MASTER 2, 2010-2011 **Université El Manar, Tunis**

Calcul stochastique, applications à la finance **Département Mathématiques**

Ces notes ont été rédigées pour les cours assurés à l'Université en 2008, 2009, 2010. Toutes remarques et corrections seront les bienvenues. Le cours de 2010 a comporté 15 heures au lieu de 20 heures et ce n'est pas tout à fait suffisant pour compléter le dernier chapitre avec des exercices.

Le cours comprend deux parties, une première partie avec reprise sous forme d'un bref rappel suivi d'exercices des notions vues en Calcul stochastique au premier semestre, puis une partie de Calcul stochastique avancé appliqué à quelques notions de Finance, en trois chapitres, avec un cours de deux heures suivi d'une séance de deux heures d'exercices.

I. Calcul stochastique 1, révisions sous forme d'exercices, quatre séances de 1h30 :
Lundi 7 Février

- mouvement brownien,
- intégrale stochastique,

Mardi 8 Février matin

- formule de Itô,
- équations différentielles stochastiques, de Ornstein-Uhlenbeck.

II. Calcul stochastique 2 : trois chapitres, chacun trois heures :

2.1 Mardi 3 Février après midi :
modèle de Black-Scholes, changement de probabilité, théorème de Girsanov.

2.2 Vendredi 11 Février matin :
Représentation de martingales et marchés complets.

2.3 Vendredi 11 Février après midi :
Arrêt optimal en temps discret et options américaines.

0.1 Introduction, but du cours

Ce cours se propose d'introduire quelques bases du calcul stochastique en vue d'obtenir des outils applicables à la finance. En effet, on suppose que les marchés financiers offrent des actifs dont les prix dépendent du temps et du hasard ; on peut donc les modéliser par des processus stochastiques, prix connus en temps continu. On suppose également que l'espace des états possibles de la nature, Ω, est infini, que l'on obtient continuement l'information sur les marchés et que les échanges peuvent s'opérer à tout instant ("continuous trading"). On est ainsi dans une situation où le modèle ad hoc est indexé par le temps $t, t \in [0, T]$ ou $\mathbb{R}^+$, et l'on est amené à introduire un certain nombre d'outils stochastiques (qui peuvent d'ailleurs modéliser des situations extrêmement diverses autres que les marchés financiers).

0.2 Le plan

i) Le processus de Wiener ou mouvement brownien est tel que ses petits accroissements modélisent bien le "bruit", l'aléa pur, l'erreur de mesure physique... Ce chapitre sert à démontrer l'existence d'un tel processus en le construisant explicitement et l'on démontre quelques unes de ses propriétés les plus utiles.
ii) Le calcul de Ito permet d'obtenir par intégration des processus stochastiques plus sophistiqués ; la formule de Ito permet de "différentier" une fonction d'un processus stochastique .
iii) Le troisième chapitre introduit un premier modèle d'EDS utile en finance : les équations différentielles stochastiques linéaires. C'est un premier exemple de diffusion.
iv) Puis on aborde les changements de probabilité et problèmes de martingales. En effet, on se place en théorie financière en général sous l'hypothèse (ou bien on cherche à vérifier cette hypothèse !) qu'il existe un espace de probabilité où les prix sont tous des martingales, donc d'espérance constante, on dit alors que les prix sont "neutres au risque". Donc, on introduit le théorème de Girsanov, les problèmes de martingales et le théorème de représentation des martingales, c'est à dire que sous des hypothèses convenables, toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable est la valeur en T d'une martingale.
v) On utilise enfin ces outils pour modéliser des marchés d'actifs financiers, avec le problème de l'évaluation d'un porte-feuille optimal, du moins pour un petit porteur.
vi) En appendice, on propose un aperçu du problème d'arrêt optimal, en temps discret, avec application aux options américaines.

0.3 Définitions utiles et rappels

espace de probabilité,
tribu, σ-algèbre,
tribu des boréliens sur R, R^d.
filtration, espace de probabilité filtré.
variable aléatoire,
processus aléatoire.
notion de trajectoire, continue à droite (càd) avec limite à gauche (làg).
processus adapté à une filtration.

0.4 Notions de convergence

cf. Module 2, chapitre 1

Définition 0.1. *Soit $\mathbb{P}_n$ une suite de probabilités sur un espace métrique (E, d) muni de ses boréliens $\mathcal{B}$, et soit $\mathbb{P}$ mesure sur $\mathcal{B}$. On dit que la suite $\mathbb{P}_n$* **converge faiblement** *vers $\mathbb{P}$ si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $\mathbb{P}_n(f) \to \mathbb{P}(f)$.*

Définition 0.2. *Soit X_n une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ à valeurs dans un espace métrique $(E, d, \mathcal{B})$. On dit que la suite X_n* **converge en loi** *vers X si la suite de mesures $\mathbb{P}_n X_n^{-1}$ converge faiblement vers $\mathbb{P}X^{-1}$, c'est à dire si pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E)$, $\mathbb{P}_n(f(X_n)) \to \mathbb{P}(f(X))$.*

- convergence dans L^p,
- convergence presque sûre,
- convergence en probabilité.

Proposition 0.3. *La convergence presque sûre entraine la convergence en probabilité.*

Proposition 0.4. *La convergence dans L^p entraine la convergence en probabilité.*

- théorèmes de Lebesgue : convergence monotone, majorée.
- limite sup et limite inf d'ensembles.

Théorème 0.5. *de Fatou : Pour toute suite d'événements (A_n)*

$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n).$$

Théorème 0.6. *de Borel-Cantelli :*

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

Si les événements A_n sont indépendants et si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$.

Définition 0.7. *Une famille de variables aléatoires* $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ *est* **uniformément intégrable** *si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_\alpha \int_{\{|U_\alpha|\geq n\}} |U_\alpha| d\mathbb{P} = 0.$$

Théorème 0.8. *On a les équivalences*

(i) La famille $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ *est uniformément intégrable*

(ii) $\sup_\alpha E[|U_\alpha|] < \infty$ *et* $\forall\varepsilon, \exists\delta > 0 : A \in \mathcal{A}$ *et* $\mathbb{P}(A) \leq \delta \Rightarrow E[|U_\alpha|1_A] \leq \varepsilon$.

RAPPEL : une suite qui converge presque sûrement et qui forme une famille uniformément intégrable converge aussi dans L^1.

0.5 Espérance conditionnelle

cf. Module 2, chapitre 2 et module 3

Définition 0.9. *Soit* X *variable aléatoire de l'espace* $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\mathcal{B}$ *un sous tribu de* $\mathcal{A}$. $E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})$ *est l'unique variable aléatoire de* $L^1(\mathcal{B})$ *telle que*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \int_B X d\mathbb{P} = \int_B E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B}) d\mathbb{P}.$$

Corollaire 0.10. *Si* $X \in L^2(\mathcal{A})$, $\|X\|_2^2 = \|E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})\|_2^2 + \|X - E_{\mathbb{P}}(X/\mathcal{B})\|_2^2$.

0.6 Temps d'arrêt

C'est une notion relative à un espace de probabilité filtré.

Définition 0.11. *Une variable aléatoire* $T : (\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B})$ *est un* **temps d'arrêt** *si pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$, *l'événement* $\{\omega/T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Exemples :

- une constante est un temps d'arrêt,

- si O est un ouvert de $\mathcal{A}$ et le processus X continu, alors

$$T_O(\omega) = \inf\{t, X_t(\omega) \in O\}$$

est un temps d'arrêt, appelé le temps d'atteinte.

Définition 0.12. *Soit* T *un temps d'arrêt de la filtration* $\mathcal{F}_t$ *L'ensemble* $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{A}, A \cap \{\omega/T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *est appelée la* **tribu arrêtée** *en* T.

Définition 0.13. *Le processus* $X_{.\wedge T}$ *s'appelle le "processus arrêté en* T*" souvent noté* X^T.

0.7 Martingales

cf. Module 2 chapitre 2 pour le cas discret, chpaitre 5 pour le cas continu, plus Module 3 (cf. [30] pages 8 à 12 ; [20] pages 11 à 30.)

Définition 0.14. *Soit un processus X réel adapté. C'est une* **martingale** *(resp sur/sous) si*

(i) $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \forall t \in \mathbb{R}^+$,

(ii) $\forall s \leq t, E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s$. *(resp $\leq, \geq$.)*

Lemme 0.15. *Soit X une martingale et φ une fonction convexe telle que pour tout t $\phi(X_t) \in L^1$, alors $\varphi(X)$ est une sous-martingale ; si φ est concave, alors $\varphi(X)$ est une sur-martingale.*

Preuve en exercice.

Définition 0.16. *On dit que la martingale X est* **fermée** *par $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ si $X_t = E[Y/\mathcal{F}_t]$.*

Proposition 0.17. *Toute martingale admet une modification càdlàg (cf [30])*

Théorème 0.18. *de convergence des martingales : Soit X une sur (ou sous)-martingale càd telle que $\sup_t E[|X_t|] < \infty$. Alors $\lim_{t\to\infty} X_t$ existe presque sûrement et appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*
Si X est fermée par Z, elle l'est aussi par $\lim_{t\to\infty} X_t$ notée X_∞ qui vaut $E[Z/\vee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t]$.

Corollaire 0.19. *Une surmartingale minorée converge presque sûrement à l'infini.*

Théorème 0.20. *Soit X une martingale càd uniformément intégrable ; alors la limite Y presque sûre de X_t quand t tend vers l'infini existe et appartient à L^1. De plus $X_t = E[Y/\mathcal{F}_t]$.*

Théorème 0.21. *Soit X une martingale. X est uniformément intégrable si et seulement si*

(i)X_t converge presque sûrement vers Y appartenant à L^1 quand t tend vers l'infini et $\{X_t, t \in \overline{\mathbb{R}^+}\}$ est une martingale.

ou

(ii) X_t converge vers Y dans L^1 quand t tend vers l'infini.

Théorème 0.22. *de Doob : Soit X une sous-martingale càd de variable terminale X_∞ et deux temps d'arrêt S et $T, S \leq T$. Alors :*

$$X_S \leq E[X_T/\mathcal{F}_S] \quad \mathbb{P}- \text{ presque sûrement.}$$

Preuve : pages 19-20 de [20].

Définition 0.23. *Le processus croissant* $\langle M\rangle$ *est défini au temps t par :*

$$\langle M\rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} proba \sum_{t_i\in\pi}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

où π *sont les partitions de* $[0,t]$.

On verra dans le chapitre suivant que si M est le mouvement brownien B alors $\langle B\rangle_t = t$.

Remarque 0.24. *Les martingales de carré intégrable admettent un crochet.*

Proposition 0.25. $\langle M\rangle_t$ *est l'unique processus continu croissant adapté tel que* $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ *est une martingale.*

Corollaire 0.26. *Pour tout couple* $s \leq t$, $E[(M_t - M_s)^2]/\mathcal{F}_s] = E[\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s/\mathcal{F}_s]$.

Cette proposition sert le plus souvent de définition au crochet et alors 0.23 en est une conséquence.

Ce qui suit est pour la culture générale, mais hors programme

Définition 0.27. *Soit* X *et* Y *deux processus. On dit que* X *est une* **modification** *de* Y *si :*

$$\forall t \geq 0, \mathbb{P}\{X_t = Y_t\} = 1.$$

On dit que qu'ils sont **indistinguables** *si presque sûrement leurs trajectoires coïncident :*

$$\mathbb{P}\{X_t = Y_t, \forall t \geq 0\} = 1.$$

Remarque 0.28. *La deuxième notion est plus forte que la première.*

Définition 0.29. *On dit qu'un processus* X *est "progressivement mesurable" pour la filtration* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ *si* $\forall t \geq 0, \forall A \in \mathcal{B}(R)$ *:*

$$\{(s,\omega)/0 \leq s \leq t \ ; \ X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t,$$

c'est à dire que l'application sur $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) : (s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ *est mesurable.*

Proposition 0.30. *(cf [20], 1.12) Si* X *est un processus mesurable adapté, il admet une modification progressivement mesurable.*

Preuve : voir Meyer 1966, page 68.

Proposition 0.31. *Soit* X *un processus* $\mathcal{F}$*-progressivement mesurable et* T *un temps d'arrêt pour la filtration* $(\mathcal{F}_t)$*. Alors*
(i) l'application $\omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ *est* $\mathcal{F}_T$*-mesurable*
(ii) et le processus $t \mapsto X_{t\wedge T}$ *est* $\mathcal{F}$*-adapté.*

Preuve : (i) le fait que X est progressivement mesurable dit que pour tout borélien A,

$$\forall t,\ \{(s,\omega),\ 0 \leq s \leq t,\ X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t.$$

Soit alors A et $\{\omega : X_{T(\omega)}(\omega) \in A\} \cap \{\omega : T(\omega \leq t\} = \{\omega : X_{T(\omega)\wedge t}(\omega) \in A\} \cap \{T \leq t\}$.

Comme T est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, le deuxième événement est bien dans $\mathcal{F}_t$, et par hypothèse de mesurabilité progressive, le premier aussi.

(ii) Cette deuxième assertion montre en plus que X^T est lui aussi $\mathcal{F}$-adapté.

Proposition 0.32. *(cf [20], 1.13) Si X est un processus mesurable adapté et admet des trajectoire càd ou càg, il est progressivement mesurable.*

Preuve : On définit

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{(k+1)t2^{-n}}(\omega),\ s \in]\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n}],\ X_0^{(n)}(\omega) = X_0(\omega)\ ;\ k = 0, \cdots, 2^n - 1.$$

Il est clair que l'application $(s,\omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable. Par continuité à droite, la suite $X_s^{(n)}(\omega)$ converge vers $X_s(\omega)$ pour tout (s,ω) et donc la limite est aussi $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable.

Définition 0.33. *(page 33 [30].) Soit X un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une* **martingale locale** *s'il existe une suite de temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini telle que pour tout n le processus arrêté X^{T_n} soit une martingale.*

La technique qui consiste à arrêter un processus en un temps d'arrêt convenable permettra de récupérer des martingales uniformément intégrables donc facilement utilisables. On obtient des résultats vrais pour tout n puis l'on passe à la limite en utilisant les théorèmes de Lebesgue (convergences majorées ou monotones). C'est pourquoi l'on a introduit ces deux outils : temps d'arrêt et martingales locales. L'ensemble de ces dernières sera noté $\mathcal{M}_{loc}$.

Théorème 0.34. *(cf [30], th. 44, page 33) Soit $M \in \mathcal{M}_{loc}$ et T temps d'arrêt tel que M^T est uniformément intégrable.*

(i) $S \leq T \Rightarrow M^S$ uniformément intégrable.

(ii) $\mathcal{M}_{loc}$ est un espace vectoriel réel.

(iii) si M^S et M^T sont uniformément intégrables, alors $M^{S\wedge T}$ est uniformément intégrable.

Notation :

$$M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|\ ;\ M^* = \sup_{0 \leq s} |M_s|.$$

Théorème 0.35. *(cf [30], th. 47, page 35) Si $M \in \mathcal{M}_{loc}$ telle que $E[M_t^*] < \infty \forall t$, alors M est une "vraie" martingale.*
Si de plus $E[M^*] < \infty$, alors M est uniformément intégrable.

Preuve :
(i) $\forall s \leq t, |M_s| \leq M_t^*$ élément de L^1. La suite $T_n \wedge t$ est croissante vers t et

$$E[M_{T_n \wedge t}/\mathcal{F}_s] = M_{T_n \wedge s}.$$

On passe à la limite presque sûre dans cette égalité et le théorème de convergence dominée permet de passer à la limite dans L^1.
(ii) M est donc une martingale et M^* est dans L^1. Le théorème de convergence des martingales montre la convergence presque sûre de M_t vers M_∞. Il reste à montrer l'uniforme intégrabilité (se servir de la définition équivalente de l'uniforme intégrabilité).

1 Introduction du processus de Wiener

cf. Module 1 chapire 3, Module 2 chapitre 4 et Module 3.
[20] pages 21-24 ; [30] pages 17-20.

Historiquement, il s'agit du mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau, observées par Robert BROWN en 1828. Il en résulte une dispersion des micro-particules dans l'eau, on dit aussi une “diffusion" du pollen dans l'eau. De fait, ce mouvement sert actuellement à beaucoup d'autres modélisations de phénomènes dynamiques :

- particules microscopiques en suspension,

- prix d'actions en bourse,

- erreurs de mesures physiques,

- comportement asymptotique de files d'attente,

- tout comportement dynamique avec part aléatoire (équations différentielles stochastiques).

Définition 1.1. *Un* **mouvement brownien** *ou* **processus de Wiener** *est un processus sur un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *adapté, continu, à valeurs vectorielles tel que :*

(i) $B_0 = 0$, *$\mathbb{P}$-presque sûrement sur* Ω,

(ii) $\forall s \leq t, B_t - B_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $(t-s)I_d$.

En conséquence, si l'on a une suite de réels $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$, la suite $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_i$ est un vecteur gaussien centré de matrice de variance-covariance diagonale, de diagonale $(t_i - t_{i-1})$. On dit que B est un **processus à accroissements indépendants**.

Le premier problème que nous allons résoudre est celui de l'existence d'un tel processus. Il y a plusieurs constructions classiques.

1.1 Existence fondée sur une construction trajectorielle, lemme de Kolmogorov

([20] 2.2 ; [30] pages 17-20.) Très grossièrement, pour avoir une idée mais sans entrer dans les détails des démonstrations longues, délicates et techniques, on procède de la façon suivante. Soit $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d), B(t, \omega) = \omega(t)$ les applications “coordonnées" que l'on appelle **trajectoires**. On munit Ω de la plus petite tribu $\mathcal{A}$ qui rend mesurable $\{B_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ et de la filtration “naturelle" engendrée par le processus B : $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$. Sur $(\Omega, \mathcal{A})$ on montre qu'il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, \cdots, t_n \in \mathbb{R}^+, B_1, \cdots, B_n$ boréliens de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\{\omega/\omega(t_i) \in B_i \forall i = 1, \cdots, n\} = \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} p(t_1, 0, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_1..dx_n,$$

où $p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$.
Il s'agit alors de montrer :

- ceci définit bien une probabilité sur la tribu $\mathcal{A}$,

- sous cette probabilité, le processus $t \mapsto \omega(t)$ est bien un mouvement brownien au sens de la définition initiale.

De fait, ceci définit une probabilité sur les boréliens d'un autre espace : $\Omega' = \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ dont Ω n'est malheureusement pas un borélien. Alors, on choisit plutôt $\Omega = \mathcal{A}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ et on utilise le théorème de Kolmogorov (1933),

Définition 1.2. *Une famille consistante de distribution de dimension finie $(Q_t, t$ n-uple $\mathbb{R}^+)$ est une famille de mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que*

- si $s = \sigma(t), s$ et $t \in (\mathbb{R}^+)^n$ et σ permutation des n premiers entiers, si $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, alors $Q_t(A_1, \cdots, A_n) = Q_s(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(n)})$

- et si $u = (t_1, \cdots, t_{n-1})$, et $t = (t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n), \forall t_n, Q_t(A_1, \cdots, A_{n-1}, \mathbb{R}) = Q_u(A_1, \cdots, A_{n-1})$.

Théorème 1.3. *(cf [20] page 50 : Kolmogorov, 1933) Soit $(Q_t, t \in (\mathbb{R}^+)^n)$ une famille consistante de distribution de dimension finie.*
Alors, il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ telle que pour tout $B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$Q_t(B_1, \cdots, B_n) = \mathbb{P}\{\omega/\omega(t_i) \in B_i, i = 1, \cdots, n\}.$$

On applique ce théorème à la famille de mesures

$$Q_t(A_1, \cdots, A_n) = \int_{\Pi_i A_i} p(t_1, 0, x_1) \cdots, p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx.$$

Puis on montre l'existence d'une modification continue du processus des applications coordonnées de Ω (Kolmogorov-Centsov, 1956), pour passer à l'existence d'une modification continue du processus canonique :

Théorème 1.4. *(Kolmogorov-Centsov, 1956,cf [20] page 53, [30] page 171) Si X processus aléatoire réel sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifie :*

$$\exists \alpha, \beta, C > 0 : E|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta},\ 0 \leq s, t \leq T,$$

alors X admet une modification continue $\tilde{X}$ qui est localement $\gamma-$Hölder continue :

$$\exists \gamma \in]0, \frac{\beta}{\alpha}[, \exists h \text{ variable aléatoire } > 0, \exists \delta > 0 \ : \\ \mathbb{P}\{\sup_{0<t-s<h; s,t \in [0,T]} |\tilde{X}_t - \tilde{X}_s| \leq \delta |t-s|^\gamma\} = 1.$$

Remarquons que ce théorème est vrai aussi pour les champs indexés par $t \in \mathbb{R}^d$.

1.2 Deuxième construction du mouvement brownien, cas $d = 1$

On prend ici à nouveau $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ sur lequel on définit :

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \sup_{0\leq t\leq n} (|\omega_1(t) - \omega_2(t)| \wedge 1)$$

c'est à dire la distance de PROHOROV.

Remarque 1.5. *Cette métrique induit une topologie qui est celle de la convergence uniforme sur tout compact en probabilité. $\Omega = \mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est complet pour cette norme (cf. [30], page 49.)*

Sur Ω, on appelle **ensembles cylindriques de dimension finie** des sous-ensembles de la forme $A = \{\omega/(\omega(t_1), \cdots, \omega(t_n)) \in B\}$ où B est borélien de $\mathbb{R}^n$ et t un n-uple de réels positifs. On munit alors Ω de la tribu engendrée par ces ensembles et l'on montre :

Proposition 1.6. *(exercice 4.2 de [20] page 60) Soit $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par les ensembles cylindriques relatifs à des $n-$uples (t_i) tels que pour tout i, $t_i \leq t$.*

- $\mathcal{G} = \vee_t \mathcal{G}_t$ coïncide avec les boréliens de l'espace (Ω, ρ).

- Si

$$\begin{array}{rcl} \varphi_t : \Omega & \rightarrow & \Omega \\ \omega & \mapsto & (s \mapsto \omega(s \wedge t)) \end{array}$$

alors $\mathcal{G}_t = \varphi_t^{-1}(\mathcal{G})$ c'est à dire les boréliens de $\Omega^t = \mathcal{C}([0,t], \mathbb{R})$.

La construction est fondée sur le théorème de la limite centrale.

Théorème 1.7. *Soit $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, de variance σ^2. Alors,*

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \text{ converge en loi vers } X \text{ de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

C'est cet outil qui permettra de construire explicitement le mouvement brownien ; le théorème suivant s'appelle le **théorème d'invariance de Donsker**.

Théorème 1.8. *Soit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, de variance $\sigma^2 > 0$ et la famille de processus continus :*

$$X_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} [\sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}].$$

Soit $\mathbb{P}^n$ la mesure induite par X^n sur $(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \mathcal{G})$. Alors $\mathbb{P}^n$ converge faiblement vers $\mathbb{P}^*$, mesure sous laquelle $B_t(\omega) = \omega(t)$ est un mouvement brownien standard sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

La preuve prend sept pages (cf. [20]) et s'appuye sur les outils topologiques suivants :

- convergence faible et en loi,

- familles tendues et relative compacité,

qui sont l'objet des deux sous-sections suivantes.

1.2.1 Familles tendues et relative compacité

Définition 1.9. *Soit* (S, ρ) *un espace métrique et* Π *une famille de probabilités sur* $(S, \mathcal{B}(S))$. *On dit que* Π *est* **relativement compacte** *si de toute suite de* Π *on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

On dit que Π *est* **tendue** *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact } \subset S \text{ tel que } \mathbb{P}(K) \geq 1 - \varepsilon, \ \forall \mathbb{P} \in \Pi.$$

De façon analogue, une famille de variables aléatoires $\{X_\alpha : (\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha) \ ; \ \alpha \in A\}$ *est dite* **relativement compacte ou tendue** *si la famille de probabilités associées sur* $(S, \mathcal{B}(S))$ *est relativement compacte ou tendue.*

On admet le théorème suivant.

Théorème 1.10. *(théorème de Prohorov, 1956, [20] 4.7) Soit* Π *une famille de probabilités sur* $(S, \mathcal{B}(S))$. *Alors* Π *est relativement compacte si et seulement si elle est tendue.*

L'intérêt de ce théorème est que la relative compacité permet d'extraire une suite faiblement convergente, mais que la propriété de tension est plus facile à vérifier.

Définition 1.11. *Sur* $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$, *on appelle* **module de continuité** *sur* $[0, T]$ *la quantité*

$$m^T(\omega, \delta) = \max_{|s-t| \leq \delta, 0 \leq s,t \leq T} |\omega(s) - \omega(t)|.$$

Exercice : on peut montrer que ce module est continu sur l'espace métrique (Ω, ρ), ρ est la distance de Prohorov, croissant en δ, et que $\forall \omega, \lim_{\delta \to 0} m^T(\omega, \delta) = 0$.

Le théorème suivant est un critère de tension (donc de relative compacité) pour une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$.

