

N° d'ordre: 2903

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

en vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Spécialité: mathématiques appliquées

par

Patrick HILD

Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles

Soutenue le 8 Janvier 1998 devant le jury composé de :

Abderrahmane BENDALI	Professeur INSA Toulouse	Président
Christine BERNARDI	Directeur de Recherche CNRS Université Paris 6	Rapporteur
Mircea SOFONEA	Professeur Université de Perpignan	Rapporteur
Faker BEN BELGACEM	Maître de Conférences Université Paul Sabatier	Examineur
Patrick LABORDE	Professeur Université Paul Sabatier	Examineur
Jean-Pierre PELLE	Professeur Ecole Normale Supérieure de Cachan	Examineur
Michel RAOUS	Directeur de Recherche CNRS LMA/CNRS Marseille	Examineur

Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique (UMR 5640)

Equations aux Dérivées Partielles et Modélisation

Unité Mixte de Recherches CNRS - Université Paul Sabatier Toulouse 3 - INSA Toulouse

UFR MIG, Université Paul Sabatier Toulouse 3, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France

Remerciements

Ce travail a été réalisé sous la direction de Patrick LABORDE qui a su me proposer une voie de recherche originale et très intéressante. Son expérience, sa grande disponibilité, ses qualités scientifiques et humaines ont très largement contribué à un environnement de travail agréable au quotidien. Qu'il soit assuré de ma plus profonde et sincère reconnaissance.

J'exprime toute ma gratitude à Faker BEN BELGACEM qui a joué un rôle primordial dans l'élaboration de ce travail. Son investissement dans les problèmes de contact, ainsi que son optimisme sans faille m'ont fait très plaisir.

Christine BERNARDI et Mircea SOFONEA m'ont fait l'honneur de rapporter sur ce document. Je les remercie chaleureusement pour l'effort important qu'ils ont fourni et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je tiens à témoigner ma gratitude à Jean-Pierre PELLE pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Mécanique et Technologie à l'E.N.S. de Cachan. Il a su me faire profiter de l'environnement du LMT et notre collaboration m'a été précieuse.

Abderrahmane BENDALI et Michel RAOUS ont très volontiers accepté de participer au jury. J'en suis très honoré et je les remercie vivement.

Enfin, je voudrais adresser tous mes remerciements à Patrice COOREVITS du LMT-Cachan pour son entière disponibilité, son dynamisme, ainsi que pour l'aide apportée.

Résumé

On considère le problème de contact entre deux solides déformables. Après discrétisation indépendante des solides par éléments finis, les nœuds des deux maillages ne sont pas en vis à vis sur la zone de contact. Il s'agit alors de "raccorder les maillages", c'est à dire définir des conditions de contact discrètes. Le but du travail consiste à trouver les conditions les mieux adaptées. Ceci, tant du point de vue mathématique de la bonne convergence des solutions discrètes, que du point de vue de l'efficacité numérique et de la facilité d'implantation dans un code éléments finis. On s'intéressera plus particulièrement au problème de contact unilatéral, avec ou sans conditions de frottement entre deux solides. On discutera de la meilleure manière d'effectuer un calcul par éléments finis avec des maillages incompatibles, résultats de convergence et essais numériques à l'appui.

Mots clés: Contact unilatéral - Maillages incompatibles - Inéquation variationnelle - Méthode éléments finis avec joints - Méthode éléments finis non conforme - Décomposition de domaine - Bootstrap - Frottement

Abstract

We consider the contact problem between two deformable bodies. After an independent finite element discretization of both bodies, the nodes of both meshes do not fit together on the contact zone. Then, we need to define discrete contact conditions. The aim of the work consists of finding well adapted conditions. The conditions must be efficient from a mathematical point of view and they must lead to good convergence rates of the discretized solutions. Moreover, the conditions must be easily usable in a numerical and computational context. We focus on the unilateral contact problem, with or without friction. Using the theoretical convergence rates and the numerical experiments, we discuss the best way to carry out a finite element contact problem with non-matching meshes.

Keywords: Unilateral contact - Non-matching meshes - Variational inequality - Mortar finite element method - Nonconforming finite element method - Domain decomposition - Bootstrap - Friction

Table des matières

Introduction	5
1 La méthode des joints appliquée au problème de contact bilatéral	9
1.1 Formulation du problème	11
1.2 Discrétisation	13
1.3 Estimation d'erreur	15
1.3.1 Erreur d'approximation	15
1.3.2 Erreur de consistance	17
1.3.3 Estimations finales et conclusion	19
2 Résolution du problème de contact unilatéral: le raccord projection	20
2.1 Formulation du problème	21
2.2 Discrétisation et définition du raccord projection	23
2.3 Estimations d'erreur	25
2.3.1 Expression générale de l'erreur	25
2.3.2 Erreur d'approximation	27
2.3.3 Erreur de consistance	29
2.3.4 Estimation intermédiaire et bootstrap sur l'erreur de consistance . .	30
2.3.5 Estimation finale	32
2.3.6 Généralisation	32
2.3.7 Un cas de convergence optimale	34
2.4 Conclusion et remarques	36
3 Résultats supplémentaires relatifs au raccord projection	38
3.1 Formulation en problème de minimisation	38
3.1.1 Position du problème abordé	38
3.1.2 Discrétisation et estimation de l'erreur	39
3.1.3 Généralisation	42
3.2 Formulation en problème de point-selle	42
3.2.1 Position du problème abordé	42

3.2.2	Discrétisation et estimation de l'erreur	43
3.3	Etude de la convergence sans hypothèses de régularité.	47
3.4	Estimation de l'interpénétration en normes L^2 et L^∞	49
3.5	Conclusion	51
4	Etude d'autres raccords	52
4.1	Raccord ponctuel	53
4.1.1	Erreur d'approximation	54
4.1.2	Erreur de consistance	54
4.1.3	Estimation intermédiaire et bootstrap sur l'erreur de consistance . .	55
4.1.4	Estimation finale	56
4.1.5	Généralisation	56
4.2	Raccord intégral	56
4.2.1	Erreur d'approximation	57
4.2.2	Erreur de consistance	58
4.2.3	Estimation finale	62
4.2.4	Généralisation	62
4.3	Cas de l'interface de contact	62
4.4	Commentaires et récapitulatif	63
5	Contact unilatéral avec frottement	65
5.1	Formulation du problème	65
5.2	Discrétisation	68
5.3	Estimation de l'erreur	69
5.3.1	Expression générale de l'erreur	69
5.3.2	Estimation de l'erreur d'approximation	72
5.3.3	Première estimation de l'erreur de consistance	74
5.3.4	Deuxième estimation de l'erreur de consistance	75
5.3.5	Estimation de l'erreur globale et dernière estimation de l'erreur de consistance	77
5.4	Questions d'existence et d'unicité à propos du frottement de Coulomb . . .	78
5.4.1	Formulation du problème	79
5.4.2	Existence de la solution	80
5.4.3	A propos de l'unicité	83
5.5	Conclusion	84

6	Mise en œuvre numérique	85
6.1	Le problème à résoudre	85
6.1.1	Le problème continu: rappel	86
6.1.2	Discretisation par éléments finis	88
6.2	Formulation matricielle	89
6.2.1	Condition de contact de type intégral	89
6.2.2	Condition de contact de type projection	92
6.2.3	Mise sous forme de problème de minimisation et résolution algorithmique	94
6.2.4	Formulation matricielle de différentes conditions de contact sur un exemple	96
6.3	Détermination numérique de l'erreur	100
6.4	Tests numériques	102
6.4.1	Test1: comparaison maillage compatible–maillage incompatible . . .	102
6.4.2	Test2: comparaison compatible–incompatible pour un cas plus singulier	115
6.4.3	Test3: comparaison raccord projection–raccord ponctuel	124
6.4.4	Test4: comportement du raccord projection pour un cas extrême de maillages incompatibles	143
6.4.5	Test5: contact d'un demi-disque déformable sur socle déformable .	156
	Conclusion	161
	Annexe	163
A	Sur l'approximation en norme duale	163
A.1	L'opérateur d'interpolation de Lagrange	163
A.1.1	Approximation pour des fonctions H^1	164
A.1.2	Approximation pour des fonctions H^2	165
A.1.3	Approximation pour des fonctions $H^{\frac{3}{2}}$	166
A.2	L'opérateur de projection L^2 sur le cône convexe des fonctions continues, affines par morceaux et positives.	169
	Bibliographie	173

Introduction

Les problèmes de contact et d'impact représentent depuis longtemps une part significative du calcul de structures non-linéaire en contexte industriel, et les méthodes d'éléments finis y sont d'un usage courant pour l'approximation numérique du problème. Un point essentiel réside dans l'élaboration de méthodes numériques qui prennent en compte les conditions de contact de manière convenable car, dans ce type de problème, la gestion du contact occupe une proportion importante du temps de calcul. Une cause prédominante, et souvent inévitable, est que les maillages des solides déformables sont fréquemment incompatibles, c'est à dire que les nœuds des deux solides ne sont pas en vis à vis sur la zone de contact. La difficulté majeure qui en découle réside dans la gestion des nœuds du maillage dans cette zone. Aussi, la question de la définition des conditions de contact unilatéral sur des maillages incompatibles est d'un intérêt certain.

Le cadre mathématique, pour ces problèmes de contact, consiste en une inéquation variationnelle dont l'approximation par éléments finis a été discutée par de nombreux auteurs. En particulier, l'analyse pour des éléments finis de degré peu élevé est considérée par Kikuchi et Oden,[40] dans le cas d'un solide déformable en contact avec un socle rigide indéformable (problème de Signorini). Haslinger et Hlaváček,[34], Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35] ont considéré le cas de deux solides déformables avec des maillages compatibles sur la zone de contact.

Par ailleurs, la méthode de décomposition de domaines des éléments finis avec joints introduite par Bernardi, Maday et Patera,[13] offre d'importantes possibilités pour coupler différentes approximations variationnelles et, par voie de conséquence, pour utiliser des mailles qui ne coïncident pas aux interfaces des sous-domaines. Cette démarche permet de considérer des discrétisations indépendantes prenant en compte les particularités sur chaque solide (géometries, chargements, lois de comportement, etc ...). Dans beaucoup d'applications numériques, la notion de joint conduit à un gain important de temps de calcul et de génération de maillages, car cela permet de traiter des problèmes avec des maillages quelconques. Sur le plan mathématique, bon nombre de résultats sont établis pour des problèmes gouvernés par des équations variationnelles. Ces études prouvent l'optimalité du procédé dans un contexte d'éléments finis et d'éléments spectraux. Plu-

sieurs problèmes variationnels du second ordre ont été étudiés: le problème de Poisson (Bernardi, Maday et Patera,[13] Ben Belgacem,[4]), les équations de Stokes (Debit et Maday,[24] Debit,[23]), le problème d'élasticité linéarisé (Le Tallec et Sassi,[45]), les problèmes de plaques (Lacour,[42]), l'inversion de l'opérateur de Maxwell (Ben Abdallah, Ben Belgacem et Maday,[3]), etc... Les implantations numériques confirment l'efficacité d'une telle technique, en particulier en mécanique des fluides (Achdou et Pironneau,[1] Mavripllis,[48] par exemple).

Le travail présenté dans le cadre de cette thèse concerne en premier lieu les deux directions de recherche évoquées précédemment. D'une part, dans le cadre des problèmes de contact, on généralise l'étude par éléments finis au cas des maillages incompatibles. D'autre part, la méthode non-conforme des éléments finis avec joints est étendue à des problèmes régis par des inéquations variationnelles.

Cette thèse est composée de 6 chapitres et une annexe. L'étude se veut assez linéaire; ceci explique le fait que les outils et résultats mathématiques mis en place à un chapitre soient fréquemment utilisés au chapitre suivant. Cependant, le chapitre 6 traitant de la mise en œuvre numérique a été élaboré dans un souci de présentation auto-suffisante.

Le premier chapitre présente la méthode des éléments finis avec joints dans le cadre du problème de contact bilatéral et sans frottement entre deux solides déformables. Le contact bilatéral entre deux solides permet le glissement sur la zone de contact, mais exclut la possibilité d'un décollement. Le problème bilatéral se présente sous la forme d'une équation variationnelle et, bien qu'il ne présente pas d'intérêt particulier sur le plan physique, il sert de point de départ à l'étude plus complexe sur le plan mathématique et numérique du contact unilatéral. Les deux solides sont discrétisés indépendamment. La condition de continuité du déplacement normal au travers de la zone de contact, incorporée dans la définition du contact bilatéral, est définie de deux manières différentes sur ces maillages incompatibles. L'une est de type local, l'autre correspondant à la méthode des joints est de type intégral, et c'est cette dernière qui fournit un taux de convergence optimal.

Le problème de contact unilatéral est considéré dès le deuxième chapitre. Il s'agit du modèle de contact communément adopté en petites déformations. Il permet d'une part le glissement sur la zone de contact et autorise d'autre part des décollements entre les deux solides. Dans ce cas, la condition unilatérale comprend la non-interpénétration des deux solides qui se traduit par une inéquation sur le déplacement normal relatif. Ceci conduit ensuite à une inéquation variationnelle. Les deux solides sont alors discrétisés indépendamment l'un de l'autre. Il s'ensuit que les nœuds des deux zones candidates au contact et relatives aux deux solides ne sont pas en vis à vis. Dans une telle configuration, il est clair qu'il existe de nombreuses possibilités d'approcher la condition de non-interpénétration.

Dans le présent chapitre, on propose et on étudie l'une d'entre elles que nous nommerons le raccord projection. Dans le cas de maillages compatibles, le raccord projection revient à la condition classique de non-interpénétration nœud à nœud. De plus, l'analogue de ce raccord pour le contact bilatéral est la condition de type intégral présentée au chapitre précédent. L'étude par éléments finis correspondante conduit à un taux de convergence des solutions discrètes qui est le même que pour la condition nœud à nœud dans le cas de maillages compatibles. Ces résultats ont fait l'objet des publications [7] et [8] avec F. Ben Belgacem et P. Laborde.

Le troisième chapitre est destiné à une étude plus complète du raccord projection. Le problème de contact unilatéral entre deux solides élastiques est formulé tout d'abord sous forme de problème de minimisation, puis sous forme de problème mixte. Les études par éléments finis correspondantes sont effectuées. Par ailleurs, on analyse la convergence de la méthode sans hypothèses de régularité sur la solution exacte. Finalement, on obtient des résultats supplémentaires sur l'approximation de la condition de non-interpénétration.

Jusqu'à présent, nous avons étudié une seule condition de contact unilatéral pour des maillages incompatibles: le raccord projection. Dans le quatrième chapitre, on propose deux autres manières de discrétiser la condition de non-interpénétration. La première manière est qualifiée de raccord ponctuel et la seconde de raccord intégral. Le raccord ponctuel définit un contact de type nœud-segment et, dans le cas de maillages compatibles, il représente la condition de non-interpénétration nœud à nœud. Aussi ce raccord constitue l'analogue, pour le contact unilatéral, de la condition de type local considérée au premier chapitre pour le contact bilatéral. Tout en présentant une manière naturelle de définir le contact unilatéral, le raccord intégral ne se ramène pas à la condition nœud à nœud dans le cas compatible. Cependant, il constitue (tout comme le raccord projection), une généralisation de la condition de type intégral présentée dans le cadre du contact bilatéral. Les deux études par éléments finis correspondantes sont effectuées et des taux de convergence sont obtenus, comparés et commentés.

Dans le cinquième chapitre, nous étendons l'étude du deuxième chapitre à un problème de contact unilatéral avec frottement. L'analyse par éléments finis est effectuée au moyen du raccord projection. Bien que la prise en compte du frottement amène des non-linéarités supplémentaires ainsi que de nouveaux termes d'erreur, on obtient un taux de convergence similaire à celui du cas sans frottement.

La mise en œuvre numérique est réalisée au sixième chapitre. Dans un premier temps, on écrit la formulation matricielle du problème de contact unilatéral entre deux solides pour deux raccords différents. Puis, sur un exemple simple, on compare entre elles ces formulations matricielles. On effectue ensuite les simulations numériques. Plusieurs tests

sont présentés et l'on s'attachera à comparer les taux de convergence pour les maillages compatibles et incompatibles, ceci en considérant les différents raccords. De cette étude numérique, il ressort clairement que, dans le cas de maillages incompatibles, aucune perte de convergence n'est observée par rapport à la condition de contact nœud à nœud classique des maillages compatibles, ceci pour peu que l'on adopte le raccord projection. Finalement, on appliquera le raccord projection à plusieurs autres cas de figure significatifs.

Chapitre 1

La méthode des joints appliquée au problème de contact bilatéral

Le but de ce chapitre est d'appliquer au problème de contact bilatéral une méthode de décomposition de domaines. Ceci doit servir d'outil à l'étude plus réaliste sur le plan physique du contact unilatéral considéré dans les chapitres suivants. La méthode, appelée *méthode des éléments finis avec joints* permet de coupler différentes formulations variationnelles et d'utiliser des maillages qui ne se raccordent pas aux interfaces des sous-domaines.

Cette technique apparaît dans [11]; elle a été reformulée en termes de joints dans [13], et possède de nombreux avantages sur les plans théorique et numérique. Sur le plan théorique, un bon nombre de preuves sont établies prouvant le caractère optimal de la méthode, dans un contexte d'éléments spectraux et d'éléments finis, pour des problèmes elliptiques du second ordre gouvernés par des équations variationnelles [11, 13, 4]. Dans ce cas, la méthode des joints permet d'exprimer la continuité des solutions discrètes au travers d'une interface liant des sous-domaines discrétisés indépendamment. Comme la condition de contact bilatéral traduit la continuité du déplacement normal au travers de la zone de contact, il s'ensuit que la méthode des éléments finis avec joints convient naturellement à ce problème. Dans ce chapitre, il s'agit d'appliquer la méthode au problème de contact bilatéral entre deux solides élastiques. On utilise les techniques de démonstration de [11] et [13] (problème de Dirichlet homogène avec Laplacien), en tenant compte des spécificités du problème de contact bilatéral (possibilité de glissement des solides l'un par rapport à l'autre).

Le chapitre est découpé comme suit. Après la présentation des équations du contact bilatéral sans frottement, les deux solides sont discrétisés. On présente alors deux manières différentes de définir la condition bilatérale discrète sur la zone de contact. La première possibilité consiste à décrire la continuité du déplacement normal des solides en raccordant de manière ponctuelle (ou locale) les discrétisations sur la zone de contact. Cette approche

s'avère être non optimale sur le plan de la convergence des solutions éléments finis. Le second choix, correspondant à la méthode des joints, consiste en un raccord de type intégral (ou global) sur la zone de contact. Ce dernier est optimal du point de vue de la vitesse de convergence. Dans les deux cas de figure, on étend les résultats obtenus dans les références citées précédemment au contact bilatéral. Ces résultats ont fait l'objet de la publication [6].

