U \circ I(Y_s^{t,y})ds] \ ; \ S(t, y) = E[\int_t^T Y_s^{t,y} I(Y_s^{t,y})ds].$$

Si l'on revient maintenant au problème d'optimisation dans ce cas, (avec seulement U utilité de la consommation), on vérifie que la fonction $\mathcal{X}$ qui sert à trouver le paramètre de Lagrange est telle que $y\mathcal{X}(t, y) = S(t, y)$. Si $\mathcal{Y}$ est la fonction inverse de $y \mapsto \mathcal{X}(t, y)$, il vient finalement

$$c_s^* = I(\mathcal{Y}(t, x)Y_s^{t,y})$$

Si l'on reporte ceci dans la fonction de valeur il vient :

$$V(t, x) = G(t, \mathcal{Y}(t, x)), t \in [0, T], x > 0.$$

Exercice : appliquer ceci à la fonction d'utilité $U = \log$.

6.5 Couverture d'une option

Dans le cas d'un marché complet, toujours par le théorème de représentation, on peut également assurer ce que l'on appelle la "couverture" d'une option. Il s'agit d'un actif financier fondé sur une action de prix S, mais c'est un droit que l'on peut exercer à terme de deux façons :

- une option call de valeur terminale $(S_T - K)^+$,

- une option put de valeur terminale $(K - S_T)^+$,

K étant le prix d'exercice de l'option et T le terme (ou : maturité). Concrètement, on achète au temps 0 le droit d'acheter au prix K même si le prix S_T est au dessus (call) ou le droit de vendre au prix K même si le prix S_T est en dessous (put). Mais pour trouver le "juste prix" de ce contrat, il faut que le vendeur de l'option puisse honorer le contrat, donc placer la somme obtenue en vendant le contrat en sorte de pouvoir (au moins en moyenne) au temps T payer l'acheteur.

Définition 6.9 *On appelle "juste prix" de l'objectif H (fair price, en anglais) le plus petit $x \geq 0$ tel qu'il existe une stratégie (π, c) admissible et autofinançante réalisant la richesse $X^{\pi,c}$ avec $\tilde{X}_T^{\pi,c} = H, X_0^{\pi,c} = x$.*

Par exemple pour l'option "call", l'objectif est $c_T = (S_T - K)^+$, et le vendeur du contrat cherche à le "couvrir".

Notons $R_T X_T$ l'objectif actualisé et supposons que le marché admet une probabilité neutre au risque Q. On suppose bornée la prime de risque θ.

Lemme 6.10 *(cf [18] page 377)*
Soit $X_T \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), p > 1$. La quantité $E_Q[R_T X_T]$ est finie et c'est un juste prix pour l'objectif X_T.

Preuve : Ceci est la condition suffisante vue précédemment pour qu'il existe π admissible autofinançante permettant d'atteindre l'objectif.

Pour montrer que c'est fini, si $Q = Z_T \mathbb{P}$, on calcule $Z_T^q, 1/p + 1/q = 1$.

Formule de Black et Scholes

On revient au modèle simple d'un actif sans risque de taux r et d'un actif risqué S_t guidé par un mouvement brownien réel W de tendance b et de volatilité $\sigma > 0$. Ce marché est viable et complet avec l'unique probabilité neutre au risque

$$Q = L_T \mathbb{P}, dL_t = -L_t \sigma^{-1}(b-r)dW_t, t \in [0,T], L_0 = 1.$$

Définition 6.11 *On appelle option d'achat ("call") le contrat suivant : l'acheteur paye en* 0 *une somme* q *qui lui donne la possibilité d'acheter au temps* 1 *l'action au prix* K *sans en avoir l'obligation. Si en* $T, S_T > K$, *il exerce son droit et gagne* $S_T - K - q$. *Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu* q. *Globalement, il gagne* $(S_T - K)^+ - q$.

On appelle option de vente ("put") le contrat suivant : l'acheteur paye en 0 *une somme* q *qui lui donne la possibilité de vendre au temps* 1 *l'action au prix* K *sans en avoir l'obligation. Si en* $T, S_T < K$, *il exerce son droit et gagne* $K - S_T - q$. *Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu* q. *Globalement, il gagne* $(K - S_T)^+ - q$.