Théorème 1.12. *([20] page 63, 4.10) Une suite de probabilités* $(\mathbb{P}_n)$ *est tendue si et seulement si :*
(i)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n \{\omega \ : \ |\omega(0)| > \lambda\} = 0.$$

(ii)

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}_n \{\omega \ : \ m^T(\omega, \delta) > \varepsilon\} = 0, \forall T > 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve Elle s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 1.13. *([20], 4.9 page 62 : théorème d'Arzelà-Ascoli) Soit* $A \subset \Omega$. *Alors* $\bar{A}$ *est compact si et seulement si*

$$\sup_{\{\omega \in A\}} |\omega(0)| < \infty \text{ et } \forall T > 0, \lim_{\delta \to 0} \sup_{\{\omega \in A\}} m^T(\omega, \delta) = 0.$$

Preuve : pages 62-63 de [20].

Puis, pour l'étude de la convergence des processus X^n définis dans le théorème de Donsker (1.8), on introduit des notions de convergence propres aux processus. La convergence en loi des processus "dans leur ensemble" est assez difficile à obtenir. On introduit une notion plus facile à vérifier.

Définition 1.14. *On dit que la suite de processus X^n* **converge en distribution de dimension finie** *vers le processus X si pour tout d et tout d-uple $(t_1, \cdots, t_d)$, $(X^n_{t_1}, \cdots, X^n_{t_d})$ converge en loi vers $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_d})$*

Pour prouver une telle convergence, il suffit d'utiliser les fonctions caractéristiques de tels d-uples.

Proposition 1.15. *Si la suite de processus X^n converge en distribution vers le processus X, alors elle converge en distribution de dimension finie vers X.*

Preuve : en effet, $\forall d$ et pour tout d-uple, l'application $\pi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ telle que $\pi(\omega) = (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_d))$ est continue pour la distance ρ et $\pi \circ X^n = (X^n_{t_1}, \cdots, X^n_{t_d})$ converge en loi vers $\pi \circ X$ puisque la continuité préserve la convergence en loi. •

Attention ! la réciproque n'est pas toujours vraie !! On peut voir en exercice le contre-exemple suivant (2, Feuille 3) :

$$X^n_t = nt1_{[0,\frac{1}{2n}]}(t) + (1 - nt)1_{[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]}(t)$$

converge en distribution de dimension finie vers 0 mais pas en loi.

En revanche, elle est vraie dans le cas d'une suite tendue.

Théorème 1.16. *(4.15 [20]) Soit une suite de processus X^n constituant une famille tendue convergeant en distribution de dimension finie vers un processus X. Alors, $\mathbb{P}_n$ loi de X^n sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ converge faiblement vers une mesure $\mathbb{P}$ sous laquelle le processus $B_t(\omega(t) = \omega(t)$ est limite en distribution de dimension finie de la suite X^n.*

Preuve : elle s'appuie sur le théorème de Prohorov et l'exercice 2 de la Feuille 2. La famille est tendue donc relativement compacte et il existe $\mathbb{P}$ limite faible d'une sous-suite de la famille. Soit Q une limite faible d'une autre sous-suite et supposons $Q \neq \mathbb{P}$. L'hypothèse donne que $\forall d, \forall t_1, \cdots, t_d, \forall B$ borélien de $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}\{\omega : (\omega(t_i)) \in B\} = Q\{\omega : (\omega(t_i)) \in B\}$$

puisqu'il y a convergence en distribution de dimension finie. Ceci veut dire que $\mathbb{P}$ et Q coïncident sur les événements cylindriques, donc sur $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent. Donc toute sous-suite convergente converge faiblement vers cette unique probabilité $\mathbb{P}$.

Supposons maintenant que $\mathbb{P}_n$ ne converge pas faiblement vers $\mathbb{P}$. Ceci signifie qu'il existe $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^+)$ telle que la suite bornée réelle $\mathbb{P}_n(f)$ ne converge pas vers $\mathbb{P}(f)$. De toutes façons, il existe au moins une suite extraite $\mathbb{P}_{n_k}(f)$ convergente, et de limite différente de $\mathbb{P}(f)$. D'autre part, puisque la famille est tendue, de la famille $\mathbb{P}_{n_k}$ on peut extraire une suite faiblement convergente, qu'on appelle encore $\mathbb{P}_{n_k}$. Mais pour celle-ci, la limite, on l'a vu ci-dessus, est nécessairement $\mathbb{P}(f)$, d'où la contradiction et la preuve du résultat.•

1.2.2 Principe d'invariance de Donsker et mesure de Wiener

On montre dans cette section le théorème qui construit le mouvement brownien. On étudie la suite de processus définie dans le théorème principal à l'aide de variables aléatoires indépendantes $(\xi_j, j \geq 1)$. Il faut :

- montrer la convergence de la suite de processus $(X_n, n \geq 0)$,

- montrer les propriétés de la limite conformément à la définition initiale. Le plan de la preuve est donc :

1) cette suite converge en distribution de dimension finie vers un processus qui a les propriétés du mouvement brownien,

2) cette suite est tendue et l'on peut appliquer le théorème 1.16.

1)

Proposition 1.17. *(cf 4.17 [20]) Soit :*

$$X_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}).$$

Alors, $\forall d, \forall (t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^+$, *on a la convergence en loi :*

$$(X_{t_1}^n, \cdots, X_{t_d}^n) \longrightarrow_{\mathcal{D}} (B_{t_1}, \cdots, B_{t_d})$$

où B *vérifie les propriétés définissant le mouvement brownien.*

Preuve : on fait une première simplification en utilisant l'exercice 3 de la feuille 3 avec :

$$S_t^n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} \xi_j \text{ et } S_{\underline{t}}^n = (S_{t_1}^n, \cdots, S_{t_d}^n).$$

Remarquons :

$$X_t^n = S_t^n + \frac{nt - [nt]}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on obtient :

$$\mathbb{P}\{\| X_{\underline{t}}^n - S_{\underline{t}}^n \| > \varepsilon\} \leq \frac{d}{n\sigma^2\varepsilon^2} \| \xi \|^2 \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini. L'exercice montre alors qu'il suffit de montrer la convergence en loi de $S_{\underline{t}}^n$.

Remarquons que $(S_{\underline{t}}^n, t \geq 0)$ est un processus à accroissements indépendants ; si les (t_i) sont rangés en ordre croissant, les d variables aléatoires $(S_{t_1}^n, S_{t_2}^n - S_{t_1}^n, \cdots, S_{t_d}^n - S_{t_{d-1}}^n)$ sont indépendantes. L'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$: $x \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \cdots, \sum_i x_i)$ est continue et la convergence en loi est preservée par la continuité. Il suffit donc d'examiner la convergence en loi du d-uplet des accroissements ce que l'on fait à l'aide de la fonction caractéristique :

$$(1) \qquad \phi^n(u_1, \cdots, u_d) = E[e^{i\sum_j u_j(S^n_{t_j} - S^n_{t_{j-1}})}] = \Pi_j E[e^{\frac{iu_j}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{[nt_{j-1}]<k\leq[nt_j]}\xi_k}].$$

Pour tout j, en notant $k_j = [nt_j]$, chaque facteur se récrit :

$$E\left[e^{iu_j\sqrt{\frac{k_j-k_{j-1}}{n}}\frac{\sum_k \xi_k}{\sigma\sqrt{k_j-k_{j-1}}}}\right].$$

Or, $\frac{k_j-k_{j-1}}{n} = \frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n}$ converge vers $(t_j - t_{j-1})$ lorsque n tend vers l'infini et la variable aléatoire $\frac{\sum_{[nt_{j-1}]<k\leq[nt_j]}\xi_k}{\sigma\sqrt{k_j-k_{j-1}}}$ converge en distribution vers un gaussienne centrée réduite (loi des grands nombres) et donc sa fonction caractéristique converge vers $e^{-t^2/2}$ et le $j$ème facteur vers $e^{-\frac{1}{2}u_j^2(t_j-t_{j-1})}$. La loi limite admet donc la fonction caratéristique $\phi(u) = e^{-\frac{1}{2}\sum_j u_j^2(t_j-t_{j-1})}$ qui est exactement celle d'un d-uplet $(B_{t_1}, (B_{t_2} - B_{t_1}), \cdots, (B_{t_d} - B_{t_{d-1}}))$ issu d'un mouvement brownien. On a donc à la fois la loi du processus limite et la propriété de processus à accroissements indépendants.

2) Il reste enfin à montrer que la famille est tendue, ce qui résulte des deux lemmes suivants :

Lemme 1.18. *(cf [20], 4.18) Soit $(\xi_j, j \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées, centrées de variance* 1, *et $S_j = \sum_{k=1}^{j}\xi_k$. Alors :*

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{\delta\to 0}\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{\delta}\mathbb{P}\{max_{\{1\leq j\leq[n\delta]>+1\}}|\xi_j| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} = 0.$$

Lemme 1.19. *(cf [20], 4.19) Sous les mêmes hypothèses,*

$$\forall T > 0, \ \lim_{\delta\to 0}\overline{\lim}_{n\to\infty}\mathbb{P}\{max_{\{1\leq j\leq[n\delta]>+1\}}max_{\{1\leq k\leq[nT]>+1\}}|S_{j+k} - S_j| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} = 0.$$

Preuve du théorème d'invariance de Donsker :
Avec la proposition 1.17 ci-dessus, et le théorème 1.16, il suffit de montrer que la famille est tendue. On utilise ici la caractérisation donnée dans le théorème 1.12. Puisqu'ici $X_0^n = 0 \ \forall n$, il suffit de vérifier le deuxième critère :

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_n \mathbb{P}\{max_{|s-t|\leq\delta, 0\leq s,t\leq T}|X_s^n - X_t^n| > \varepsilon\} = 0.$$

. On peut remplacer $\sup_n$ par $\overline{\lim}_n = \inf_m \sup_{n\geq m}$ puisque pour m borné on peut rendre vides des événements en prenant δ assez petit : $(X^n, 0 \leq n \leq m)$ est continue sur $[0, T]$ donc uniformément continue.

$$\{max_{|s-t|\leq\delta,0\leq s,t\leq T}|X_s^n - X_t^n| > \varepsilon\} =$$
$$\{max_{|s-t|\leq\delta,0\leq s,t\leq T}|S_{j_s} - S_{j_t} + \frac{n_s - j_s}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{j_s+1} - \frac{n_t - j_t}{\sigma\sqrt{n}}\xi_{j_t+1}| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\},$$

où $j_s = [ns]$, et si l'on note $j_s = k$ et $j_t = k + j$ en supposant $s \leq t$, cet ensemble est contenu dans :

$$\{max_{|s-t|\leq\delta,0\leq s,t\leq T}|S_{j_s} - S_{j_t}| > \varepsilon\sigma\sqrt{n}\}$$

et le lemme 1.19 permet de conclure. •

Définition 1.20. *La mesure $\mathbb{P}$ limite faible des probabilités $\mathbb{P}^n$ est* **la** *mesure de Wiener sur Ω.*

1.3 Propriétés des trajectoires du mouvement brownien

1.3.1 Processus gaussien

Définition 1.21. *Un processus X est dit* **gaussien** *si $\forall d, \forall(t_1, \cdots, t_d)$ réels positifs, le vecteur $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_d})$ suit une loi gaussienne. Si la loi de $(X_{t+t_i}; i = 1, \cdots, d)$ ne dépend pas de t, on dit que le processus est* **stationnaire**.

On appelle **covariance** *du vecteur X la matrice*

$$\rho(s,t) = E[(X_s - E(X_s))(X_t - E(X_t))^T], \;\; s,t \geq 0.$$

Proposition 1.22. *Le mouvement brownien B est un processus gaussien continu centré de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$.*

Réciproquement, tout processus continu gaussien continu centré de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$ est un mouvement brownien.

Le mouvement brownien converge "en moyenne" vers zéro :

$$\frac{B_t}{t} \to 0$$

presque sûrement lorsque t tend vers l'infini.

Preuve en exercices. Le troisième point est en quelque sorte une "loi des grands nombres". •

On peut obtenir d'autres mouvements browniens par des transformations standard en changeant éventuellement aussi la filtration.

(i) changement d'échelle (scaling) : $(\frac{1}{\sqrt{c}}B_{ct}, \mathcal{F}_{ct})$.

(ii) inversion du temps : $(Y_t, \mathcal{F}_t^Y)$, avec $Y_t = tB_{\frac{1}{t}}$ si $t \neq 0$, $Y_0 = 0$ et $\mathcal{F}_t^Y = \sigma\{Y_s, s \leq t\}$.

(iii) retournement du temps : $(Z_t, \mathcal{F}_t^Z)$, avec $Z_t = B_T - B_t$ et $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\{Z_s, s \leq t\}$.

(iv) symétrie : $(-B_t, \mathcal{F}_t)$.

Il suffit de vérifier à chaque fois que l'on a un processus continu, adapté, qui vérifie la propriété caractéristique du mouvement brownien ou que c'est un processus gaussien de covariance $\rho(s,t) = s \wedge t$. Le seul un peu difficile est le (ii) (exercice).

Notation : $\pi_n = (t_0 = 0, \cdots, t_n = t)$ est une "partition" de $[0,t]$, on note $\|\pi_n\| = \sup_i\{t_i - t_{i-1}\}$, appelé le "pas" de π_n.

1.3.2 Ensemble des zéros

Il s'agit de $\mathcal{X} = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : B_t(\omega) = 0\}$. Si l'on fixe une trajectoire ω, on note $\mathcal{X}_\omega = \{t \in \mathbb{R}^+ : B_t(\omega) = 0\}$.

Théorème 1.23. *(cf [20] 9.6, p. 105) $\mathbb{P}$-presque sûrement en ω*

(i) la mesure de Lebesgue de $\mathcal{X}_\omega$ est nulle,

(ii) $\mathcal{X}_\omega$ est fermé non borné,

(iii) $t = 0$ est un point d'accumulation de $\mathcal{X}_\omega$,

(iv) $\mathcal{X}_\omega$ n'a pas de point isolé, donc est dense dans lui même.

Preuve en exercice, difficile.

1.3.3 Variations des trajectoires

(cf [20] pb 9.8 p. 106 et 125)

Théorème 1.24. *(cf [30] 28 p. 18)*
Soit π_n une suite de partitions de l'intervalle $[0,t]$ telle que $\pi_n \subset \pi_m$ si $n \leq m$ et le pas de π_n, noté $\|\pi_n,\|$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini. On pose
$\pi_n(B) = \sum_{t_i \in \pi_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$. Alors $\pi_n(B)$ converge vers t dans $L^2(\Omega)$, et presque sûrement si $\sum_n \| \pi_n \| < \infty$, quand n tend vers l'infini.

Preuve : Soit $z_i = (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)$; $\sum_i z_i = \pi_n(B) - t$. C'est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées puisque $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ suit une loi gausienne de moyenne nulle et de variance $t_{i+1} - t_i$. On peut aussi calculer l'espérance de z_i^2 :

$$E[z_i^2] = E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i)]^2 = E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^4 - 2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2(t_{i+1} - t_i) + (t_{i+1} - t_i)^2].$$

Connaissant les moments de la loi gaussienne, on obtient :

$$E[z_i^2] = 2(t_{i+1} - t_i)^2.$$

L'indépendance entre les z_i montre que $E[(\sum_i z_i)^2] = \sum_i E[(z_i)^2]$ ce qui vaut $2\sum_i (t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2\|\pi_n\|.t$, qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Ceci entraine la convergence dans $L^2(\Omega)$ (donc en probabilité) de $\pi_n(B)$ vers t.

Si de plus $\sum_n \| \pi_n \| < \infty$, $\mathbb{P}\{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} 2 \| \pi_n \| t$. Donc la série $\sum_n \mathbb{P}\{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\}$ converge et le lemme de Borel-Cantelli montre que

$$\mathbb{P}[\overline{\lim}_n \{|\pi_n(B) - t| > \varepsilon\}] = 0,$$

soit :

$$\mathbb{P}[\cap_n \cup_{m \geq n} \{|\pi_m(B) - t| > \varepsilon\}] = 0, \forall \varepsilon > 0, \text{ presque sûrement } \cup_n \cap_{m \geq n} \{|\pi_m(B) - t| \leq \varepsilon\} = \Omega,$$

ce qui traduit la convergence presque sûre de $\pi_n(B)$ vers t. •

Théorème 1.25. *(cf [20] 9.9, p.106)*

$$\mathbb{P}\{\omega : t \mapsto B_t(\omega) \text{ } est\ monotone\ sur\ un\ intervalle\} = 0.$$

Preuve : on note $F = \{\omega :$ il existe un intervalle où $t \mapsto B_t(\omega)$ est monotone$\}$. Ceci se traduit par :

$$F = \cup_{s,t \in Q, 0 \leq s < t}\{\omega : u \mapsto B_u(\omega) \text{ est monotone sur } (s,t)\}.$$

On fixe s et t dans Q avec $0 \leq s < t$ et l'on étudie l'événement

$$A = \{\omega : u \mapsto B_u(\omega) \text{ est croissante sur}(s,t)\}.$$

Alors, $A = \cap_n A_n$ où $A_n = \cap_{i=0}^{n-1}\{\omega : B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \geq 0\}$ avec $t_i = s + (t-s)\frac{i}{n}$. Par l'indépendance des accroissements, $\mathbb{P}(A_n) = \Pi_i \mathbb{P}\{\Delta_i B \geq 0\} = \frac{1}{2^n}$. Pour tout n $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A_n)$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$ pour tout s et t ce qui montre $\mathbb{P}(F) = 0$. •

Théorème 1.26. *(cf [20] 9.18, p.110 : Paley-Wiener-Zygmund, 1933)*

$$\mathbb{P}\{\omega : \exists t_0 \ t \mapsto B_t(\omega) \ \textit{différentiable en } t_0\} = 0.$$

Plus précisément, si l'on note $D^+ f(t) = \overline{\lim}_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$; $D_+ f(t) = \underline{\lim}_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, *il existe un événement* F *de probabilité* 1 *contenu dans l'ensemble :*

$$\{\omega \ : \forall t,\ D^+ B_t(\omega) = +\infty \ \textit{ou}\ D_+ B_t(\omega) = -\infty\}.$$

Preuve :

Soit ω tel qu'il existe t tels que $-\infty < D_+ B_t(\omega) \leq D^+ B_t(\omega) < +\infty$. Alors,

$$\exists j, k \text{ tels que pour tout } h \leq 1/k, |B_{t+h} - B_t| \leq jh.$$

On peut trouver pour n supérieur ou égal à $4k$ un entier $i, i = 1, \cdots, n$, tel que :

$$\frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n}, \text{ et pour } \nu = 1,2,3 : \frac{i+\nu}{n} - t \leq \frac{\nu+1}{n} \leq \frac{1}{k}.$$

On déduit de ces deux remarques et de l'inégalité triangulaire $|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}| \leq |B_{\frac{i+1}{n}} - B_t| + |B_t - B_{\frac{i}{n}}|$ la majoration

$$|B_{\frac{i+1}{n}} - B_{\frac{i}{n}}| \leq \frac{3j}{n}.$$

Et l'on continue avec $\nu = 2$ puis 3 :

$$|B_{\frac{i+2}{n}} - B_{\frac{i+1}{n}}| \leq \frac{5j}{n},\ |B_{\frac{i+3}{n}} - B_{\frac{i+2}{n}}| \leq \frac{7j}{n}.$$

On se trouve donc dans l'événement où il existe $t \in [0,1]$, tel que pour tout $n \geq 4k$, il existe i entre 1 et n tel que $t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], \nu = 1,2,3 : |B_{\frac{i+\nu}{n}} - B_{\frac{i+\nu-1}{n}}| \leq \frac{(2\nu+1)j}{n}$. Les trois accroissements de B sont indépendants ; la probabilité de l'événement

$$\forall \nu = 1,2,3 : |B_{\frac{i+\nu}{n}} - B_{\frac{i+\nu-1}{n}}| \leq \frac{(2\nu+1)j}{n}$$

est majorée par $\frac{j^3.3.5.7}{n^{3/2}}$ et celle de l'événement

$$\forall n \geq 4k, \exists i = 1, \cdots, n, \nu = 1,2,3 : |B_{\frac{i+\nu}{n}} - B_{\frac{i+\nu-1}{n}}| \leq \frac{(2\nu+1)j}{n}$$

est majorée par $n\frac{j^3.3.5.7}{n^{3/2}}$ pour tout $n \geq 4k$ et donc tend vers zéro quand k tend vers l'infini.
•

Définition 1.27. *Soit une fonction définie sur un intervalle* $[a,b]$. *On appelle* **variation de f sur l'intervalle** *:*

$$Var_{[a,b]}(f) = \sup_{\pi} \sum_{t_i \in \pi} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

où π décrit l'ensemble des partitions de $[a,b]$.

Théorème 1.28. *(cf [30] p.19-20 Soit a et b fixés dans* $\mathbb{R}^+$ *:*

$$\mathbb{P}\{\omega : Var_{[a,b]}(B) = +\infty\} = 1.$$

Preuve : Soit a et b fixés dans $\mathbb{R}^+$ et π une partition de $[a,b]$.

$$\sum_{t_i \in \pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)| \geq \frac{\sum_{t_i \in \pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)|^2}{sup_{t_i \in \pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)|}. \quad (2)$$

Le numérateur est la variation quadratique de B dont on sait qu'elle converge vers t. Ensuite, $s \mapsto B_s(\omega)$ est continue donc uniformément continue sur l'intervalle $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \| \pi \| < \eta \Rightarrow sup_{t_i \in \pi} |B(t_{i+1}) - B(t_i)| < \varepsilon.$$

La fraction (2) converge donc vers l'infini. •

1.3.4 Théorème de Lévy

C'est un théorème qui donne l'ordre de grandeur du module de continuité.

Théorème 1.29. *([20] th. 9.25 pp 114-115)*
Soit $g :]0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+, g(\delta) = \sqrt{-2\delta \log(\delta)}$. *Alors,*

$$\mathbb{P}\{\omega : \overline{\lim}_{\delta \searrow 0} \frac{1}{g(\delta)} \sup_{0<s<t<1, t-s \leq \delta} |(B_t - B_s)(\omega)| = 1\} = 1.$$

C'est à dire que le module de continuité de B est de l'ordre de $g(\delta)$.

Théorème 1.30. *(cf [30] 31 p.22-23) Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t) \vee \mathcal{N}$. Alors la filtration $\mathcal{F}$ est continue à droite, c'est à dire $\mathcal{F}_{t^+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$ coincide avec $\mathcal{F}_t$.*

Preuve en exercice. Elle utilise le fait que

$$\begin{aligned}\forall u_1, \forall u_2 \quad , \quad & \forall z > v > t, \\ & E[e^{i(u_1 B_z + u_2 B_v)}/\mathcal{F}_{t^+}] = \lim_{w \searrow t} E[e^{i(u_1 B_z + u_2 B_v)}/\mathcal{F}_w] = \\ & E[e^{i(u_1 B_z + u_2 B_v)}/\mathcal{F}_t],\end{aligned}$$

c'est à dire que les lois conditionnelles en $\mathcal{F}_{t^+}$ et $\mathcal{F}_t$ sont les mêmes et donc $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$

1.3.5 Propriétés de Markov et de martingale

Le mouvement brownien est un processus de Markov, c'est à dire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall f \text{ borélienne bornée, } E_x[f(B_{t+s})/\mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_t)].$$

La preuve peut se faire facilement "à la main" : sous $\mathbb{P}_x$, $B_{t+s} = x + W_{t+s}$ et

$$f(B_{t+s}) = f(x + W_{t+s} - W_s + W_s)$$

et on conclut par l'indépendance de $x + W_s$ et $W_{t+s} - W_s$.
En corollaire on obtient que B est une martingale pour sa filtration propre.

1.4 Calcul de $2\int_0^t B_s dB_s$ (exercice)

Bien que les trajectoires de B ne soient pas différentiables, on cherche à donner un sens à cette intégrale. On s'attendrait à ce que ce soit B_t^2, il n'en est rien. Pour mettre la différence en évidence, on décompose B_t^2 en somme de différences le long d'une partition de l'intervalle $[0, t]$ noté $t_i = it/n$ que l'on développera ensuite par la formule de Taylor :

$$B_t^2 = \sum_i (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) = \sum_i 2B_{t_i}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] + \sum_i [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]^2.$$

Le premier terme converge "naturellement" vers ce que l'on attend : $2\int_0^t B_s dB_s$ (ceci sera justifié dans le paragraphe 2). On croirait que le second converge vers 0, c'est là qu'intervient le paradoxe. Il faut remarquer que par définition du mouvement brownien ce second terme est la somme des carrés de n gaussiennes indépendantes centrés et de variance t/n : il s'agit donc d'une variable aléatoire de loi $t/n\chi_n^2$. Son espérance est t et sa variance est $t^2/nVar\chi_1^2$: donc ce terme converge dans L^2 (donc en probabilité) vers son espérance t. Ainsi, on montrera précisément plus tard

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t.$$

2 Intégrale stochastique

cf. Module 1 chapitre 5, Module 2 chapitre 5 et Module 3.
Le but essentiel de ce chapitre est de donner un sens à la notion d'intégrale de processus par rapport au mouvement brownien ou, plus généralement, par rapport à une martingale. En se guidant sur le “prétexte" de ce cours, le calcul stochastique appliqué aux finances, on peut motiver ainsi l'intégrale stochastique : étudions un instant un modèle où le prix d'une action serait donné par une martingale M_t à l'instant t. Si l'on possède $X(t)$ de ces actions au même instant et que l'on effectue des transactions aux instants t_k, la richesse se sera finalement accrue de

$$\sum_k X(t_{k-1})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}).$$

Mais si l'on veut effectuer des transactions en temps continu,à tout instant t, il faut pouvoir définir un outil mathématique permettant de passer à la limite dans l'expression ci-dessus avec le problème que, en particulier si $M = B$, la dérivée B' n'existe pas !! cette expression est une somme qui a vocation à converger vers une intégrale de Stieljes, mais comme la variation $V(B)$ est infinie, cela ne saurait converger dans un sens “déterministe" : l'intégrale stochastique “naïve" est impossible (cf. Protter page 40) comme le montre le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit $\pi = (t_k)$ une partition de $[0, T]$. Si $\lim_{|\pi|\to 0} \sum_k x(t_{k-1})(f(t_k) - f(t_{k-1}))$ existe, alors f est à variation finie. (cf. Protter, th. 52, page 40)*

La preuve utilise le théorème de Banach Steinhaus, c'est à dire : si X est un espace de Banach et Y un espace vectoriel normé, (T_α) une suite d'opérateurs bornés de X dans Y telle que $\forall x \in X, (T_\alpha(x))$ est bornée, alors la suite des normes $(\| T_\alpha \|)$ est bornée dans $\mathbb{R}$.