Pour commencer, on spécifie quelques notations utilisées. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine ouvert connexe à frontière lipschitzienne; le point générique de Ω est noté $\mathbf{x}$. L'espace de Lebesgue classique des fonctions à carré sommable $L^2(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi \psi \, d\mathbf{x}.$$

Nous utiliserons fréquemment les espaces de Sobolev standard $H^m(\Omega)$, $m \geq 0$, munis de la norme hilbertienne

$$\|\psi\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ est un multi-indice dans $\mathbb{N}^2$ et le symbole ∂^α représente la dérivée partielle $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$. Comme indiqué dans Grisvard,[30] (Définition 1.3.2.1) l'espace de Sobolev d'ordre fractionnaire $H^\tau(\Omega)$, $\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, peut être défini intrinsèquement par la norme

$$\|\psi\|_{H^\tau(\Omega)} = \left(\|\psi\|_{H^m(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(\partial^\alpha \psi(\mathbf{x}) - \partial^\alpha \psi(\mathbf{y}))^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2+2\theta}} \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\tau = m + \theta$, m désignant la partie entière de τ , et $\theta \in]0, 1[$. L'adhérence dans $H^\tau(\Omega)$ de l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables dont le support est contenu dans Ω est noté $H_0^\tau(\Omega)$.

Comme il est souvent d'usage lorsque l'on considère des méthodes d'éléments finis, nous considérerons ici uniquement des domaines polygonaux. Cette hypothèse n'est pas restrictive et nous permet d'éviter les techniques requises pour le traitement de frontières courbes (Bernardi,[10] Haslinger et Hlaváček,[34] Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35]) qui sortent du cadre de notre étude. La frontière $\partial\Omega$ est l'union d'un nombre fini de segments Γ_j , $0 \leq j \leq J$. Le coin commun à Γ_j et Γ_{j+1} est $\mathbf{c}_j$. Dans un tel cas, l'espace $H^\tau(\Omega)$ défini précédemment coïncide avec les restrictions à Ω des fonctions de $H^\tau(\mathbb{R}^2)$ (cf. Ref.[30], Théorème 1.4.5.2). Afin de pouvoir manipuler des traces de fonctions, on introduit, pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, ayant pour partie entière m et pour partie décimale $\theta \in]0, 1[$, l'espace de Hilbert $H^\tau(\Gamma_j)$ associé à la norme

$$\|\psi\|_{H^\tau(\Gamma_j)} = \left(\|\psi\|_{H^m(\Gamma_j)}^2 + \int_{\Gamma_j} \int_{\Gamma_j} \frac{(\partial^m \psi(\mathbf{x}) - \partial^m \psi(\mathbf{y}))^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1+2\theta}} \, d\Gamma \, d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $d\Gamma$ désigne la mesure linéique sur Γ_j et ∂^m représente la dérivée d'ordre m . On désigne par $H^{-\tau}(\Gamma_j)$ le dual topologique de $H^\tau(\Gamma_j)$ pour $0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}$. Nous utiliserons également l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$, $1 \leq j \leq J$. Dans ce but, on définit l'application ρ_j comme étant la distance aux points extrêmes de Γ_j

$$\rho_j(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \{\mathbf{c}_{j-1}, \mathbf{c}_j\}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_j.$$

Ainsi, l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ est muni de la norme (cf. [46])

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)} = \left(\|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)}^2 + \int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(\mathbf{x})^2}{\rho_j(\mathbf{x})} d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, l'opérateur trace $T : \psi \mapsto (\psi|_{\Gamma_j})_{1 \leq j \leq J}$, envoie continuellement $H^\tau(\Omega)$ dans $\prod_{j=1}^J H^{\tau-\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ quand $\tau > \frac{1}{2}$. En particulier, l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (i.e. l'ensemble des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$) est le sous-espace de $\prod_{j=1}^J H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)$ formé des fonctions vérifiant des conditions spécifiques de type intégral aux coins $(\mathbf{c}_j)_j$ (cf. Ref.[30], Théorème 1.5.2.3).

Les lettres en gras $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, représentent des quantités vectorielles; les lettres en capitales (par exemple $\mathbf{V}$) sont des espaces de fonctions vectorielles. Dans toute la suite nous considérerons des problèmes d'élasticité plane. Le symbole σ représente le tenseur des contraintes et ε désigne le tenseur des déformations. Nous rappelons que le tenseur des déformations linéarisé induit par un champ de déplacements $\mathbf{v}$ s'écrit:

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T).$$

1.1 Formulation du problème

On considère deux solides déformables qui occupent, dans la configuration initiale, deux ensembles $\bar{\Omega}^\ell$ dans $\mathbb{R}^2$, $\ell = 1, 2$. La frontière $\partial\Omega^\ell$ du domaine Ω^ℓ est régulière et composée de trois parties Γ_u^ℓ , Γ_g^ℓ et Γ_c^ℓ . Le vecteur normal unitaire sortant de Ω^ℓ est noté $\mathbf{n}^\ell$. Le solide est soumis à des forces $\mathbf{f}^\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^2$ et des forces $\mathbf{g}^\ell \in (L^2(\Gamma_g^\ell))^2$ agissent sur Γ_g^ℓ . La partie Γ_u^ℓ est encastree et on supposera que $\text{mes}(\Gamma_u^\ell) > 0$. Initialement, les deux solides sont en contact sur la partie commune de leur frontière $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$.

Le problème de contact bilatéral consiste à trouver le champ de déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$ avec $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}|_{\Omega^\ell}$ et le champ de contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ avec $\sigma^\ell = \sigma|_{\Omega^\ell}$ satisfaisant aux conditions suivantes pour $\ell = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \text{div } \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) + \mathbf{f}^\ell &= 0 && \text{dans } \Omega^\ell, \\ \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell)\mathbf{n}^\ell &= \mathbf{g}^\ell && \text{sur } \Gamma_g^\ell, \\ \mathbf{u}^\ell &= 0 && \text{sur } \Gamma_u^\ell. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Le symbole **div** représente l'opérateur divergence défini par $\mathbf{div} \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_i$, où l'on a adopté la convention de sommation sur les indices répétés. Le tenseur des contraintes est déduit du déplacement par la loi de comportement élastique

$$\sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) = C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \quad (1.1.2)$$

où $C^\ell = (c_{ij,kh}^\ell)_{1 \leq i,j,k,h \leq 2}$ est un tenseur d'ordre quatre vérifiant $c_{ij,kh}^\ell = c_{ji,kh}^\ell = c_{kh,ij}^\ell$ et $c_{ij,kh}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell)$.

Les conditions sur la surface de contact Γ_c sont les suivantes

$$\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = 0, \quad (1.1.3)$$

$$(\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot \mathbf{n}^1 = (\sigma^2(\mathbf{u}^2) \mathbf{n}^2) \cdot \mathbf{n}^2 = \sigma_n(\mathbf{u}), \quad (1.1.4)$$

$$\sigma_T^1(\mathbf{u}^1) = \sigma_T^2(\mathbf{u}^2) = 0, \quad (1.1.5)$$

où

$$\sigma_T^\ell(\mathbf{u}^\ell) = \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) \mathbf{n}^\ell - \sigma_n(\mathbf{u}) \mathbf{n}^\ell, \quad 1 \leq \ell \leq 2.$$

La condition (1.1.3) représente le contact bilatéral entre les deux solides, (1.1.4) constitue le principe d'action et de réaction et finalement (1.1.5) traduit l'absence de frottements. Dans cette formulation les deux solides restent en contact mais un glissement peut survenir.

On suppose qu'il existe des constantes $\alpha^\ell > 0$ vérifiant

$$c_{ij,kh}^\ell \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \geq \alpha^\ell \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (1.1.6)$$

Afin d'étudier ce problème, nous allons donner une formulation variationnelle équivalente à la formulation donnée précédemment (cf. [40, 26]). On définit les espaces $\mathbf{V}(\Omega^\ell)$ ($\ell = 1, 2$)

$$\mathbf{V}(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v} \in \left(H^1(\Omega^\ell) \right)^2, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\ell \right\},$$

et un champ $\mathbf{v}$ de vecteurs de $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$ est noté $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$. Muni du produit scalaire

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_* = (\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1)_{(H^1(\Omega^1))^2} + (\mathbf{u}^2, \mathbf{v}^2)_{(H^1(\Omega^2))^2},$$

$\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$ est un espace de Hilbert dont la norme correspondante est notée $\|\cdot\|_*$.

Introduisons la forme bilinéaire suivante

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) d\Omega^\ell,$$

pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$. On introduit également la forme linéaire et continue $L(\cdot)$ prenant en compte l'action des forces extérieures

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_g^\ell} \mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell d\Gamma^\ell \right).$$

Il est facile de vérifier la continuité, la symétrie et (en utilisant (1.1.6) avec l'inégalité de Korn) la coercivité de $a(.,.)$ sur l'espace produit $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$.

L'espace des déplacements admissibles $\mathbf{V}$ est un sous-espace de $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$ comprenant la condition de contact bilatéral (1.1.3)

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2), \quad \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\}.$$

La formulation variationnelle du problème de contact bilatéral est: *trouver $\mathbf{u}$ tel que:*

$$\mathbf{u} \in \mathbf{V}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \quad (1.1.7)$$

On peut vérifier facilement l'équivalence formelle entre (1.1.7) et (1.1.1)–(1.1.5) (cf. [40] ou [26]). En utilisant le théorème de Lax–Milgram, on déduit que le problème (1.1.7) admet une solution unique.

1.2 Discrétisation

Cette partie consiste à construire un espace qui soit une bonne approximation (dans un sens qui sera précisé ultérieurement) de type éléments finis de $\mathbf{V}$. Pour commencer, nous décrivons les discrétisations utilisées dans chaque solide. Afin d'éviter les techniques requises pour le traitement des frontières courbes, nous supposons, pour des raisons de simplicité, que chaque solide Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$, est un polygone et que Γ_c est le segment d'extrémités $\mathbf{c}^1$ et $\mathbf{c}^2$. On désigne par $h = (h_1, h_2)$ le paramètre de discrétisation qui est un couple de réels strictement positifs destinés tous deux à tendre vers 0. A chaque solide Ω^ℓ est alors associée une famille régulière de triangulations T_h^ℓ , constituées d'éléments qui sont soit triangulaires, soit rectangulaires, et dont le diamètre n'excède pas h_ℓ . On considèrera dans le cas présent uniquement des éléments triangulaires et l'extension aux éléments rectangulaires fait simplement appel à de légères modifications. Ainsi

$$\Omega^\ell = \bigcup_{\kappa \in T_h^\ell} \bar{\kappa}.$$

Lorsque les points extrêmes $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ de la face en contact Γ_c sont communs aux deux maillages, Γ_c hérite de deux traces de triangulations, induites par les maillages respectifs des deux solides. Ces deux familles de traces de triangulations seront notées $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$. Dans ce qui suit, nous supposons que ces familles de traces de triangulations sont uniformément régulières afin que l'on puisse appliquer les inégalités inverses dans les espaces de Sobolev (cf. [18]). Pour tout entier $q \geq 1$, $\mathbb{P}_q(\kappa)$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à q sur κ . Pour tout κ , on associe un ensemble fini Ξ_κ de points aux coordonnées

barycentriques $(\frac{i}{q}, \frac{j}{q}, \frac{q-i-j}{q})$, $0 \leq i, j \leq q$. Alors $(\kappa, \mathbb{P}_q(\kappa), \Xi_\kappa)$ est un élément fini de type Lagrange et on pose $\Xi^\ell = \cup_{\kappa \in T_h^\ell} \Xi_\kappa$. La trace des deux maillages sur Γ_c définit deux familles d'ensembles de nœuds notés ξ_h^ℓ et dans le cas de maillages incompatibles, $\xi_h^1 \neq \xi_h^2$. L'espace des fonctions de type éléments finis utilisé sur Ω^ℓ est alors défini par

$$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v}_h^\ell \in (\mathcal{C}(\Omega^\ell))^2, \quad \forall \kappa \in T_h^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_\kappa \in (\mathbb{P}_q(\kappa))^2, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_u^\ell} = 0 \right\}.$$

On définit les espaces $W_h^\ell(\Gamma_c) = \{ \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_c} \cdot \mathbf{n}^\ell, \mathbf{v}_h^\ell \in \mathbf{V}_h(\Omega^\ell) \}$, constitués de fonctions affines par morceaux sur $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ et continues sur Γ_c . Afin d'exprimer la condition de contact (1.1.3) dans le cas discret sur Γ_c , nous introduisons l'espace des multiplicateurs de Lagrange

$$M_h^\ell(\Gamma_c) = \left\{ q_h^\ell \in \mathcal{C}(\overline{\Gamma_c}), \quad \forall T \in \mathcal{T}_{c,h}^\ell, \quad q_h^\ell|_T \in \mathbb{P}_q(T), \right. \\ \left. q_h^\ell|_T \in \mathbb{P}_{q-1}(T) \text{ si } \mathbf{c}_1 \text{ ou } \mathbf{c}_2 \in T \right\}.$$

Désormais, nous sommes en mesure de construire les espaces d'approximation de $\mathbf{V}$. Nous en proposons deux. Le premier choix correspond à un raccord de type ponctuel; on pose $\xi_h = \xi_h^1$ ou ξ_h^2 et

$$\mathbf{V}_h^P = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \right. \\ \left. \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1(\mathbf{a}) + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2(\mathbf{a}) = 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \xi_h \right\}. \quad (1.2.1)$$

Le second choix correspond à une condition de raccord de type intégral sur Γ_c . On pose $M_h(\Gamma_c) = M_h^1(\Gamma_c)$ ou $M_h^2(\Gamma_c)$ et

$$\mathbf{V}_h^I = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \right. \\ \left. \int_{\Gamma_c} (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) q_h d\Gamma = 0, \quad \forall q_h \in M_h(\Gamma_c) \right\}. \quad (1.2.2)$$

Ces espaces ne sont pas inclus dans $\mathbf{V}$. Par voie de conséquence, les approximations considérées ici ne sont pas conformes au sens de Hodge.

Le problème discrétisé est obtenu à partir du problème continu (1.1.7) par un procédé de Galerkin et consiste à: *trouver $\mathbf{u}_h$ tel que:*

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (1.2.3)$$

avec $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h^I$ ou $\mathbf{V}_h^P$.

En utilisant à nouveau le théorème de Lax–Milgram, on déduit que le problème discrétisé (1.2.3) admet une solution unique dans $\mathbf{V}_h^I$ (resp. $\mathbf{V}_h^P$).

Remarque 1.1. Dans les deux cas, on a deux possibilités pour l'espace d'approximation suivant le choix de $M_h(\Gamma_c)$ pour $\mathbf{V}_h^I$ et de ξ_h pour $\mathbf{V}_h^P$.

1.3 Estimation d'erreur

Dans cette partie, on donne une estimation de l'erreur commise par les deux approximations présentées dans la section précédente. Tout d'abord, nous rappelons un outil de base pour cette étude, le second lemme de Strang, qui constitue le point de départ à l'expression générale de l'estimation de l'erreur.

Lemme 1.1 *Soit $V_h = V_h^P$ ou V_h^I définis en (1.2.1) et (1.2.2). Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (1.1.7) vérifie $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu$. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discret (1.2.3). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{1}{\|\mathbf{w}_h\|_*} \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \right), \quad (1.3.1)$$

où $C > 0$ est indépendant de h .

Preuve. En appliquant le second lemme de Strang (cf. [18]), on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - L(\mathbf{w}_h)|}{\|\mathbf{w}_h\|_*} \right).$$

La formule de Green donne

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_h) - L(\mathbf{w}_h) = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma,$$

ce qui permet de conclure. $\square$

L'erreur se décompose ainsi en deux termes d'erreur. Le premier infimum est l'erreur d'approximation. Le second terme est induit par la non-conformité de la méthode, c'est à dire par le fait que $V_h \not\subset V$, et correspond à l'erreur de consistance.

Par la suite, nous choisirons $M_h(\Gamma_c) = M_h^I(\Gamma_c)$ et $\xi_h = \xi_h^1$. Afin de pouvoir utiliser les inégalités inverses (cf. [18]), nous supposons, et ceci dans le cas du raccord ponctuel uniquement, que h_1/h_2 est borné.

1.3.1 Erreur d'approximation

Il s'agit d'étudier les propriétés d'approximation des espaces discrets V_h^P et V_h^I . Dans les deux cas, l'optimalité de l'approximation est obtenue.

Lemme 1.2 *Lorsque la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (1.1.7) vérifie les propriétés de régularité suivantes: $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^{q+1}(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^{q+1}(\Omega^2))^2$, ($q \geq 0$), on a*

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in V_h^I} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^q + h_2^q),$$

où $C(\mathbf{u}) > 0$ est indépendant de h .

Preuve. En utilisant la définition de la norme $\|\cdot\|_*$, on écrit

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* &\leq \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} + \|\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}_h^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2} \\ &\leq \|\mathbf{u}^1 - \mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} + \|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \\ &\quad + \|\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2} + \|\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}_h^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2},\end{aligned}$$

où $\mathcal{I}_h^1$ (resp. $\mathcal{I}_h^2$) désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds du maillage de Ω^1 (resp. Ω^2). Si $\mathbf{u} \in (H^{q+1}(\Omega^1))^2 \times (H^{q+1}(\Omega^2))^2$ alors (cf. [18])

$$\|\mathbf{u}^1 - \mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} + \|\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2} \leq C(\mathbf{u})(h_1^q + h_2^q).$$

Il reste à trouver une estimation pour $\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^I} (\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} + \|\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}_h^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2})$.

En prenant

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_h^1 &= \mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 + \mathcal{R}_h^1(\pi_h^1(-(\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}^1)), \\ \mathbf{v}_h^2 &= \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2,\end{aligned}$$

où π_h^1 est l'opérateur de projection sur $W_h^1(\Gamma_c)$ défini comme suit: pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma_c)$; cet opérateur conserve les valeurs aux extrémités $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ de Γ_c et vérifie

$$\int_{\Gamma_c} (\varphi - \pi_h^1 \varphi) q_h \, d\Gamma = 0, \quad \forall q_h \in M_h^1(\Gamma_c).$$

On a désigné par $\mathcal{R}_h^1$ un opérateur de relèvement de $W_h^1(\Gamma_c) \cap H_0^1(\Gamma_c)$ dans $\mathbf{V}_h(\Omega^1)$ (cf. [13],[12],[14]). On vérifie facilement que $\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2)$ appartient à $\mathbf{V}_h^I$.