Le problème est alors de trouver un prix "équitable" (*fair price*), q, entre l'acheteur et le vendeur de ce contrat.

Pour ce faire, on fait l'hypothèse que le portefeuille de couverture de cet objectif, θ, est tel qu'il existe une fonction C de classe $(1,2)$ telle que la valeur est :

$$V_t(\theta) = C(t, S_t). \tag{20}$$

Par ailleurs, θ est le couple (a,d) et on a

$$V_t(\theta) = a_t S_t^0 + d_t S_t = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t \theta_s dp_s. \tag{21}$$

On a deux manières de calculer la différentielle de cette valeur que l'on identifie :

$$dV_t(\theta) = \partial_t C(t,S_t)dt + \partial_x C(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t,S_t) S_t^2 \sigma^2 dt,$$

àpartir de (20) et à partir de (21 :

$$dV_t(\theta) = r a_t S_t^0 dt + d_t S_t(bdt + \sigma dW_t).$$

L'identification donne deux équations, en sus de (21) qui n'est autre que $C(t, S_t)$:

$$\begin{aligned} &\partial_t C(t,S_t) + bS_t \partial_x C(t,S_t) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t,S_t) S_t^2 \sigma^2 = r a_t S_t^0 + d_t S_t b \\ &\partial_x C(t,S_t) S_t \sigma = d_t S_t \sigma. \end{aligned} \tag{22}$$

On obtient ainsi le portefeuille :

$$(23) \qquad d_t = \partial_x C(t, S_t)\ ;\ a_t = \frac{C(t, S_t) - S_t \partial_x C(t, S_t)}{S_t^0}.$$

Reste à trouver la fonction C solution de l'EDP, obtenue en utilisant la première équation de (22) :

$$\partial_t C(t,x) + rx\partial_x C(t,x) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t,x)x^2\sigma^2 = rC(t,x),$$
$$C(T,x) = (x-K)^+, x \in \mathbb{R}^+.$$

On peut remplacer S_t par $x \in \mathbb{R}^+$ car c'est une var lognormale donc à support dans tout $\mathbb{R}^+$. Ceci se résout par la formule de Feynman-Kac. On pose

$$dY_s = Y_s(rds + \sigma dW_s), Y_t = x.$$

Alors $Y_s = x \exp[\sigma(W_s - X_t) - (s-t)(\frac{1}{2}\sigma^2 + r)]$ et

$$C(t,x) = E_x[e^{-r(T-t)}(Y_T - K)^+]$$

est la solution attendue, le portefeuille étant donné par les équations (23). La célèbre formule de Black-Scholes permet un calcul explicite de cette fonction, en posant φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard :

$$C(t,x) = x\varphi\left(\frac{\log(x/K) + (T-t)(r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - Ke^{-r(T-t)}\varphi\left(\frac{\log(x/K) + (T-t)(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Le prix initial q de l'option est alors donné par $C(0,x)$.

De fait, on résout plutôt avec le changement de (variable,fonction) :

$$x = e^y, y \in \mathbb{R}\ ;\ D(t,y) = C(t, e^y)$$

qui permet de se ramener au problème de Cauchy

$$\partial_t D(t,y) + r\partial_y D(t,y) + \frac{1}{2}\partial^2_{y^2} D(t,y)\sigma^2 = rD(t,y), y \in \mathbb{R},$$
$$D(T,y) = (e^y - K)^+, y \in \mathbb{R},$$

associé à l'équation différentielle stochastique :

$$dX_s = rds + \sigma dW_s, s \in [t,T], X_t = y.$$

C'est exactement ce que l'on a vu en 5.3.2, avec $g = 0$. Donc,

$$D(t,y) = E_y[e^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+],$$

d'où la formule explicite car la loi de X_T est une gaussienne.