Par réciproque, on obtient donc que si $V(f) = +\infty$, alors la limite n'existe pas, ce qui est le cas pour $f : t \mapsto B_t$ le mouvment brownien. Il faut donc trouver d'autres outils. L'idée de Itô a été de restreindre les intégrands aux processus qui ne peuvent pas "voir" les accroissements du futur, c'est à dire les processus adaptés, en sorte que, du moins pour le brownien, $x(t_{k-1})$ et $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ soient indépendants ; ainsi, par trajectoire on ne peut rien faire, mais l'on travaille en probabilité, en espérance.

Le plan est le suivant : après avoir introduit le problème et quelques notations (2.1.1), on définit (2.1.2) d'abord l'intégrale sur les processus “simples" d'ensemble noté $\mathcal{S}$, (que l'on va définir) puis dans 2.1.3 on donne les propriétés de cette intégrale sur $\mathcal{S}$ ce qui permet de prolonger par continuité l'opérateur obtenu sur la fermeture de $\mathcal{S}$ pour une topologie bien choisie, en sorte d'avoir une quantité raisonnable d'intégrands.

2.1 L'intégrale stochastique

2.1.1 Introduction et notations

Soit M une martingale continue de carré intégrable sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}_t$ est par exemple la filtration naturelle du brownien complétée par les événements négligeables. Pour tout processus mesurable X, tout entier n et tout temps t on définit :

$$I_n(X,t) = \sum_j X(\frac{j-1}{2^n} \wedge t)(M_{\frac{j}{2^n}\wedge t} - M_{\frac{j-1}{2^n}\wedge t}).$$

Ceci n'a pas toujours une limite. On va se restreindre à une classe de processus X mesurables adaptés presque sûrement de carré intégrable par rapport au processus croissant $\langle M \rangle$ défini ci-dessous.

Définition 2.2. *Le processus croissant $\langle M \rangle$ est défini au temps t par :*

$$\langle M \rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} proba \sum_{t_i \in \pi} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2$$

où π sont les partitions de $[0,t]$.

La construction de $I(X,t)$ est due à Itô (1942) dans le cas de M mouvement brownien, et à Kunita et Watanabe (1967) pour les martingales de carré intégrable.

On a vu dans le chapitre précédent que si $M = B$ alors $\langle B \rangle_t = t$.

Remarque 2.3. *Les martingales continues de carré intégrable admettent un crochet.*

Rappel :

Proposition 2.4. *$\langle M \rangle_t$ est l'unique processus continu croissant adapté tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ est une martingale.*

Cette proposition sert le plus souvent de définition au crochet et alors la définition 0.23 en est une conséquence.
Notation : on définit une mesure sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$ par

$$\mu_M(A) = E[\int_0^\infty 1_A(t,\omega) d\langle M \rangle_t(\omega)].$$

On dit que X et Y sont équivalents si $X = Y \mu_M$ *p.s.*
Notation : pour tout X adapté, on note $[X]_T^2 = E[\int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t]$.

Remarquons que X et Y sont équivalents si et seulement si $[X]_T^2 = 0 \; \forall T \geq 0$.

On introduit l'ensemble des processus suivants :

(3) $\mathcal{L}(M) = \{$ classes de processus X mesurables $\mathcal{F}$-adaptés tels que $\sup_T [X]_T < +\infty \}$

que l'on munit de la métrique :

$$d(X,Y)=\sum_{n\geq 1}2^{-n}1\wedge[X-Y]_n \tag{4}$$

puis le sous-ensemble du précédent :

$$\mathcal{L}^*=\{X\in\mathcal{L}\text{ progressivement mesurable}\}$$

Lorsque la martingale M est telle que son processus croissant $\langle M\rangle$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, comme tout élément de $\mathcal{L}$ admet une modification dans $\mathcal{L}^*$ on pourra dans ce cas travailler dans $\mathcal{L}$ mais de manière générale on se restreindra à $\mathcal{L}^*$.

Proposition 2.5. *Soit $\mathcal{L}_T$ l'ensemble des processus X mesurables adaptés sur $[0,T]$ tels que :*

$$[X]_T^2=E[\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s]<+\infty.$$

$\mathcal{L}_T^*$, ensemble des éléments de $\mathcal{L}_T$ progressivement mesurables, est fermé dans $\mathcal{L}_T$. En particulier, il est complet pour la norme $[.]_T$.

Soit une suite de $\mathcal{L}_T^*$, (X^n), convergeant vers X : $[X-X^n]_T\to 0$. Il s'agit d'une suite dans un espace L^2 donc complet et $X\in\mathcal{L}_T$ et la convergence L^2 implique l'existence d'une suite extraite convergeant presque sûrement. Soit Y la limite presque sûre sur $\Omega\times[0,T]$, c'est à dire que $A=\{(\omega,t):\ \lim_n X_t^n(\omega,t)\text{ existe}\}$ est de probabilité 1 et $Y(\omega,t)=X(\omega,t)$ si $(\omega,t)\in A$, 0 sinon. Le fait que pour tout n, $X^n\in\mathcal{L}_T^*$ montre que $Y\in\mathcal{L}_T^*$ et Y équivaut à X. •

2.1.2 Intégrale de processus simples et prolongement

Définition 2.6. *On dit que X est* **simple** *ou* **étagé** *s'il existe une suite de réels (t_i) croissant vers l'infini et une famille (ξ_i) de variables aléatoires $\mathcal{F}_{t_i}-$mesurables bornées telles que :*

$$X_t=\xi_0\mathbf{1}_{\{0\}}(t)+\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\mathbf{1}_{]t_it_{i+1}]}(t).$$

On note $\mathcal{S}$ leur ensemble et on a les inclusions $\mathcal{S}\subset\mathcal{L}^*\subset\mathcal{L}$. (à vérifier en exercice)
Exercice : calculer $[X]_T^2$ lorsque $X\in\mathcal{S}$.

Définition 2.7. *Soit $X\in\mathcal{S}$. L'intégrale stochastique de X par rapport à M est*

$$I_t(X)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(M_{t\wedge t_{i+1}}-M_{t\wedge t_i}).$$

Il s'agit maintenant d'étendre cette définition à une classe plus large d'intégrands.

Lemme 2.8. *Pour tout processus* **borné** $X \in \mathcal{L}$ *il existe une suite de processus* $X_n \in \mathcal{S}$ *telle que* $\sup_{T\geq 0} \lim_n E[\int_0^T (X_n - X)^2 dt] = 0$.

Preuve (a) Cas où X est continu : on pose $X_t^n = X_{\frac{j-1}{2^n}}$ sur l'intervalle $]\frac{j-1}{2^n}\frac{j}{2^n}]$. Par continuité, il est clair que $X_t^n \to X_t$ presque sûrement. De plus X est borné par hypothèse ; le théorème de convergence majorée permet de conclure.

(b) cas où $X \in \mathcal{L}^*$: on pose $X_t^m = m\int_{(t-1/m)^+}^t X_s ds$ qui lui est continu, et reste mesurable adapté borné dans $\mathcal{L}$. D'après l'étape (a) pour tout m il existe une suite $X^{m,n}$ de processus simples qui convergent vers X^m dans $L^2([0,T]\times\Omega, d\mathbb{P}\times dt)$ c'est à dire :

$$\forall m\ \forall T\ \lim_{n\to\infty} E[\int_0^T (X_t^{m,n} - X_t^m)^2 dt] = 0. \tag{5}$$

Soit $A = \{(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega\ :\ \lim_{m\to\infty} X_t^m(\omega) = X_t(\omega)\}^c$ et sa section A_ω pour tout ω. Puisque X est progressivement mesurable, $A_\omega \in \mathcal{B}([0,T])$. Un théorème d'analyse fine (**théorème fondamental de Lebesgue**, cf. par exemple STEIN : "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions") dit que puisque X est intégrable, on a :

$$X_t^m - X_t = m\int_{(t-1/m)^+}^t (X_s - X_t)ds \to 0$$

pour presque tout t et la mesure de Lebesgue de A_ω est nulle. Par ailleurs, X et X^m sont uniformément bornés ; le théorème de convergence majorée dans $[0,T]$ montre que $\forall\omega \int_0^T (X_s - X_x^m)^2 ds \to 0$.

On applique une seconde fois le théorème de convergence majorée mais dans Ω et l'on obtient $E[\int_0^T (X_s - X_x^m)^2 ds] \to 0$ ce qui, avec (5), conclut (b).

(c) Enfin le cas où X est **mesurable adapté borné** : on se ramène au (b) en se rappelant que tout processus mesurable adapté possède une modification progressivement mesurable, soit Y. Il existe alors une suite Y^n de processus simples convergeant vers Y dans $L^2([0,T]\times\Omega, d\mathbb{P}\times dt)$ soit :

$$E[\int_0^T (Y_s - Y_s^m)^2 ds] \to 0 \text{ et } \forall t\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

On pose $\eta_t = \mathbf{1}_{\{X_t \neq Y_t\}}$. Par le théorème de Fubini on obtient :

$$E[\int_0^T \eta_t dt] = \int_0^T \mathbb{P}(X_t \neq Y_t)dt = 0$$

d'où l'on tire $\int_0^T \eta_t dt = 0$ presque sûrement.

$$\eta_t + \mathbf{1}_{\{X_t = Y_t\}} = 1 \Rightarrow E[\int_0^T \mathbf{1}_{\{X_t=Y_t\}} dt] = T \text{ et } \mathbf{1}_{\{X_t=Y_t\}} = 1\ dt\times d\mathbb{P} \text{ presque sûrement}$$

Il vient enfin :

$$E[\int_0^T (Y_s - Y_s^m)^2 ds] = E[\int_0^T \mathbf{1}_{\{X_s=Y_s\}}(Y_s - Y_s^m)^2 ds] = E[\int_0^T (X_s - Y_s^m)^2 ds]$$

ce qui permet de conclure. •

Proposition 2.9. *Si le processus croissant $\langle M \rangle_t$ est absolument continu par rapport à dt $\mathbb{P}$-presque sûrement, alors $\mathcal{S}$ est dense dans l'espace métrique $(\mathcal{L}, d)$ où la métrique d a été définie en (4).*

Preuve

(i) Soit $X \in \mathcal{L}$ et borné : le lemme précédent montre l'existence d'une suite de processus simples X^n convergeant vers X dans $L^2(\Omega \times [0,T], d\mathbb{P} \otimes dt), \forall T$. Il existe donc une suite extraite convergeant presque sûrement. On conclut avec le théorème de convergence dominée et le fait que $d\langle M \rangle_t = f(t)dt$.

(ii) Soit $X \in \mathcal{L}$ et pas borné : on pose $X^n_t(\omega) = X_t(\omega)\mathbf{1}_{\{|X_t(\omega)| \leq n\}}$. La distance :

$$d(X^n, X) = E[\int_0^T X_s^2 \mathbf{1}_{\{|X_t(\omega)| \geq n\}} d\langle M \rangle_s] \to 0$$

car l'intégrand converge presque sûrement vers 0, est majoré par X^2 qui est intégrable : c'est le théorème de convergence dominée.

Or $X^n \in \mathcal{L}$ et sont bornés : leur ensemble est dense dans $\mathcal{L}$.

(iii) Les processus simples sont denses dans les processus bornés de $\mathcal{L}$, (i) et le (ii) permettent de conclure. •

Cette proposition assure donc la densité des processus simples dans $\mathcal{L}$ dans le cas où le processus croissant $\langle M \rangle_t$ est absolument continu par rapport à dt. Sinon, on a seulement la densité des processus simples dans $\mathcal{L}^*$ grâce à la proposition suivante.

Proposition 2.10. *$\mathcal{S}$ est dense dans l'espace métrique $(\mathcal{L}^*, d)$ où la métrique d a été définie en (4).*

Preuve : C'est la proposition 2.8 et le lemme 2.7. de [20], pages 135-137.

Remarque 2.11. *utile : la métrique introduite en (4) donne lieu à la topologie équivalente suivante : $d(X_n, X) \to 0$ quand n tend vers l'infini si et seulement si*

$$\forall T > 0, E[\int_0^T |X_n(t) - X(t)|^2 d\langle M \rangle_t] \to 0.$$

2.1.3 Construction de l'intégrale et ses propriétés élémentaires

On rappelle que pour un processus simple X l'intégrale stochastique

$$I_t(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i (M_{t \wedge t_{i+1}} - M_{t \wedge t_i}).$$

On note aussi $I_t(X) = \int_0^t X_s dM_s$ pour bien préciser que l'intégrateur est M. Cette intégrale stochastique élémentaire a les propriétés suivantes à montrer en exercice :

Exercice 2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des processus simples sur lequel est défini l'intégrale stochastique par rapport à M :

$$I_t(X) = \sum_j \xi_j (M_{t_{j+1} \wedge t} - M_{t_j \wedge t}).$$

Montrer que I_t vérifie les propriétés suivantes :

(i) I_t est une application linéaire.

(ii) $I_t(X)$ est de carré intégrable.

(iii) $I_t(X)$ est d'espérance nulle.

(iv) $I_t(X)$ est une martingale continue.

(v) $E[I_t(X)]^2 = E[\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s]$.

(vi) $E[(I_t(X) - I_s(X))^2/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vii) $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$.

Remarquer que (v) montre que I_t est une isométrie.

On va montrer que l'on peut étendre le champ des intégrands au delà des processus simples grâce aux résultats de densité du paragraphe précédent et que l'opérateur obtenu vérifie encore toutes ces propriétés.

Proposition 2.12. *Soit $X \in \mathcal{L}^*$ et une suite de processus simples X^n convergeant vers X. Alors, la suite $I_t(X^n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. La limite ne dépend pas de la suite choisie (elle est notée $I_t(X)$ ou $\int_0^t X_s dM_s$ ou $(X.M)_t$), intégrale stochastique de X par rapport à la martingale M.*

Preuve : d'après la propriété (v) ci-dessus on calcule la norme L^2 de la suite $I_t(X^n)$:

$$\| I_t(X^n) - I_t(X^p) \|_2^2 = E[\int_0^t |X_s^n - X_s^p|^2 d\langle M\rangle_s] \rightarrow 0$$

pour tout $t > 0$ puisque $d(X^n, X^p) \rightarrow 0$. Il est clair par le même genre d'argument que changer de suite approchant X ne change pas cette limite :

$$\| I_t(X^n) - I_t(Y^n) \|_2 \rightarrow 0$$

en même temps que $d(X^n, Y^n) \leq d(X^n, X) + d(X, Y^n)$. •

On montre maintenant les propriétés :

Proposition 2.13. *Soit $X \in \mathcal{L}^*$ Alors :*

(i) I_t est une application linéaire.

(ii) $I_t(X)$ est de carré intégrable.

(iii) $I_t(X)$ est d'espérance nulle.

(iv) $I_t(X)$ est une martingale continue.

(v) $E[I_t(X)]^2 = E[\int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s]$.

(vi) $E[(I_t(X) - I_s(X))^2/\mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vi') $E[(I_t(X))^2/\mathcal{F}_s] = I_s^2(X) + E[\int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_s]$.

(vii) $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$.

Preuve : la plupart des propriétés s'obtiennent par passage à la limite dans L^2 des propriétés vérifiées par $I_t(X^n)$ pour tout n, comme par exemple (i) (ii) (iii) (iv) ; (pour (iv) noter que l'ensemble des martingales continues de carré intégrable est complet dans L^2).

(v) est une conséquence de (vi) avec $s = 0$.

(vi) Soit $s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$ et l'on calcule :

$$E[\mathbf{1}_A(I_t(X) - I_s(X))^2] = \lim_n E[\mathbf{1}_A(I_t(X^n) - I_s(X^n))^2] =$$
$$\lim_n E[\mathbf{1}_A \int_s^t (X_u^n)^2 d\langle M\rangle_u] = E[\mathbf{1}_A \int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u]$$

puisque $d(X^n, 0) \to d(X, 0)$.
(vii) est une conséquence de (vi') et de la deuxième caractérisation du crochet (0.25). •

Proposition 2.14. *Pour tout temps d'arrêt S et T, $S \leq T$, et $t \geq 0$ on a :*

$$E[I_{t\wedge T}(X)/\mathcal{F}_S] = I_{t\wedge S}(X).$$

Si X et $Y \in \mathcal{L}^*$, presque sûrement :

$$E[(I_{t\wedge T}(X) - I_{t\wedge S}(X))(I_{t\wedge T}(Y) - I_{t\wedge S}(Y))/\mathcal{F}_S] = E[\int_{t\wedge S}^{t\wedge T} X_u Y_u d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_S].$$

Preuve : $I_t(X)$ est une martingale et on lui applique le théorème d'arrêt entre les temps d'arrêt bornés $S \wedge t$ et $T \wedge t$. Puis l'on remarque que $E[I_{t\wedge T}(X)/\mathcal{F}_S]$ est $\mathcal{F}_{S\wedge t}$ mesurable, donc égale à $E[I_{t\wedge T}(X)/\mathcal{F}_{S\wedge t}]$. C'est à dire exactement le premier point.

Elle est de plus de crochet $\langle I_.(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$ donc $I_t(X)^2 - \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s$ est une martingale ; on applique à nouveau le théorème d'arrêt entre les temps d'arrêt $S \wedge t$ et $T \wedge t$. C'est à dire

$$E[I_{T\wedge t}(X)^2 - I_{S\wedge t}(X)^2/\mathcal{F}_{S\wedge t}] = E[\int_{S\wedge t}^{T\wedge t} X_u^2 d\langle M\rangle_u/\mathcal{F}_{S\wedge t}].$$

On obtient alors le deuxième point par la même remarque que pour le premier sur la mesurabilité, puis par polarisation.

•

2.2 Variation quadratique

cf. Module 2 chapitre 5.

(cf. [20], pages 141-145 ; [30], pages 58-60) De même que l'on définit $\langle M \rangle_t$ comme limite en probabilité des sommes des écarts quadratiques de M, on définit la covariation quadratique de deux martingales continues de carré intégrable M et N : si π sont les partitions de $[0,t]$ on a

$$\langle M,N\rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} \text{proba} \sum_{t_i\in\pi} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}),$$

ou, ce qui est équivalent

$$4\langle M,N\rangle_t := \langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t.$$

Il y a donc lieu, pour X et $Y \in \mathcal{L}^*(M)$, d'étudier le "crochet" $\langle I(X), I(Y)\rangle$. On rappelle d'abord quelques résultats utiles sur les crochets des martingales continues de carré intégrable.

Proposition 2.15. *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable. Alors :*

(i) $|\langle M,N\rangle_t|^2 \le \langle M\rangle_t \langle N\rangle_t$ *;*

(ii) $M_tN_t - \langle M,N\rangle_t$ *est une martingale.*

Preuve : le (i) se montre simplement comme toute inégalité de Cauchy. Le (ii) se déduit de ce que, puisque $M+N$ est une martingale de carré intégrable, la différence $(M+N)^2 - \langle M+N\rangle_t$ est une martingale. •

Proposition 2.16. *Soit T un temps d'arrêt et M et N deux martingales continues de carré intégrable. Alors :* $\langle M^T, N\rangle = \langle M, N^T\rangle = \langle M,N\rangle^T$.

Preuve : voir Protter [30] th.25, page 61.

Soit π une partition de $[0,t]$.

$$\langle M^T, N\rangle_t = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_i (M^T_{t_{i+1}} - M^T_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}).$$

La famille $t_i \wedge T$ est une partition de $[0, t\wedge T]$.

$$\langle M,N\rangle_{t\wedge T} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_i (M_{T\wedge t_{i+1}} - M_{T\wedge t_i})(N_{T\wedge t_{i+1}} - N_{T\wedge t_i}).$$

La différence entre ces deux sommes est nulle sur l'événement $\{T \ge t\}$ et sur le complémentaire se résume à

$$(M_T - M_{t_i})(N_{t\wedge t_{i+1}} - N_{T\wedge t_{i+1}})$$

l'indice i étant tel que $T \in [t_i, t_{t_{i+1}}]$. La continuité des processus en jeu montre que la limite est presque sûrement nulle, donc aussi en probabilité. •

Théorème 2.17. *(inégalité de Kunita-Watanabe) Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable, $X \in \mathcal{L}^*(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Alors presque sûrement :*

$$(6) \qquad (\int_0^t |X_s Y_s| d\langle M, N\rangle_s)^2 \leq \int_0^t |X_s|^2 d\langle M\rangle_s \int_0^t |Y_s|^2 d\langle N\rangle_s.$$

Preuve :

(i) on remarque d'abord l'inégalité presque sûre :

$$\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s \leq \frac{1}{2}(\int_s^t d\langle M\rangle_u + \int_s^t d\langle N\rangle_u)$$

conséquence de l'inégalité :

$$2\sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \leq \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \sum_i (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})^2$$

où l'on passe à la limite en probabilité, donc presque sûrement pour une suite extraite.

Soit alors A le processus croissant $\langle M\rangle + \langle N\rangle$. Les processus croissants $\langle M\rangle, \langle N\rangle, \langle M, N\rangle$ sont tous absolument continus par rapport à A. On peut donc poser :

$$d\langle M, N\rangle_t = f(t)dA_t, \ d\langle M\rangle_t = g(t)dA_t, \ d\langle N\rangle_t = h(t)dA_t.$$

(ii) Pour tout a et b, on a :

$$\int_0^t (aX_s\sqrt{g(s)} + bY_s\sqrt{h(s)})^2 dA_s \geq 0.$$

Par la méthode classique de traitement des inégalités de Cauchy, il vient :

$$(7) \qquad (\int_0^t |X_s Y_s| \sqrt{g(s)h(s)} dA_s)^2 \leq \int_0^t |X_s|^2 d\langle M\rangle_s \int_0^t |Y_s|^2 d\langle N\rangle_s.$$

(iii) Pour tout a le processus $\langle aM + N\rangle$ est croissant, d'où :

$$\int_s^t (a^2 g(u) + 2af(u) + h(u))dA_u \geq 0, \forall s \leq t.$$

Comme A est croissant, ceci implique que l'intégrand est positif, soit $a^2 g(s) + 2af(s) + h(s) \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$, c'est à dire $f(s) \leq \sqrt{g(s)h(s)}$.
Ceci rapproché de (7) permet de conclure. •

Proposition 2.18. *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable , $X \in \mathcal{L}^*(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*(N)$. Alors :*

$$(8) \qquad \langle X.M, Y.N\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P} \ p.s.$$

et

$$(9) \qquad E[\int_s^t X_u dM_u \int_s^t Y_u dN_u / \mathcal{F}_s] = E[\int_s^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u / \mathcal{F}_s], \ \forall s \leq t, \ \mathbb{P} \ p.s.$$

Preuve : elle nécessite les lemmes préparatoires suivants :

Lemme 2.19. *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable et pour tout n $X^n, X \in \mathcal{L}^*(M)$ tels que pour tout t :*

$$\lim_n \int_0^t |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u = 0,\ \mathbb{P}\ p.s.$$

Alors :

$$\langle I^M(X^n), N\rangle_t \to_{n\to\infty} \langle I^M(X), N\rangle_t,\ \mathbb{P}\ p.s.$$

Preuve du lemme : On cherche à établir le reste de Cauchy.

$$\begin{aligned}|\langle I^M(X^n), N\rangle_t - \langle I^M(X^p), N\rangle_t|^2 &= |\langle I^M(X^n - X^p), N\rangle_t|^2 \\ \leq \langle I^M(X^n - X^p)\rangle_t \langle N\rangle_t &= \int_0^t |X_u^n - X_u^p|^2 d\langle M\rangle_u \langle N\rangle_t\end{aligned}$$

l'inégalité provenant de l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les crochets (cf. la proposition 2.15 (i)). La convergence est alors immédiatement déduite de l'hypothèse. •

Lemme 2.20. *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable et $X \in \mathcal{L}^*(M)$. Alors pour presque tout t :*

$$\langle I^M(X), N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u \mathbb{P}\ p.s.$$

Preuve du lemme : soit une suite X^n de processus simples approchant X :

$$\lim_n E[\int_0^\infty |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u = 0.$$

A t fixé, on extrait une suite convergeant $\mathbb{P}$ $p.s.$: $\int_0^t |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u \to 0$. Le lemme 2.19 montre alors :

$$\langle I^M(X^n), N\rangle_t \to \langle I^M(X), N\rangle_t \mathbb{P}\ p.s. \tag{10}$$

Or, pour les processus simples :

$$\langle I^M(X^n), N\rangle_t = \sum_i X_{t_i}^n \sum_{s_k \in [t_i t_{i+1}]} (M_{s_{k+1}} - M_{s_k})(N_{s_{k+1}} - N_{s_k})$$

qui tend vers $\int_0^t X_u^n d\langle M, N\rangle_u$ lorsque $\sup_k |s_{k+1} - s_k| \to 0$. Enfin,

$$\begin{aligned}&|\int_0^t X_u^n d\langle M, N\rangle_u - \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u|^2 = \\ &|\int_0^t (X_u^n - X_u) d\langle M, N\rangle_u|^2 \leq \int_0^t |X_u^n - X_u|^2 d\langle M\rangle_u \langle N\rangle_t\end{aligned} \tag{11}$$

par l'inégalité K.W.(6) et l'on peut passer à la limite p.s. à droite par construction de X^n. Alors (11) tend vers zéro ; cette limite et la précédente (10) montrent le résultat. •

Preuve de la proposition

(i) En posant $N_1 = Y.N$, le lemme 2.20 donne :

$$\langle X.M, N_1\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N_1\rangle_u \text{ et } \langle M, Y.N\rangle_t = \int_0^t Y_u d\langle M, N\rangle_u$$

On conclut par composition des intégrations à variation finie.