La construction de $\mathbf{v}_h$ donne

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} + \|\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}_h^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2} &= \|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \\ &= \|\mathcal{R}_h^1(\pi_h^1(-(\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}^1))\|_{(H^1(\Omega^1))^2}.\end{aligned}$$

La propriété de l'opérateur de relèvement implique

$$\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \leq C \|\pi_h^1(-(\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}^1)\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

La stabilité de l'opérateur de projection (cf. [13]) donne

$$\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \leq C \|-(\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}^1\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)},$$

et

$$\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \leq C (\|\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + \|\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}^1\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}),$$

et un calcul amène

$$\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \leq C(\|\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^2)} + \|\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}^1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^1)}).$$

En utilisant le théorème de trace, on obtient

$$\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \leq C(\|\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2} + \|\mathbf{u}^1 - \mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2}).$$

Finalement

$$\|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^1 - \mathbf{v}_h^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2} \leq C(h_1^q \|\mathbf{u}^1\|_{(H^{q+1}(\Omega^1))^2} + h_2^q \|\mathbf{u}^2\|_{(H^{q+1}(\Omega^2))^2}).$$

D'où la conclusion. $\square$

Lemme 1.3 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (1.1.7) vérifie les mêmes propriétés de régularité que dans le lemme précédent. Alors*

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^P} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^q + h_2^q), \quad (1.3.2)$$

où $C(\mathbf{u})$ est indépendant de h .

Preuve. La démonstration reprend le cheminement de la preuve précédente en faisant intervenir l'opérateur d'interpolation de Lagrange $\mathcal{I}_h^1$ au lieu de l'opérateur de projection π_h^1 . $\square$

1.3.2 Erreur de consistance

L'erreur de consistance mesure les effets de la non-conformité. Dans le cas du raccord intégral, on a l'estimation optimale suivante:

Lemme 1.4 *Lorsque la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (1.1.7) vérifie les propriétés de régularité suivantes: $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^{q+1}(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^{q+1}(\Omega^2))^2$, ($q \geq 0$), on a*

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h^I} \frac{1}{\|\mathbf{w}_h\|_*} \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq C(\mathbf{u})h_1^q,$$

où $C(\mathbf{u}) > 0$ est indépendant de h .

Preuve. Les conditions de type intégral permettent d'écrire: $\forall q_h \in M_h(\Gamma_c)$

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} (\sigma_n(\mathbf{u}) - q_h)(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient : $\forall q_h \in M_h(\Gamma_c)$

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq \|\sigma_n(\mathbf{u}) - q_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

Prendre l'infimum sur $M_h(\Gamma_c)$ amène à

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq \inf_{q_h \in M_h(\Gamma_c)} \|\sigma_n(\mathbf{u}) - q_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

Ceci conduit à l'estimation suivante (cf. [13])

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq Ch_1^q \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{H^{q-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

En utilisant le théorème de trace, cela donne

$$\frac{1}{\|\mathbf{w}_h\|_*} \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq Ch_1^q \|\mathbf{u}^1\|_{(H^{q+1}(\Omega^1))^2}.$$

□

Le lemme suivant constitue l'analogue du résultat précédent pour le raccord ponctuel.

Lemme 1.5 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (1.1.7) vérifie les mêmes propriétés de régularité que dans le lemme précédent. Alors*

$$\sup_{\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h^P} \frac{1}{\|\mathbf{w}_h\|_*} \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq C(\mathbf{u}) h_1^{\frac{1}{2}},$$

où $C(\mathbf{u}) > 0$ est indépendant de h .

Preuve. Les conditions de type ponctuel donnent

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{w}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{w}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{L^2(\Gamma_c)}.$$

Ceci conduit à l'estimation suivante

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq Ch_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_c)},$$

pour tout $\varepsilon > 0$ petit. En utilisant une inégalité inverse (cf. [18]) et l'hypothèse de bornitude sur h_1/h_2 , on arrive à

$$\frac{1}{\|\mathbf{w}_h\|_*} \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{w}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{w}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq Ch_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}.$$

□

Dans ce cas, le taux de convergence obtenu n'est pas optimal. Ceci est dû au fait que l'opérateur d'interpolation de Lagrange ne donne pas des estimations d'erreur optimales pour des normes dans les espaces de Sobolev $H^s(\Gamma_c)$, $s < 0$.

1.3.3 Estimations finales et conclusion

Les théorèmes suivants donnent l'erreur globale commise par la méthode éléments finis. Dans le cas du raccord intégral, on a l'estimation suivante:

Théorème 1.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (1.1.7) est telle que $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^{q+1}(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^{q+1}(\Omega^2))^2$, ($q \geq 0$). Si $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^I$ est la solution du problème discret (1.2.3), alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^q + h_2^q),$$

où $C(\mathbf{u}) > 0$ est indépendant de h .

Dans le cas du raccord ponctuel, on a l'estimation suivante:

Théorème 1.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (1.1.7) satisfait les mêmes propriétés de régularité que dans le théorème précédent et soit $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^P$ la solution du problème discret (1.2.3). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{1}{2}} + h_2^q),$$

où $C(\mathbf{u}) > 0$ est indépendant de h .

Dans ce chapitre, on a présenté deux manières différentes d'exprimer la condition de contact bilatéral pour des maillages incompatibles sur la zone de contact.

L'erreur associée à l'une des deux approches converge, sous les hypothèses H^2 , de manière optimale en $h_1 + h_2$, où h_1 et h_2 désignent les paramètres de discrétisation relatifs aux deux solides.

L'étape suivante, constituant le chapitre à venir, sera de montrer un résultat de même nature pour le problème de contact unilatéral.

Chapitre 2

Résolution du problème de contact unilatéral: le raccord projection

Le but de ce chapitre est d'étendre la méthode développée au chapitre précédent au problème de contact unilatéral.

Le chapitre est découpé comme suit. Tout d'abord, on présente le problème continu de contact unilatéral et sans frottement. La formulation faible associée consiste en une inéquation variationnelle.

Dans la section suivante, on considère une méthode éléments finis prenant en compte la discrétisation indépendante de chaque solide et les maillages incompatibles qui en résultent sur la zone de contact. L'analogue discret de la condition de non-interpénétration constitue le point capital de l'approximation. Sur la zone de contact, on choisit la trace de l'un des deux maillages et l'on considère l'espace des fonctions continues et affines par morceaux définies sur cette discrétisation de l'interface. La condition discrète de contact est alors définie en utilisant un opérateur de projection sur cet espace. Cette condition revient à généraliser la condition intégrale définie au premier chapitre et visant à traduire la continuité du déplacement normal au travers de la zone de contact bilatéral. Une telle formulation nous permet d'obtenir une condition discrète de contact unilatéral simple.

Une partie novatrice importante de l'étude réside dans le calcul de l'erreur commise par cette approximation par éléments finis. A notre connaissance, il s'agit de la première étude de convergence incorporant des maillages incompatibles effectuée pour une inéquation variationnelle. Dans un premier temps, on considère une adaptation du lemme de Falk visant à donner une expression générale de l'erreur. Ce résultat joue le même rôle que le second lemme de Strang pour le contact bilatéral. L'erreur se décompose alors en une erreur d'approximation et une erreur de consistance. Ce dernier terme est dû à la non-conformité de la méthode, caractéristique résultant directement de la prise en compte de maillages incompatibles. L'étude de ces deux termes conduit à une estimation de l'erreur globale. On remarque ensuite qu'il est possible d'améliorer ce dernier taux de convergence

en appliquant un argument de bootstrap. Finalement, dans le cas de maillages incompatibles, cette extension de la méthode des joints donne le même ordre de convergence que Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35] dans le cas de maillages compatibles. Pour terminer, on présentera plusieurs résultats de convergence obtenus avec différentes hypothèses de régularité.

Les lettres en gras comme $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, indiquent des quantités vectorielles, tandis que les lettres capitales (par exemple $\mathbf{V}_h, \mathbf{K}, \dots$) sont des espaces fonctionnels sur des champs de vecteurs. Le symbole σ représente le tenseur des contraintes et ε est le tenseur des déformations.

2.1 Formulation du problème

Nous considérons la déformation de deux solides élastiques qui occupent, dans la configuration initiale, deux ensembles $\bar{\Omega}^\ell$ de l'espace $\mathbb{R}^2$, $\ell = 1, 2$. Le domaine Ω^ℓ est situé sur un seul côté de sa frontière notée $\partial\Omega^\ell$. Cette dernière sera supposée suffisamment régulière et est constituée de $\Gamma_u^\ell, \Gamma_g^\ell$ et Γ_c^ℓ . Le solide $\bar{\Omega}^\ell$ est encastré sur Γ_u^ℓ et soumis à des forces de traction surfaciques $\mathbf{g}^\ell \in (L^2(\Gamma_g^\ell))^2$ sur Γ_g^ℓ ; les forces de volume sont notées $\mathbf{f}^\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^2$. Dans la configuration initiale, les deux corps ont une partie de leur frontière en commun $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$ qui est considérée comme la surface de contact candidate. En d'autres termes, la zone de contact ne peut pas s'agrandir durant le processus de déformation (Haslinger et Hlaváček,[33],[34] Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35]). Le contact est supposé sans frottement et sera effectif sur une partie de Γ_c qui n'est pas connue par avance. La mesure de Γ_u^ℓ est strictement positive et le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega^\ell$ est noté $\mathbf{n}^\ell$.

Le problème de contact unilatéral consiste à trouver le champ de déplacements $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^\ell)_\ell = (\mathbf{u}|_{\Omega^1}, \mathbf{u}|_{\Omega^2})$, et le champ de tenseurs de contraintes $\sigma = (\sigma^\ell)_\ell$ satisfaisant les conditions suivantes (2.1.1)–(2.1.5) pour $\ell = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) + \mathbf{f}^\ell &= 0 && \text{dans } \Omega^\ell, \\ \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell)\mathbf{n}^\ell - \mathbf{g}^\ell &= 0 && \text{sur } \Gamma_g^\ell, \\ \mathbf{u}^\ell &= 0 && \text{sur } \Gamma_u^\ell. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Le symbole $\mathbf{div}$ représente l'opérateur divergence d'une fonction tensorielle et est défini par $\mathbf{div} \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_i$. On adoptera la convention de sommation sur les indices répétés. Le tenseur des contraintes est relié aux déplacements par la relation de comportement de l'élasticité linéaire

$$\sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) = C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \tag{2.1.2}$$

où $C^\ell = C^\ell(\mathbf{x}) = (c_{ij,kh}^\ell(\mathbf{x}))_{1 \leq i,j,k,h \leq 2} \in (L^\infty(\Omega^\ell))^{16}$ est un tenseur d'ordre quatre elliptique et symétrique:

$$c_{ij,kh}^\ell = c_{ji,kh}^\ell = c_{kh,ij}^\ell, \quad \forall i, j, k, h.$$

Par la suite, lorsque aucune confusion ne pourra survenir, nous écrirons simplement σ^ℓ au lieu de $\sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell)$. Les situations que nous considérons relèvent de l'hypothèse des petites déformations. Dans un tel cas, le terme non-linéaire (quadratique) est négligé et le tenseur des déformations $\varepsilon(\mathbf{v}^\ell)$ induit par un champ de déplacements $\mathbf{v}^\ell$ est linéaire et vaut

$$\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^\ell + (\nabla \mathbf{v}^\ell)^T),$$

où le symbole T indique la transposition.

Finalement, on a les conditions suivantes sur Γ_c :

$$(\sigma^1 \mathbf{n}^1) \cdot \mathbf{n}^1 = (\sigma^2 \mathbf{n}^2) \cdot \mathbf{n}^2 = \sigma_n, \quad (2.1.3)$$

$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\sigma_T^1 = \sigma_T^2 = 0. \quad (2.1.5)$$

La notation $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]$ représente le saut $(\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2)$ du déplacement normal à travers la zone de contact Γ_c et $\sigma_T^\ell = \sigma^\ell \mathbf{n}^\ell - \sigma_n \mathbf{n}^\ell$ est la contrainte tangentielle. Les conditions de contact unilatéral (2.1.4) permettent la séparation des solides sur une partie de Γ_c . Ce décollement se traduit par la condition de non-interpénétration $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \leq 0$. L'équation (2.1.3) traduit le principe d'action et de réaction et finalement (2.1.5) représente un contact sans frottement.

L'étude à venir est basée sur une formulation variationnelle équivalente aux conditions précédentes. A ce propos, on définit d'abord les espaces vectoriels

$$\mathbf{V}(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v}^\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^2, \quad \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\ell \right\}. \quad (2.1.6)$$

Un champ de vecteurs $\mathbf{v}$ de l'espace produit $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$ est noté $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$. Cet espace produit est muni du produit scalaire:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_* = (\mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1)_{(H^1(\Omega^1))^2} + (\mathbf{v}^2, \mathbf{w}^2)_{(H^1(\Omega^2))^2},$$

pour tous $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$. La norme brisée associée est notée $\|\cdot\|_*$. Le convexe fermé $\mathbf{K}$ des déplacements admissibles est inclus dans $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$ et incorpore la condition de non-interpénétration,

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2), \quad [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c \right\}. \quad (2.1.7)$$

La formule de Green appliquée au problème (2.1.1)–(2.1.5) conduit à une inéquation variationnelle (cf. [26]): *trouver $\mathbf{u}$ tel que*

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}. \quad (2.1.8)$$

Dans (2.1.8), on pose:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \, d\mathbf{x}, \quad (2.1.9)$$

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_g^\ell} \mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell \, d\Gamma^\ell \right), \quad (2.1.10)$$

pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$. La forme bilinéaire $a(.,.)$ est elliptique (d'après l'inégalité de Korn) et continue sur $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$, et la forme linéaire $L(.)$ est continue sur $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$.

L'inéquation (2.1.8) est une inéquation variationnelle standard. L'existence et l'unicité de $\mathbf{u}$, solution au problème (2.1.8), résultent du théorème de Stampacchia.

2.2 Discrétisation et définition du raccord projection

La première étape de cette section consiste à rappeler les outils de base en théorie de l'approximation par éléments finis.

Nous supposons que les solides Ω^ℓ sont polygonaux, $\ell = 1, 2$, et que Γ_c est un segment, ceci dans le but d'éviter les techniques nécessaires pour le traitement des frontières courbes (cf. Bernardi,[10] Haslinger et Hlaváček,[34], Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35]) et pour des raisons de simplicité évidentes. Soit $h = (h_1, h_2)$ le paramètre de discrétisation, qui est un couple de réels strictement positifs destinés tous deux à tendre vers 0. A chaque Ω^ℓ , on associe une famille régulière de triangulations T_h^ℓ , dont les éléments sont des triangles dont le diamètre n'excède pas h_ℓ . On écrit

$$\Omega^\ell = \bigcup_{\kappa \in T_h^\ell} \bar{\kappa}.$$

On suppose que les points extrêmes $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ de la zone de contact Γ_c sont communs aux maillages des deux solides. La zone de contact Γ_c hérite de deux familles de traces de triangulations provenant de T_h^1 et de T_h^2 . Le maillage 1D noté $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ sur Γ_c est défini comme l'ensemble de tous les côtés de $\kappa \in T_h^\ell$ sur la zone de contact. Nous supposons que ces familles de triangulations $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ sont uniformément régulières de sorte que les inégalités inverses dans les espaces de Sobolev soient applicables (Ciarlet,[18]). L'ensemble des nœuds associés à $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ est noté ξ_h^ℓ . En général ξ_h^1 et ξ_h^2 ne sont pas identiques à cause de la non-compatibilité des maillages.

Notons $\mathbb{P}_1(\kappa)$ l'ensemble des polynômes de degré un définis sur κ . A tout κ , on associe un ensemble fini Ξ_κ , tel que $(\kappa, \mathbb{P}_1(\kappa), \Xi_\kappa)$ soit un élément fini de Lagrange. L'espace éléments finis utilisé dans Ω^ℓ est défini par

$$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v}_h^\ell \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}^\ell))^2, \quad \forall \kappa \in T_h^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_\kappa \in (\mathbb{P}_1(\kappa))^2, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_u^\ell} = 0 \right\}. \quad (2.2.1)$$

Si $\mathcal{I}_h^\ell$ désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$, alors l'estimation suivante sur l'erreur est vérifiée: pour tout couple de réels $(\mu, \nu) \in [0, 1] \times]1, 2]$, il existe une constante $C = C(\mu, \nu)$ qui satisfait:

$$\|\mathbf{v}^\ell - \mathcal{I}_h^\ell \mathbf{v}^\ell\|_{(H^\mu(\Omega^\ell))^2} \leq C(\mu, \nu) h_\ell^{\nu-\mu} \|\mathbf{v}^\ell\|_{(H^\nu(\Omega^\ell))^2}, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in (H^\nu(\Omega^\ell))^2. \quad (2.2.2)$$

La propriété d'interpolation (2.2.2) n'est pas vérifiée pour μ strictement négatif (cf. annexe).

Afin d'exprimer les conditions de contact (2.1.4), il s'agit de définir les espaces fonctionnels adéquats sur Γ_c . Soit $W_h^\ell(\Gamma_c)$ l'ensemble des composantes normales des traces sur Γ_c de fonctions de $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$,

$$W_h^\ell(\Gamma_c) = \left\{ \varphi_h = \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_c} \cdot \mathbf{n}^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell \in \mathbf{V}_h(\Omega^\ell) \right\}.$$

On introduit l'espace des multiplicateurs de Lagrange afin d'exprimer de manière convenable les conditions de contact discrètes

$$M_h^\ell(\Gamma_c) = \left\{ \psi_h \in W_h^\ell(\Gamma_c), \quad \psi_h|_T \in \mathbb{P}_0(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_{c,h}^\ell, \text{ t.q. } \mathbf{c}_1 \text{ ou } \mathbf{c}_2 \in T \right\}. \quad (2.2.3)$$

Soit π_h^ℓ l'opérateur de projection (au sens de $L^2(\Gamma_c)$) sur $W_h^\ell(\Gamma_c)$ défini pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma_c)$ comme suit

$$\begin{aligned} \pi_h^\ell \varphi &\in W_h^\ell(\Gamma_c), \\ (\pi_h^\ell \varphi)(\mathbf{c}_i) &= \varphi(\mathbf{c}_i), \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2, \\ \int_{\Gamma_c} (\varphi - \pi_h^\ell \varphi) \psi_h \, d\Gamma &= 0, \quad \forall \psi_h \in M_h^\ell(\Gamma_c). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Les propriétés de π_h^ℓ sont prouvées dans Ben Belgacem,[5] et nous les rappelons.