Le prix au temps t est $C(t, S_t) = E_Q e[^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+ / \mathcal{F}_t]$ dont le calcul est simple : la loi de X_T sachant $\mathcal{F}_t$ est une gaussienne de moyenne $S_t + r(T-t)$ et de variance $\sigma^2(T-t)$.

References

[1] L.ARNOLD : “Stochastic Differential Equations : Theory and Applications”, Wiley, New York, 1974.

[2] L. BACHELIER: “Théorie de la speculation” :Annales scientifiques de l'école normale supérieure,17, 21-88, Paris, 1900.

[3] F. BLACK and M. SCHOLES : “The pricing of options and corporate liabilities”, Journal of Political Economy, 3, 637-654,1973.

[4] J.C. COX and S.A. ROSS : “ The valuation of options for alternative stochastics processes”, Journal of Financial Economics, 7, 229-263, 1979.

[5] Rose Ann DANA et Monique JEANBLANC : “Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre”, Economica, deuxième édition, Paris, 1998.

[6] G. DEMANGE et J.C. ROCHET : “Méthodes mathématiques de la finance”, Economica.

[7] M.U. DOTHAN : “Prices in financial Markets”, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[8] R.M. DUDLEY : “Wiener functionnals as Itô integrals”, The Annals of Probability, 5, 140-141, 1977.

[9] W. H. FLEMING, R.W. RISHEL : “ Deterministic and stochastic optimal control”, Springer-Verlag, New-York, 1975.

[10] A. FRIEDMAN : Stochastic Differential Equations and Applications, I , Academic Press, New-York ,1975.

[11] J.M. HARRISON and D.M.KREPS : “Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets”, Journal of Economic Theory, 20, 381-408, 1979.

[12] J.M. HARRISON and S. PLISKA : “Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading”,Stochastics Processes and their Applications, 11,215-260, 1981.

[13] S. HE, J. WANG and J. YAN :Semimartingale Theory and Stochastic Calculus, Science Press, New-York and Beijing ,1992.

[14] R.A. HOWARD : “ Dynamic Programming and Markov Processes”,The M.I.T. Press, Cambridge, 1966.

[15] C. HUANG, “Information structure and equilibrium asset prices”, Journal of Economic Theory, 35, 33-71, 1985.

[16] K. ITO and H.P. Mc KEAN : “Diffusion Processes and their sample paths”, Springer-Verlag, New York, 1974.

[17] J. JACOD : “Calcul stochastique et problèmes de martingales”, Lecture Notes 714, Springer-Verlag, New York, 1979.

[18] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : “Brownian Motion and Stochastic calculus”, Springer-Verlag, New York, 1988.

[19] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : “Methods of Mathematical Finance”, Springer-Verlag, New York, 1998.

[20] H. KUNITA and S. WATANABE : “On square integrable martingales” Nagoya Mathematics Journal, 30, 209-245, 1967.

[21] D. LAMBERTON et B. LAPEYRE : “Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance”, Ellipses, Paris,1991.

[22] D. LEPINGLE et J. MEMIN : “Sur l’intégrabilité uniforme des martingales exponentielles”, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 42, p175-203, 1978.

[23] R.S. LIPTSER and A.N. SHIRYAEV : “Statistics of Random Processes”, Springer-Verlag, New York, 1977.

[24] H.P. Mc KEAN : “Stochastic Integrals”, Academic Press, New-York, 1969.

[25] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI : “Martingale Methods in Financial Modelling”,Springer-Verlag, New-York, 1997.

[26] J. NEVEU : “Martingales à temps discrets”, Masson, Paris, 1972.

[27] S. R. PLISKA : “Introduction to Mathematical Finance”, Blackwell, Oxford, 1998.

[28] P. PROTTER : “Stochastic Integration and Differential Equations”, Springer-Verlag, New York, 1990.

[29] F. QUITTARD-PINON : “Marchés de capitaux et théorie financière”, Economica, Paris, 1993.

[30] Z. SCHUSS : “Theory and Applications of Stochastic Differential Equations” Wiley, New York, 1980.

[31] K. VO KHAC : “Théorie des probabilités”, Ellipses, Paris, 1984.