(ii) La propriété est vraie pour les processus simples ; puis l'on passe à la limite en probabilité.

exo 1 feuille 5.

Proposition 2.21. *Soit M une martingale continue de carré intégrable et $X \in \mathcal{L}^*(M)$. Alors $X.M$ est l'unique martingale continue de carré intégrable Φ nulle en $t = 0$ telle que pour toute martingale continue de carré intégrable N on ait :*

$$\langle \Phi, N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u \mathbb{P}\ p.s.$$

Preuve : $X.M$ vérifie effectivement cette relation : c'est le lemme 2.20. Soit alors Φ vérifiant les hypothèses de la proposition ; pour toute martingale continue de carré intégrable N :

$$\langle \Phi - X.M, N\rangle_t = 0,\ \mathbb{P}\ p.s.$$

En particulier si l'on choisit $N = \Phi - X.M$, il vient $\langle N\rangle_t = 0\ \mathbb{P}\ p.s.$ soit

$$\Phi - X.M = 0,\ \mathbb{P}\ p.s.$$

•

Corollaire 2.22. *Soit M et N deux martingales continues de carré intégrable , $X \in \mathcal{L}^*(M)$ et $Y \in \mathcal{L}^*(N)$ et T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}$ p.s. :*

$$X_{t\wedge T} = Y_{t\wedge T} \text{ et } M_{t\wedge T} = N_{t\wedge T}.$$

Alors :

$$(X.M)_{t\wedge T} = (Y.N)_{t\wedge T}.$$

Preuve : soit H une martingale continue de carré intégrable ; par la proposition 2.16 :

$$\langle M - N, H\rangle^T = \langle M^T - N^T, H\rangle = 0,\ \mathbb{P}\ p.s.$$

D'une part :

$$\forall H, \langle X.M - Y.N, H\rangle_{t\wedge T} = \int_0^{t\wedge T} X_u d\langle M, H\rangle_u - \int_0^{t\wedge T} X_u d\langle N, H\rangle_u$$

et d'autre part on tire de la proposition 2.16 et du lemme 2.20 :

$$\langle (X.M)^T, H\rangle = \langle X.M, H\rangle^T = \int_0^{t\wedge T} X_u d\langle M, N\rangle_u = \int_0^{t\wedge T} Y_u d\langle N, H\rangle_u$$

D'où l'on déduit de 2.21 que :

$$\langle X.M - Y.N, H\rangle^T = 0, \ \mathbb{P}\ p.s. \tag{12}$$

Ainsi $(X.M - Y.N)^T$ est-elle une martingale orthogonale à toute martingale continue de carré intégrable et en particulier à elle-même, elle est donc nulle. •

Proposition 2.23. *L'intégrale stochastique est associative dans le sens suivant : si $H \in \mathcal{L}^*(M)$ et $G \in \mathcal{L}^*(H.M)$, alors $GH \in \mathcal{L}^*(M)$ et l'on a :*

$$G.(H.M) = GH.M$$

Preuve en exercice (3, feuille 4). Voir Protter th. 19 page 55 ou K.S. corollaire 2.20, page 145. •

2.3 Intégration par rapport aux martingales locales

Ce corollaire va permettre d'étendre le champs des intégrateurs et des intégrands. Dans tout ce paragraphe, M est une martingale locale continue.

Définition 2.24. *Soit $\mathcal{P}^*(M)$ l'ensemble des processus progressivement mesurables tels que*

$$\forall t, \ \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty, \ \mathbb{P}\ p.s.$$

Définition 2.25. *Soit $X \in \mathcal{P}^*(M)$ et M une martingale locale de suite localisante S_n. Soit $R_n(\omega) = \inf\{t / \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n\}$ et $T_n = R_n \wedge S_n$ On définit alors l'intégrale stochastique de X par rapport à M :*

$$X.M = X^{T_n}.M^{T_n} \ sur \ \{t \leq T_n(\omega)\}.$$

Proposition 2.26. *C'est une bonne définition au sens où si $n \leq m$, $X^{T_n}.M^{T_n} = X^{T_m}.M^{T_m}$ sur $\{t \leq T_m(\omega)\}$ et le processus $X.M$ ainsi défini est une martingale locale.*

Preuve : Le corollaire terminant la section précédente dit que si $t \leq T_m$:

$$(X^{T_m}.M^{T_m})_t^{T_n} = (X^{T_m\wedge T_n}.M^{T_m\wedge T_n})_t = (X^{T_m}.M^{T_m})_t.$$

De plus, à cause de ce corollaire, cette définition ne dépend pas de la suite choisie Enfin, par construction, pour tout n, $(X.M)^{T_n}$ est une martingale ce qui veut dire exactement que $X.M$ ainsi définie est une martingale locale. •

Cette intégrale stochastique ne garde pas toutes les "bonnes" propriétés. En particulier, on perd tout ce qui fait intervenir les espérances (en général, $X.M$ n'est pas intégrable) donc les espérances conditionnelles. En revanche :

Proposition 2.27. *Soit M une martingale locale continue et $X \in \mathcal{P}(M)$. Alors $X.M$ est l'unique martingale locale Φ telle que pour toute martingale N continue de carré intégrable :*

$$\langle \Phi, N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u.$$

Preuve : C'est la version "locale" de la proposition 2.21. Sur l'événement $\{t \leq T_n\}, X.M = X^{T_n}.M^{T_n}$ et vérifie pour tout t, tout n et toute martingale N,

$$\langle X^{T_n}.M^{T_n}, N\rangle_t = \int_0^t X_{T_n \wedge s} d\langle M^{T_n}, N\rangle_s$$

c'est à dire $\int_0^{T_n \wedge t} X_u d\langle M, N\rangle_u$ qui converge presque sûrement vers $\int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u$ quand n tend vers l'infini.

Réciproquement, pour toute martingale N on a l'égalité presque sûre $\langle \Phi - X.M, N\rangle_t = 0$. En particulier pour $N = (\Phi - X.M)^{T_n}$. Donc, pour toute suite localisante, la martingale $(\Phi - X.M)^{T_n}$ est de crochet nul ; elle est donc nulle et presque sûrement $\Phi = X.M$.
On a utilisé implicitement que que $X^T.M = (X.M)^T$ ainsi que le résultat sur l'arrêt des crochets 2.16. •

3 Formule de Itô

cf. Module 1 chapitre 5.
(cf. [20], pages 149-156 et [30], pages 70-83)

C'est un outil qui permet du calcul intégrodifférentiel, que l'on appelle communément "calcul de Itô". C'est du calcul sur les trajectoires des processus, donc la connaissance de ce qui se passe pour une réalisation ω de l'aléa.

On rappelle d'abord ce qu'est l'intégrale par rapport à des processus à variation finie.

Définition 3.1. *Soit A un processus continu. On dit qu'il est* **à variation finie** *si pour tout t étant données les partitions π de $[0,t]$ on a :*

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{t_i \in \pi} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| < \infty \ \mathbb{P} \ p.s.$$

De tels processus, à ω fixé, donnent lieu à des intégrales de Stieltjes.

Théorème 3.2. *(cf. Protter, th. 31 page 71) Soit A un processus continu à variation finie, et f de classe C^1. Alors, $f(A_.)$ est un processus continu à variation finie et :*

$$f(A_t) = f(A_0) + \int_0^t f'(A_s) dA_s.$$

Il s'agit simplement de la formule de Taylor à l'ordre 1.

Ces processus avec les martingales locales continues engendrent un ensemble assez vaste d'intégrateurs que l'on va maintenant considérer.

Définition 3.3. *On appelle* **semi-martingale continue** *un processus X sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ défini $\mathbb{P}$ p.s. par :*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \ \forall t \geq 0,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, M est une martingale locale continue et $A = A^+ - A^-$ avec A^+ et A^- processus continus croissants à variation finie adaptés.

Rappel : sous l'hypothèse AOA, les prix sont des semi-martingales, cf. [7].

3.1 Règle de Itô, ou formule de changement de variable

Théorème 3.4. *(dû à Itô, 1944 et à Kunita-Watanabé, 1967) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et X une semi-martingale continue. Alors, $\mathbb{P}$ p.s. et pour tout t positif :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t f"(X_s) d\langle M \rangle_s$$

où la première intégrale est une intégrale stochastique et les deux autres des intégrales de Stieltjes.

Notation différentielle : on dit parfois que la différentielle stochastique de $f(X_t)$ est :

$$df(X_s) = f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f"(X_s)d\langle X\rangle_s,$$

d'où la possibilité d'un calcul différentiel stochastique. On peut mémoriser cette formule en se disant qu'il s'agit d'une espèce de formule de Taylor à l'ordre 2.
Preuve: elle se fait en quatre étapes :

on "localise" pour se ramener au cas borné,

on effectue un développement de Taylor de la fonction f à l'ordre 2,

on étudie le terme qui donne lieu à l'intégrale stochastique,

et enfin celui en variation quadratique.

(1) Soit le temps d'arrêt

$$\begin{aligned} T_n &= 0 \text{ si } |X_0| \geq n, \\ &\quad \inf\{t \geq 0; |M_t| \geq n \text{ ou } |A_t| \geq n \text{ ou } \langle M\rangle_t \geq n\} \\ &\quad \text{ et l'infini sinon.} \end{aligned}$$

Cette suite de temps d'arrêt est évidemment croissante vers l'infini presque sûrement. Comme la propriété à démontrer est trajectorielle, il suffit de la montrer pour le processus arrêté en T_n (puis faire tendre n vers l'infini). On peut donc supposer les processus $M, A, \langle M\rangle$ et la variable aléatoire X_0 bornés. Le processus X est aussi lui-même borné et l'on peut considérer f à support compact : $f, f', f"$ et $f^{(3)}$ sont bornées.

(2) Pour atteindre cette formule, et en particulier le terme intégrale stochastique, on découpe l'intervalle $[0, t]$ en une partition $\pi = (t_i, i = 1, ..., n)$ et l'on étudie les accroissements de $f(X_t)$ sur cette partition :

$$\begin{aligned} (13) \qquad f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})) = \\ \sum_{i=0}^{n-1} f'(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) &+ \sum_{i=0}^{n-1} f'(X_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2, \end{aligned}$$

où $\eta_i \in [X_{t_i}, X_{t_{i+1}}]$.
Il est clair que le deuxième terme converge vers l'intégrale de Stieltjes de $f'(X_s)$ par rapport à A. Il n'y a là rien de stochastique.

(3) Pour le premier, considérons le processus simple associé à la partition π :

$$Y_s^\pi = f'(X_{t_i}) \text{ si } s \in]t_i, t_{i+1}].$$

Alors ce premier terme est égal par définition à $\int_0^t Y_s^\pi dM_s$. Or,

$$\int_0^t |Y_s^\pi - f'(X_s)|^2 d\langle M\rangle_s = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(X_{t_i}) - f'(X_s)|^2 d\langle M\rangle_s.$$

L'application $s \mapsto f'(X_s)$ étant continue, l'intégrand ci-dessus converge presque sûrement vers zéro. Le fait que f' est bornée et le théorème de convergence dominée permet de montrer que Y_s^π converge vers $f'(X_s)$ dans $L^2(d\mathbb{P} \times d\langle M \rangle)$: par définition, le premier terme converge dans L^2 vers l'intégrale stochastique

$$\int_0^t f'(X_s) dM_s.$$

(4) **Terme en variation quadratique** : on le décompose en trois termes :

$$\begin{aligned}(14) \qquad \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) + \sum_{i=0}^{n-1} f"(\eta_i)(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})^2\end{aligned}$$

Ce dernier terme est majoré par $\|f"\| \sup_i |\Delta_i A| \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i A|$ dont le premier facteur et le troisième sont bornés par hypothèse ; et $\sup_i |\Delta_i A|$ tend vers zéro presque sûrement puisque A est continu.

On majore le second terme par $\|f"\| \sup_i |\Delta_i M| \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i A|$ et qui converge de la même façon presque sûrement vers zéro puisque M est continue.

Le premier terme de (14) diffère "peu" de

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2.$$

En effet :

$$\sum_{i=0}^{n-1} (f"(\eta_i) - f"(X_{t_i}))(\Delta_i M)^2 \leq \sup_i |f"(\eta_i) - f"(X_{t_i})| \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i M)^2$$

dont le premier facteur tend presque sûrement vers zéro par continuité de $f"$ et le second tend vers $\langle M \rangle_t$, par définition, en probabilité donc une suite extraite converge presque sûrement. Le produit tend alors vers zéro dans L^2 par le théorème de convegence dominée. On a donc à étudier

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$

que l'on compare à $\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})$ dont la limite dans L^2 est $\int_0^t f"(X_s) d\langle M \rangle_s$ puisque

- par continuité le processus simple égal à $f"(X_{t_i})$ sur $]t_i, t_{i+1}]$ converge presque sûrement vers $f"(X_s)$;

- et le théorème de convergence dominée permet de conclure.
Soit donc la différence :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f"(X_{t_i})[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 - (\langle M\rangle_{t_{i+1}} - \langle M\rangle_{t_i})]$$

dont on étudie la limite dans L^2 ; dans l'espérance du carré soit les termes rectangles :

$$i < k \;:\; E[f"(X_{t_i})f"(X_{t_k})(\Delta_i M^2 - \langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})(\Delta_k M^2 - \langle M\rangle_{t_k}^{t_{k+1}})]$$

Par espérance conditionnelle en $\mathcal{F}_{t_i}$ on déduit que ces termes sont nuls puisque $M^2 - \langle M\rangle$ est une martingale. Restent les termes carrés :

$$\begin{aligned}\sum_i E[(f"(X_{t_i}))^2(\Delta_i M^2 - \langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^2] &\leq 2\|f"\|_\infty^2 \sum_i [E(\Delta_i M^4) + E((\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})^2)] \\ &\leq 2\|f"\|_\infty^2 E[(\sup_i \Delta_i M^2 \sum_i \Delta_i M^2) + \sup_i(\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})\langle M\rangle_t]\end{aligned}$$

Dans la majoration, $\sup_i \Delta_i M^2$ et $\sup_i(\langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}})$ sont bornés et convergent presque sûrement vers zéro par continuité ; $\sum_i \Delta_i M^2$ converge vers $\langle M\rangle_t$ en probabilité par définition ; on a donc globalement par le théorème de convergence dominée la convergence vers zéro dans L^1 au moins pour une suite extraite.

En conclusion, la suite des sommes (13) converge en probabilité vers le résultat annoncé dans le théorème ; on conclut avec la convergence presque sûre d'une suite extraite.

3.1.1 Prolongement et applications

On peut généraliser assez largement ce résultat à des fonctions de semi-martingales vectorielles qui dépendent également du temps.

Proposition 3.5. *Soit M un vecteur de dimension d de martingales locales continues, A un vecteur de dimension d de processus continus adaptés à variation finie et X_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable ; soit $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$. On pose $X_t = X_0 + M_t + A_t$. Alors, $\mathbb{P}$ presque sûrement :*

$$\begin{aligned}f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \partial_t f(s, X_s)ds + \int_0^t \partial_i f(s, X_s)dM_s^i + \int_0^t \partial_i f(s, X_s)dA_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{ij} \partial_{ij}^2 f(s, X_s)d\langle M^i, M^j\rangle_s\end{aligned}$$

Preuve : à rédiger en problème.

Lorsque f et ses dérivées sont bornées et que M est une martingale de carré intégrable, le terme intégrale stochastique ci-dessus est une "vraie" martingale, nulle à l'origine et il vient :

$$f(t,X_t)-f(0,X_0)-\int_0^t \partial_t f(s,X_s)ds-\int_0^t \partial_i f(s,X_s)dA_s^i-\frac{1}{2}\int_0^t \partial_{ij}^2 f(s,X_s)d\langle M^i,M^j\rangle_s \in \mathcal{M}$$

Par exemple, si $A=0$ et $X=M$ est le brownien, on obtient :

$$f(t,X_t)-f(0,X_0)-\int_0^t \mathcal{L}f(s,X_s)ds \in \mathcal{M}$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{L}=\partial_t+\frac{1}{2}\sum_i \partial_{ii}^2$.

De Itô on peut déduire la solution de ce que l'on appelle “l'équation de la chaleur", c'est à dire l'équation aux dérivées partielles :

$$f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^d),\ \partial_t f=\sum_i \frac{1}{2}\partial_{ii}^2 f \text{ et } f(0,x)=\varphi(x)$$

où $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et dont l'unique solution est donnée par

$$f(t,x)=E[\varphi(x+B_t)]$$

Il est facile de voir que cette fonction est effectivement solution en utilisant la formule de Itô ; l'unicité demande un peu plus de travail.

Pour le corollaire suivant, on donne la notation-définition suivante :

Définition 3.6. *si X est la semi-martingale réelle continue X_0+M+A, on note $\langle X\rangle$ ce qui en fait est $\langle M\rangle$. De même pour deux semi-martingales continues X et Y, on note $\langle X,Y\rangle$ le crochet de leurs parties martingales.*

Corollaire 3.7. *Soient deux semi-martingales continues réelles X et Y ; alors :*

$$\int_0^t X_s dY_s = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle X,Y\rangle_t.$$

Il s'agit de ce que l'on appelle la **formule d'intégration par parties**.

Preuve : en exercice ; c'est une simple application de la formule de Itô.

4 Exemples d'équations différentielles stochastiques

Il y a d'autres applications de la formule de Itô : une grande utilité du mouvement Brownien que l'on peut mettre ici en évidence est qu'il sert à modéliser un bruit additif, une erreur de mesure dans une équation différentielle. Supposant par exemple une dynamique donnée par :

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t),\ t \in [0,T],\ x(0) = x.$$

Mais on n'a pas exactement ceci, à la vitesse s'ajoute un petit bruit, et l'on modélise ainsi la dynamique :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dB_t,\ t \in [0,T],\ X_0 = x,$$

que l'on appelle une **équation différentielle stochastique**. On n'en traitera pas la théorie dans ce cours, mais on en donne un autre exemple ci-dessous.

4.1 Exponentielle stochastique

Si l'on considère la fonction de classe C^∞, $f : x \mapsto e^x$, et une semi-martingale continue nulle en 0, X, on peut appliquer la formule de Itô au processus $Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$. Il vient :

$$Z_t = 1 + \int_0^t [\exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)(dX_s - \frac{1}{2}d\langle X\rangle_s) + \frac{1}{2}\exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)d\langle X\rangle_s].$$

Soit après simplification :

$$Z_t = 1 + \int_0^t \exp(X_s - \frac{1}{2}\langle X\rangle_s)dX_s,$$

ou bien en notation différentielle :

$$dZ_s = Z_s dX_s.$$

C'est un autre exemple d'équation différentielle (stochastique). On a le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors il existe une unique semi-martingale continue solution de l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dX_s \tag{15}$$

et elle s'explicite en :

$$Z_t(X) = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t).$$

La formule de Itô montre que ce processus est effectivement solution de l'équation demandée.
Exercice : montrer l'unicité en supposant qu'il exsiste deux solutions Z et Z' et en appliquant la formule de Ito au quotient $Y_t = \frac{Z_t}{Z'_t}$.

Définition 4.2. *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. On appelle* **exponentielle stochastique** *de X, notée $\mathcal{E}(X)$, l'unique solution de l'équation différentielle (15).*

Exemple : Soit $X = aB$ ou a est un réel et B le mouvement brownien ; alors $\mathcal{E}_t(aB) = \exp(aB_t - \frac{1}{2}a^2t)$ parfois appelé le "mouvement brownien géométrique".

On donne quelques résultats sur ces exponentielles stochastiques.

Théorème 4.3. *(cf [30], th. 37) Soit X et Y deux semi-martingales continues, $X_0 = Y_0 = 0$. Alors*

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle).$$

Preuve : on pose $U_t = \mathcal{E}_t(X)$ et $V_t = \mathcal{E}_t(Y)$ et l'on applique la formule d'intégration par parties (3.7):

$$U_tV_t - 1 = \int_0^t U_sdV_s + V_sdU_s + d\langle U, V\rangle_s$$

En posant $W = UV$ et en utilisant la définition différentielle de l'exponentielle stochastique on obtient le résultat. •

Corollaire 4.4. *Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors l'inverse $\mathcal{E}_t^{-1}(X) = \mathcal{E}_t(-X + \langle X\rangle)$*

Preuve en exercice.

On peut considérer des équations différentielles stochastiques linéaires un peu plus générales.

Théorème 4.5. *(cf [30], th. 52, page 266.) Soit Z et H deux semi-martingales continues réelles, $Z_0 = 0$. Alors l'équation différentielle stochastique :*

$$X_t = H_t + \int_0^t X_sdZ_s$$

admet pour unique solution

$$\mathcal{E}_H(Z)_t = \mathcal{E}_t(Z)(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(Z)(dH_s - d\langle H, Z\rangle)_s).$$

Preuve : on utilise la méthode de variation des constantes. On suppose que la solution est de la forme :

$$X_t = \mathcal{E}_t(Z)C_t$$

que l'on dérive par la formule de Itô :

$$dX_t = C_td\mathcal{E}_t(Z) + \mathcal{E}_t(Z)dC_t + d\langle\mathcal{E}(Z), C\rangle_t$$

soit en remplaçant $d\mathcal{E}_t(Z)$ par sa valeur et en utilisant la forme particulière de X :

$$dX_t = X_tdZ_t + \mathcal{E}_t(Z)[dC_t + d\langle Z, C\rangle_t].$$

Si X est solution de l'équation demandée, il vient par identification des deux formes de l'élément différentiel dX_t :

$$dH_t = \mathcal{E}_t(Z)[dC_t + d\langle Z, C\rangle_t].$$

Or, puisque $\mathcal{E}_t(Z)$ est une exponentielle et que $(Z_t - \frac{1}{2}\langle Z\rangle_t)$ est fini, $\mathcal{E}_t^{-1}(Z)$ existe et

$$dC_t = \mathcal{E}_t^{-1}(Z)dH_t - d\langle Z, C\rangle_t$$

d'où il vient :

$$d\langle Z, C\rangle_t = \mathcal{E}_t^{-1}(Z)d\langle H, Z\rangle_t$$

soit finalement :

$$dC_t = \mathcal{E}_t^{-1}(Z)[dH_t - d\langle H, Z\rangle_t].$$

(On a utilisé que la covariation de C et Z est la même que celle de $\mathcal{E}_t(Z)^{-1}.H$ et Z). •

4.2 Ornstein-Uhlenbeck

Un autre exemple important utilisé en finance (par exemple pour modéliser la dynamique des taux) est celui de l'équation d'**Ornstein-Uhlenbeck** (cf [20], page 358) :

$$dX_t = a(t)X_t dt + b(t)dB_t,\ t \in [0,T],\ X_0 = x$$

avec a et b des processus $\mathcal{F}-$adaptés, a presque sûrement intégrable en temps et $b \in L^2(\Omega \times [0,T], d\mathbb{P} \otimes dt)$. Lorsque ce sont des constantes α et β, on obtient la solution :

$$X_t = e^{-\alpha t}(x + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s).$$

On peut également montrer :

$$\begin{aligned}
m(t) &= E(X_t) = m(0)e^{-\alpha t} \\
V(t) &= Var(X_t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha} + (V(0) - \frac{\sigma^2}{2\alpha})e^{-2\alpha t} \\
\rho(s,t) &= cov(X_s, X_t) = [V(0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{2\alpha(t\wedge s)} - 1)]e^{-\alpha(t+s)}
\end{aligned}$$

4.3 Aperçu sur des EDS plus générales

De façon générale, on a des conditions suffisantes d'existence voire d'unicité de solution de l'équation avec condition initiale $X_t = x$:

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(u, X_u)du + \sigma(u, X_u)dW_u \tag{16}$$

avec par exemple pour hypothèses que les coefficients sont :
(i) continus, de croissance au plus linéaire en espace,

(ii) tels qu'il existe une solution à l'équation, unique en loi, c'est à dire **solution faible** : il existe une probabilité $\mathbb{P}_x$ sur l'espace de Wiener $(\Omega, \mathcal{F})$ sous laquelle

. X est $\mathcal{F}-$adaptée continue, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

. si $S_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$, X^{S_n} vérifie les conditions d'existence des solutions fortes (c'est à dire solutions trajectorielles).
La limite croissante des temps S_n s'appelle le temps d'explosion. On a $\mathbb{P}_x$-presque sûrement pour tout n

$$X_{t\wedge S_n} = x + \int_t^{t\wedge S_n} b(u, X_u)du + \int_t^{t\wedge S_n} \sigma(u, X_u)dW_u.$$

Pour plus de précision, je cite le théorème d'existence 6 page 194 de [30].