Lemme 2.1 *L'opérateur de projection π_h^ℓ est continu de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ dans $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ i.e.*

$$\|\pi_h^\ell \varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C \|\varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}, \quad \forall \varphi \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \quad (2.2.5)$$

et vérifie l'estimation suivante sur l'erreur d'approximation. Soit $\frac{1}{2} < \mu \leq 2$, alors

$$\|\varphi - \pi_h^\ell \varphi\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C' h_\ell^{\mu-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^\mu(\Gamma_c)}, \quad \forall \varphi \in H^\mu(\Gamma_c). \quad (2.2.6)$$

Les deux constantes C et C' sont indépendantes de h_ℓ .

Désormais, nous sommes en mesure de définir le convexe d'approximation de $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K}_h = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\}. \quad (2.2.7)$$

Pour éviter des confusions éventuelles avec les autres conditions de contact discrètes intervenant dans le chapitre 4, nous appellerons la condition de contact “ $\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0$ ” le **raccord projection**. Il est à noter que cette condition de contact incorporée dans la définition de $\mathbf{K}_h$ est exprimée dans l'espace $W_h^1(\Gamma_c)$. Dans ce cas et suivant la terminologie de Bernardi, Maday et Patera,[13], $W_h^2(\Gamma_c)$ joue le rôle d'espace des joints. Evidemment, il est possible de donner une définition symétrique du convexe $\mathbf{K}_h$ en considérant comme espace des joints l'espace $W_h^1(\Gamma_c)$ et en utilisant la projection π_h^2 . Par ailleurs, il est clair que $\mathbf{K}_h \not\subset \mathbf{K}$. On dira alors que l'approximation est non-conforme au sens de “Hodge”.

Lorsque l'on utilise des maillages compatibles sur la zone de contact, les conditions de contact discrètes peuvent alors s'exprimer simplement par la condition $[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] \leq 0$ et la méthode d'approximation est conforme ($\mathbf{K}_h \subset \mathbf{K}$). Ce cas a été étudié par Haslinger et Hlaváček,[34].

Le problème éléments finis issu de (2.1.8) consiste en l'inéquation variationnelle suivante: *trouver $\mathbf{u}_h$ tel que*

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h. \quad (2.2.8)$$

En utilisant à nouveau le théorème de Stampacchia, on déduit l'existence et l'unicité d'une solution $\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h$. Celle-ci satisfait à la condition de stabilité suivante

$$\|\mathbf{u}_h\|_* \leq C \sum_{\ell=1}^2 \left(\|\mathbf{f}^\ell\|_{(L^2(\Omega^\ell))^2} + \|\mathbf{g}^\ell\|_{(L^2(\Gamma_g^\ell))^2} \right), \quad (2.2.9)$$

où $C > 0$ est indépendant de h et des forces appliquées.

2.3 Estimations d'erreur

Le but de cette partie est de donner une borne supérieure de l'erreur résultant de l'approximation par éléments finis décrite dans la partie précédente.

2.3.1 Expression générale de l'erreur

L'outil de base est une adaptation du résultat de Falk (Falk,[27] Haslinger et Hlaváček,[34] Ciarlet,[18],[19]); ce résultat est présenté dans le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (2.1.8) vérifie $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème dis-*

crétisé (2.2.8). Alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C \Big\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \right) \\ + \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \Big\}, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

où $C > 0$ est indépendant de h .

Preuve. Soit α la constante d'ellipticité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$.

On a

$$\alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h).$$

En notant que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leq a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &\leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h, \end{aligned}$$

on déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 &\leq a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) \\ &\quad - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

En appliquant par deux fois la formule de Green, on obtient tout d'abord

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) = \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma,$$

et ensuite, en utilisant $\sigma_n[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0$,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sigma_n[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma.$$

Si l'on désigne par M la norme de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, on obtient

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) &\leq M \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_* \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_*, \\ &\leq M \left(\frac{\alpha}{2M} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_*^2 + \frac{M}{2\alpha} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_*^2 \right). \end{aligned}$$

La preuve s'achève en reportant cette inégalité dans (2.3.2). $\square$

On reconnaît ci-dessous l'erreur d'approximation

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \right).$$

Le terme intégral sur Γ_c est dû à la nature du problème et ne disparaît pas dans le cas de maillages compatibles; c'est précisément ce terme qui limitera le taux de convergence de la méthode.

L'erreur de consistance est représentée par

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}},$$

ce terme est généré par la non-conformité. Autrement, l'on a $\mathbf{K}_h \subset \mathbf{K}$ et l'erreur de consistance disparaît.

Remarque 2.1. Pour des raisons de lisibilité et de cadre d'étude adéquat à la comparaison avec les résultats existants pour les maillages compatibles, nous adopterons, dans un premier temps, les hypothèses de régularité H^2 (pour les déplacements) utilisées par Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35]. Ces hypothèses peuvent se justifier, d'une part parce que les éventuelles singularités dues aux changements de conditions aux limites de type Neumann–Dirichlet (cf. [30][41]) ne proviennent pas de la prise en compte des conditions de contact. D'autre part, les solutions associées à des problèmes avec conditions unilatérales sur la frontière ont généralement la régularité H^2 (cf. [29][16]). La référence [35] citée ci-dessus considère le cas de maillages compatibles et le taux de convergence obtenu est en $(h^{\frac{3}{4}})$ en norme de l'énergie $\|\cdot\|_*$. Nous précisons donc que le meilleur que l'on puisse espérer est d'obtenir un résultat identique dans le cas de maillages incompatibles.

2.3.2 Erreur d'approximation

Il s'agit de donner une borne supérieure pour le premier infimum de (2.3.1).

Lemme 2.3 *Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{K}$ tel que $\mathbf{v}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{v}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$. Supposons que les contraintes normales définies sur la zone de contact Γ_c sont égales:*

$$(\sigma^\ell(\mathbf{v}^\ell) \mathbf{n}^\ell) \cdot \mathbf{n}^\ell = \sigma_n(\mathbf{v}), \quad \ell = 1, 2.$$

Alors, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ qui satisfait les estimations suivantes

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_* \leq C(\mathbf{v})(h_1 + h_2), \quad (2.3.3)$$

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{v})[(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{v})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2), \quad (2.3.4)$$

où la constante $C(\mathbf{v})$ dépend linéairement de $\|\mathbf{v}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{v}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

Preuve. *i.* – Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{K}$ et satisfaisant aux conditions de régularité du lemme. D'après des résultats classiques sur les théorèmes de trace dans les espaces de Sobolev,

on déduit que $[\mathbf{v}.\mathbf{n}] \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)$. En utilisant un opérateur de relèvement, on déduit qu'il existe $\mathbf{r} \in (H^2(\Omega^1))^2 \cap \mathbf{V}(\Omega^1)$ tel que $\mathbf{r}.\mathbf{n}^1 = [\mathbf{v}.\mathbf{n}]$ sur Γ_c , et vérifiant la condition de stabilité

$$\|\mathbf{r}\|_{(H^2(\Omega^1))^2} \leq C\|[\mathbf{v}.\mathbf{n}]\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)} \leq C(\|\mathbf{v}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2} + \|\mathbf{v}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}).$$

En posant $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) = (\mathbf{v}^1 - \mathbf{r}, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$, il est clair que $[\mathbf{w}.\mathbf{n}] = 0$ sur Γ_c et

$$\mathbf{w} \in (H^2(\Omega^1))^2 \times (H^2(\Omega^2))^2.$$

Nous nous retrouvons donc dans la situation du contact bilatéral. En procédant de manière analogue au chapitre 1, on approche $\mathbf{w}$ par $\mathbf{w}_h = (\mathbf{w}_h^1, \mathbf{w}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2)$ satisfaisant

$$\mathbf{w}_h^1.\mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{w}_h^2.\mathbf{n}^2) = 0,$$

avec l'estimation

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_* \leq C(\mathbf{v})(h_1 + h_2),$$

où $C(\mathbf{v})$ dépend linéairement de $\|\mathbf{v}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{v}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

Pour terminer, on définit

$$\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) = (\mathbf{w}_h^1 + \mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}, \mathbf{w}_h^2).$$

Comme $(\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}).\mathbf{n}^1$ a le même signe que $(\mathbf{r}.\mathbf{n}^1) = [\mathbf{v}.\mathbf{n}]$, donc négatif, on déduit

$$\mathbf{v}_h^1.\mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2.\mathbf{n}^2) = (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}).\mathbf{n}^1 \leq 0.$$

Il s'ensuit que $\mathbf{v}_h$ appartient à $\mathbf{K}_h$. Par ailleurs, en utilisant (2.2.2), on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_* &\leq \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_* + \|\mathbf{r} - \mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}\|_{(H^1(\Omega^1))^2}, \\ &\leq C(\mathbf{v})(h_1 + h_2) + Ch_1 \|\mathbf{r}\|_{(H^2(\Omega^1))^2}, \\ &\leq C(\mathbf{v})(h_1 + h_2), \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

ce qui donne la première estimation (2.3.3) du lemme.

ii.- Afin de déterminer une borne supérieure du terme intégral, on écrit

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{v})[(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}).\mathbf{n}] d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{v})[\mathbf{w}_h.\mathbf{n}] d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{v})((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}).\mathbf{n}^1 - \mathbf{r}.\mathbf{n}^1) d\Gamma.$$

Le premier terme est évalué de manière standard comme en Ref.[13], et donne

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{v})[\mathbf{w}_h.\mathbf{n}] d\Gamma \right| \leq C(\mathbf{v})(h_1^2 + h_2^2).$$

Le second terme est traité comme suit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{v}) ((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma \right| &\leq \|\sigma_n(\mathbf{v})\|_{L^2(\Gamma_c)} \|(\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^1\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ &\leq C \|\sigma_n(\mathbf{v})\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^1\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)} h_1^{\frac{3}{2}} \leq C(\mathbf{v}) h_1^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

D'où le lemme. $\square$

L'estimation obtenue dans le cas présent nécessite quelques commentaires. L'estimation (2.3.4) n'est pas optimale, car l'opérateur d'interpolation de Lagrange $\mathcal{I}_h^1$ ne donne pas de résultats optimaux relativement aux normes des espaces de Sobolev aux exposants négatifs. L'optimalité pourrait être obtenue si l'on était capables de définir un opérateur sur $W_h^1(\Gamma_c)$ qui, d'une part, conserve la positivité et qui, d'autre part, donne des résultats d'approximation optimaux pour la norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. Comme il a déjà été dit, l'opérateur d'interpolation de Lagrange ne donne pas d'erreur optimale pour la norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, tandis que l'opérateur de projection au sens de $L^2(\Gamma_c)$ sur l'espace $W_h^1(\Gamma_c)$ ne conserve pas le signe (cf. annexe). Une idée serait donc de considérer l'opérateur de projection au sens de $L^2(\Gamma_c)$ sur le convexe fermé constitué des fonctions de $W_h^1(\Gamma_c)$ qui sont positives. Malheureusement, cet opérateur ne donne pas d'erreur optimale pour la norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ (cf. annexe).

2.3.3 Erreur de consistance

Dans un premier temps, nous nous intéressons à donner une première borne de l'erreur de consistance qui permettra ensuite d'obtenir une première estimation de l'erreur globale. Pour des raisons techniques dues à l'utilisation d'inégalités inverses, nous supposons que la taille des mailles est telle que h_1/h_2 soit borné.

Lemme 2.4 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) [(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u}) h_1^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.6)$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$.

Comme il apparaît dans la preuve qui suit, on peut soit utiliser l'hypothèse de régularité sur $\mathbf{u}^1$ soit celle sur $\mathbf{u}^2$ dans les hypothèses du lemme.

Preuve. En choisissant $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$ tel que

$$\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1|_{\Gamma_c} = \mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1|_{\Gamma_c} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2|_{\Gamma_c} = \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)|_{\Gamma_c},$$

ce qui est possible en utilisant des opérateurs de relèvement, on a :

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma, \quad (2.3.7)$$

et donc:

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = \int_{\Gamma_c} (\sigma_n - \psi_h)(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma,$$

pour tout $\psi_h \in M_h^1(\Gamma_c)$. Par dualité, on obtient

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right| \leq \inf_{\psi_h \in M_h^1(\Gamma_c)} \|\sigma_n - \psi_h\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))'} \|\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

En utilisant (2.2.6), on déduit, pour tout petit ε strictement positif

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right| \leq Ch_1 \|\sigma_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} h_1^\varepsilon \|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_c)}.$$

L'utilisation de l'inégalité inverse implique

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right| \leq Ch_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^\varepsilon \|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2} \|\mathbf{u}_h\|_*.$$

Le résultat est obtenu grâce à la stabilité de la solution du problème discrétisé donnée par (2.2.9) et à l'hypothèse sur le quotient h_1/h_2 . $\square$

2.3.4 Estimation intermédiaire et bootstrap sur l'erreur de consistance

Jusqu'à présent, les lemmes préliminaires ne conduisent pas à la convergence optimale espérée. Ceci est dû en partie à l'évaluation grossière sur l'erreur de consistance. Cependant, en combinant ces premiers résultats à un argument de bootstrap, on améliore l'estimation sur l'erreur de consistance donnée dans le lemme précédent.

Lemme 2.5 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2), \quad (2.3.8)$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

Preuve. En reportant les estimations (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.6) dans (2.3.1), on arrive à une première estimation de l'erreur globale:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{1}{2}} + h_2). \quad (2.3.9)$$

Une telle estimation va permettre d'améliorer l'estimation sur l'erreur de consistance et par la suite l'erreur globale. En revenant au terme intermédiaire (2.3.7), on note qu'il peut être écrit aussi de la manière suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma &= \int_{\Gamma_c} \sigma_n \{ \pi_h^1((\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) - ((\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) \} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} \sigma_n \{ ((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) - \pi_h^1((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) \} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} \sigma_n (\pi_h^1(\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2) - \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Pour une meilleure clarté de la présentation, on notera T_1, T_2 et T_3 les trois quantités intégrales intervenant dans la somme précédente. On commence par borner la troisième; on procède de la même manière que dans Ref.[13] et l'on obtient

$$|T_3| \leq C'(\mathbf{u}) h_1^2,$$

avec $C'(\mathbf{u})$ dépendant linéairement de $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}^2$.

En utilisant la définition de l'opérateur π_h^1 , il s'ensuit que:

$$|T_2| = \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma_n - \psi_h) \{ ((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) - \pi_h^1((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) \} d\Gamma \right|,$$

pour tout $\psi_h \in M_h^1(\Gamma_c)$. Par dualité, on obtient

$$|T_2| \leq \inf_{\psi_h \in M_h^1(\Gamma_c)} \|\sigma_n - \psi_h\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))'} \|((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) - \pi_h^1((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2)\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

En observant que $\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2$ appartient à $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, et grâce à la stabilité (2.2.5), on a

$$|T_2| \leq C h_1 \|\sigma_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|(\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

L'utilisation de (2.2.2) et de l'inégalité $2h_1 h_2 \leq h_1^2 + h_2^2$ donne

$$|T_2| \leq C'(\mathbf{u}) (h_1^2 + h_2^2).$$

Il reste à considérer le premier terme T_1 . En suivant le même cheminement que pour T_2 , on arrive à

$$|T_1| \leq C h_1 \|\sigma_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} h_1^\varepsilon \|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_c)}.$$

En appliquant l'inégalité inverse et en insérant $\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2$ cela donne

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq C h_1 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^\varepsilon \|\sigma_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}, \\ &\leq C h_1 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^\varepsilon \|\sigma_n\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* + \|\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2}). \end{aligned}$$

L'usage de (2.3.9) conjointement avec (2.2.2), ainsi que la bornitude de h_1/h_2 , permettent d'écrire

$$|T_1| \leq C'(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{2}} + h_2^2).$$

En rassemblant les résultats obtenus sur les différents termes T_1, T_2 et T_3 , on déduit que l'erreur de consistance converge vers zéro avec un taux de convergence identique à celui de l'erreur d'approximation. Ceci termine la preuve. $\square$

2.3.5 Estimation finale

Le résultat final est établi en reportant les majorations (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.8) dans (2.3.1). Ceci faisant, on retrouve un comportement de l'erreur similaire à celui obtenu dans le cas particulier de maillages compatibles (dans ce cas $h_1 = h_2$) par Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35].

Théorème 2.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

Evidemment, nous avons cessé d'appliquer l'argument de bootstrap parce que l'erreur globale est du même ordre que l'erreur d'approximation. Cependant, il est possible d'utiliser une fois de plus la technique du bootstrap et d'améliorer le taux de convergence de l'erreur de consistance. Ainsi, on obtient

Corollaire 2.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{7}{8}} + h_2), \quad (2.3.11)$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

2.3.6 Généralisation

Il est possible d'affaiblir les hypothèses de régularité sur $\mathbf{u}$ et l'on obtient les résultats suivants. L'erreur d'approximation devient

Lemme 2.6 *Soit $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{K}$ tel que $\mathbf{v}^1 \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{v}^2 \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$. Supposons que les contraintes normales sur la zone de contact Γ_c sont identiques:*

$$(\sigma^\ell(\mathbf{v}^\ell) \mathbf{n}^\ell) \cdot \mathbf{n}^\ell = \sigma_n(\mathbf{v}), \quad \ell = 1, 2.$$

Alors, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ qui satisfait les estimations suivantes

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_* \leq C(\mathbf{v})(h_1^{\nu-1} + h_2^{\nu-1}), \quad (2.3.12)$$

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{v})[(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{v})(h_1^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} + h_2^{\nu-1}), \quad (2.3.13)$$

où la constante $C(\mathbf{v})$ dépend linéairement de $\|\mathbf{v}^1\|_{(H^\nu(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{v}^2\|_{(H^\nu(\Omega^2))^2}$.

La première estimation sur l'erreur de consistance devient

Lemme 2.7 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u})h_1^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}},$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^\nu(\Omega^1))^2}$.

En appliquant l'argument de bootstrap sur l'erreur de consistance du lemme ci-dessus, on obtient, dans un premier temps:

Lemme 2.8 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}(\nu-1)} + h_2^{\nu-1}),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^\nu(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^\nu(\Omega^2))^2}$.

Dans ce cas, l'erreur globale reste encore limitée par l'erreur de consistance. On applique alors l'argument de bootstrap aussi longtemps que cela améliore l'erreur globale. Finalement, l'erreur globale devient

Théorème 2.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} + h_2^{\nu-1}),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^\nu(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^\nu(\Omega^2))^2}$.

Remarque 2.2. En comparant avec les résultats généraux d'approximation par éléments finis, nous remarquons que l'on est plus proche de l'optimalité pour des solutions moins régulières. En effet, quand $\nu = \frac{3}{2} + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$, on perd seulement un facteur $h^{\frac{\varepsilon}{2}}$.

L'erreur de consistance est alors:

Corollaire 2.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3\nu}{4}-\frac{5}{8}} + h_2^{\nu-1}),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^\nu(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^\nu(\Omega^2))^2}$.

2.3.7 Un cas de convergence optimale

Dans cette partie, on se propose d'effectuer l'étude de convergence en adoptant des hypothèses légèrement plus fortes que précédemment au niveau de la zone de contact. Ces dernières ont été utilisées par Brezzi, Hager et Raviart,[16] pour un certain problème unilatéral et par Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35] pour le contact unilatéral avec maillages compatibles sur la zone de contact.

Dans le cas de maillages incompatibles, nous allons voir que le rôle de la technique de bootstrap est primordial pour l'élaboration d'un résultat de convergence. Pour commencer, on donne une estimation pour l'erreur d'approximation sous les nouvelles hypothèses.

Lemme 2.9 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$, $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$, $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 \in W^{1,\infty}(\Gamma_c)$, $\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \in W^{1,\infty}(\Gamma_c)$ et $\sigma_n(\mathbf{u}) \in L^\infty(\Gamma_c)$. Supposons de plus que l'ensemble des points de Γ_c pour lesquels on passe de $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 < 0$ à $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = 0$ soit fini. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ qui satisfait les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* &\leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2), \\ \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} &\leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2), \end{aligned}$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$, $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$, $\|\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_c)}$, $\|\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_c)}$ et $\|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Gamma_c)}$.

Preuve. Considérons le champ $\mathbf{v}_h$ de la démonstration de l'erreur d'approximation sous les hypothèses de régularité H^2 (i.e. (2.3.3) et (2.3.4) avec $\mathbf{v} = \mathbf{u}$). On sait que toutes les estimations de cette démonstration sont optimales sauf celle concernant

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma \right|,$$

où $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^1 = \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2$ sur Γ_c .

En utilisant la condition $\sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2) = 0$ sur Γ_c , et en décomposant ensuite l'intégrale en la somme des intégrales sur les segments t_h^1 définis par le maillage de Ω^1 , on écrit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma \right|, \\ &= \left| \sum_{t_h^1 \in \mathcal{T}_{c,h}^1} \int_{t_h^1} \sigma_n(\mathbf{u})((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma \right|. \end{aligned}$$

Il est clair que toutes les intégrales ne contenant pas les points de Γ_c pour lesquels on passe de $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 < 0$ à $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = 0$ sont nulles. Il reste donc un nombre

fini (indépendant de h) de termes intégraux que l'on majore en utilisant les hypothèses de régularité de la solution exacte. Il vient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma \right| &= \left| \sum_{finie} \int_{t_h^1} \sigma_n(\mathbf{u})((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma \right|, \\ &\leq Ch_1 \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \|(\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1\|_{L^\infty(\Gamma_c)}, \\ &\leq Ch_1^2 \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Gamma_c)} (\|\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_c)} + \|\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_c)}), \end{aligned}$$

ce qui établit le lemme. $\square$

En comparant avec les estimations (2.3.3) et (2.3.4), il devient clair que l'optimalité de l'estimation précédente est due à l'utilisation des nouvelles hypothèses sur la zone de contact.

Le lemme suivant est destiné à estimer l'erreur de consistance.

Lemme 2.10 *Sous les hypothèses du lemme précédent, on a, pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\inf_{v \in K} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(v - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u}, \varepsilon)(h_1^{1-\varepsilon} + h_2),$$

où la constante $C(\mathbf{u}, \varepsilon)$ dépend de ε et des mêmes quantités que dans le lemme précédent.

Preuve. Il suffit pour cela d'appliquer la technique de bootstrap décrite dans (2.3.10) et de remarquer que l'estimation optimale du lemme précédent nous permet d'atteindre le taux de convergence annoncé. $\square$

Les deux lemmes précédents et l'estimation (2.3.1) permettent de déduire une convergence quasi-optimale: pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u}, \varepsilon)(h_1^{1-\varepsilon} + h_2),$$

sous les hypothèses des deux lemmes précédents.

L'étape suivante consiste à gagner le ε qui nous sépare de l'optimalité. Ceci est fait dans le théorème suivant.

Théorème 2.3 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$, $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$, $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 \in W^{1,\infty}(\Gamma_c)$, $\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \in W^{1,\infty}(\Gamma_c)$ et $\sigma_n(\mathbf{u}) \in L^\infty(\Gamma_c)$. Supposons de plus que l'ensemble des points de Γ_c pour lesquels on passe de $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 < 0$ à $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = 0$ soit fini. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (2.2.8). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$, $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$, $\|\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_c)}$,

$\|\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{W^{1,\infty}(\Gamma_c)}$ et $\|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^\infty(\Gamma_c)}$.

Preuve. Considérons l'estimation obtenue après le n -ième bootstrap. Elle s'écrit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C_n(h_1^{\alpha_n} + h_2). \quad (2.3.14)$$

L'estimation correspondant au $(n+1)$ -ième bootstrap devient alors (cf. parties 2.3.1–2.3.5)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 \leq D(h_1^2 + h_2^2) + Eh_1\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*,$$

D et E étant des constantes indépendantes de n .

En utilisant (2.3.14) et en arrangeant les termes, on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 \leq (D + 2EC_n)(h_1^{1+\alpha_n} + h_2^2).$$

On définit alors

$$C_{n+1} = \sqrt{D + 2EC_n}, \quad \text{et} \quad \alpha_{n+1} = \frac{1 + \alpha_n}{2},$$

ce qui nous amène à étudier la suite $(C_n)_{n \geq 1}$ avec $C_1 > 0$. On vérifie aisément que cette suite admet un point fixe unique dans $\mathbb{R}_+^*$ et noté β .

Trois cas se présentent:

- si $C_1 = \beta$, alors $C_n = \beta$ pour tout $n \geq 1$,
- si $C_1 < \beta$, alors la suite est croissante et majorée par β , donc convergente vers β ,
- si $C_1 > \beta$, alors la suite est décroissante et minorée par β , donc convergente vers β .

Finalement

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq \max(C_1, \beta)(h_1 + h_2),$$

ce qui achève la démonstration. □

Ce dernier théorème généralise le résultat de [35] (problème de contact avec des maillages compatibles, théorème 8.1).

2.4 Conclusion et remarques

Dans l'optique de résoudre le problème de contact unilatéral entre solides élastiques, nous avons considéré une méthode éléments finis d'ordre un, prenant en compte les maillages incompatibles sur la zone de contact.

Cette extension de la méthode des joints donne, sous les hypothèses H^2 , un taux de convergence en $h_1^{\frac{3}{4}} + h_2$, où h_1 et h_2 désignent les paramètres de discrétisation associés aux deux solides.

De plus, lorsque l'erreur est en $h_1 + h_2$ dans le cas des maillages compatibles (avec des hypothèses adéquates), il devient également possible de récupérer ce taux de convergence optimal dans le cas incompatible.

Par voie de conséquence, le comportement asymptotique de l'erreur associée au raccord projection est le même que celui de la condition nœud à nœud dans le cas compatible. Ceci sera également vérifié et confirmé de manière nette sur les exemples numériques du chapitre 6.

Chapitre 3

Résultats supplémentaires relatifs au raccord projection

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier deux autres formulations du problème de contact unilatéral étudié dans le cadre du chapitre précédent. Dans un premier temps, on considèrera le problème de minimisation équivalent. On estimera l'erreur commise sur l'énergie pour l'approximation par éléments finis faisant intervenir le raccord projection. Dans un deuxième temps, on s'intéressera au problème de point-selle associé et on effectuera l'étude par éléments finis correspondante. On étudiera en particulier l'approximation de la contrainte normale sur la zone de contact.

Par ailleurs, on montrera la convergence de la méthode sans hypothèses de régularité sur la solution, ceci en étudiant l'approximation du convexe des déplacements admissibles. Finalement, on obtient des estimations supplémentaires satisfaisantes sur l'interpénétration résultant de la non-conformité de la méthode.

3.1 Formulation en problème de minimisation

3.1.1 Position du problème abordé

Soient Ω^1 et Ω^2 deux ouverts bornés du plan dont les frontières sont supposées polygonales. On considère alors le problème de contact unilatéral sans frottement entre Ω^1 et Ω^2 , initialement en contact sur la partie commune Γ_c de leur frontière, que l'on supposera être un segment: $\overline{\Omega^1} \cap \overline{\Omega^2} = \Gamma_c$. On supposera que chacun des deux solides, soumis à des forces de volume $\mathbf{f}^\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^2$, est encastré sur une partie de mesure non nulle de sa frontière notée Γ_u^ℓ . La dernière partie de la frontière, notée Γ_g^ℓ , est soumise à des forces de surface $\mathbf{g}^\ell \in (L^2(\Gamma_g^\ell))^2$.

Le problème de minimisation de fonctionnelle énergétique consiste à trouver un champ

de déplacements $\mathbf{u}$ défini sur $\Omega^1 \cup \Omega^2$ vérifiant:

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad F(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} F(\mathbf{v}), \quad (3.1.1)$$

avec

$$F(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell(\mathbf{v}^\ell) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) d\Omega^\ell - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell d\Omega^\ell - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_g^\ell} \mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell d\Gamma^\ell.$$

On a noté $\mathbf{v}^\ell = \mathbf{v}|_{\Omega^\ell}$ et désigné par $\mathbf{K}$ le convexe des déplacements admissibles défini en (2.1.7). Le tenseur des contraintes σ , où $\sigma^\ell = \sigma|_{\Omega^\ell}$, est relié aux déplacements par la loi de comportement élastique

$$\sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) = C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \quad \text{avec} \quad \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}^\ell + (\nabla \mathbf{u}^\ell)^T).$$

On désigne par $C^\ell = (c_{ij, kh}^\ell)_{1 \leq i, j, k, h \leq 2} \in (L^\infty(\Omega^\ell))^{16}$, un tenseur d'ordre quatre symétrique vérifiant la propriété d'ellipticité classique.

Il est clair que le problème de minimisation (3.1.1) admet une solution unique (cf. [40]).

3.1.2 Discrétisation et estimation de l'erreur

On munit chaque solide Ω^ℓ d'une famille de discrétisations régulières T_h^ℓ formée d'éléments triangulaires κ , dont le diamètre ne dépasse pas h_ℓ et l'on notera $h = (h_1, h_2)$. Il s'ensuit deux familles $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ de traces de triangulations différentes sur Γ_c dont les nœuds extrêmes sont supposés communs aux deux solides. On notera $\mathbb{P}_1(\kappa)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 sur κ . On pose

$$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \{\mathbf{v}_h^\ell \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}^\ell))^2, \quad \forall \kappa \in T_h^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_\kappa \in (\mathbb{P}_1(\kappa))^2, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_u^\ell} = 0\}. \quad (3.1.2)$$

On définit les espaces $W_h^\ell(\Gamma_c) = \{\mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_c} \cdot \mathbf{n}^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell \in \mathbf{V}_h(\Omega^\ell)\}$, constitués de fonctions affines par morceaux sur $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ et continues sur Γ_c . On introduit également l'espace des multiplicateurs de Lagrange, noté $M_h^\ell(\Gamma_c)$ et constitué des fonctions de $W_h^\ell(\Gamma_c)$ qui sont constantes sur les deux mailles extrêmes de $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$.

On notera π_h^ℓ l'opérateur de projection sur $W_h^\ell(\Gamma_c)$ défini pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma_c)$; cet opérateur conserve les valeurs aux extrémités de Γ_c et vérifie:

$$\int_{\Gamma_c} (\varphi - \pi_h^\ell \varphi) q_h d\Gamma = 0, \quad \forall q_h \in M_h^\ell(\Gamma_c).$$

Le convexe d'approximation considéré ici est (cf. chapitre 2):

$$\mathbf{K}_h = \{\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

Comme il a déjà été remarqué dans le chapitre précédent, il est clair que les $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ ne vérifient pas nécessairement la condition de non-interpénétration. Ainsi, dans le cas général de maillages incompatibles, on a $\mathbf{K}_h \not\subset \mathbf{K}$ et on parlera de méthode non-conforme au sens de Hodge.

Le problème discrétisé de minimisation de fonctionnelle énergétique consiste à trouver $\mathbf{u}_h$ vérifiant

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h, \quad F(\mathbf{u}_h) = \min_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h} F(\mathbf{v}_h). \quad (3.1.3)$$

L'existence et l'unicité de $\mathbf{u}_h$ vérifiant (3.1.3) découlent de résultats classiques (cf. [40]). Il s'agit ensuite de donner une estimation de l'erreur sur l'énergie. Ceci est effectué dans le théorème suivant où, simplement pour alléger les notations, on suppose que h_1 et h_2 sont du même ordre.

Théorème 3.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (3.1.1) appartient $(H^2(\Omega^1))^2 \times (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discrétisé (3.1.3). On a*

$$-C(\mathbf{u})h_1^{\frac{7}{4}} \leq F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u})h_1^{\frac{3}{2}}.$$

où $C(\mathbf{u}) > 0$ est indépendant de h .

Preuve. En adoptant les notations (2.1.9) et (2.1.10), on écrit

$$F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{u}_h) - \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + L(\mathbf{u}).$$

Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$, il vient:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \\ &\quad + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) - \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Le réarrangement des termes et l'utilisation de la positivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ donnent

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) - \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) &= \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) - \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \\ &\leq \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{u}_h$ est solution du problème (2.2.8), on a

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) &\leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h) + L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) + \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}), \\ &\leq a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) + \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}). \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de Green implique

$$F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) \leq \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma + \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}). \quad (3.1.4)$$

On reconnaît dans la majoration de $F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u})$, le carré de l'erreur d'approximation étudiée au chapitre précédent. En utilisant les estimations (2.3.3) et (2.3.4), on déduit l'existence d'une constante $C(\mathbf{u}) > 0$ indépendante de h telle que

$$F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u})h_1^{\frac{3}{2}}.$$

Il reste à minorer $F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u})$, c'est à dire majorer $F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_h)$. On écrit

$$F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) - \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + L(\mathbf{u}_h).$$

Soit $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$. Comme $\mathbf{u}$ est solution du problème (2.1.8), il vient

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_h) &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) - L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \\ &\quad - \frac{1}{2}a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \\ &\leq a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h). \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule de Green implique

$$F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_h) \leq \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma. \quad (3.1.5)$$

On reconnaît dans la majoration de $F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_h)$, le carré de l'erreur de consistance étudiée au chapitre précédent. En utilisant l'estimation (2.3.11), on déduit l'existence d'une constante $C(\mathbf{u}) > 0$ indépendante de h telle que

$$F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_h) \leq C(\mathbf{u})h_1^{\frac{7}{4}}.$$

D'où la conclusion. □

Remarque 3.1. Dans l'étude effectuée au chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à l'erreur commise en norme de l'énergie: $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*$. Dans ce cas, l'erreur de consistance n'apparaît pas dans la majoration finale, car c'est l'erreur d'approximation qui limite le taux de convergence. Dans le cas présent où l'on considère l'erreur sur l'énergie, l'estimation donnée dans le théorème précédent a le mérite de fournir un résultat dans lequel apparaît clairement l'erreur de consistance. Dans le cas d'une méthode conforme (i.e. $\mathbf{K}_h \subset \mathbf{K}$), on a $F(\mathbf{u}) \leq F(\mathbf{u}_h)$ et l'erreur de consistance disparaît.

3.1.3 Généralisation

Sous des hypothèses de régularité plus faibles, et en utilisant les résultats du chapitre précédent, on devient en mesure de généraliser le théorème précédent:

Théorème 3.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (3.1.1) appartient $(H^\nu(\Omega^1))^2 \times (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discrétisé (3.1.3). On a*

$$-C(\mathbf{u})h_1^{\frac{3\nu}{2}-\frac{5}{4}} \leq F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u})h_1^{\nu-\frac{1}{2}},$$

où $C(\mathbf{u}) > 0$ est indépendant de h .

Remarque 3.2. Dans le cas de maillages compatibles, l'encadrement du théorème précédent devient: $0 \leq F(\mathbf{u}_h) - F(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u})h^{\nu-\frac{1}{2}}$.

3.2 Formulation en problème de point-selle

La présente section concerne une formulation mixte (cf. [52]) pour le problème de contact unilatéral et son approximation lorsque l'on considère que les maillages sont incompatibles sur la zone de contact. Ces résultats ont fait l'objet de la communication [9]. Nous précisons tout de suite que, dans cette section 3.2, nous désignerons par π_h^1 l'opérateur de projection L^2 sur la trace du maillage de Ω^1 sur Γ_c (il s'agit en fait de la seule section des cinq premiers chapitres où l'on utilise l'opérateur de projection L^2 classique et non pas l'opérateur défini en (2.2.4)). La considération de l'opérateur de projection de type "joint" (cf. (2.2.4)) pour la formulation mixte du problème de contact unilatéral est en cours d'étude.

3.2.1 Position du problème abordé

Dans un premier temps, il s'agit de mettre le problème de contact unilatéral (cf. (2.1.8) ou (3.1.1)) sous forme de problème de point-selle.

On pose $\mathbf{V}(\Omega^\ell) = \{\mathbf{v}^\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^2, \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\ell\}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$. L'espace produit $\mathbf{V}$ est muni de la norme hilbertienne

$$\|\mathbf{v}\|_* = \left(\|\mathbf{v}^1\|_{(H^1(\Omega^1))^2}^2 + \|\mathbf{v}^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}.$$

Nous supposons que la solution $\mathbf{u}$ est assez régulière afin que nous puissions faire l'abus de notation en écrivant une intégrale sur Γ_c au lieu du crochet de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$.

Le problème est trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ et $\lambda \in M$ tels que:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_c} \lambda(\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ \int_{\Gamma_c} (\mu - \lambda)(\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \geq 0, & \forall \mu \in M, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

où M désigne le convexe fermé des formes linéaires de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ et négatives.

Ce problème est équivalent à la recherche de $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ et de $\lambda \in M$ tels que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \mu) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, \lambda), \quad \forall \mu \in M, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

avec

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mu) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) - \int_{\Gamma_c} \mu(\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma.$$

Le point-selle $(\mathbf{u}, \lambda)$ est unique (cf. [40]). On a $\lambda = \sigma_n(\mathbf{u})$, où $\sigma_n(\mathbf{u})$ désigne la contrainte normale sur la zone de contact.

3.2.2 Discrétisation et estimation de l'erreur

Dans un premier temps, il s'agit de définir le cône convexe fermé des multiplicateurs discrets. On pose

$$M_h = \left\{ \lambda_h \in W_h^1(\Gamma_c), \quad \int_{\Gamma_c} \lambda_h \varphi_h d\Gamma \leq 0, \quad \forall \varphi_h \in W_h^1(\Gamma_c), \varphi_h \geq 0 \right\}, \quad (3.2.2)$$

où $W_h^1(\Gamma_c)$ est l'espace des fonctions continues et affines par morceaux sur la trace du maillage de Ω^1 sur Γ_c .