Théorème 4.6. *Let Z a semimartingale with $Z_0 = 0$ and let $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}$ be such that*

(i) for fixed x, $(t, \omega) \mapsto f(t, x, \omega)$ is adapted càdlàg,

(ii) for each (t, ω), $|f(t, x, \omega) - f(t, y, \omega)| \leq K(\omega)|x - y|$ for some finite random variable K.
Let X_0 be finite and $\mathcal{F}_0$-measurable. Then the equation

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, ., X_{s-})dZ_s$$

admits a solution. This solution is unique and it is a semimartingale.

Ou encore le théorème 2.5 page 287 de [20].

Théorème 4.7. *Let the EDS*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

such that the coefficient b and σ are locally Lipschitz continuous in the space variable; i.e. for every integer $n \geq 1$ there exists a constant K_n such that for every $t \geq 0$, $\|x\| \leq n$, and $\|y\| \leq n$

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K_n\|x - y\|.$$

Then strong uniqueness holds.

4.4 Lien avec les EDP. Problème de Dirichlet

(cf [20] 5.7 pages 363 et sq.)
Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.8. *Un opérateur différentiel $\mathcal{A} = \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\partial^2_{ij}$ d'ordre 2 est dit elliptique en x si*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d_*, \ \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j > 0.$$

Si $\mathcal{A}$ est elliptique en tout point de D, on dit qu'il est elliptique dans D.
S'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta \|\xi\|^2,$$

on dit qu'il est uniformément elliptique.

Le **problème de Dirichlet** est celui de trouver une fonction u de classe C^2 sur D ouvert borné, de valeur f sur ∂D, et vérifiant dans D :

$$\mathcal{A}u - ku = -g$$

avec $\mathcal{A}$ elliptique, $k \in \mathcal{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^+)$, $g \in \mathcal{C}(\bar{D}, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$.

Proposition 4.9. *(Proposition 7.2, page 364 [20])*
Soit u solution du problème de Dirichlet $(\mathcal{A}, D)$ et X solution de (16) avec l'opérateur $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l} \sigma_l^i \sigma_l^j(x)\partial_{ij}^2 + \nabla.b(x)$; T_D le temps de sortie de D par X. Si

$$E_x(T_D) < \infty \tag{17}$$

pour tout $x \in D$, alors pour tout $x \in \bar{D}$,

$$u(x) = E_x[f(X_{T_D})\exp(-\int_0^{T_D} k(X_s)ds) + \int_0^{T_D} g(X_t)\exp(-\int_0^t k(X_s)ds)dt].$$

Preuve en exercice (problème 7.3 de [20], corrigé page 393).
Remarquons d'abord que la continuité de X fait que $X_{T_D} \in \partial D$.
Indication : montrer que

$$M : t \mapsto u(X_{t\wedge T_D})\exp\left(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds\right) + \int_0^{t\wedge T_D} g(X_s)\exp\left(-\int_0^s k(X_u)du\right)ds, t \geq 0$$

est une martingale uniformément intégrable pour $\mathbb{P}_x$: on calcule $E_x(M_0) = E_x(M_\infty)$; sur $\{t < T_D\}$, on fait la différentielle de Itô de M et on utilise que sur $D, \mathcal{A}u - ku + g = 0$.
$M_0 = u(x)$ car $X_0 = x$ sous $\mathbb{P}_x$,

$$dM_t = \exp(-\int_0^{t\wedge T_D} k(X_s)ds)[\mathcal{A}u(X_{t\wedge T_D})dt + \nabla u(X_{t\wedge T_D})\sigma(t, X_{t\wedge T_D})dW_t + g(X_{t\wedge T_D}) - (k.u)(X_{t\wedge T_D})dt,$$

les fonction ∇u et σ sont continues donc bornées sur le compact $\bar{D}$, donc le deuxième terme ci-dessus est une martingale, de plus les autres termes se simplifient puisque $\mathcal{A}u - ku + g = 0$ et pour tout $t, E_x[M_t] = u(x)$.

Cette martingale est uniformément intégrable car bornée dans L^2, on peut faire tendre t vers l'infini et appliquer le théorème d'arrêt puisque $E_x[T_D] < \infty$. •

Remarque 4.10. *(Friedman, 1975)*
Une condition suffisante pour avoir l'hypothèse (17) est $\exists l, \exists \alpha \ : \ a_{l,l}(x) \geq \alpha > 0$. Cette condition est plus forte que l'ellipticité, mais moins forte que l'uniforme ellipticité dans D.

on pose :

$$b^* = \max\{|b_l(x)|, x \in \bar{D}\}, q = \min\{x_l, x \in \bar{D}\},$$

on choisit $\nu > 4b^*/\alpha, h(x) = -\mu \exp(\nu x_l), x \in D$, μ à choisir plus tard. Alors h est de classe C^∞, et $-\mathcal{A}h(x)$ se calcule et se minore :

$$-\mathcal{A}h(x) = (\frac{1}{2}\nu^2 a_{ll} + \nu b_l(x))\mu e^{\nu x_l} \geq (\frac{8(b^*)^2}{\alpha} - \frac{4b^*}{\alpha}b^*)\mu e^{\nu x_l} \geq \frac{4(b^*)^2}{\alpha}\mu e^{\nu q} \geq 1.$$

On choisit alors μ assez grand pour que $-\mathcal{A}h(x) \geq 1$; $x \in D$, h et ses dérivées sont bornées dans D, et on peut appliquer Itô à h

$$h(X_t^{T_D}) = h(x) + \int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds + \int_0^{t\wedge T_D} \nabla h(X_s)\sigma(X_s)dW_s.$$

On en tire

$$t \wedge T_D \leq h(x) - h(X_t^{T_D}) = -\int_0^{t\wedge T_D} \mathcal{A}h(X_s)ds$$

à une martingale uniformément intégrable près. Donc $E_x[t \wedge T_D] \leq 2\|h\|_\infty$ et l'on fait tendre t vers l'infini.

4.5 Modèle de Black et Scholes

Ce modèle est typiquement celui d'une exponentielle stochastique à coefficients constants. On suppose que l'actif risqué est solution de l'EDS

$$dS_t = S_t b dt + S_t \sigma dW_t, S_o = s, \tag{18}$$

le coefficient b s'appelle la "tendance" (trend) et σ la "volatilité". D'après ce qui précède, cette EDS admet la solution unique explicite :

$$S_t = s \exp[\sigma W_t + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)t].$$

Remarquons que $\log S_t$ suit une loi gaussienne.

Exercice : montrer l'unicité de la solution de (18) ; on pourra se servir de la formule de Itô appliquée aux quotient de deux solutions.

Les définitions qui suivent seront vues plus en détail dans le chapitre 7.

Définition 4.11. *On dit qu'une politique θ est autofinançante si $V_t(\theta) = a_t S_t^0 + d_t S_t = \langle \theta_0, p_0 \rangle + \int_0^t a_s dS_s^0 + \int_0^t d_s dS_s$.*

De plus, elle est **admissible** *si elle est autofinançante et si la valeur obtenue*

$$V_t(\theta) = V_0 + \int_0^t \theta_s . dS_s$$

est presque sûrement minorée par une constante réelle.

Une opportunité d'arbitrage est une politique admissible $_theta$ telle que la valeur $V_.(\theta)$ vérifie $V_0(\theta) = 0$ et $\mathbb{P}(V_T(\theta) > 0) > 0$.

On appelle **probabilité neutre au risque** *toute probabilité Q équivalente à $\mathbb{P}$ telle que tous les prix "actualisés" (c'est à dire $e^{-rt}S_t$ où r est un coefficient d'actualisation, par exemple le taux d'inflation) sont des $(\mathcal{F}, Q)-$martingales.*
Un marché est **viable** *si l'hypothèse AOA est vérifiée. Une condition suffisante est l'existence d'au moins une probabilité neutre au risque.*
Un marché est **complet** *dès que pour tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ il existe θ stochastiquement intégrable par rapport au vecteur des prix tel que $X = E(X) + \int_0^T \theta_t dS_t$.*

Le marché du modèle de Black et Scholes est viable et complet avec l'unique probabilité neutre au risque

$$Q = L_T \mathbb{P}, dL_t = -L_t \sigma^{-1}(b - r) dW_t, t \in [0, T], L_0 = 1.$$

Définition 4.12. *On appelle option d'achat ("call") le contrat suivant : l'acheteur paye en 0 une somme q qui lui donne la possibilité d'acheter au temps 1 l'action au prix K sans en avoir l'obligation. Si en $T, S_T > K$, il exerce son droit et gagne $S_T - K - q$. Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu q. Globalement, il gagne $(S_T - K)^+ - q$.*

On appelle option de vente ("put") le contrat suivant : l'acheteur paye en 0 une somme q qui lui donne la possibilité de vendre au temps 1 l'action au prix K sans en avoir l'obligation. Si en $T, S_T < K$, il exerce son droit et gagne $K - S_T - q$. Sinon, et s'il n'exerce pas son droit, il aura perdu q. Globalement, il gagne $(K - S_T)^+ - q$.

Le problème est alors de trouver un prix "équitable" (*fair price*), q, entre l'acheteur et le vendeur de ce contrat. C'est l'objet de la **formule de Black et Scholes**
Pour ce faire, on fait l'hypothèse que le portefeuille de couverture de cet objectif, θ, est tel qu'il existe une fonction C de classe $(1,2)$ telle que la valeur est :

$$V_t(\theta) = C(t, S_t). \tag{19}$$

Par ailleurs, θ est le couple (a, d) et on a

$$V_t(\theta) = a_t S_t^0 + d_t S_t = \langle\theta_0, p_0\rangle + \int_0^t a_s dS_s^0 + \int_0^t d_s dS_s. \tag{20}$$

Avec cette "politique" θ (dite "autofinaçante), le vendeur de l'option (par exemple $(S_T - K)^+$) pourra "couvrir" l'option à l'aide du prix initial obtenu $q = V_0$: $V_T(\theta) = C(T, S_T)$.

On a deux manières de calculer la différentielle de cette valeur que l'on identifie :

$$dV_t(\theta) = \partial_t C(t, S_t)dt + \partial_x C(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t, S_t)S_t^2\sigma^2 dt,$$

à partir de (19) et à partir de (20) :

$$dV_t(\theta) = ra_t S_t^0 dt + d_t S_t(bdt + \sigma dW_t).$$

L'identification donne deux équations, en sus de (20) qui n'est autre que $C(t, S_t)$:

$$\begin{aligned} &\partial_t C(t, S_t) + bS_t\partial_x C(t, S_t) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t, S_t)S_t^2\sigma^2 = ra_t S_t^0 + d_t S_t b \\ &\partial_x C(t, S_t)S_t\sigma = d_t S_t\sigma. \end{aligned} \tag{21}$$

On obtient ainsi le portefeuille :

$$d_t = \partial_x C(t, S_t) \ ; \ a_t = \frac{C(t, S_t) - S_t\partial_x C(t, S_t)}{S_t^0}. \tag{22}$$

Pour connaitre explicitement le portefeuille, il reste à trouver la fonction C solution de l'EDP, obtenue en utilisant la première équation de (21) :

$$\partial_t C(t, x) + rx\partial_x C(t, x) + \frac{1}{2}\partial^2_{x^2} C(t, x)x^2\sigma^2 = rC(t, x),$$

$$C(T, x) = (x - K)^+, x \in \mathbb{R}^+.$$

On peut remplacer S_t par $x \in \mathbb{R}^+$ car c'est une var lognormale donc à support dans tout $\mathbb{R}^+$. Ceci se résout par la **formule de Feynman-Kac**. On pose

$$dY_s = Y_s(rds + \sigma dW_s), Y_t = x.$$

Alors $Y_s = x\exp[\sigma(W_s - X_t) - (s-t)(\frac{1}{2}\sigma^2 + r)]$ noté $Y_s^{(t,x)}$ et

$$C(t, x) = E_x[e^{-r(T-t)}(Y_T^{t,x} - K)^+]$$

est la solution attendue, le portefeuille étant donné par les équations (22). La célèbre formule de Black-Scholes permet un calcul explicite de cette fonction, en posant φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard :

$$\begin{aligned} C(t,x) &= x\varphi\left(\frac{\log(x/K)+(T-t)(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &\quad -Ke^{-r(T-t)}\varphi\left(\frac{\log(x/K)+(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \end{aligned}$$

Le prix initial q de l'option est alors donné par $C(0,x)$.

De fait, on résout plutôt avec le changement de (variable,fonction) :

$$x = e^y, y \in \mathbb{R} \ ; \ D(t,y) = C(t,e^y)$$

qui permet de se ramener au problème de Dirichlet

$$\partial_t D(t,y) + r\partial_y D(t,y) + \frac{1}{2}\partial^2_{y^2} D(t,y)\sigma^2 = rD(t,y), y \in \mathbb{R},$$

$$D(T,y) = (e^y - K)^+, y \in \mathbb{R},$$

associé à l'équation différentielle stochastique :

$$dX_s = rds + \sigma dW_s, s \in [t,T], X_t = y.$$

C'est exactement ce que l'on a vu dans la proposition 4.9, avec $g = 0$, $f(x) = (e^x - k)^+$, $k(x) = r$. *Donc,*

$$D(t,y) = E_y[e^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+],$$

d'où la formule explicite car la loi de X_T *est une gaussienne.*

Le prix au temps t est $C(t,S_t) = E_Q e[^{-r(T-t)}(e^{X_T} - K)^+/\mathcal{F}_t]$ dont le calcul est simple : la loi de X_T sachant $\mathcal{F}_t$ est une gaussienne de moyenne $S_t + r(T-t)$ et de variance $\sigma^2(T-t)$.

5 Changement de probabilité et théorème de Girsanov

La motivation de ce chapitre est la suivante : les martingales, et les martingales locales, sont des outils puissants, et cela vaut donc la peine de modéliser la réalité en sorte que les processus en jeu soient des martingales, au moins locales. Ainsi, pour l'application du calcul stochastique aux finances, les données sont celles d'un jeu de processus qui modélisent l'évolution dans le temps des prix des actions en cours sur le marché financier, et l'on peut légitimement se poser la question :

est ce qu'il existe un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel les processus de prix sont tous des martingales (au moins locales)?

Précisément, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ qui donne cette propriété ? D'où les deux problèmes abordés dans ce chapitre :

- comment passer d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de façon simple, y a-t-il une densité $\frac{d\mathbb{P}}{dQ}$?
Comment se transforment alors le mouvement brownien, les martingales ? et c'est le théorème de Girsanov, section 5.1.

- Enfin, étant donnée une famille de semi-martingales sur l'espace probabilisable filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t))$, existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ telle que tous ces processus soient des martingales sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, et c'est ce que l'on appelle un problème de martingales, que l'on verra dans le chapitre 7,
On se place donc a priori sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un mouvement brownien B, $B_0 = 0$ de dimension d. La filtration est celle engendrée par le mouvement brownien et l'on note $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ les martingales relatives à $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

On ajoute la notion de **martingales locales**, d'ensemble noté $\mathcal{M}_{loc}, (\mathbb{P})$ c'est à dire un processus M adapté tel qu'il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) croisssant vers l'infini tel que pour tout n le processus arrêté en T_n M^{T_n} est une vraie martingale.

5.1 Théorème de Girsanov

([20] 3.5, p 190-196 ; [30] 3.6, p 108-114) Soit X un processus mesurable adapté dans $\mathcal{P}(B)$ c'est à dire que pour tout T :
$\mathcal{P}(B) := \{X$ processus mesurable adapté :$\forall T,\ \int_0^T \| X_s \|^2 ds < +\infty\ \mathbb{P}\ p.s.\}$
Cet ensemble est plus large que $\mathcal{L}(B) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, d\mathbb{P} \otimes dt)$.
De façon générale on définit pour une martingale M l'ensemble $\mathcal{P}(M)$ qui contient $\mathcal{L}(M) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}^+, d\mathbb{P} \otimes d\langle M \rangle)$:

$$\mathcal{P}(M) := \{X \textit{ processus mesurable adapté } : \forall T,\ \int_0^T \| X_s \|^2 d\langle M \rangle_s < +\infty\ \mathbb{P}\ p.s.\}$$

Pour de tels processus X, $X.M$ est seulement une martingale "locale".

On peut donc définir la martingale locale $X.B$ et son exponentielle de Doléans (exponentielle stochastique) dès que pour tout t $\int_0^t \parallel X_s \parallel^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ $p.s.$:

$$\mathcal{E}_t(X.B) = \exp[\int_0^t (\sum_i X_s^i dB_s^i - \frac{1}{2} \parallel X_s \parallel^2 ds)],$$

solution de l'EDS

$$dZ_t = Z_t \sum_i X_t^i dB_t^i \ ; \ Z_0 = 1, \tag{23}$$

qui est aussi une martingale locale puisque $\int_0^t Z_s^2 \parallel X_s \parallel^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ $p.s.$ par continuité de l'intégrand sur $[0, t]$.

Sous certaines conditions, $\mathcal{E}_.(X.B)$ est une “vraie" martingale, alors pour tout t, $E[Z_t] = 1$, ce qui permet d'effectuer le changement de probabilité sur la tribu $\mathcal{F}_t$:

$$Q = Z_t.\mathbb{P} \text{ c'est à dire si } A \in \mathcal{F}_t, \ Q(A) = E_{\mathbb{P}}[1_A Z_t].$$

Comme $Z_t > 0$, les deux probabilités sont équivalentes et $\mathbb{P}(A) = E_Q[Z_t^{-1}\mathbf{1}_A]$.

Théorème 5.1. *(Girsanov, 1960 ; Cameron-Martin, 1944) Si le processus $Z = \mathcal{E}(X.B)$ solution de (23) appartient à $\mathcal{M}(\mathbb{P})$, et si Q est la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par $Z_T.\mathbb{P}$ alors :*

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t X_s ds, \ t \leq T$$

est un mouvement brownien sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, Q)$.

La preuve nécessite un lemme préparatoire. Ci-dessous E_Q note l'espérance sous Q et $E_{\mathbb{P}}$ note l'espérance sous $\mathbb{P}$.

Lemme 5.2. *Soit $T \geq 0$, Z élément de $\mathcal{M}(\mathbb{P})$ et $Q = Z_T\mathbb{P}$. Soit $0 \leq s \leq t \leq T$ et une variable Y aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable dans $L^1(Q)$, alors $E_Q(Y/\mathcal{F}_s) = \frac{E_{\mathbb{P}}(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}$.*

Remarquons qu'il s'agit en quelque sorte d'une formule de Bayes.
Preuve (exercice) : Soit $A \in \mathcal{F}_s$, il vient :

$$E_Q(1_A \frac{E(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}) = E(1_A E(YZ_t/\mathcal{F}_s))$$

car sur $\mathcal{F}_s$, $Q = Z_s\mathbb{P}$. Puis : $E[1_A E(YZ_t/\mathcal{F}_s)] = E(1_A Y Z_t)$
par définition de l'espérance conditionnelle et enfin par définition de Q, et puisque $1_A Y$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable

$$E(1_A Y Z_t) = E_Q(1_A Y)$$

et ceci pour tout A de $\mathcal{F}_s$, ce qui permet d'identifier $\frac{E_{\mathbb{P}}(YZ_t/\mathcal{F}_s)}{Z_s}$ comme l'espérance conditionnelle attendue. •

Proposition 5.3. *Sous les hypothèses du théorème de Girsanov, pour toute $\mathbb{P}$-martingale locale continue M, le processus N ci-dessous est une $Q-$martingale locale :*

$$N = M - \int_0 \sum_i X_s^i d\langle M, B^i \rangle_s.$$

Preuve : (exercice)

•

On obtient en corollaire que $\tilde{B}$ est une Q-martingale de crochet t. Pour montrer que c'est un Q-mouvement brownien, il suffit de montrer soit qu'il s'agit d'un processus à accroissements indépendants de loi gaussienne, soit que c'est un processus gaussien.

On peut regarder maintenant les choses dans un ordre "inverse", c'est à dire chercher, lorsqu'il y a des probabilités équivalentes, le lien entre les martingales sous l'une et l'autre probabilités et par rapport à la même filtration.

Proposition 5.4. *Soit $\mathbb{P}$ et Q deux probabilités équivalentes sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et la martingale continue uniformément intégrable $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$. Alors*
$M \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q) \Leftrightarrow MZ \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$.

Preuve : Soit une suite (T_n) de temps d'arrêt localisante pour M : si l'on applique le lemme 5.2, il vient pour tout $s \leq t$:

$$E_Q[M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s] = \frac{E_{\mathbb{P}}[Z_t M_{t\wedge T_n}/\mathcal{F}_s]}{Z_s} \tag{24}$$

Alors le fait que $M^{T_n} \in \mathcal{M}(Q)$ implique que $(MZ)^{T_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.
Réciproquement, il suffit de prendre une suite de temps d'arrêt localisante pour ZM et d'appliquer à nouveau (24). •

Théorème 5.5. *de Girsanov-Meyer : Soit $\mathbb{P}$ et Q deux probabilités équivalentes, $Z_t = E[\frac{dQ}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t]$ et X une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de décomposition $X = M + A$. Alors, X est aussi une semi-martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ de décomposition $X = N + C$, où*

$$N = M - \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s \ ; \ C = A + \int_0^t Z_s^{-1} d\langle Z, M\rangle_s.$$

Preuve : (i) C est un processus à variation finie comme somme de deux processus à variation finie.

(ii) On applique la proposition 5.4 à N et pour ce faire, on calcule le produit NZ par Itô sous $\mathbb{P}$.

$$d(NZ)_t = N_t dZ_t + Z_t dM_t - Z_t Z_t^{-1} d\langle Z, M\rangle_t + d\langle Z, N\rangle_t$$

Or, N est une $\mathbb{P}$-semi-martingale de partie martingale M : son crochet avec Z coïncide avec celui de M avec Z ce qui permet la simplification et montre que NZ est une $\mathbb{P}$-martingale donc N une Q-martingale. •

5.2 Condition de Novikov

(cf [20] pages 198-201.)
Tout le paragraphe précédent est fondé sur l'hypothèse que le processus $\mathcal{E}(X.B)$ est une vraie martingale. On doit donc donner des conditions suffisantes sur X pour que cette hypothèse soit réalisée. De façon générale, $\mathcal{E}(X.B)$ est au moins une martingale locale avec pour suite localisante par exemple :

$$T_n = \inf\{t \geq 0, \ \int_0^t \| \mathcal{E}_s(X.B)X_s \|^2 \, ds > n\}$$

Lemme 5.6. *$\mathcal{E}(X.B)$ est une surmartingale et c'est une martingale si et seulement si pour tout $t \geq 0$ on a $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$.*

Preuve : Il existe une suite croissante de temps d'arrêt T_n telle que pour tout n, $\mathcal{E}(X.B)^{T_n} \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$ donc pour tout $s \leq t$ on a

$$E[\mathcal{E}_{T_n \wedge t}(X.B)/\mathcal{F}_s] = \mathcal{E}_{T_n \wedge s}(X.B)$$

par le lemme de Fatou on déduit de cette égalité en passant à la limite que de fait $\mathcal{E}(X.B)$ est une surmartingale. (toute martingale locale positive est une surmartingale.) Comme $E[\mathcal{E}_0(X.B)] = 1$, il suffit que pour tout $t \geq 0$ on ait $E[\mathcal{E}_t(X.B)] = 1$ pour que $\mathcal{E}(X.B)$ soit une martingale. •

Proposition 5.7. *Soit M une martingale locale continue pour $\mathbb{P}$ et $Z = \mathcal{E}(M)$ telle que $E[\exp \frac{1}{2}\langle M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0, E[Z_t] = 1$.*

Corollaire 5.8. *(Novikov, 1971) : Soit X un processus mesurable adapté tel que :*

$$E[\exp \frac{1}{2} \int_0^t \| X_s \|^2 \, ds] < \infty \textit{ pour tout } t \geq 0$$

alors $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}(\mathbb{P})$.