Remarque 3.1. Il est facile de voir que $M_h \not\subset M$. Cela signifie que les multiplicateurs discrets ne sont pas nécessairement négatifs sur tout Γ_c .

Le lemme suivant est l'outil visant à justifier dans l'étude ultérieure, le choix de M_h comme cône convexe des multiplicateurs discrets.

Lemme 3.1 Soit $\varphi_h \in W_h^1(\Gamma_c)$. On a

$$\varphi_h \leq 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \int_{\Gamma_c} \varphi_h \psi_h d\Gamma \geq 0, \quad \forall \psi_h \in M_h. \quad (3.2.3)$$

Preuve. La démonstration repose sur un argument d'analyse convexe. Tout d'abord, on remarque que l'application bilinéaire A définie sur $W_h^1(\Gamma_c)$ par

$$A(\theta_h, \rho_h) = \int_{\Gamma_c} \theta_h \rho_h d\Gamma,$$

est un produit scalaire sur $W_h^1(\Gamma_c)$. Posons

$$N_h = \left\{ \varphi_h \in W_h^1(\Gamma_c), \quad \varphi_h \leq 0 \right\},$$

qui est un cône convexe fermé. On considère ensuite le polaire de N_h (cf. [36]) noté N_h^o défini par:

$$N_h^o = \left\{ \psi_h \in W_h^1(\Gamma_c), \quad \int_{\Gamma_c} \psi_h \varphi_h \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall \varphi_h \in N_h \right\}.$$

Par définition de M_h , on déduit que $N_h^o = -M_h$. En utilisant le fait que le bipolaire d'un cône convexe fermé est ce même convexe fermé, on écrit:

$$\begin{aligned} N_h &= (N_h^o)^o = \left\{ \varphi_h \in W_h^1(\Gamma_c), \quad \int_{\Gamma_c} \varphi_h \psi_h \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall \varphi_h \in N_h^o \right\}, \\ &= \left\{ \varphi_h \in W_h^1(\Gamma_c), \quad \int_{\Gamma_c} \varphi_h \psi_h \, d\Gamma \geq 0, \quad \forall \varphi_h \in M_h \right\}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion. □

On pose $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2)$, où $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$ est l'espace éléments finis défini en (3.1.2). Le problème de point-selle discrétisé est *trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\lambda_h \in M_h$ tels que:*

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \int_{\Gamma_c} (\mu_h - \lambda_h) (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \geq 0, & \forall \mu_h \in M_h. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Ce problème est équivalent à la recherche de $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et de $\lambda_h \in M_h$ tels que:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}_h, \mu_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}_h, \lambda_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \lambda_h), \quad \forall \mu_h \in M_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$

avec

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \mu_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma.$$

Lemme 3.2 *Le lagrangien $\mathcal{L}$ admet un point-selle unique sur $\mathbf{V}_h \times M_h$.*

Preuve. Pour tous $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\mu_h \in M_h$, on a

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \mu_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma.$$

L'existence du point-selle découle de résultats classiques (cf. [35] chapitre 1, section 3). L'unicité du champ des déplacements $\mathbf{u}_h$ résulte de la coercivité de $a(., .)$. Il reste à vérifier l'unicité du multiplicateur. Soient deux points-selle $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ et $(\mathbf{u}_h, \overline{\lambda}_h)$. D'après (3.2.4), on a

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma &= L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \overline{\lambda}_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma &= L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

En soustrayant les deux précédentes égalités, on obtient:

$$\int_{\Gamma_c} (\lambda_h - \overline{\lambda_h})(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

En prenant $\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, 0)$, on déduit $\lambda_h = \overline{\lambda_h}$.

Il existe donc un unique point-selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbf{V}_h \times M_h$ noté $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$. Ceci établit le lemme. $\square$

Ainsi, en utilisant (3.2.4) l'on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mu_h(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma &\geq 0, \quad \forall \mu_h \in M_h, \\ \int_{\Gamma_c} \lambda_h(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma &= 0, \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma &\geq 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

En notant π_h^1 , l'opérateur de projection au sens de L^2 , sur la trace du maillage de Ω^1 sur Γ_c , on écrit successivement:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mu_h(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)) d\Gamma &\geq 0, \quad \forall \mu_h \in M_h, \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)) d\Gamma &\geq 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

En utilisant l'équivalence (3.2.3), on déduit $\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0$ sur Γ_c .

On pose

$$\mathbf{K}_h = \{\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

Dans ce cas, $\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h$ et

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h. \quad (3.2.5)$$

L'étude qui suit est consacrée à l'estimation de $\|\sigma_n(\mathbf{u}) - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$. Tout d'abord, on définit une norme sur $W_h^1(\Gamma_c)$ dépendante du maillage.

$$\|\mu_h\|_{-\frac{1}{2},h} = \sup_{\psi_h \in W_h^1(\Gamma_c)} \frac{\int_{\Gamma_c} \mu_h \psi_h d\Gamma}{\|\psi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}}, \quad \forall \mu_h \in W_h^1(\Gamma_c).$$

Dans un premier temps, on donne une borne supérieure pour l'erreur commise sur le point-selle du problème continu.

Lemme 3.3 *Soit $(\mathbf{u}, \sigma_n(\mathbf{u}))$ le point-selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbf{V} \times M$. Supposons que $\mathbf{u}$ est tel que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$, et soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ le point-selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbf{V}_h \times M_h$. On a*

$$\|\pi_h^1 \sigma_n(\mathbf{u}) - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2},h} \leq C(\mathbf{u})h_1 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*.$$

Preuve. On a

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$

et

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_c} (\lambda_h - \sigma_n(\mathbf{u}))(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

Puis

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} (\lambda_h - \pi_h^1 \sigma_n(\mathbf{u}))(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \\ &= a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_c} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \pi_h^1 \sigma_n(\mathbf{u}))(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés d'approximation de π_h^1 , et la continuité de $a(\cdot, \cdot)$, on déduit, pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$,

$$\int_{\Gamma_c} (\lambda_h - \pi_h^1 \sigma_n(\mathbf{u}))(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq M \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_* \|\mathbf{v}_h\|_* + C(\mathbf{u}) h_1 \|\mathbf{v}_h\|_*.$$

D'où

$$\|\pi_h^1 \sigma_n(\mathbf{u}) - \lambda_h\|_{-\frac{1}{2}, h} \leq C(\mathbf{u}) h_1 + M \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_*.$$

Ceci établit le lemme. □

Lemme 3.4 On a

$$\|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C \|\mu_h\|_{-\frac{1}{2}, h}, \quad \forall \mu_h \in W_h^1(\Gamma_c).$$

Preuve. Soit $\mu_h \in W_h^1(\Gamma_c)$. Par définition, on a

$$\|\mu_h\|_{-\frac{1}{2}, h} = \sup_{\psi_h \in W_h^1(\Gamma_c)} \frac{\int_{\Gamma_c} \mu_h \psi_h d\Gamma}{\|\psi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}}.$$

En remarquant que prendre le suprénum de ψ_h sur $W_h^1(\Gamma_c)$ est équivalent à prendre le suprénum de $\pi_h^1 \psi$ pour $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$, et en utilisant une propriété de l'opérateur de projection π_h^1 , on déduit

$$\|\mu_h\|_{-\frac{1}{2}, h} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \frac{\int_{\Gamma_c} \mu_h \pi_h^1 \psi d\Gamma}{\|\pi_h^1 \psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \frac{\int_{\Gamma_c} \mu_h \psi d\Gamma}{\|\pi_h^1 \psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}}.$$

La continuité de l'opérateur de projection de $L^2(\Gamma_c)$ dans $L^2(\Gamma_c)$, de $H^1(\Gamma_c)$ dans $H^1(\Gamma_c)$ (cf. [13]) et un argument d'interpolation hilbertienne conduisent à la continuité de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. Donc

$$\|\mu_h\|_{-\frac{1}{2},h} \geq C \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \frac{\int_{\Gamma_c} \mu_h \psi d\Gamma}{\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}} = C \|\mu_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)},$$

d'où le lemme. $\square$

En utilisant les deux lemmes précédents et les bonnes propriétés d'approximation de l'opérateur π_h^1 , on déduit le résultat suivant:

Théorème 3.3 *Soit $(\mathbf{u}, \sigma_n(\mathbf{u}))$ le point-selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbf{V} \times M$. Supposons que $\mathbf{u}$ est tel que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$, et soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ le point-selle de $\mathcal{L}$ sur $\mathbf{V}_h \times M_h$. On a*

$$\|\sigma_n(\mathbf{u}) - \lambda_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C(\mathbf{u})h_1 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*.$$

3.3 Etude de la convergence sans hypothèses de régularité.

Il s'agit dans cette section d'étudier la convergence de la méthode éléments finis présentée dans le chapitre 2, sans hypothèses de régularité de la solution. Dans ce cas, il ne s'agit plus de trouver un taux de convergence pour la méthode, mais simplement la convergence de $\mathbf{u}_h$ vers $\mathbf{u}$ quand $h = (h_1, h_2)$ tend vers zero. La technique de démonstration fait appel à l'approximation des convexes.

Théorème 3.4 *Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}_h$ les solutions de (2.1.8) et (2.2.8) respectivement. On a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* = 0.$$

Preuve. Pour montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* = 0$ lorsque $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^1))^2 \times (H^1(\Omega^2))^2$, il suffit de vérifier les deux conditions suivantes (cf. [29],[35]):

- 1) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ t.q. $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_* = 0$,
- 2) Si $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ et $\mathbf{v}_h \rightarrow \mathbf{v}$ faiblement dans $(H^1(\Omega^1))^2 \times (H^1(\Omega^2))^2$ alors $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$.

1) La démonstration utilise un résultat de densité de Haslinger et Hlaváček (cf. [34], lemme 3.1) qui est le suivant: si $\overline{\Gamma_u^\ell} \cap \Gamma_c$ est vide et si $\overline{\Gamma_g^\ell} \cap \Gamma_c$ et $\overline{\Gamma_g^\ell} \cap \overline{\Gamma_u^\ell}$ ne contiennent qu'un nombre fini de points frontière, alors l'ensemble

$$\mathcal{M} = \mathbf{K} \cap ((C^\infty(\overline{\Omega^1}))^2 \times (C^\infty(\overline{\Omega^2}))^2)$$

est dense dans $\mathbf{K}$ pour la norme brisée $\|\cdot\|_*$.

On se donne alors $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ et on considère la démonstration de (2.3.3) qui consiste à construire $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ approchant $\mathbf{v}$. Cette construction est possible car $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$. Il suffit alors de vérifier que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_* = 0.$$

Dans ce cas, il suffit de se reporter à la relation (2.3.5). Ceci nous amène au lemme sur l'erreur d'approximation pour le contact bilatéral. Finalement, on remarque que $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_*$ est majoré par une somme finie de termes du type $\|\mathbf{w}^\ell - \mathcal{I}_h^\ell \mathbf{w}^\ell\|_{(H^1(\Omega^\ell))^2}$ où $\mathbf{w}^\ell$ est continu sur Ω^ℓ . Tous ces termes tendent vers 0 quand $h \rightarrow 0$.

La conclusion se fait ensuite en utilisant le résultat de densité rappelé ci-dessus.

2) Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ et $\mathbf{v}_h \rightarrow \mathbf{v}$ faiblement dans $(H^1(\Omega^1))^2 \times (H^1(\Omega^2))^2$.

Dans un premier temps, on transcrit la convergence faible sur Ω^ℓ en une convergence forte sur Γ_c et l'on déduit les deux convergences fortes suivantes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}_h^1) \cdot \mathbf{n}^1\|_{L^2(\Gamma_c)} = 0, \quad (3.3.1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{L^2(\Gamma_c)} = 0.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \|_{L^2(\Gamma_c)} \\ & \leq \| \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 \|_{L^2(\Gamma_c)} + \| \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ & \leq \| \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 \|_{L^2(\Gamma_c)} + \| (\mathbf{v}_h^2 - \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1((\mathbf{v}_h^2 - \mathbf{v}^2) \cdot \mathbf{n}^2) \|_{L^2(\Gamma_c)} \\ & \quad + \| \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2) \|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ & \leq C \| \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 \|_{L^2(\Gamma_c)} + \| \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2) \|_{L^2(\Gamma_c)}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la stabilité de l'opérateur de projection dans $L^2(\Gamma_c)$ (cf. [5]). On déduit donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \|_{L^2(\Gamma_c)} = 0. \quad (3.3.2)$$

En utilisant (3.3.1) et (3.3.2), on a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| (\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2) - (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)) \|_{L^2(\Gamma_c)} = 0.$$

On est alors ramené à un problème sur un seul maillage qui peut se formuler de la manière suivante: soit $\psi_h \leq 0$ sur Γ_c et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\psi - \psi_h\|_{L^2(\Gamma_c)} = 0.$$

On en déduit dans un premier temps qu'il existe une sous suite notée encore ψ_h qui tend vers ψ presque partout sur Γ_c . D'où $\psi \leq 0$ presque partout sur Γ_c et $\psi \in K$. Ceci établit le résultat. $\square$

3.4 Estimation de l'interpénétration en normes L^2 et L^∞

Il s'agit de donner une estimation de l'interpénétration des deux solides. Pour des raisons de simplicité, on suppose qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que $c_1 h_1 \leq h_2 \leq c_2 h_1$.

La proposition suivante fournit une estimation de l'interpénétration des deux solides; celle-ci est nulle dans le cas de maillages compatibles. Nous allons donner une estimation de l'interpénétration sous des hypothèses de régularité très faibles, par ailleurs utilisées et justifiées dans le cas de contact avec frottement de Coulomb (cf. [31]).

Proposition 3.1 *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) appartienne à $(H^{1+\varepsilon}(\Omega^1))^2 \times (H^{1+\varepsilon}(\Omega^2))^2$. Supposons de plus que $\|\mathbf{u}\|_{(H^{1+\varepsilon}(\Omega^1))^2 \times (H^{1+\varepsilon}(\Omega^2))^2}$ soit borné par une constante ne dépendant que des forces appliquées. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discrétisé (2.2.8). Alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}}{\sqrt{h_1}} = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^\infty(\Gamma_c)} = 0,$$

où $f_+ = \sup(f, 0)$.

Preuve. Tout d'abord, on va estimer l'interpénétration des deux solides en norme $L^2(\Gamma_c)$. On écrit:

$$\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 \leq \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \text{ sur } \Gamma_c.$$

Donc

$$(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+ \leq (\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2))_+ \text{ sur } \Gamma_c.$$

Et

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^2(\Gamma_c)} &\leq \|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ &\leq \|(\mathbf{u}_h^2 - \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1((\mathbf{u}_h^2 - \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2)\|_{L^2(\Gamma_c)} \\ &\quad + \|\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2)\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ &\leq h_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_h^2 - \mathbf{u}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + h_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \|\mathbf{u}^2\|_{(H^{1+\varepsilon}(\Omega^2))^2}, \\ &\leq C h_1^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* + C' h_1^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

L'utilisation des résultats de la section précédente permet d'établir la première estimation.

Comme $\|\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$ et $\|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$ sont bornés, on déduit après utilisation d'une inégalité inverse

$$\|\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1\|_{H^1(\Gamma_c)} \leq C_1 h_1^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^1(\Gamma_c)} \leq C_2 h_2^{-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$\|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1)'\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C_1 h_1^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \|(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)'\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C_2 h_2^{-\frac{1}{2}}.$$

Soit m_1 (resp. m_2) une maille 1D de la trace de la triangulation de Ω^1 (resp. Ω^2) sur Γ_c . Notons P_{m_1} (resp. P_{m_2}) la pente de $\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1$ (resp. $\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2$) sur m_1 (resp. m_2). Ainsi, pour tout m_1

$$\int_{m_1} (P_{m_1})^2 d\Gamma \leq \frac{C_1}{h_1}.$$

Sous l'hypothèse d'uniforme régularité du maillage 1D, on déduit

$$h_1 (P_{m_1})^2 \leq \frac{C_1}{h_1} \quad \text{et} \quad |P_{m_1}| \leq \frac{C_1}{h_1}.$$

En procédant de la même manière pour le deuxième maillage, on déduit l'existence de $K > 0$ tel que la valeur absolue de la pente de $\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2$ soit majorée par $\frac{K}{h_1}$ sur Γ_c .

D'autre part, il est clair que $\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)$ s'annule au moins tous les $2h_1$. Il s'ensuit que l'interpénétration $(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+$ s'annule également au moins tous les $2h_1$.

Supposons alors qu'il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $h_0 > 0$, il existe $h_1 < h_0$ et $x \in \Gamma_c$ tels que

$$(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+(x) \geq C_0,$$

avec $h = (h_1, h_2)$. En utilisant le résultat de bornitude sur la pente de $(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+$, on devient en mesure de minorer la norme L^2 de la pénétration. Ainsi

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 &\geq 2 \int_0^{\frac{C_0 h_1}{K}} \left(\frac{K}{h_1} x\right)^2 dx, \\ &= \frac{2C_0^3 h_1}{3K}. \end{aligned}$$

D'où la contradiction avec la première estimation en norme L^2 . $\square$

Remarque 3.1. Dans le cas d'hypothèses minimales, c'est à dire une régularité H^1 pour les déplacements, on peut seulement prouver la convergence en $\sqrt{h_1}$ pour norme L^2 et la bornitude pour la norme L^∞ . Par contre, sous des hypothèses H^2 et en adoptant une démarche similaire à celle présentée ci-dessus, on arrive à montrer une convergence en $h_1^{\frac{5}{4}}$ pour la norme L^2 et une convergence en $\sqrt{h_1}$ pour la norme L^∞ .

3.5 Conclusion

Les études précédentes concernant le raccord projection ont été effectuées dans le cadre standard où la zone de contact initiale contient la zone de contact finale. Cependant, comme dans [40], section 6.8 ou [35] (pour les maillages compatibles), la présente étude s'étend dans le cas d'une zone de contact autorisée à croître. Dans ce cas, on considère deux surfaces de contact candidates $\Gamma_c^1 \subset \partial\Omega^1$ et $\Gamma_c^2 \subset \partial\Omega^2$ qui sont voisines mais non confondues, et les conditions de contact sont alors définies sur une surface de contact intermédiaire choisie convenablement. Un tel exemple sera traité dans un contexte numérique au chapitre 6.