Pour terminer ce paragraphe, voici un exemple de processus $X \in \mathcal{P}(B)$ ne vérifiant pas la condition de Novikov, tel que $\mathcal{E}(X.B) \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ mais n'est pas une "vraie" martingale (exercice) :
Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{1 \geq t \geq 0, t + B_t^2 = 1\}$ et

$$X_t = -\frac{2}{(1-t)^2} B_t 1_{\{t \leq T\}} \ ; \ 0 \leq t < 1, \ X_1 = 0.$$

(i) Montrer que $T < 1$ presque sûrement et donc que $\int_0^1 X_t^2 dt < \infty$ presque sûrement.

(ii) Appliquer la formule de Itô au processus $t \to \frac{B_t^2}{(1-t)^2}$; $0 \leq t < 1$ pour montrer que :

$$\int_0^1 X_t dB_t - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2 dt = -1 - 2\int_0^T [\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}] B_t^2 dt < -1.$$

(iii) La martingale locale $\mathcal{E}(X.B)$ n'est pas une martingale (pas jusqu'au temps 1 en tout cas !) : on déduit de (ii) que son espérance est majorée par $\exp(-1) < 1$ ce qui contredit le lemme 5.6.
Cependant on peut montrer que pour tout $n \geq 1$ et $\sigma_n = 1-(1/\sqrt{n})$, le processus $\mathcal{E}(X.B)^{\sigma_n}$ est une martingale.

6 Théorème de représentation des martingales, problème de martingales

(cf Protter [30], pages 147-157.)
L'objet de ce chapitre est de montrer qu'une classe assez large de martingales peut s'écrire (se "représenter" par) $X.B$. Ceci permettra de résoudre le problème de trouver une probabilité commune à tous les processus de prix sous laquelle ces processus seront tous des martingales, au moins locales.

6.1 Propriété de représentation

On considère ici les martingales de $\mathcal{M}^{2,c}$ qui de plus sont nulles à l'origine et vérifie $\langle M\rangle_\infty \in L^1$. Car alors $\sup_t E[M_t^2] = \sup_t E[\langle M\rangle_t] = E[\langle M\rangle_\infty] < \infty$. Ces martingales sont uniformément intégrables, il existe M_∞ telle que pour tout $t \geq 0,\ M_t = E[M_\infty/\mathcal{F}_t]$. On note $\mathcal{H}_0^2$ leur ensemble.

$$\mathcal{H}_0^2 = \{M \in \mathcal{M}^{2,c}, M_0 = 0, \langle M\rangle_\infty \in L^1\}.$$

Définition 6.1. *Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{H}_0^2$ est appelé* **sous-espace stable** *si pour tout $M \in F$ et pour tout temps d'arrêt T alors $M^T \in F$.*

On rappelle les notations suivantes

$$\mathcal{L}(M) = \{X \text{ adapté } \in L^2(\Omega\times\mathbb{R}^+, \mathbb{P}\otimes d\langle M\rangle)\}\ ;\ \mathcal{L}^*(M) = \{X \text{ progressif } \mathbb{P}\, p.s. \in L^2(\mathbb{R}^+, d\langle M\rangle)\}$$

et que si X est càd ou càg, alors adapté équivaut à progressif. C'est le cas que nous envisagerons toujours dans la suite.

Théorème 6.2. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}_0^2$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) si $M \in F$ et $A \in \mathcal{F}_t$, $(M - M^t)1_A \in F$, $\forall t \geq 0$.

(ii) F est un **sous-espace stable**.

(iii) si $M \in F$ et H borné $\in \mathcal{L}^*(M)$ alors $H.M \in F$.

(iv) si $M \in F$ et $H \in \mathcal{L}^*(M) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M\rangle)$, alors $H.M \in F$.

Preuve : Puisque $\mathcal{L}_b^*(M) \subset \mathcal{L}^*(M) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M\rangle)$, l'implication (iv) $\Rightarrow$ (iii) est immédiate.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : il suffit de prendre pour tout temps d'arrêt T le processus $H_t = 1_{[0,T]}(t)$. Alors,

$$(H.M)_t = \int_0^t 1_{[0,T]}(s)dM_s = M_{t\wedge T} \in F,$$

c'est à dire que M^T est un élément de F.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : soit t fixé, $A \in \mathcal{F}_t$ et $M \in F$. On construit le temps d'arrêt $T(\omega) = t$ si $\omega \in A$ et l'infini sinon. Il s'agit bien d'un temps d'arrêt puisque $A \in \mathcal{F}_t$. Par ailleurs, d'une part :

$$\begin{aligned}(M - M^t)1_A &= (M - M^t) \text{ si } \omega \in A, \text{ ce qui équivaut à } T(\omega) = t \\ &= 0 \text{ sinon },\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}M - M^T &= (M - M^t) \text{ si } \omega \in A, \\ &= 0 \text{ sinon },\end{aligned}$$

ce qui veut dire que $(M - M^t)1_A = M - M^T$. Or F est stable, donc M et $M^T \in F$, donc $(M - M^t)1_A \in F$ pour tout $t \geq 0$, soit la propriété (i).

(i) $\Rightarrow$ (iv) : soit $H \in \mathcal{P}$ qui s'écrit :

$$H = H_0 + \sum_i H_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

où $H_i = 1_{A_i}, A_i \in \mathcal{F}_{t_i}$. Alors

$$H.M = \sum_i 1_{A_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) = \sum_i 1_{A_i}(M - M^{t_i})_{t_{i+1}}$$

qui appartient à F par (i). Tout processus simple est limite de combinaisons linéaires de processus tels H ci-dessus, et l'intégrale stochastique étant linéaire on obtient que pour tout processus simple $X, X.M \in F$ qui est un espace vectoriel. On procède ensuite par limite puisque $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{L}^*(M) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M \rangle)$ (cf. proposition 2.10) •

Définition 6.3. *Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$. On note $S(\mathcal{A})$ le plus petit sous espace vectoriel fermé stable contenant $\mathcal{A}$.*

Définition 6.4. *Soit M et $N \in \mathcal{H}_0^2$. On dit que M et N sont orthogonales si $E[M_\infty N_\infty] = 0$ et fortement orthogonales si MN est une martingale.*

Remarquons que puisque par définition $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale, la forte orthogonalité équivaut au fait que $\langle M, N \rangle = 0$. On a donc de façon naturelle que la forte orthogonalité implique l'orthogonalité ; la réciproque est fausse : considérons $M \in \mathcal{H}_0^2$ et Y une variable de Bernoulli (valant ± 1 avec proba $\frac{1}{2}$), indépendante de M. Soit $N = YM$. Montrer en exercice que M est orthogonale à N mais que l'orthogonalité n'est pas forte.

Pour $\mathcal{A}$ sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$, on note $\mathcal{A}^\perp$ son orthogonal, et $\mathcal{A}^\dagger$ son orthogonal fort.

Lemme 6.5. *Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{H}_0^2$: $\mathcal{A}^\dagger$ est un sous-espace vectoriel fermé stable.*

Preuve : soit une suite $M^n \in \mathcal{A}^\dagger$ de limite M dans $\mathcal{H}_0^2$ et N dans $\mathcal{A}$: pour tout n, $M^n N$ est une martingale uniformément intégrable. D'autre part, pour tout $t \geq 0$, par Cauchy-Schwartz

$$E[|\langle M^n - M, N \rangle_t|^2] \leq E[\langle M^n - M \rangle_t] E[\langle N \rangle_t]$$

qui converge vers zéro. Donc $\langle M^n, N \rangle_t \to \langle M, N \rangle_t$ dans L^2. Or, pour tout n et tout t, $\langle M^n, N \rangle_t = 0$, et par conséquent $\langle M, N \rangle_t = 0$ et M est orthogonale à N. •

Lemme 6.6. *Soit deux martingales de $\mathcal{H}_0^2$. on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}
&(i) M \text{ et } N \text{ fortement orthogonaux, noté } M \dagger N,\\
&(ii) S(M) \dagger N\\
&(iii) S(M) \dagger S(N)\\
&(iv) S(M) \perp N\\
&(v) S(M) \perp S(N)
\end{aligned}$$

Preuve en exercice.

Théorème 6.7. *Soit $M^1, \cdots, M^n \in \mathcal{H}_0^2$ telles que pour $i \neq j$, $M^i \dagger M^j$. Alors, $S(M^1, \cdots, M^n) = \{\sum_{i=1}^n H^i M^i \ ; H^i \in \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i \rangle)\}$.*

Preuve : on note $\mathcal{I}$ le membre de droite. Par construction et par la propriété (iv) , $\mathcal{I}$ est un espace stable. On considère l'application :

$$\begin{aligned}
\oplus_i \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i \rangle) \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{H}_0^2\\
(H^i) \quad &\longmapsto \quad \sum_{i=1}^n H^i.M^i
\end{aligned}$$

On vérifie sans peine qu'il s'agit d'une isométrie en utilisant que pour $i \neq j$, $M^i \dagger M^j$:

$$\| \sum_{i=1}^n H^i M^i \|_2^2 = \sum_{i=1}^n \| H^i M^i \|_2^2 = \sum_{i=1}^n E[\int_0^\infty |H_s^i|^2 d\langle M^i \rangle_s].$$

Donc l'ensemble $\mathcal{I}$ image par une isométrie d'un fermé est fermé et contient donc $S(M^1, \cdots, M^n)$.

Réciproquement, d'après le théorème 6.2 (iv), tout ensemble fermé F stable contenant les M^i contient les $H^i.M^i$ donc $\mathcal{I}$. •

Définition 6.8. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2$. On dit que $\mathcal{A}$ a la* **propriété de représentation prévisible** *si :*

$$\mathcal{I} = \{X = \sum_{i=1}^n H^i M^i,\ M^i \in \mathcal{A}, H^i \in \mathcal{L}^*(M^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle M^i \rangle)\} = \mathcal{H}_0^2.$$

Proposition 6.9. *Soit $\mathcal{A} = (M^1, \cdots, M^n) \subset \mathcal{H}_0^2$ avec $M^i \dagger M^j, i \neq j$. Si tout $N \in \mathcal{H}_0^2$ fortement orthogonal à $\mathcal{A}$ est nul, alors $\mathcal{A}$ a la propriété de représentation prévisible.*

Preuve : le théorème 6.7 montre que $S(\mathcal{A})$ est l'ensemble $\mathcal{I}$ défini ci-dessus. Soit alors $N \in \mathcal{A}^\dagger$. D'après le (ii) du lemme ci-dessus,

$$N \in S(\mathcal{A})^\dagger = \mathcal{I}^\dagger.$$

L'hypothèse dit que N est nul, c'est à dire que $\mathcal{I}^\dagger = \{0\}$, donc que $\mathcal{I} = \mathcal{H}_0^2$. •

Ces propriétés d'orthogonalité et de représentation sont liées à la probabilité sous-jacente. Il faut donc voir ce qui se passe lorsque l'on change de probabilité.

Définition 6.10. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{F}_\infty$ absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$, égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$, et telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(Q)$.*

Lemme 6.11. *$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est convexe.*

Preuve en exercice.

Définition 6.12. *$Q \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dite* **extrémale** *si*

$$Q = aQ_1 + (1-a)Q_2, a \in [0,1], Q_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow a = 0 \text{ ou } 1.$$

Théorème 6.13. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. $S(\mathcal{A}) = \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ implique que $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*

Preuve : th. 37 page 152 dans [30]. On suppose que $\mathbb{P}$ n'est pas extrémale et donc s'écrit $aQ_1 + (1-a)Q_2$ avec $Q_i \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. La probabilité $Q_1 \leq \frac{1}{a}\mathbb{P}$ admet donc une densité Z par rapport à $\mathbb{P}$ majorée par $\frac{1}{a}$ et $Z - Z_0 \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. Remarquons que $\mathbb{P}$ et Q_1 coincident sur $\mathcal{F}_0$ montre que $Z_0 = 1$. Soit $X \in \mathcal{A}$: c'est donc une martingale pour $\mathbb{P}$ et pour Q_1, donc ZX est une martingale pour $\mathbb{P}$ ainsi que $(Z - Z_0)X = (Z-1)X$ ce qui montre l'orthogonalité de $Z - Z_0$ à tout X donc à $\mathcal{A}$ donc à $S(\mathcal{A})$. Cet ensemble étant $\mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$, $Z - 1 = 0$ et $P = Q_1$ est extrémale. •

Théorème 6.14. *Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ et $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Si $M \in \mathcal{M}_b^c(\mathbb{P}) \cap \mathcal{A}^\dagger$ alors M est nulle.*

Preuve : Soit c un majorant de la martingale bornée M et supposons qu'elle n'est pas identiquement nulle. On peut donc définir

$$dQ = (1 - \frac{M_\infty}{2c})d\mathbb{P} \text{ et } dR = (1 + \frac{M_\infty}{2c})d\mathbb{P}.$$

Alors $\mathbb{P} = \frac{1}{2}(Q + R)$, Q et R sont absolument continues par rapport à $\mathbb{P}$ et sont égales à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_0$ puisque $M_0 = 0$. Soit $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$: d'après la proposition 5.4, $X \in \mathcal{H}_0^2(Q)$ si et seulement si $(1 - \frac{M_t}{2c})X_t \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$. Or $X \dagger M$ donc on a bien cette propriété et de même $X \in \mathcal{H}_0^2(Q)$ Donc Q, et de même $R, \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Ainsi y aurait-il une décomposition de $\mathbb{P}$ ce qui contredit l'hypothèse : M est nécessairement nulle.

Théorème 6.15. *Soit $\mathcal{A} = (M^1, \cdots, M^n) \subset \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P})$ avec $M^i \dagger M^j, i \neq j$. $\mathbb{P}$ est extrémale dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ implique que $\mathcal{A}$ a la propriété de représentation prévisible.*

Preuve : par la proposition 6.9 il suffit de montrer que tout $N \in \mathcal{H}_0^2(\mathbb{P}) \cap \mathcal{A}^\dagger$ est nulle. Soit une telle martingale N et une suite de temps d'arrêt $T_n = \inf\{t \leq 0 \ ; \ |N_t| \geq n\}$. La martingale N^{T_n} est bornée, dans $\mathcal{A}^\dagger$; $\mathbb{P}$ est extrémale. Le théorème 6.14 montre que N^{T_n} est nulle pour tout n, et donc $N = 0$. •

6.2 Théorème fondamental

Théorème 6.16. *Soit B un mouvement Brownien de dimension n sur $(\Omega, \mathcal{F}_t^B, \mathbb{P})$. Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_{loc}^{c,2}$, il existe $H^i \in \mathcal{L}(B^i), i = 1, \cdots, n$, tels que :*

$$M_t = M_0 + \sum_{i=1}^{n} (H^i.B^i)_t.$$

Preuve en exercice : c'est une application du théorème précédent aux composantes du mouvement brownien dont on montre que $\mathbb{P}$ est l'unique élément de $\mathcal{M}(B)$. Pour ce faire, soit $Q \in \mathcal{M}(B)$ et la martingale $Z = E[\frac{dQ}{dP}/\mathcal{F}_.]$ qui est une fonction de B_t^i puisque B est une processus de Markov. B est à la fois une P et une Q-martingale, par le théorème de Girsanov, ZB doit être une P martingale, donc le crochet $\langle Z, B\rangle = 0$ Par la formule de Itô, $g = 1$.

Puis on localise la martingale M. *Utiliser $Z_t = E[\frac{d\mathbb{P}}{dQ}/\mathcal{F}_t^B]$ est une fonction mesurable du vecteur $(B_t^1, \cdots, B_t^n)$.*

Corollaire 6.17. *Sous les mêmes hypothèses, soit $Z \in L^1(\mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$, alors il existe $H^i \in \mathcal{L}(B^i), i = 1, \cdots, n$, tels que :*

$$Z = E[Z] + \sum_{i=1}^{n} (H^i.B^i)_\infty.$$

Preuve : on applique le théorème à la martingale $M_t = E[Z/\mathcal{F}_t]$ et on fait tendre t vers l'infini. •

Remarquer alors que, si $\mathbb{P}$ et Q sont deux probabilités équivalentes, et si on note Z la variable $\mathbb{P}-$intégrable $\frac{dQ}{d\mathbb{P}}$, alors la martingale $Z_t = E_{\mathbb{P}}[Z/\mathcal{F}_t]$ est une martingale exponentielle : il existe un processus ϕ tel que $dZ_t = Z_t \phi_t dB_t$.

Attention ! dans le cas d'une martingale vectorielle M dont les composantes ne sont pas fortement orthogonales, l'ensemble $\mathcal{L}(M)$ contient l'ensemble $\{H = (H^i),\ \forall i\ \ H^i \in \mathcal{L}(M^i)\}$ sans avoir l'égalité : $H \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow \forall t,\ \int_0^t \sum_{i,j} H_s^i H_s^j d\langle M^i, M^j\rangle_s < \infty$.

6.3 Problème de martingales

(d'après Jacod [19], pages 337-340.)
Dans le cas de la Finance, il s'agit du problème suivant : on dispose d'un ensemble de prix dont l'évolution est modélisée par une famille de processus continus adaptés sur un ensemble de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, en fait des semi-martingales. Existe-t-il une probabilité Q telle que toute cette famille soit contenue dans $\mathcal{M}_{loc}^c(Q)$? C'est ce que l'on appelle un problème de martingale. On suppose ici (mais c'était de toute façon en général le cas !) que $\mathcal{B} = \mathcal{F}_\infty$.

On se place sur un ensemble un peu plus grand dans ce paragraphe :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{P}) = \{M \in \mathcal{M}_{loc}^c(\mathbb{P})\ ;\ \sup_t |M_t| \in L^1\}.$$

On peut montrer que cette définition est équivalente à :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{P}) = \{M \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \ ; \ \langle M \rangle_\infty^{\frac{1}{2}} \in L^1\}$$

grâce à l'inégalité de Burkholder :

$$\| \sup_t |M_t| \|_q \leq c_q \| \langle M \rangle^{\frac{1}{2}} \|_q \leq C_q \| \sup_t |M_t| \|_q.$$

Définition 6.18. *Soit $\mathcal{X}$ une famille de processus continus adaptés sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathcal{F}_t)$. On appelle solution du* **problème de martingale associé à** *$\mathcal{X}$ toute probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$. On note $M(\mathcal{X})$ cet ensemble de probabilités et l'on rappelle que $S(\mathcal{X})$ le plus petit espace stable de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ contenant $\{H.M, H \in \mathcal{L}^*(M), M \in \mathcal{X}\}$.*

Proposition 6.19. *$M(\mathcal{X})$ est convexe.*

Preuve en exercice.

On note $\mathbf{M_e}(\mathcal{X})$ les éléments extrémaux de cet ensemble.

Théorème 6.20. *(ch th. 11.2 de [19] page 338.) Soit $\mathbb{P} \in M(\mathcal{X})$; on a les équivalences :*

(i) $\mathbb{P} \in M_e(\mathcal{X})$
(ii) $\mathcal{H}^1(\mathbb{P}) = S(\mathcal{X} \cup \{1\})$ *et* $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$
(iii) $\forall N \in \mathcal{M}_b(\mathbb{P}) \cap \mathcal{X}^\dagger$ *telle que* $\langle N \rangle$ *est borné* , $N = 0$ *et* $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$.

Corollaire 6.21. *Si de plus $\mathcal{X}$ est fini ou composé uniquement de processus presque sûrement continus, les trois assertions du théorème sont équivalentes à*

$$(iv)\{Q \in M(\mathcal{X}),\ Q \sim \mathbb{P}\} = \{\mathbb{P}\}.$$

Preuve :
(ii)$\Rightarrow$(iii) Soit M une martingale bornée, nulle en 0, orthogonale fortement à tout élément de $\mathcal{X}$ soit $\langle M, X \rangle = 0,\ \forall X \in \mathcal{X}$.

Puisque $\mathcal{X} \cup \{1\}$ engendre par hypothèse l'ensemble $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, tout $N \in \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ est limite de processus de la forme $N_0 + \sum_i H_i.X_i$. Donc,

$$\langle M, N \rangle_t = \lim M_0 N_0 + \sum_i \langle M, H_i.X_i \rangle_t = \sum_i \int_0^t H_i d\langle M, X_i \rangle_s$$

qui est nulle par hypothèse sur M qui est ainsi orthogonale à tout élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Comme M est bornée, elle est aussi élément de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, donc orthogonale à elle-même, donc nulle.

(iii)$\Rightarrow$(ii) On a par définition l'inclusion $S(\mathcal{X} \cup \{1\}) \subset \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Supposons l'inclusion stricte. Puisque $S(\mathcal{X} \cup \{1\})$ est un fermé convexe de $\mathcal{H}^1(\mathbb{P})$, il existe $M \in \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$ orthogonale à $S(\mathcal{X} \cup \{1\})$. En particulier M est orthogonale à 1, donc $M_0 = 0$. Soit la suite de temps d'arrêt $T_n = \inf\{t / |M_t| \geq n\}$ qui fait que M^{T_n} est une martingale bornée, nulle en

0, orthogonale à tout $\mathcal{X}$: elle est nulle par l'hypothèse (iii) et l'égalité des deux ensembles est vérifiée.

(i)$\Rightarrow$(iii) On a $\mathbb{P}$ extrémale dans $M(\mathcal{X})$. Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable bornée et N' une martingale bornée, nulle en zéro, orthogonale à tout $\mathcal{X}$. On pose $N = Y - E[Y] + N'$. Remarquons que pour tout $t \geq 0$, $E_{\mathbb{P}}(N_t) = 0$. Posons alors

$$a = \|N\|_\infty \ ; \ Z_1 = 1 + \frac{N}{2a} \ ; \ Z_2 = 1 - \frac{N}{2a}.$$

Il est clair que $E(Z_i) = 1, Z_i \geq \frac{1}{2} > 0$, et donc les mesures $Q_i = Z_i\mathbb{P}$ sont des probabilités équivalentes à $\mathbb{P}$ dont la demi-somme est $\mathbb{P}$.

Du fait que Y est $\mathcal{F}_0$-mesurable et N' est orthogonale à X $\forall X \in \mathcal{X}$, N est aussi orthogonale à X $\forall X \in \mathcal{X}$, et NX est une $\mathbb{P}$- martingale. Donc $Z_iX = X \pm \frac{NX}{2a}$ est également une $\mathbb{P}$- martingale. En utilisant la proposition 5.4, $X \in \mathcal{M}^c_{loc}(Q_i)$ et $Q_i \in M(\mathcal{X})$ ce qui contredit l'extrémalité de $\mathbb{P}$ sauf si $N_t = 0, \forall t \geq 0$ c'est à dire à la fois $Y = E[Y]$ et $N' = 0$ ce qui montre (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Supposons que $\mathbb{P}$ admet la décomposition dans $M(\mathcal{X})$: $\mathbb{P} = aQ_1 + (1-a)Q_2$. Donc Q_1 est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ et la densité Z existe, majorée par $\frac{1}{a}$, d'espérance 1 et puisque $\mathcal{F}_0 = (0, \Omega)$, $Z_0 = 1$ presque sûrement : $Z - 1$ est une martingale bornée nulle en zéro.

Par ailleurs, pour tout $X \in \mathcal{X}, X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \cap \mathcal{M}^c_{loc}(Q_1)$ puisque $\mathbb{P}$ et $Q_1 \in M(\mathcal{X})$. Mais toujours la proposition 5.4 montre que $ZX \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ et $(Z-1)X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$ c'est à dire que $Z - 1$ est orthogonale à tout X et l'hypothèse (iii) montre alors que $Z - 1 = 0$, ce qui veut dire que $Q_1 = \mathbb{P}$ qui est donc extrémale.

(iv)$\Rightarrow$(iii) se montre comme (i)$\Rightarrow$(iii), preuve qui ne nécessite pas que $\mathcal{X}$ ait une propriété particulière.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Supposons qu'il existe $\mathbb{P}' \neq \mathbb{P}$ dans $M(\mathcal{X})$ qui soit équivalente à $\mathbb{P}$. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est fini, (ii) signifie que (cf le théorème 6.7) :

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{P}) = \{a + \sum_{i=1}^n H^iX^i \ ; \ a \in \mathbb{R}, \ H^i \in \mathcal{L}^*(X^i) \cap L^2(d\mathbb{P} \otimes d\langle X^i \rangle), \ X^i \in \mathcal{X}\}.$$

Soit Z la martingale densité de $\mathbb{P}'$ par rapport à $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}' = Z\mathbb{P}$ avec Z $\mathbb{P}$-martingale d'espérance 1, égale à 1 en zéro. Tout X de $\mathcal{X}$ est dans $\mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}) \cap \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P}')$ mais la proposition 5.4 dit que $ZX \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$, donc $(Z-1)X \in \mathcal{M}^c_{loc}(\mathbb{P})$, c'est à dire que $Z - 1$ est orthogonale à X donc à $S(\mathcal{X} \cup \{1\}) = \mathcal{H}^1(\mathbb{P})$. Si par localisation on borne cette martingale, la martingale arrêtée est orthogonale à elle-même, donc nulle.

6.4 Application en Finance

L'application est double : s'il existe une probabilité Q équivalente à la probabilité naturelle telle que tous les processus de prix sont des Q-martingales, Q est dite *probabilité neutre* *au risque* (ou encore “mesure martingale"), et alors le marché est dit VIABLE, c’est à dire que l’arbitrage est impossible (gagner avec une probabilité strictement positive en partant d’une mise initiale nulle). LA RECIPROQUE EST FAUSSE, contrairement à ce qu’on lit trop souvent.

Si ces processus de prix, Q-martingales, ont la propriété de représentation des Q-martingales, le marché est dit COMPLET.

6.4.1 Recherche d’une probabilité neutre au risque

On suppose que les actifs sous-jacents sont de prix $S^i, i = 1, ...n$, semi-martingales strictement positives de la forme

$$dS_t^i = S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sum_j \sigma_j^i(t) dB_t^j.$$

Soit par ailleurs la probabilité équivalente $Q = \mathcal{E}(X.B)\mathbb{P} = Z\mathbb{P}$. Par le théorème de Girsanov, pour tout j :

$$\tilde{B}_t^j = B_t^j - \int_0^t X_s^j ds$$

est un Q-mouvement brownien. Donc, de fait, S^i sont aussi des Q-semi-martingales de la forme :

$$dS_t^i = S_t^i (b_t^i + \sum_j \sigma_j^i(t) X_t^j) dt + S_t^i \sum_j \sigma_j^i(t) d\tilde{B}_t^j.$$

Le problème est donc ramené à trouver un vecteur X dans $\mathcal{L}(B)$ vérifiant (par exemple) la condition de Novikov tel que pour tout $i = 1, ...n$

$$b_t^i + \sum_j \sigma_j^i(t) X_t^j = 0,$$

soit n équations à d inconnues.
Exercice : résoudre lorsque $n = d = 1$, puis $n = d$. Que faire si $n \neq d$?

6.4.2 Application : couverture d’une option

Dans le cas d’un marché complet, grâce au théorème de représentation, on peut assurer ce que l’on appelle la “couverture" d’une option. On rappelle qu’il s’agit d’un actif financier fondé sur une action de prix p, mais c’est un droit que l’on peut exercer à terme de deux façons :

- une option call de valeur terminale $(S_T - K)^+$,

- une option put de valeur terminale $(K - S_T)^+$,

K étant le prix d’exercice de l’option et T le terme (ou : maturité). Concrètement, on achète au temps 0 le droit d’acheter au prix K même si le prix S_T est au dessus (call) ou le droit de vendre au prix K même si le prix S_T est en dessous (put). Mais pour trouver le “juste prix" de ce contrat, il faut que le vendeur de l'option puisse honorer le contrat, donc placer la somme obtenue en vendant le contrat en sorte de pouvoir (au moins en moyenne) au temps T payer l'acheteur.

Définition 6.22. *On appelle “juste prix" de l'objectif H (fair price, en anglais) le plus petit $x \geq 0$ tel qu'il existe une stratégie π admissible et autofinançante réalisant la richesse X^π avec le prix actualisé $e^{-rT}X_T^\pi = H, X_0^\pi = x$.*

Rappel : On dit qu'une stratégie autofinançante π est **admissible** si la valeur obtenue

$$V_t(\theta) = V_0 + \int_0^t \theta_s.dS_s$$

est presque sûrement minorée par une constante réelle.

Par exemple pour l'option “call", l'objectif est $c_T = (S_T - K)^+$, et le vendeur du contrat cherche à le “couvrir". C'est là que servent les théorèmes de “représentation” des martingales..... Si r est le taux courant d'actualisation (par exemple taux de caisse d'épargne), $e^{-rT}X_T$ est l'objectif actualisé. Supposons que l'on se place dans le cadre de 6.4.1 avec $n = d$, σ inversible et le marché admet une probabilité neutre au risque sur $\mathcal{F}_T$: $Q = \mathcal{E}_T(X.B)\mathbb{P}$. D'après le théorème fondamental il existe un vecteur θ tel que

$$e^{-rT}X_T = E_Q[e^{-rT}X_T] + \int_0^T \sum_j \theta_t^j d\tilde{B}_t^j. \tag{25}$$

Or, avec la définition du Q-mouvement brownien $\tilde{B}$ vu ci-dessus :

$$dS_t^i = S_t^i \sum_j \sigma_j^i(t) d\tilde{B}_t^j$$

soit pour tout j

$$d\tilde{B}_t^j = (S_t^i)^{-1} \sum_i (\sigma^{-1})_i^j(t) dS_t^i$$

que l'on remplace dans (25):

$$e^{-rT}X_T = E_Q[e^{-rT}X_T] + \int_0^T \sum_{i,j} \theta_t^j (S_t^i)^{-1} (\sigma^{-1})_i^j(t) dS_t^i$$

ce qui permet d'identifier le portefeuille de couverture

$$\pi_t^i = (S_t^i)^{-1} \sum_j \theta_t^j (\sigma^{-1})_i^j(t)$$

et le juste prix est alors :

$$q = E_Q[e^{-rT}X_T].$$

7 Modèle financier en temps continu avec des prix continus.

On peut voir, entre autres, [9] chap 12.1 à 12.5 ou [20] section 5.8, pages 371 et sq. On suppose ici l'hypothèse AOA, donc les processus de prix sont des semi-martingales.

7.1 Constitution du modèle

On se place en horizon fini : $t \in [0,T]$, le marché noté S comporte $N+1$ actifs financiers dont les prix sont des semi-martingales continues dont on peut vendre et acheter des quantités réelles, mais il n'y a pas de coûts d'échange ou de transaction. Ces processus de prix sont supposés continus, construits sur un espace de Wiener, espace de probabilité filtré : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ sur lequel est défini un mouvement brownien de dimension d noté B. De plus, on suppose que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_T = \mathcal{A}$.

Hypothèse sur le marché S : Le premier actif est à taux sans risque, type caisse d'épargne (bond, en anglais) :

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt,\ r > 0,\ S_0^0 = 1.$$

C'est à dire que $S_t^0 = e^{rt}$.
Puis N actifs risqués sur le marché sont supposés des semi-martingales strictement positives vérifiant $\forall n = 1, ..., N$, il existe une semi-martingale x^n telle que :

$$S_t^n = \mathcal{E}_t(X^n),\ t \in [0,T].$$

Concrètement,

$$dX_t^n = \sigma_j^n(t) dW_t^j + b^n(t)dt, n = 1, \cdots, N; dX_t^0 = rdt.$$

Il existe un bien de consommation périssable. et il y a I agents économiques ayant accès à l'information $\mathcal{F}_t$ au temps t. Pour tout $i = 1, \cdots, I$, le $i-$ème agent dispose de ressources $e_0^i \in \mathbb{R}^+$ au début et $e_T^i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin, et de même consomme $c_0^i \in \mathbb{R}$ au début et $c_T^i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ à la fin. Il n'y a ni ressource ni consommation intermédiaire.

On note X une partie de $\mathbb{R} \times \mathcal{A}(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ l'ensemble des objectifs à atteindre, muni d'une relation de préférence complète, continue, croissante et convexe (que l'on construira plus tard et qui diffère d'une relation d'ordre : il manque l'antisymétrie et la transitivité).

Définition 7.1. *Une relation de préférence (notée $\prec$) est dite* **complète** *si pour tout c_1 et c_2 de X, on a ou bien $c_1 \prec c_2$ ou bien $c_2 \prec c_1$*
Elle est dite **continue** *si $\forall c \in X$, $\{c' \in X,\ c' \prec c\}$ et $\{c' \in X,\ c \prec c'\}$ sont des fermés.*
Elle est dite **croissante** *si toutes les coordonnées de c' sont supérieures ou égales à celles de c, alors $c \prec c'$.*
Elle est dite **convexe** *si c' et $c" \prec c$ alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\alpha c' + (1-\alpha)c" \prec c$.*

7.2 Mesure de prix d'équilibre ou probabilité neutre au risque

Définition 7.2. *Etant donné un système de prix* $(S^0, \cdots, S^N)$*, une* **mesure de prix d'équilibre** *ou probabilité neutre au risque sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ *est une probabilité* Q *équivalente à* $\mathbb{P}$ *telle que les prix actualisés* $e^{-rt}S^n$*, notés* $\tilde{S}^n$*, sont des* Q*-martingales locales.*

On note $\mathcal{Q}_S$ l'ensemble de telles probabilités.
Remarquer que cet ensemble est contenu dans l'ensemble noté $M(S)$ *dans la définition 6.18.*
Supposant alors que $\mathcal{Q}_S$ **est non vide** on choisit $Q \in \mathcal{Q}_S$; elle n'est pas forcément unique, mais la plupart des résultats sont indépendants de l'élément choisi dans cet ensemble $\mathcal{Q}_S$. Cette hypothèse implique l'absence d'arbitrage (définition 7.7 et théorème 7.9 ci-dessous). Néanmoins, contrairement à ce que l'on lit trop souvent, elle ne lui est pas équivalente. C'est une condition suffisante mais pas nécessaire à l'absence d'arbitrage. Elle est en revanche équivalente à une condition appelée NFLVR (cf. [7]).

Exercice : traduisons dans ce contexte l'hypothèse majeure du modèle, à savoir l'existence d'une mesure Q *de prix d'équilibre, c'est à dire que les prix actualisés* $\tilde{S}^n$ *sont des martingales.*

Ceci se traite bien par la formule de Ito :

$$d\tilde{S}_t^n = e^{-rt}dS_t^n - rS_t^n e^{-rt}dt = \tilde{S}_t^n(dx_t^n - rdt) = \tilde{S}_t^n[\sum_j \sigma_j^n(t)dB_t^j + (b^n(t) - r)dt]. \tag{26}$$

Il s'agit donc de trouver Q équivalente à $\mathbb{P}$ et un $Q-$ mouvement brownien $\tilde{B}$ tel que $dx_t^n - rdt = \sigma d\tilde{B}$. On utilise ici le théorème de Girsanov en notant $Z_t = E_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{P}}{dQ}/\mathcal{F}_t]$ qui est une martingale pouvant se "représenter"' par rapport au mouvement brownien B de dimension d : il existe un processus vecteur $X \in \mathcal{P}(B)$ tel que $dZ_t = Z_t \sum_{j=1}^d X^j dB_t^j$. Trouver Q neutre au risque revient à trouver X.
Terminer l'exercice en supposant par exemple que la matrice ${}^t\sigma.\sigma$ est de rang d donc inversible et qu'il y a une condition type Novikov sur le vecteur $v_. = ({}^t\sigma_.\sigma_.)^{-1} \times {}^t\sigma_.(b_. - r_.\mathbf{1})$ où $\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)$. Plus généralement, discuter l'existence de l'existence de probabilités neutres au risque selon que $d =, <, > N$.

7.3 Stratégies d'échange

Notation : ci-dessous, $\langle x, y\rangle$ *note le produit scalaire entre les deux vecteurs* x *et* y*, à ne pas confondre avec le crochet stochastique entre deux martingales ou semi-martingales !*

Une stratégie est un portefeuille θ, processus $\mathcal{F}$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^{N+1}$, θ^n représentant la part du portefeuille investie dans le $n$ième actif financier. Les conditions à imposer sont celles qui permettent au processus réel $\int\langle\theta_s, dS_s\rangle$ d'être bien défini : θ doit être intégrable sur $[0,t]$, $\forall t$ par rapport respectivement à la partie martingale et la partie à variation finie de la semi-martingale qu'est le prix actualisé $\tilde{S}^n$. Cette quantité $\int_0^t\langle\theta_s, dS_s\rangle$ représente le gain issu de l'échange entre 0 et t et $\int_0^t\langle\theta_s, d\tilde{S}_s\rangle$ représente le gain actualisé issu de l'échange entre 0 et t.

Définition 7.3. *Une* **stratégie admissible** *est un processus adapté à valeurs dans* $\mathbb{R}^{N+1}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t, Q)$ *stochastiquement intégrable (cf. la section 2) par rapport au vecteur prix* S.

Définition 7.4. *Une stratégie est* **autofinançante** *si, de plus, pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$ *la valeur du portefeuille :*

$$V_t(\theta) = \langle\theta_t, S_t\rangle = \langle\theta_0, S_0\rangle + \int_0^t \langle\theta_s, dS_s\rangle.$$

Remarque: Ceci s'interprète de la manière suivante : il n'y a pas de ressources externes, seule la variation du portefeuille fait évoluer la richesse.
Ceci est peut-être plus clair en discret :

$$\begin{aligned} V_{t+1} - V_t &= \langle\theta_{t+1}, S_{t+1}\rangle - \langle\theta_t, S_t\rangle = \langle\theta_{t+1}, S_{t+1} - S_t\rangle \\ \text{équivaut} \quad & \langle\theta_{t+1}, S_t\rangle = \langle\theta_t, S_t\rangle. \end{aligned} \tag{27}$$

Le portefeuille se fait de t à $t+1$ par réorganisation interne entre les différents actifs.

Ce n'est pas obligé, mais ici on a supposé que les prix sont des exponentielles stochastiques, ainsi est-on assuré qu'ils restent positifs.

Théorème 7.5. *Soit θ une stratégie admissible. Elle est autofinançante si et seulement si la valeur actualisée du portefeuille $\tilde{V}_t(\theta) = e^{-rt}V_t(\theta)$ vérifie :*

$$\tilde{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \int_0^t \langle\theta_s, d\tilde{S}_s\rangle$$

où le produit scalaire est dans $\mathbb{R}^N$ au lieu de $\mathbb{R}^{N+1}$ puisque $d\tilde{S}_s^0 = 0$.

Preuve en exercice, à l'aide de la formule de Ito pour le produit $e^{-rt} \times V_t(\theta)$ et (26).

Corollaire 7.6. *Soit Q une mesure de prix d'équilibre. Pour toute stratégie θ autofinançante élément de $\mathcal{P}(\tilde{S})$, la valeur actualisée du portefeuille est une $Q-$martingale locale.*

Preuve en exercice.

Définition 7.7. *On dit que θ est une* **stratégie d'arbitrage** *si elle est admissible, autofinançante et vérifie l'une des trois propriétés :*

$$\begin{aligned}
&\langle\theta_0, S_0\rangle \leq 0 \textit{ et } \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0 \textit{ presque sûrement et } \neq 0 \textit{ avec une probabilité } > 0,\\
&\langle\theta_0, S_0\rangle < 0 \textit{ et } \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0 \textit{ presque sûrement,}\\
&\langle\theta_0, S_0\rangle = 0 \textit{ et } \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0 \textit{ presque sûrement et } \neq 0 \textit{ avec une probabilité } > 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Preuve de l'équivalence des trois définitions en exercice.
Par exemple, $2 \Rightarrow 3$, si $\langle\theta_0, S_0\rangle = a < 0$, on définit une nouvelle stratégie qui va vérifier la dernière propriété :

$$\theta'^n = \theta^n, n = 1, \cdots, N \ ; \ \theta'^0(t) = \theta^0(t) - ae^{-rt}, \forall t \in [0, T].$$

Alors,

$$\langle\theta'_0, S_0\rangle = \theta'^0_0, S^0_0 + \sum_1^N \langle\theta^n_0, S^n_0\rangle = \langle\theta_0, S_0\rangle - a = 0$$

et $\langle\theta'_T, S_T\rangle = \langle\theta_T, S_T\rangle - ae^{-rT}e^{rT} > \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0$. Donc, $\langle\theta'_T, S_T\rangle$ est positif et non nul.

•

Définition 7.8. *Un marché sans stratégie d'arbitrage est dit* **viable**. *On dit aussi qu'il vérifie l'hypothèse AOA (absence d'opportunité d'arbitrage).*

On va donner des conditions suffisantes pour qu'un marché S soit viable.

Théorème 7.9. *(cf. [9], 12.2 et sq.) Si l'ensemble $\mathcal{Q}_S$ est non vide alors le marché est viable.*

Preuve en exercice avec les étapes suivantes (soit $Q \in \mathcal{Q}_S$) :
1. Si pour toute stratégie autofinançante $\tilde{V}_t(\theta)$ est une $Q-$surmartingale, alors le marché est viable.

Le fait que $\tilde{V}_t(\theta)$ soit une $Q-$surmartingale s'écrit :

$$\forall s \leq t, \ E_Q[\tilde{V}_t(\theta)/\mathcal{F}_s] \leq \tilde{V}_s(\theta).$$

En particulier puisque la tribu initiale $\mathcal{F}_0$ est triviale, pour $s = 0$,

$$E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq \tilde{V}_0(\theta) \text{ c'est à dire } \langle\theta_0, S_0\rangle.$$

Supposons donc qu'il existe une stratégie d'arbitrage : $\langle\theta_0, S_0\rangle = 0, \langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0$.
Donc $E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] \leq 0$ et puisque $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT}\langle\theta_T, S_T\rangle \geq 0$, $\tilde{V}_T(\theta) = 0$ et la stratégie θ ne peut être d'arbitrage.
2. Si toute stratégie autofinançante de $\mathcal{P}(\tilde{S})$ est telle que $\tilde{V}_t(\theta) \geq 0$, alors le marché est viable.
Puisque la stratégie θ est autofinançante,

$$\tilde{V}_t(\theta) = \langle\theta_0, S_0\rangle + \int_0^t \langle\theta_s, d\tilde{S}_s\rangle.$$

Le corollaire 7.6 montre que $\tilde{V}_t(\theta)$ est alors une $Q-$martingale locale. Comme elle est positive, c'est une surmartingale (cf. la preuve du lemme 5.6) et l'on est ramené à (1) pour conclure. •

En conclusion, pour éviter l'arbitrage, on ajoute dans la définition de l'admissibilité d'une stratégie θ l'obligation de vérifier

$$V_t(\theta) \geq 0,\ dt \otimes d\mathbb{P} \text{ presque sûrement }.$$

Remarque 7.10. *On voit là la suite d'implications : $\mathcal{Q}_S$ est non vide $\Rightarrow$ l'interdiction de tout arbitrage $\Rightarrow$ les prix sont des semi-martingales sans pour autant avoir les réciproques.....*

7.4 Marché complet

On utilise ici les outils introduits dans le paragraphe 6.1. Soit $Q \in \mathcal{Q}_S$.

Définition 7.11. *On dit qu'un objectif $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ (contingent claim) est* **simulable** *ou* **atteignable** *sous la probabilité Q s'il existe une stratégie admissible autofinançante θ et un réel x tels que*

$$X = \langle\theta_T, S_T\rangle = x + \int_0^T \theta_s.dS_s.$$

On dit qu'un marché est **complet** *sous la probabilité Q pour le système de prix S si tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ est simulable.*

On cherche dans ce paragraphe à caractériser les marchés complets, ou du moins à mettre en évidence des conditions suffisantes de complétude.

Théorème 7.12. *Un objectif X est simulable si et seulement s'il existe un processus vectoriel $\alpha \in \mathcal{P}(\tilde{S})$ de dimension N tel que :*

$$E_Q[X/\mathcal{F}_t] = e^{-rT}E_Q[X] + \int_0^t \langle\alpha_s, d\tilde{S}_s\rangle.$$

Preuve :

Si X est simulable, cela signifie qu'il existe une stratégie θ admissible et autofinançante et un réel x tels que $X = V_T(\theta) = \langle\theta_T, S_T\rangle = x + \int_0^T \langle\theta_s, dS_s\rangle$.

Puisque θ est admissible elle est par définition stochastiquement intégrable par rapport à S donc $\tilde{S}$; elle est autofinançante c'est à dire (cf. théorème 7.5) que $d\tilde{V}_t(\theta) = \langle \theta_t, d\tilde{S}_t \rangle$. Or
$X = \langle \theta_T, S_T \rangle$ soit $\tilde{V}_T(\theta) = e^{-rT}X$ et enfin $\tilde{V}(\theta)$ est une martingale :

$$\tilde{V}_t(\theta) = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)/\mathcal{F}_t] = E_Q[\tilde{V}_T(\theta)] + \int_0^t \langle \theta_s, d\tilde{S}_s \rangle.$$

Le premier terme est bien $e^{-rT}E_Q[X]$ et on identifie le processus α cherché comme étant la stratégie θ sur les coordonnées de 1 à N.

Réciproquement, si α existe, on définit la stratégie

$$\theta^n = \alpha^n,\ n = 1, \cdots, N\ ;\ \theta^0 = e^{-rT}E_Q[c(T)] + \int_0^T \langle \alpha_s, d\tilde{S}_s \rangle - \sum_1^N \langle \theta_s^n, \tilde{S}_s^n \rangle.$$

On vérifie que cette stratégie permet effectivement à l'objectif X d'être simulable, puis, que cette stratégie proposée θ est effectivement autofinançante. •

On admet le théorème :

Théorème 7.13. *Soit Q une mesure de prix d'équilibre. Si $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset)$, on a les équivalences :*

(i) Le marché est complet relativement au système de prix $\{S\}$.

(ii) $\mathcal{Q}_S = \{Q\}$

En exercice, preuve de ce théorème dans le cas de N actifs guidés par un $d-$mouvement brownien B

$$dS_t^i = S_t^i b_t^i dt + S_t^i \sigma_t^{ij} dB_t^j.$$

8 Arrêt optimal

8.1 Introduction

Ce problème d'arrêt optimal est souvent présenté comme celui d'un joueur (de casino ou autre) dont le gain à la n-ième partie (positif ou négatif !) est une variable aléatoire X_n. Son but est bien sûr de s'arrêter "au bon moment", c'est-à-dire au temps n_o tel que X_{n_o} réalise, en moyenne, le sup de tous les gains, passés et futurs, du moins en moyenne. Dans ce premier exemple, on reconnaît le problème de contrôle suivant :

- les aléas sont les variables aléatoires réelles X_n,

- la décision, le contrôle est à valeurs dans {s'arrêter, continuer}, soit $(1, 0)$,

- l'état est celui de la fortune, dont la dynamique est donnée par :

$$Y_{k+1} = Y_k + X_k \mathbf{1}_{continuer}(u_k),$$

- les stratégies admissibles sont des processus adaptés $\pi = (u_k, k \geq 0)$ tels que $\sum_{k\geq 0} u_k = 1$ (on ne s'arrête qu'une fois....)

- il n'y a pas de gain à chaque instant, le joueur récapitule la situation à la fin de la période :

$$c_k = 0; c_N = Y_N.$$

Un deuxième exemple est celui de la vente d'un terrain pour lequel le propriétaire reçoit des offres à chaque instant $1, .., N$ qui sont modélisées des variables aléatoires, supposées indépendantes et de même loi. S'il vend, il place le produit de la vente au taux r, sinon, il ne gagne rien. En tout état de cause, s'il ne l'a pas fait précédemment, il vend au temps N. Le modèle est alors tout à fait semblable au précédent :

- les aléas sont les variables aléatoires réelles W_k, montant des offres,

- la décision, le contrôle est à valeurs dans {vendre,garder}, soit $(1, 0)$,

- l'état est celui de la fortune, dont la dynamique est donnée par :

$$Y_k = W_k(1 + r)^{N-k}\mathbf{1}_{\{vendre\}}(u_k),$$

- les stratégies admissibles sont des processus adaptés $\pi = (u_k, k \geq 0)$ tels que $\sum_{k\geq 0} u_k = 1$ (on ne vend qu'une fois....)

- il n'y a pas de gain à chaque instant, le propriétaire récapitule sa situation à la fin de la période :

$$c_k = 0; c_N = Y_N.$$

C'est avec l'algorithme de programmation dynamique que l'on résout ce problème. Vouloir "s'arrêter au bon moment", au temps n_o tel que X_{n_o} réalise le sup de tous les gains, revient à chercher une variable $n_o(\omega)$ selon la réalisation ω obtenue. On voudrait cette variable mesurable, c'est à dire n_o variable aléatoire, mais aussi $\omega \to X_{n_o}$ doit aussi être une variable mesurable : il faut pouvoir calculer son espérance ; c'est pourquoi on recherche n_0 dans la classe des temps d'arrêt, et il est raisonnable que ce soit des temps de la filtration des observations.

8.2 Enveloppe de Snell

Le problème de l'arrêt optimal est un cas de contrôle optimal où la quantité à optimiser est un coût (ou gain) seulement terminal. Le gain conditionnel au passé devient dans le cas markovien :

$$J_k(X_k, u) = E(X_N^u/\mathcal{F}_k).$$

Mais de fait, X_N^u n'est autre que $X_{N\wedge T}$ si u_k^N est la politique qui est de s'arrêter au temps d'arrêt T. Le sup "classique" n'est plus bien défini : le sup de ces variables aléatoires pourrait par exemple être strictement positif, alors que l'espérance de chacune des variables de la famille pourrait être nulle....On introduit alors une notion de sup spécifique aux variables aléatoire, l'**ess sup**. Et on aura la fonction de valeur au temps k :

$$V(k, X_k) = ess\ sup\{E(X_N^u/\mathcal{F}_k); u \in D\} = esssup\{E(X_{N\wedge T}/\mathcal{F}_k), T \geq k\}$$

Quand cet *ess sup* sera défini, on pourra utiliser l'outil de la programmation dynamique.

8.2.1 Ess sup d'une famille $\{Y_i; i \in I\}$

C'est une variable aléatoire définie par le théorème suivant qui, de plus, en garantit l'existence.