Au terme de cette étude approfondie, le raccord projection a donné ce qu'il y avait de meilleur à espérer d'une condition de contact unilatéral sur des maillages incompatibles: son emploi n'affecte pas la convergence des solutions éléments finis par rapport au cas des maillages compatibles. Par ailleurs, nous verrons dans le chapitre de la mise en œuvre numérique, que la formulation matricielle associée au raccord projection ainsi que son implantation dans un code éléments finis sont particulièrement simples.

Chapitre 4

Etude d'autres raccords

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié une manière de définir le contact unilatéral sur des maillages incompatibles en utilisant le **raccord projection**, ce qui est optimal dans le sens suivant: le taux de convergence de l'erreur correspondant aux solutions éléments finis est identique à celui obtenu dans le cas de maillages compatibles. Dans le présent chapitre, on présente deux autres manières de prendre en compte des maillages incompatibles pour ce même problème de contact. Ces deux raccords sont étudiés car ils définissent de manière naturelle le contact unilatéral, et l'on est conduit à la comparaison avec le raccord projection.

La première approche consiste à définir de manière "locale" le contact avec un **raccord ponctuel**. Précisons que l'étude d'un tel type de raccord a déjà été effectuée dans le cas d'équations variationnelles (cf. [11] pour le problème de Poisson, ou bien cf. chapitre 1 pour le contact bilatéral). Dans ce cas, la convergence n'est pas optimale (sous les hypothèses classiques). Nous obtenons dans le cas présent de l'inéquation variationnelle du contact unilatéral un taux de convergence similaire à celui obtenu dans le cas des équations.

Dans la deuxième partie du chapitre, on considère une condition de contact de type intégral qui est alors qualifiée de **raccord intégral**. Comme on pourra le voir de manière plus concrète au chapitre 6, cette condition non-locale traduit moins bien le contact unilatéral que le raccord projection. On notera que cette définition du contact rend la non-conformité de la méthode éléments finis beaucoup plus importante: la méthode est non-conforme même dans le cas de maillages compatibles. Ceci amoindrit considérablement le taux de convergence global.

On considère le problème de contact unilatéral entre deux solides décrit dans le chapitre 2, section 1. Les deux solides sont alors discrétisés indépendamment l'un de l'autre comme au chapitre 2, section 2. La seule modification se situant désormais dans la nouvelle définition du convexe discrétisé.

4.1 Raccord ponctuel

Dans cette section, il s'agit de raccorder les deux maillages de manière locale, c'est à dire que l'on approche le convexe $\mathbf{K}$ des déplacements admissibles (cf. (2.1.7))

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2), \quad [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c \right\},$$

par

$$\mathbf{K}_h^P = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{v}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\}. \quad (4.1.1)$$

La notation $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]$ représente le saut du déplacement normal $\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2$ à travers l'interface de contact et $\mathcal{I}_h^1$ désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds du maillage de Ω^1 . Les espaces $\mathbf{V}_h(\Omega^1)$ et $\mathbf{V}_h(\Omega^2)$ sont définis en (2.2.1).

On notera que la définition de $\mathbf{K}_h^P$ est très voisine de celle de $\mathbf{K}_h$ (cf. (2.2.7)): seul diffère l'opérateur (interpolation pour le premier, projection pour le second).

Comme dans les chapitres précédents, la condition de contact incorporée dans $\mathbf{K}_h^P$ est définie sur l'un des deux maillages. De la même manière que pour le raccord projection des chapitres 2 et 3, il est également possible de définir de manière "symétrique" le convexe, ceci en considérant l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur le maillage de Ω^2 .

Par ailleurs, il est clair que $\mathbf{K}_h^P \not\subset \mathbf{K}$, on dira que l'approximation est non-conforme au sens de "Hodge".

Lorsque l'on utilise des maillages compatibles sur la zone de contact, les conditions de contact discrètes peuvent alors s'exprimer simplement par la condition $[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] \leq 0$ et la méthode d'approximation devient conforme (i.e. $\mathbf{K}_h^P \subset \mathbf{K}$). Ce cas a été étudié par Haslinger et Hlaváček,[31] Haslinger, Hlaváček et Nečas,[35]. Le raccord ponctuel et raccord projection sont alors identiques. Ceci fournit une motivation supplémentaire pour les comparer dans le cas de maillages incompatibles.

Le problème éléments finis induit par le convexe (4.1.1) consiste en l'inéquation variationnelle suivante: *trouver $\mathbf{u}_h$ tel que:*

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h^P, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^P. \quad (4.1.2)$$

Cette inéquation variationnelle admet une solution unique.

Le but est de donner une borne supérieure de l'erreur résultant de l'approximation par éléments finis en utilisant le raccord ponctuel. L'outil de départ, que nous rappelons ci-dessous, est le même que dans le chapitre 2 (cf. (2.3.1)). Il s'agit de décomposer l'erreur

totale $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*$ en une erreur d'approximation et une erreur de consistance due au fait que $\mathbf{K}_h^P$ n'est pas inclus dans $\mathbf{K}$.

Rappel 4.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (2.1.8) vérifie $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discrétisé (4.1.2). Alors*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C \Big\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^P} \Big(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \Big| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[\mathbf{v}_h, \mathbf{n}] d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} \Big) \\ + \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \Big| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h), \mathbf{n}] d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} \Big\}, \end{aligned}$$

où $C > 0$ est indépendant de h .

Dans le cas de l'équation variationnelle du contact bilatéral (cf. chapitre 1), le taux de convergence de la méthode éléments finis comprenant une condition ponctuelle, est en $\sqrt{h}$ en norme de l'énergie $\|\cdot\|_*$. Nous précisons donc que le meilleur à espérer est d'obtenir un résultat identique dans le cas de l'inéquation du contact unilatéral.

4.1.1 Erreur d'approximation

Il s'agit de donner une borne supérieure pour le premier infimum du Rappel 4.1.

Lemme 4.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$. Alors, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^P$ qui satisfait les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* &\leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2), \\ \Big| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}), \mathbf{n}] d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} &\leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2), \end{aligned}$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

Preuve. Par simple adaptation de la démonstration de (2.3.3) et (2.3.4) et l'utilisation de (1.3.2). $\square$

4.1.2 Erreur de consistance

Dans un premier temps, nous nous intéressons à obtenir une première majoration pour l'erreur de consistance qui permettra ensuite d'obtenir une première estimation de

l'erreur globale. Pour des raisons techniques dues à l'utilisation d'inégalités inverses, nous supposons que la taille des mailles est telle que h_1/h_2 soit borné.

Lemme 4.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (4.1.2). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) [(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u}) h_1^{\frac{1}{4}},$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$.

Preuve. En choisissant $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$ tel que

$$\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1|_{\Gamma_c} = \mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1|_{\Gamma_c} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2|_{\Gamma_c} = (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2|_{\Gamma_c}$$

et en adaptant la technique de démonstration de (2.3.6). $\square$

4.1.3 Estimation intermédiaire et bootstrap sur l'erreur de consistance

Jusqu'à présent, les résultats obtenus ne conduisent pas à la convergence maximale espérée en $\sqrt{h}$, mais seulement à $h^{\frac{1}{4}}$. Un argument de bootstrap sur l'erreur de consistance permet de l'améliorer. En réitérant le processus autant de fois que possible, on va retrouver un comportement de l'erreur globale similaire à celui obtenu pour le problème de Poisson (cf. [11]) traité avec l'analogie de cette condition pour les équations variationnelles.

Lemme 4.3 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (4.1.2). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) [(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u}) (h_1^{\frac{3}{8}} + h_2),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

Preuve. De la même manière que pour le raccord projection et en prenant le même $\mathbf{v}$ que dans le lemme précédent, on écrit cette fois:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) [(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma &= \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) \{ (\mathcal{I}_h^1(\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2)) \cdot \mathbf{n}^2 - ((\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) \} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) \{ ((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) - (\mathcal{I}_h^1(\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2)) \cdot \mathbf{n}^2 \} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u}) ((\mathcal{I}_h^1 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma. \end{aligned}$$

L'utilisation des techniques du raccord projection et du premier taux de convergence en $h^{\frac{1}{4}}$ établissent le résultat. $\square$

4.1.4 Estimation finale

Désormais le taux convergence global est de $\frac{3}{8}$. En utilisant à nouveau la technique de bootstrap, on arrive à un taux de convergence en $\frac{7}{16}$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir:

Théorème 4.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (4.1.2). Alors pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u}, \varepsilon)(h_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + h_2),$$

où la constante $C(\mathbf{u}, \varepsilon)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

4.1.5 Généralisation

En suivant les mêmes techniques que précédemment, on obtient:

Théorème 4.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (4.1.2). Alors pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u}, \varepsilon)(h_1^{\frac{1}{2}-\varepsilon} + h_2^{\nu-1}),$$

où la constante $C(\mathbf{u}, \varepsilon)$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^\nu(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^\nu(\Omega^2))^2}$.

4.2 Raccord intégral

Dans cette section, on présente une condition naturelle de contact unilatéral pour des maillages incompatibles. Le convexe $\mathbf{K}$ des déplacements admissibles (cf. (2.1.7))

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2), \quad [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \leq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_c \right\},$$

est approché par

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_h^I = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \int_{\Gamma_c} (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) q_h \leq 0, \right. \\ \left. \forall q_h \in M_h^1(\Gamma_c), q_h \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

où $M_h^1(\Gamma_c)$, défini en (2.2.3) est constitué des fonctions continues, affines par morceaux sur la trace du maillage de Ω^1 sur Γ_c et constantes sur les deux mailles extrêmes de ce maillage. Les espaces $\mathbf{V}_h(\Omega^1)$ et $\mathbf{V}_h(\Omega^2)$ sont définis en (2.2.1). Ici aussi, la condition de contact privilégie un des deux maillages par l'intermédiaire du choix de $q_h \in M_h^1(\Gamma_c)$.

Il est facile de voir que le convexe $\mathbf{K}_h^I$ contient strictement le convexe correspondant au raccord projection défini en (2.2.7). Par ailleurs, il est clair que $\mathbf{K}_h^I \not\subset \mathbf{K}$ et que l'approximation est non-conforme au sens de "Hodge".

Lorsque l'on utilise des maillages compatibles, la condition de contact s'exprime simplement par une condition intégrale (qui ne revient pas à la condition classique nœud à nœud), et l'on voit aisément que la méthode d'approximation n'est toujours pas conforme.

Le problème éléments finis induit par le convexe (4.2.2) consiste en l'inéquation variationnelle suivante: *trouver $\mathbf{u}_h$ tel que:*

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h^I, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^I. \quad (4.2.2)$$

Cette inéquation variationnelle admet une solution unique.

Le but est d'obtenir une borne supérieure de l'erreur résultant de l'approximation par éléments finis décrite ci-dessus. L'outil de départ est le lemme de Falk utilisé précédemment (cf. (2.3.1)). Nous le rappelons:

Rappel 4.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (2.1.8) vérifie $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discrétisé (4.2.2). Alors*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C \Big\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^I} \Big(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \Big) \\ + \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \Big\}, \end{aligned}$$

où $C > 0$ est indépendant de h .

4.2.1 Erreur d'approximation

Il s'agit de donner une borne supérieure pour le premier infimum du Rappel 4.2.

Lemme 4.4 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$. Alors, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^I$ qui satisfait les estimations suivantes*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* &\leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2), \\ \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} &\leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2), \end{aligned}$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend linéairement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

Preuve. On considère le $\mathbf{v}_h$ de la démonstration de l'erreur d'approximation pour le raccord projection conduisant à (2.3.3) et (2.3.4). Ce $\mathbf{v}_h$ appartient à $\mathbf{K}_h^I$ et satisfait ainsi les majorations du lemme. $\square$

4.2.2 Erreur de consistance

On notera que la démonstration suivante de la convergence de l'erreur de consistance repose sur des techniques différentes de celles utilisées pour les autres raccords. Pour des raisons techniques dues à l'utilisation d'inégalités inverses, nous supposons que la taille des mailles est telle que h_1/h_2 soit borné.

Proposition 4.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (4.2.2). Alors*

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u}) h_1^{\frac{1}{4}},$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$.

Preuve. Définissons $\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1$ et $\mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2$ sur Γ_c :

Prenons

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 &= \inf(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1, -\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2), \\ \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 &= \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2. \end{aligned}$$

On définit ensuite $\mathbf{v}$ sur $\Omega^1 \cup \Omega^2$ à l'aide d'un opérateur de relèvement continu. On a

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \\ & \leq \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{L^2(\Gamma_c)}. \end{aligned}$$

La construction de $\mathbf{v}$ donne

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^2(\Gamma_c)} \|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^2(\Gamma_c)},$$

avec $f_+ = \sup(f, 0)$.

Etape 1

On rappelle que le maillage 1D sur Γ_c issu de la triangulation de Ω^ℓ est noté $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$. Dans cette première étape, on suppose que $\mathcal{T}_{c,h}^1 = \mathcal{T}_{c,h}^2$. Ceci signifie que les maillages sont compatibles sur la zone de contact Γ_c .

Lemme 4.5 *Supposons que $\mathcal{T}_{c,h}^1 = \mathcal{T}_{c,h}^2$. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h^I$ tel que $\|\mathbf{v}_h\|_*$ soit borné. Alors, il existe $C > 0$ indépendant de h tel que :*

$$\|(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C h_1^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve du lemme. Désormais, on notera $\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 = \varphi_h$ sur Γ_c . D'après les hypothèses du lemme, $\|\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$ est borné. En utilisant une inégalité inverse, on obtient:

$$\|\varphi_h\|_{H^1(\Gamma_c)} \leq Ch_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\|(\varphi_h)_+\|_{H^1(\Gamma_c)} \leq Ch_1^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$\|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)} \leq Ch_1^{-\frac{1}{2}}.$$

On a

$$\int_{\Gamma_c} \varphi_h q_h d\Gamma \leq 0, \quad \forall q_h \in M_{h+}^1(\Gamma_c),$$

où $M_{h+}^1(\Gamma_c)$ désigne les fonctions positives de $M_h^1(\Gamma_c)$. On va diviser les $a(h)$ intervalles I_i , ($1 \leq i \leq a(h)$) de $\mathcal{T}_{c,h}^1 = \mathcal{T}_{c,h}^2$ en 3 catégories et nous allons les numéroté de la manière suivante:

Catégorie 1: pour $1 \leq i \leq a_1(h)$, les intervalles où $(\varphi_h)_+$ vaut 0 sur une partie de mesure non nulle de I_i .

Catégorie 2: pour $a_1(h) < i \leq a_2(h)$, les intervalles où $(\varphi_h)_+$ est positive sur l'intervalle ouvert I_i mais non constante.

Catégorie 3: pour $a_2(h) < i \leq a(h)$, les intervalles où $(\varphi_h)_+$ est strictement positive et constante.

On remarque que les intervalles des catégories 1 et 2 vérifient la propriété suivante:

$$\text{supp}((\varphi_h)_+) = \text{supp}(((\varphi_h)_+)'),$$

où $\text{supp}(f)$ désigne le support de la fonction f .

De plus, les intervalles des catégories 2 et 3 ont des intervalles voisins qui sont nécessairement de la première catégorie. Ceci provient de la définition même de $\mathbf{K}_h^I$.

Sur chaque intervalle I_i , θ_i désigne la rapport suivant:

$$\theta_i = \frac{\text{mesure du support de } (\varphi_h)_+ \text{ dans l'intervalle } I_i}{h_1}.$$

Par conséquent, on a

$$0 \leq \theta_i \leq 1, \quad \forall i,$$

et α_i désigne la pente de $(\varphi_h)_+$ sur son support dans l'intervalle I_i .

Calcul de $\|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)}$:

$$\|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)}^2 = \sum_{i=1}^{a_2(h)} \int_{I_i} ((\varphi_h)_+)' ^2 d\Gamma.$$

En utilisant les notations introduites précédemment, ceci donne

$$\|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)}^2 = \sum_{i=1}^{a_2(h)} \int_0^{\theta_i h_1} \alpha_i^2 dx,$$

et

$$\|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)}^2 = \sum_{i=1}^{a_2(h)} \alpha_i^2 \theta_i h_1.$$

Calcul de $\|(\varphi_h)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}$:

$$\begin{aligned} \|(\varphi_h)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 &= \sum_{i=1}^{a_1(h)} \int_{I_i} (\varphi_h)_+^2 d\Gamma + \sum_{i=a_1(h)+1}^{a_2(h)} \int_{I_i} (\varphi_h)_+^2 d\Gamma + \sum_{i=a_2(h)+1}^{a(h)} \int_{I_i} (\varphi_h)_+^2 d\Gamma, \\ &= \sum_{i=1}^{a_1(h)} \int_0^{\theta_i h_1} \alpha_i^2 x^2 dx + \sum_{i=a_1(h)+1}^{a_2(h)} \int_0^{h_1} (\alpha_i x + C_i)^2 dx + \sum_{i=a_2(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2. \end{aligned}$$

Ceci peut s'écrire

$$\|(\varphi_h)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{a_2(h)} \int_0^{\theta_i h_1} \alpha_i^2 x^2 dx + 2 \sum_{i=a_1(h)+1}^{a_2(h)} \int_0^{h_1} C_i^2 dx + \sum_{i=a_2(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2.$$

Donc

$$\|(\varphi_h)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{a_2(h)} \int_0^{\theta_i h_1} \alpha_i^2 x^2 dx + 2 \sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2.$$

On a

$$2 \sum_{i=1}^{a_2(h)} \int_0^{\theta_i h_1} \alpha_i^2 x^2 dx = \frac{2}{3} h_1^2 \sum_{i=1}^{a_2(h)} \alpha_i^2 h_1 \theta_i^3.$$

Comme $\theta_i \leq 1$, on déduit :

$$\|(\varphi_h)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \leq K h_1^2 \|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)}^2 + 2 \sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2.$$

Il reste à estimer $\sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2$.

En utilisant une remarque précédente concernant les intervalles des catégories 2 et 3, on voit que $C_i \leq \theta_{i.v.} h_1 |\alpha_{i.v.}|$ où $i.v.$ désigne un intervalle voisin de I_i qui est nécessairement de la catégorie 1. On obtient:

$$\sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2 \leq \sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1^3 \theta_{i.v.}^2 \alpha_{i.v.}^2 \leq h_1^2 \sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1 \theta_{i.v.} \alpha_{i.v.}^2.$$

Par conséquent

$$\sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2 \leq h_1^2 \sum_{i=1}^{a_1(h)} h_1 \theta_i \alpha_i^2 \leq h_1^2 \sum_{i=1}^{a_2(h)} h_1 \theta_i \alpha_i^2.$$

Donc

$$\sum_{i=a_1(h)+1}^{a(h)} h_1 C_i^2 \leq h_1^2 \|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)}^2.$$

Finalement

$$\|(\varphi_h)_+\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C h_1 \|((\varphi_h)_+)' \|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C' h_1^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci établit le lemme. $\square$

Etape 2 :

Dans cette étape, on considère la cas général des maillages dont les noeuds ne sont pas en vis à vis sur la zone de contact Γ_c .