Théorème 8.1. *([28]p.121) Soit $\{Y_i; i \in I\}$ un ensemble de variables aléatoires. Alors il existe une unique variable aléatoire Y telle que :*

i) pour tout $i \in I, Y_i \leq Y$ presque sûrement,

ii) si $\forall i,\ Y_i \leq X$, alors $Y \leq X$, presque sûrement.

Cette variable s'appelle l'**ess sup** de la famille.

Proposition 8.2. *: i) Si les variables de la famille sont majorées par une variable aléatoire intégrable, alors l'ess sup est aussi intégrable.*
Si de plus la famille $\{Y_i; i \in I\}$ est un treillis :

(ii) il existe une suite Y_{i_k} extraite de la famille telle que Y est sa limite croissante.

iii) on a $E(Y) = sup\{E(Y_i); i \in I\}$.

iv) Si A est un événement de F_∞,

$$\mathbf{1}_A esssup\{Y_i; i \in I\} = esssup\{\mathbf{1}_A Y_i; i \in I\}.$$

v) Pour toute sous-tribu B de $\mathcal{A}$, on a : $E(Y/B) = esssup\{E(Y_i/B); i \in I\}$.

Démonstration : en exercice.

8.2.2 Un exemple déterministe

Il s'agit donc de choisir l'arrêt T après n qui réalise l'essentiel sup de $\{E(X_T/\mathcal{F}_n); T \geq n\}$ si cela est possible. On va montrer que le processus défini par cet *ess sup* est un bon outil pour construire un arrêt optimal. On illustre ceci par un problème non aléatoire : $X_n = x_n$ suite réelle ; le temps d'arrêt optimal sera donc un temps p_o non aléatoire. On cherche p_o qui réalise $sup\{E(X_n)\} = sup\{x_n\}$. On introduit $z_n = sup\{x_p; p \geq n\}$ (on n'a pas besoin ici d'ess sup puisqu'il n'y a pas d'aléa). On montre : l'arrêt optimal p_o qui réalise $sup\{x_n\}$ est le premier entier p tel que $z_p = x_p$. Alors, $z_{p_o} = x_{p_o} = sup\{x_n\}$.

Démonstration : La suite z_n est décroissante et avant p_o, $x_n < z_n$. On peut alors montrer par récurrence que la suite z est constante sur $[0, p_o]$, ce qui montre le résultat :

$x_o < z_o = sup(x_n; n \geq 0)$. Donc,

$sup(x_n; n \geq 0) = sup(x_n; n \geq 1)$

$x_1 < z_1 = sup(x_n; n \geq 1)$. Donc

$sup(x_n; n \geq 1) = sup(x_n; n \geq 2)$

Et ainsi de suite :

$$sup(x_n; n \geq 0) = sup(x_n; n \geq 1) = \cdots = sup(x_n; n \geq p_o) = x(p_o).$$

8.2.3 Cas aléatoire

Soit une suite de variables aléatoires adaptées, intégrables, telles que $sup_n\{X_n^+\}$ est dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note pour tout n :

$$L_n = \{T \ t.a./n \leq T < \infty \text{ p.s. et } X_T^- \in L^1\}.$$

On peut montrer que la famille $\{E(X_T/\mathcal{F}_n); T \in L_n\}$ est un treillis (**exercice**) ; de plus, l'hypothèse $sup\{X_n^+\}$ est dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ entraîne que cette famille est majorée par $E[sup_n\{X_n^+\}/\mathcal{F}_n]$, v.a. intégrable, et par conséquent admet un ess sup intégrable, ce qui justifie la définition et la proposition suivantes :

Définition 8.3. *: on appelle* **enveloppe de Snell** *du processus X la suite de variables aléatoires Z définie par :*

$$Z_n = ess\ sup\{E(X_T/\mathcal{F}_n); n \leq T < \infty \ p.s. \ et \ X_T^- \in L^1\}$$

On dit que Z_n est le **gain optimal conditionnel au passé**.

Proposition 8.4. *([28] p.122) La suite Z_n est adaptée et intégrable. De plus :*

i) $Z_n = X_n \vee E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n)$ presque sûrement.

ii) si les X sont positives, Z est la plus petite surmartingale positive majorant X.

iii)$E(Z_n) = sup\{E(X_T); T \in L_n\}$.

Corollaire *: le gain optimal est donné par $E(Z_o)$.*

Démonstration : exercice en TD
D'abord, montrons que Z est adaptée : Z_n est F_n-mesurable comme ess sup d'un treillis de variables aléatoires $\mathcal{F}_n$-mesurables. Ensuite, la propriété (i) de la proposition 8.2 montre que l'ess sup Z est intégrable.

i) On montre que Z_n est une surmartingale. La famille est un treillis (cf. TD). D'après la propriété (v) de la proposition 8.2 :

$$E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) = esssup\{E(E(X_T/\mathcal{F}_{n+1})/\mathcal{F}_n); T \in L_{n+1}\}$$

soit encore :

$$E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) = esssup\{E(X_T/\mathcal{F}_n); T \in L_{n+1}\}.$$

Or L_n contient L_{n+1} ; donc Z_n est l'ess sup d'une famille plus grande que ci-dessus, donc est plus grand : $E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq Z_n$ presque sûrement.

Par ailleurs, il est clair que le temps d'arrêt $T = n$ appartient à L_n, donc X_n appartient à $\{E(X_T/\mathcal{F}_n); T \in L_n\}$ et $X_n \leq Z_n$; ce qui montre

$$Z_n \geq X_n \vee E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n).$$

Réciproquement, soit T dans L_n :

$$\begin{aligned} X_T &= X_n 1_{\{T=n\}} + X_{T\vee(n+1)} 1_{\{T>n\}} \\ E(X_T/\mathcal{F}_n) &= X_n 1_{\{T=n\}} + E(X_{T\vee(n+1)}/\mathcal{F}_n) 1_{\{T>n\}} \end{aligned}$$

car $X_n, \{T = n\}, \{T > n\}$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables. Par ailleurs, $T \vee (n+1)$ est dans L_{n+1}. Donc :

$$\begin{aligned} E(X_T/\mathcal{F}_n) &\leq X_n 1_{T=n} + E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) 1_{T>n} \\ &\leq X_n \vee E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n), \end{aligned}$$

et ceci pour tout $T \in L_n$. D'après la propriété (ii) de l'ess sup, on déduit :

$$Z_n \leq X_n \vee E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n),$$

soit l'égalité cherchée.

ii) On sait déjà que Z_n est une surmartingale ; elle est évidemment positive si les X le sont, puisqu'elle majore tout X. D'après l'inégalité de DOOB pour les surmartingales, pour tout $T \in L_n$, on obtient pour toute surmartingale positive Z' majorant X :

$$Z'_n \geq E(Z'_T/\mathcal{F}_n) \geq E(X_T/\mathcal{F}_n).$$

En passant à l'ess sup, on a bien : $Z'_n \geq Z_n$.

iii) Puisque la famille est un treillis, c'est la simple application de la propriété (iii) de la proposition 8.2 et du fait que $E[E(X_T/\mathcal{F}_n)] = E[X_T]$.

Remarque 8.5. *: On peut proposer une interprétation "intuitive" de la stratégie d'arrêt induite par la proposition : puisque $E(Z_n) = sup\{E(X_T); T \geq n\}$, si on a déjà joué n coups, et que $Z_n = X_n$, on n'a pas intérêt à continuer; si $Z_n > X_n$, on peut essayer de continuer.*

Par ailleurs, la relation (i) permet un calcul récurrent de Z_n, en récurrence arrière, résoluble par exemple en horizon fini ($n \leq N$ fixe) comme on le verra dans le cas Markovien. Elle n'est autre que la relation de récurrence appelée **l'algorithme de programmation dynamique**.

8.3 Arrêt optimal en temps fini ou infini

On suppose toujours que $sup_n X_n^+$ est dans L^1, et Z est l'enveloppe de Snell du processus X.

Remarquons que Z_n est la **fonction de valeur** du problème à optimiser (gain conditionnel au passé), solution de l'équation de "programmation dynamique" :

$$Z_n = X_n \vee E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n).$$

Dans le cas déterministe, l'arrêt optimal est donné dans l'exemple 8.2.2. Pour la résolution dans le cas stochastique, on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 8.6. *: Soit $T_o = inf\{n \geq 0/X_n = Z_n\}$; le processus arrêté Z^{T_o} est une martingale.*

Démonstration : exercice en TD. Dans ce cas déterministe, on obtenait une constante dès le rangn_0 atteint;

8.3.1 Horizon fini.

Soit N un entier fixe. On cherche un temps d'arrêt $T \leq N$ solution du problème d'arrêt optimal. Dans ce cas à horizon fini l'enveloppe de Snell vérifie :

$$Z_n = Z_n^N = ess\ sup\{E(X_T/\mathcal{F}_n); T \in L_n \text{ et } T \leq N\}$$

Alors, grâce à la proposition 8.4 (i) , on peut calculer Z par une récurrence descendante :

$$Z_N = ess\ sup\{E(X_T/\mathcal{F}_n)\ ;\ T \in L_N \text{ et } T \leq N\},$$

c'est à dire simplement X_N car L_N est réduit au singleton $\{N\}$. Puis,

$$Z_n = X_n \vee E(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n) \text{ pour tout } n \leq N - 1.$$

Proposition 8.7. *: Le temps d'arrêt $T_o = inf\{n/X_n = Z_n\}$ est optimal, c'est à dire*

$$E(X_{T_o}) = sup\{E(X_T); T \leq N\}$$

et cette quantité est le gain optimal.

Démonstration : En horizon fini, l'hypothèse $X_T^- \in L^1$ est nécessairement vérifiée ; donc $L_o = \{T\ t.a. \leq N\}$. D'après la proposition (8.4, iii) pour $n = 0$ il vient :

$$E(Z_o) = sup\{E(X_T); T \leq N\}$$

qui est le gain optimal. Le lemme 8.6 donne que Z^{T_o} est une martingale. De plus, Z_n^+ est majorée par $E[sup_k X_k^+/\mathcal{F}_n]$; on peut donc utiliser le théorème de convergence des surmartingales : $Z_n^{T_o}$ converge presque sûrement, la limite ne peut être que Z_{T_o} puisque T_o est fini, et pour tout n on a $E(Z_n^{T_o}) = E(Z_{T_o})$. En prenant en particulier $n = 0$, il vient finalement :

$$E(Z_{T_o}) = E(Z_o^{T_o}) = E(Z_o) = sup\{E(X_T); T \leq N\}.$$

•

8.3.2 Horizon infini

Sous certaines conditions supplémentaires, on a le même résultat en horizon infini, c'est à dire que le temps T_o défini dans le lemme 8.6 est encore optimal.

Proposition 8.8. *: ([28], p.124) Soit une suite X_n de variables aléatoires intégrables adaptées telles que $sup_n X_n^+$ appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors il existe un temps d'arrêt p.s. fini pour le problème d'arrêt du processus X_n si et seulement si T_o, défini dans le lemme 8.6 est presque sûrement fini.*

Démonstration :

a) Pour montrer l'équivalence, supposons d'abord que $T_o < \infty$ presque sûrement. Du fait que Z^{T_o} est une martingale on déduit exactement comme dans le cas fini la convergence de la martingale Z^{T_o} grâce à la majoration $Z_{n\wedge T_o}^+ \leq sup_k\ X_k^+$ pour tout n :

$$\forall n, E(Z_{T_o}) = E(Z_{n\wedge T_o}) = E(Z_o) = sup\{E(X_T); T \in L_o\}.$$

Puisque, par définition de $T_o, Z_{T_o} = X_{T_o}$, on a obtenu

$$E(X_{T_o}) = E(Z_o) = sup\{E(X_T); T \in L_o\}$$

ce qui montre que T_o est optimal.

b) Réciproquement, soit T^* optimal p.s. fini c'est à dire :

$$E(X_{T^*}) = sup\{E(X_T); T < \infty; X_T^- \in L_1\}.$$

Or, ce sup vaut $E(Z_o)$, qui majore $E(Z_{T^*})$ car Z est une surmartingale :

$$E(Z_{T^*}) \leq E(X_{T^*}).$$

Mais si T^* est presque sûrement fini :

$$Z_{T^*} = \sum_{n\geq 0} Z_n \mathbf{1}_{\{T^*=n\}}$$

et donc

$$X_{T^*} \leq Z_{T^*}$$

par définition de l'ess sup puisque presque sûrement $X_n \leq Z_n$.

Donc, on a $E(X_{T^*}) = E(Z_{T^*})$. La seule possibilité est donc que $Z_{T^*} = X_{T^*}$ p.s. ce qui montre que $T^* \geq T_o$ p.s. et par conséquent T_o est presque sûrement fini. •

Corollaire 8.9. *: quand il existe des temps d'arrêts optimaux, T_o est le plus petit.*

On introduit la notion de ε-optimalité.

Proposition 8.10. *Pour tout $\varepsilon > 0, T_\varepsilon = inf\{n/X_n + \varepsilon > Z_n\}$ définit un temps d'arrêt, presque sûrement fini, "ε-optimal" au sens où :*

$$E(X_{T_\varepsilon}) + \varepsilon \geq sup\{E(X_T); T \in L_o\}$$

On va utiliser le lemme suivant.

Lemme 8.11. *: Si Z est l'enveloppe de Snell de $X, lim\ sup\ Z_n = lim\ sup\ X_n$.*

Démonstration : Si $n \geq m$ et T appartient à $L_n \subset L_m, X_T \leq sup_{p\geq m} X_p$. Donc il vient :

$$E(X_T/\mathcal{F}_n) \leq E(sup_{p\geq m} X_p/\mathcal{F}_n)$$

pour tout T de L_n et

$$Z_n \leq E(sup_{p\geq m} X_p/\mathcal{F}_n)$$

pour tout couple $(n, m), n \geq m$.

Par ailleurs, $X_m \leq sup_{p\geq m} X_p \leq sup_p X_p^+$ montre que $sup_{p\geq m} X_p$ est intégrable et comme cette variable est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable, on peut faire tendre n vers l'infini et appliquer le théorème de convergence majorée :

$$E(sup_{p\geq m} X_p/\mathcal{F}_n) \rightarrow sup_{p\geq m} X_p$$

presque sûrement.

Ainsi a-t-on : $lim\ sup Z_n \leq sup_{p\geq m} X_p$ pour tout m , soit : $lim\ sup\ Z_n \leq lim\ sup\ X_n$. L'inégalité inverse étant évidente, le lemme est démontré. •

Ce lemme permet de terminer la démonstration de la proposition 8.10 à l'aide de plusieurs étapes :

i) $T_\varepsilon = inf\{n/Z_n < X_n + \varepsilon\} \leq T_o$

ii) Z^{T_ε} est une martingale.

iii) Sur $\{T_\varepsilon = \infty\}$, $lim_n Z_n$ existe et est finie ; sur cet ensemble, Z^{T_ε} coïncide avec Z.

iv) T_ε est presque sûrement fini. v) $E(Z_o) \leq E(X_{T_\varepsilon}) + \varepsilon$.

Les deux dernières étapes montrent effectivement la proposition.

i) Avant T_ε, $X_n + \varepsilon \leq Z_n$, donc $X_n < Z_n$ et l'on se trouve avant T_o.

ii) Z^{T_o} est une martingale et $Z_n^{T_\varepsilon} = Z_{T_\varepsilon \wedge n}^{T_o}$. On a donc que Z^{T_ε} est intégrable et :

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}^{T_\varepsilon}/\mathcal{F}_n) &= E(\mathbf{1}_{\{T\varepsilon \geq n\}} Z_{n+1}^{T_o}/\mathcal{F}_n) + E(\mathbf{1}_{\{T_\varepsilon < n\}} Z_{T_\varepsilon}/\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{1}_{\{T_\varepsilon \geq n\}} Z_n^{T_o} + \mathbf{1}_{\{T\varepsilon < n\}} Z_{T_\varepsilon}^{T_o} = Z_{T_\varepsilon \wedge n}^{T_o} = Z_n^{T_\varepsilon}. \end{aligned}$$

iii) pour tout n plus grand que $m, Z_n^+ \leq E[sup_{p \geq m} X_p^+/\mathcal{F}_n]$ permet d'appliquer le théorème de convergence à la martingale Z^{T_ε} qui donc converge p.s. vers une limite presque sûrement finie. Or, sur $\{T_\varepsilon = \infty\}, Z_n^{T_\varepsilon}$ coïncide avec Z_n, et sur cet ensemble, Z converge presque sûrement, et $lim_{n\to\infty} Z_n$ (notée Z_∞) y est presque sûrement finie.

iv) Sur $\{T_\varepsilon = \infty\}$, on a $X_n + \varepsilon \leq Z_n$ pour tout n ; donc :

$$lim\ sup\ X_n + \varepsilon \leq Z_\infty \text{ sur cet ensemble.}$$

Or, d'après le lemme, $lim\ sup\ X_n = lim\ Z_n$, ce qui constitue une contradiction puisque ε est strictement positif. L'ensemble $\{T_\varepsilon = \infty\}$ est presque sûrement vide et le temps T_ε est presque sûrement fini.

v) Par définition et puisque T_ε est presque sûrement fini, $X_{T_\varepsilon} + \varepsilon \geq Z_{T_\varepsilon}$.
Par ailleurs, Z^{T_o} est une martingale :

$$E(Z_o^{T_o}) = E(Z_{T_\varepsilon}^{T_o}) \text{ soit : } E(Z_o) = E(Z_{T_\varepsilon}) \text{ car } T_o \geq T_\varepsilon$$

qui est le gain maximal et donc :

$$E(Z_o) \leq E(X_{T_\varepsilon}) + \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration. •

8.4 Enveloppe de Snell : cas markovien

Proposition 8.12. *: Soit X_n une chaine de Markov et une fonction f mesurable et positive. Soit la fonction f^* définie par :*

$$f^*(x) = lim\ f_k(x)\ ,\ où\ f_{k+1}(x) = f(x) \vee \mathbb{P} f_k(x)\ et\ f_o = f.$$

Alors f^* est la plus petite fonction excessive majorant f et l'enveloppe de Snell de $f(X_n)$ est : $Z_n = f^*(X_n)$.

Démonstration :

-f_k est une suite croissante (se montre par récurrence), majorant f, donc f^* existe et majore f.

- Par ailleurs, f^* est excessive :

$$f_{k+1}(x) = f(x) \vee \mathbb{P} f_k(x) \Rightarrow f_{k+1}(x) \geq \mathbb{P} f_k(x)$$

et on fait tendre k vers l'infini.

- Soit g excessive majorant f ; on en déduit par récurrence que g majore f_k pour tout k donc g majore f^*, qui est ainsi la plus petite fonction excessive majorant f.

- On tire de la propriété de Markov que $f^*(X_n)$ est une surmartingale. De plus elle est positive.

- Soit M une autre surmartingale positive majorant $f(X_n)$. On montre, encore une fois par récurrence, que M majore $f^*(X.)$. On conclut alors grâce au ii) de la proposition(8.4) : $f^*(X_n)$ est bien l'enveloppe de Snell. •

8.5 Application : option américaine

On se place dans le cadre d'un marché viable et complet, sous une probabilité neutre au risque. Le principe de l'option américaine est d'exercer le droit d'option au "meilleur moment", donc c'est un problème d'arrêt optimal, par exemple pour une option put ou call sur l'actif de prix S, on veut optimiser sur l'ensemble des temps d'arrêt :

$$T \mapsto E[(K - S_T)^+] \ ; \ T \mapsto E[(S_T - K)^+].$$

Si le droit est majoré par un temps fixe N, c'est un problème d'arrêt en horizon fini. De façon générale, soit une option de valeur Z_n au temps n, l'enveloppe de Snell U est définie par la récurrence descendante :

$$U_N = Z_N \ ; \ U_{n-1} = \max\{Z_{n-1}, E[U_n/\mathcal{F}_{n-1}]\}.$$

En cas d'actualisation par un processus S_n^0 (par exemple $(1+r)^n$) :

$$\tilde{U}_N = \frac{Z_N}{S_N^0} \ ; \ \tilde{U}_{n-1} = \max\{\tilde{Z}_{n-1}, E[\tilde{U}_n/\mathcal{F}_{n-1}]\}.$$

Rappelons la décomposition de DOOB.

Proposition 8.13. *Toute surmartingale U peut s'écrire de façon unique $U = M - A$ où M est une martingale et A un processus croissant prévisible, $A_0 = 0$.*

On peut alors se servir de cette proposition pour obtenir le plus grand temps d'arrêt optimal.

Proposition 8.14. *Le plus grand temps d'arrêt optimal pour le processus Z est*

$$T^* = N \ si \ A_N = 0, \ \ \inf\{n, \ A_{n+1} \neq 0\} \ sinon.$$

Preuve en exercice.

L'enveloppe de Snell U étant une surmartingale, elle admet une décomposition $M - A$.

Puisque le marché est complet, la partie martingale peut être réalisée par une stratégie ϕ :

$$M_n = V_n(\phi) = M_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(S_j - S_{j-1}).$$

Soit pour tout n, $U_n = V_n(\phi) - A_n$ et $U_0 = V_0(\phi)$. L'option doit être exercée au plus tard avant que A devienne strictement positif, moment qui est le plus grand temps optimal et $V_0(\phi)$ est le prix de l'option qui permet la couverture à l'échéance.

References

[1] L.ARNOLD : “Stochastic Differential Equations : Theory and Applications", Wiley, New York, 1974.

[2] L. BACHELIER: “Théorie de la speculation" :Annales scientifiques de l'école normale supérieure,17, 21-88, Paris, 1900.

[3] D.P. BERTZEKAS : “Dynamic programming and stochastic control", Math in science and engineering, Academic Press,New-York, 1976.

[4] F. BLACK and M. SCHOLES : “The pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy, 3, 637-654,1973.

[5] J.C. COX and S.A. ROSS : “ The valuation of options for alternative stochastics processes", Journal of Financial Economics, 7, 229-263, 1979.

[6] Rose Ann DANA et Monique JEANBLANC : “Marchés financiers en temps continu, valorisation et équilibre", Economica, deuxième édition, Paris, 1998.

[7] F. DELBAEN and W. SCHACHERMAYER, “A general version of the fundamental theorem of asset pricing", Math. Ann. 300, 463-520, 1994

[8] G. DEMANGE et J.C. ROCHET : “Méthodes mathématiques de la finance", Economica.

[9] M.U. DOTHAN : “Prices in financial Markets", Oxford University Press, Oxford, 1990.

[10] R.M. DUDLEY : “Wiener functionnals as Itô integrals", The Annals of Probability, 5, 140-141, 1977.

[11] W. H. FLEMING, R.W. RISHEL : “ Deterministic and stochastic optimal control", Springer-Verlag, New-York, 1975.

[12] A. FRIEDMAN : Stochastic Differential Equations and Applications, I , Academic Press, New-York ,1975.

[13] J.M. HARRISON and D.M.KREPS : “Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets", Journal of Economic Theory, 20, 381-408, 1979.

[14] J.M. HARRISON and S. PLISKA : “Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading",Stochastics Processes and their Applications, 11,215-260, 1981.

[15] S. HE, J. WANG and J. YAN :Semimartingale Theory and Stochastic Calculus, Science Press, New-York and Beijing ,1992.

[16] R.A. HOWARD : “ Dynamic Programming and Markov Processes",The M.I.T. Press, Cambridge, 1966.

[17] C. HUANG, “Information structure and equilibrium asset prices", Journal of Economic Theory, 35, 33-71, 1985.

[18] K. ITO and H.P. Mc KEAN : “Diffusion Processes and their sample paths", Springer-Verlag, New York, 1974.

[19] J. JACOD : “Calcul stochastique et problèmes de martingales", Lecture Notes 714, Springer-Verlag, New York, 1979.

[20] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : “Brownian Motion and Stochastic calculus", Springer-Verlag, New York, 1988.

[21] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : “Methods of Mathematical Finance", Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] H. KUNITA and S. WATANABE : “On square integrable martingales" Nagoya Mathematics Journal, 30, 209-245, 1967.

[23] D. LAMBERTON et B. LAPEYRE : “Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance", Ellipses, Paris,1991.

[24] D. LEPINGLE et J. MEMIN : “Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 42, p175-203, 1978.

[25] R.S. LIPTSER and A.N. SHIRYAEV : “Statistics of Random Processes", Springer-Verlag, New York, 1977.

[26] H.P. Mc KEAN : “Stochastic Integrals", Academic Press, New-York, 1969.

[27] M. MUSIELA and M. RUTKOWSKI : “Martingale Methods in Financial Modelling",Springer-Verlag, New-York, 1997.

[28] J. NEVEU : “Martingales à temps discrets", Masson, Paris, 1972.

[29] S. R. PLISKA : “Introduction to Mathematical Finance", Blackwell, Oxford, 1998.

[30] P. PROTTER : “Stochastic Integration and Differential Equations", Springer-Verlag, New York, 1990.

[31] F. QUITTARD-PINON : “Marchés de capitaux et théorie financière", Economica, Paris, 1993.

[32] Z. SCHUSS : “Theory and Applications of Stochastic Differential Equations" Wiley, New York, 1980.

[33] A. SHIRYAEV : “Optimal stopping rules", Springer-Verlag, New-York, 1978.