Suite de la preuve de la proposition.

La solution $\mathbf{u}_h$ du problème discrétisé vérifie

$$\int_{\Gamma_c} (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) q_h \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall q_h \in M_{h+}^1(\Gamma_c),$$

ce qui est équivalent à

$$\int_{\Gamma_c} (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)) q_h \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall q_h \in M_{h+}^1(\Gamma_c).$$

où π_h^1 est l'opérateur de projection défini en (2.2.4). Comme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} &\leq \|\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} + \|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}, \\ &\leq C \|\mathbf{u}_h\|_* + C \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^\varepsilon \|\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}, \\ &\leq C \|\mathbf{u}_h\|_*, \end{aligned}$$

la bornitude de $\mathbf{u}_h$ nous place dans le cadre du lemme précédent. Ceci donne

$$\|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2))_+\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C h_1^{\frac{1}{2}}.$$

De

$$(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+ \leq (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2))_+ + (\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2))_+,$$

on déduit

$$\|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 \leq 2(\|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2))_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2 + \|(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2))_+\|_{L^2(\Gamma_c)}^2).$$

D'où

$$\|(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C h_1^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. $\square$

Remarque 4.1. L'estimation de l'erreur obtenue est la même qu'il s'agisse de maillages compatibles ou incompatibles.

Remarque 4.2. Parmi les 3 conditions de contact étudiées, celle-ci est celle qui semble donner les moins bons résultats. Ceci provient essentiellement du fait que la méthode est non-conforme même dans le cas de maillages compatibles, ce qui est facile à vérifier.

Remarque 4.3. Comme dans le cas du raccord ponctuel, on n'utilise que les hypothèses L^2 pour la contrainte normale sur la zone de contact et on n'arrive pas à utiliser pleinement les hypothèses H^2 pour les déplacements. Il y a fort à parier que cette estimation n'est pas optimale sous les hypothèses H^2 , peut être également sous les hypothèses plus faibles que nous utilisons ici. Par ailleurs, l'application d'une technique de bootstrap à ce raccord intégral ne paraît pas triviale.

4.2.3 Estimation finale

Le résultat final est:

Théorème 4.3 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (4.2.2). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{1}{4}} + h_2),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

4.2.4 Généralisation

En suivant les mêmes techniques que précédemment, on obtient:

Théorème 4.4 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (4.2.2). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{1}{4}} + h_2^{\nu-1}),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^\nu(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^\nu(\Omega^2))^2}$.

4.3 Cas de l'interface de contact

Dans les simulations numériques de problèmes de contact avec maillages incompatibles, il arrive que l'on introduise une "interface de contact" dont le maillage joue un rôle non

négligeable et sur laquelle on “projette” les deux maillages provenant des deux solides [17].

Il s’agit de regarder ce que l’on peut obtenir, en termes d’erreur *a priori* lorsque l’on introduit ce troisième maillage sur la zone de contact et que l’on définit le contact unilatéral sur ce maillage dont le pas est h_3 . Le cadre de cet étude n’est certainement pas le plus général, mais il propose quelques réponses qui découlent directement de l’étude précédente effectuée au chapitre 2.

Supposons que le convexe discrétisé traduisant les conditions de contact unilatéral discrètes soit donné par :

$$K_h^{int} = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad \pi_h^3(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\},$$

où π_h^3 est l’opérateur de projection sur le maillage de l’interface défini en (2.2.4). De la même manière que pour les raccords présentés précédemment, on définit ensuite $\mathbf{u}_h \in K_h^{int}$ solution du problème discrétisé correspondant. Si le maillage de l’interface est plus grossier (au sens topologique) que celui de Ω^1 sur Γ_c (ou celui de Ω^2 sur Γ_c), il est facile de voir, en reprenant d’abord l’étude sur le contact bilatéral (chapitre 1) puis celle du contact unilatéral (chapitre 2) que l’on obtient le résultat suivant :

Théorème 4.5 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (2.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h \in K_h^{int}$ la solution du problème discrétisé. Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2 + h_3^{\frac{3}{4}}),$$

où la constante $C(\mathbf{u})$ dépend uniquement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$.

On peut se poser la question de la généralisation d’un tel résultat : en effet, on peut voir que si le pas de l’interface est fin par rapport au pas des deux solides, les conditions de contact induites auront tendance à rendre la méthode “plus conforme”. Ceci n’est pas un avantage lorsque l’on sait que dans le résultat de convergence correspondant au raccord projection, nous sommes limités par l’erreur d’approximation et non pas par l’erreur de consistance. Par contre, il serait intéressant d’avoir une idée sur ce qui se passe lorsque le pas de discrétisation de l’interface est du même ordre que les pas de discrétisation des deux solides, tout en étant totalement indépendant de ceux-ci. La question est à l’étude.

4.4 Commentaires et récapitulatif

Il existe de nombreuses possibilités d’exprimer le contact unilatéral entre deux solides pour des maillages incompatibles. Cependant, on remarque que considérer des modèles

convenables qui tolèrent une légère interpénétration, permet d'obtenir des estimations de l'erreur *a priori*. Parmi ces modèles, l'un se distingue: le **raccord projection** qui, pour des maillages compatibles ou incompatibles, donne une erreur du même ordre que la condition de contact classique nœud à nœud utilisée pour les maillages compatibles.

Par ailleurs, le fait de considérer des maillages incompatibles et d'exclure des interpénétrations semble être un frein à l'obtention d'une bonne estimation de l'erreur *a priori*. A ce propos, la condition de contact $\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 \leq 0$ n'autorise pas d'interpénétration (dans ce cas il n'y a pas d'erreur de consistance), mais le calcul de l'erreur d'approximation associée semble être un problème ouvert. Ce problème est non trivial au vu de la "petitesse" du convexe incorporant la condition de contact $\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 \leq 0$, et donc de la pauvreté en propriétés d'approximation.

Chapitre 5

Contact unilatéral avec frottement

Ce chapitre consiste en l'étude par éléments finis d'un problème de contact unilatéral avec frottement entre deux solides déformables.

Le chapitre est constitué comme suit. Tout d'abord, on donne la formulation forte du problème de contact avec frottement. La formulation faible consiste en une inéquation variationnelle qui admet une solution unique.

Ensuite, le problème est discrétisé par éléments finis du même type que dans le cas sans frottement. Une fois de plus, le point important réside dans la définition adaptée des conditions de contact unilatéral discrètes sur des maillages incompatibles. Pour prendre en compte cette difficulté, on utilise le raccord projection qui a été défini et étudié dans le cas sans frottement. Ainsi, une inéquation variationnelle discrétisée est obtenue; celle-ci admet une solution unique.

La section suivante est dédiée au calcul du taux de convergence correspondant à cette approximation. On établit une version plus générale du lemme de Falk. Celle-ci fait intervenir de nouveaux termes d'erreur liés à la présence du frottement. Bien que la prise en compte du frottement amène de nouvelles difficultés, on retrouve un taux de convergence similaire à celui obtenu précédemment dans le cas sans frottement. Ce résultat a fait l'objet de la publication [37].

Finalement, on aborde brièvement le problème de frottement de Coulomb. En vue d'une possible application future de la méthode éléments finis à un tel problème, on s'intéresse aux questions d'existence et d'unicité du problème discrétisé. En particulier, on souligne les difficultés à établir l'unicité pour ce problème.

5.1 Formulation du problème

On considère la déformation de deux corps élastiques qui occupent dans la configuration initiale deux ensembles $\overline{\Omega}^\ell$ de l'espace $\mathbb{R}^2$, $\ell = 1, 2$. Le domaine Ω^ℓ est situé d'un seul côté de sa frontière notée $\partial\Omega^\ell$. Cette dernière est assez régulière et consiste en $\Gamma_u^\ell, \Gamma_g^\ell$ et

Γ_c^ℓ . Le solide $\overline{\Omega}^\ell$ est encastré sur Γ_u^ℓ , soumis à des forces surfaciques $\mathbf{g}^\ell \in (L^2(\Gamma_g^\ell))^2$ sur Γ_g^ℓ ; les forces de volume sont notées $\mathbf{f}^\ell \in (L^2(\Omega^\ell))^2$. Dans la configuration initiale, les deux solides ont une partie de leur frontière en commun $\Gamma_c = \Gamma_c^1 = \Gamma_c^2$, qui sera considérée comme la zone candidate au contact. En d'autres termes, la zone de contact ne peut pas s'étendre durant le processus de déformation (cf. [31]). Le contact s'effectuera sur une partie de Γ_c qui n'est pas connue à l'avance. La mesure de Γ_u^ℓ est non nulle et le vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega^\ell$ est noté $\mathbf{n}^\ell$.

Le problème consiste à trouver le champ de déplacements $\mathbf{u}$ et le champ de contraintes σ définis sur $\Omega^1 \cup \Omega^2$ (on notera $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}|_{\Omega^\ell}$ et $\sigma^\ell = \sigma|_{\Omega^\ell}$), et vérifiant les conditions (5.1.1)–(5.1.7) pour $\ell = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) + \mathbf{f}^\ell &= 0 && \text{dans } \Omega^\ell, \\ \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell)\mathbf{n}^\ell - \mathbf{g}^\ell &= 0 && \text{sur } \Gamma_g^\ell, \\ \mathbf{u}^\ell &= 0 && \text{sur } \Gamma_u^\ell. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Le symbole **div** représente l'opérateur divergence $\operatorname{div} \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)_i$. On adoptera la convention de sommation sur les indices répétés. Le champ de contraintes est relié aux déplacements par la relation de comportement:

$$\sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) = C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \quad (5.1.2)$$

où $C^\ell = (c_{ij,kh}^\ell)_{1 \leq i,j,k,h \leq 2} \in (L^\infty(\Omega^\ell))^{16}$ est un tenseur d'ordre quatre symétrique vérifiant la condition d'ellipticité classique.

Le tenseur des déformations est linéarisé et vaut:

$$\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}^\ell + (\nabla \mathbf{v}^\ell)^T),$$

où le symbole T désigne la transposition. Sur Γ_c , on écrit

$$\sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell)\mathbf{n}^\ell = ((\sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell)\mathbf{n}^\ell) \cdot \mathbf{n}^\ell)\mathbf{n}^\ell + \sigma_T^\ell(\mathbf{u}^\ell) \text{ et } \mathbf{u}^\ell = (\mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{n}^\ell)\mathbf{n}^\ell + \mathbf{u}_T^\ell.$$

Les conditions sur Γ_c sont:

$$(\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot \mathbf{n}^1 = (\sigma^2(\mathbf{u}^2)\mathbf{n}^2) \cdot \mathbf{n}^2 = \sigma_n(\mathbf{u}), \quad \sigma_T^1(\mathbf{u}^1) = -\sigma_T^2(\mathbf{u}^2), \quad (5.1.3)$$

$$[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u})[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad (5.1.4)$$

$$|\sigma_T^1(\mathbf{u}^1)| \leq s, \quad (5.1.5)$$

$$|\sigma_T^1(\mathbf{u}^1)| < s \Rightarrow \mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2 = 0, \quad (5.1.6)$$

$$|\sigma_T^1(\mathbf{u}^1)| = s \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ t.q. } \mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2 = -\lambda \sigma_T^1(\mathbf{u}^1). \quad (5.1.7)$$

On note $s \in L^2(\Gamma_c)$, $s \geq 0$, le seuil de glissement supposé connu. La notation $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]$ représente le saut $(\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2)$ du déplacement normal au travers de la zone de contact Γ_c . Les équations (5.1.3) traduisent le principe d'action et de réaction et les conditions (5.1.4) représentent le contact unilatéral entre les deux solides. Finalement, (5.1.5)–(5.1.7) est la loi de frottement (cf. [40],[26]).

Le modèle de contact unilatéral avec frottement considéré ici intervient dans l'étude plus générale du problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb dont l'existence se démontre par des techniques de point fixe sur la contrainte normale (cf. [39]).

On définit les espaces

$$\mathbf{V}(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v}^\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^2, \quad \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_u^\ell \right\}.$$

Un champ de vecteurs de l'espace produit $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$ sera noté $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$. Cet espace est muni du produit scalaire suivant

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_* = (\mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1)_{(H^1(\Omega^1))^2} + (\mathbf{v}^2, \mathbf{w}^2)_{(H^1(\Omega^2))^2}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2).$$

La norme associée est notée $\|\cdot\|_*$.

Le convexe $\mathbf{K}$ des déplacements admissibles est contenu dans $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$ et incorpore la condition de non-interpénétration:

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2), \quad [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\}.$$

On pose:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \, d\mathbf{x}, \\ L(\mathbf{v}) &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_{\Omega^\ell} \mathbf{f}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_g^\ell} \mathbf{g}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell \, d\Gamma^\ell \right), \\ j(\mathbf{v}) &= \int_{\Gamma_c} s |\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2). \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème (5.1.1)–(5.1.7) est: trouver $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}. \quad (5.1.8)$$

Une telle inéquation variationnelle admet une solution unique (cf. [26],[40]). De plus, la positivité de j amène la condition de bornitude suivante:

$$\|\mathbf{u}\|_* \leq C \sum_{\ell=1}^2 \left(\|\mathbf{f}^\ell\|_{(L^2(\Omega^\ell))^2} + \|\mathbf{g}^\ell\|_{(L^2(\Gamma_g^\ell))^2} \right),$$

où $C > 0$ ne dépend pas des forces appliquées.

5.2 Discrétisation

Il s'agit de construire un convexe $\mathbf{K}_h$ qui soit une bonne approximation par éléments finis de degré un de $\mathbf{K}$. Pour des raisons de simplicité, on supposera que Ω^1 et Ω^2 sont polygonaux. A chaque domaine Ω^ℓ est associée une famille de triangulations régulières T_h^ℓ . Les éléments triangulaires sont notés κ et leur diamètre n'excède pas h_ℓ , et $h = (h_1, h_2)$ est le couple de paramètres de discrétisation destinés à tendre vers 0. Pour chaque κ , $\mathbb{P}_q(\kappa)$ est l'espace des polynômes définis sur κ de degré q . L'espace éléments finis défini pour chaque domaine Ω^ℓ est

$$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \{ \mathbf{v}_h^\ell \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}^\ell))^2, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_\kappa \in (\mathbb{P}_1(\kappa))^2 \quad \forall \kappa \in T_h^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_a^\ell} = 0 \}.$$

La zone de contact Γ_c hérite de deux familles régulières de triangulations 1D notées $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$. Nous supposons que ces familles sont uniformément régulières afin que les inégalités inverses dans les espaces de Sobolev soient applicables (voir [4]). Pour des raisons techniques, nous supposons que $h = (h_1, h_2)$ est choisi de telle manière que h_1/h_2 soit borné. Pour des raisons de simplicité, nous supposons que Γ_c est le segment $[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2]$ et que $\mathbf{c}_1$ et $\mathbf{c}_2$ sont des nœuds communs aux deux discrétisations T_h^ℓ . Dans ce qui suit, $\mathcal{I}_h^\ell$ désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds du maillage de Ω^ℓ .

Afin d'approcher la condition de non-interpénétration présente dans (5.1.4), on introduit les espaces fonctionnels adéquats sur Γ_c . Soit $\mathbf{W}_h^\ell(\Gamma_c)$ l'image de $\mathbf{V}_h(\Omega^\ell)$ par l'opérateur trace sur Γ_c ,

$$\mathbf{W}_h^\ell(\Gamma_c) = \{ \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_c}, \quad \mathbf{v}_h^\ell \in \mathbf{V}_h(\Omega^\ell) \},$$

et l'on introduit l'espace des multiplicateurs de Lagrange nécessaire à la définition correcte des conditions de contact

$$\mathbf{M}_h^\ell(\Gamma_c) = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h^\ell(\Gamma_c), \quad \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{P}_0(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_{c,h}^\ell, \text{ si } \mathbf{c}_1 \text{ ou } \mathbf{c}_2 \in T \}.$$

On désigne par π_h^ℓ l'opérateur de projection sur $\mathbf{W}_h^\ell(\Gamma_c)$ défini pour toute fonction $\mathbf{v} \in \mathcal{C}(\Gamma_c)$ par

$$\begin{aligned} (\pi_h^\ell \mathbf{v})(\mathbf{c}_i) &= \mathbf{v}(\mathbf{c}_i), & \text{pour } i = 1 \text{ et } 2, \\ \int_{\Gamma_c} (\mathbf{v} - \pi_h^\ell \mathbf{v}) \mathbf{q}_h \, d\Gamma &= 0, & \forall \mathbf{q}_h \in \mathbf{M}_h^\ell(\Gamma_c). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Les propriétés de π_h^ℓ sont prouvées dans [5] et nous faisons que les rappeler:

Lemme 5.1 *L'opérateur de projection π_h^ℓ vérifie la condition de stabilité suivante dans $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2$: pour tout $\mathbf{v} \in (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2$,*

$$\| \pi_h^\ell \mathbf{v} \|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2} \leq C \| \mathbf{v} \|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2}, \quad (5.2.2)$$

et il vérifie la propriété d'approximation suivante: soit $\mu, \frac{1}{2} < \mu \leq 2$, alors pour tout $\mathbf{v} \in (H^\mu(\Gamma_c))^2$,

$$\|\mathbf{v} - \pi_h^\ell \mathbf{v}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2} \leq C' h_\ell^{\mu - \frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{(H^\mu(\Gamma_c))^2}. \quad (5.2.3)$$

Les deux constantes C et C' sont indépendantes de h_ℓ .

Nous sommes en mesure de définir le convexe d'approximation de $\mathbf{K}$. On pose

$$\mathbf{K}_h = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + (\pi_h^1 \mathbf{v}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\}. \quad (5.2.4)$$

Suivant la terminologie de [13], $\mathbf{W}_h^2(\Gamma_c)$ désigne l'espace des joints. Bien évidemment, il est possible de définir de manière symétrique le convexe $\mathbf{K}_h$ en prenant comme espace des joints $\mathbf{W}_h^1(\Gamma_c)$ et en utilisant la projection π_h^2 . Aussi, il est évident que $\mathbf{K}_h \not\subset \mathbf{K}$: l'approximation est alors non-conforme au sens de "Hodge".

Remarque 5.1. Il est clair que lorsque des maillages compatibles sont utilisés, les conditions de contact deviennent simplement $[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] \leq 0$ et l'approximation devient alors conforme ($\mathbf{K}_h \subset \mathbf{K}$).

Le problème éléments finis induit par le convexe (5.2.4) prend alors la forme d'une inéquation variationnelle: trouver $\mathbf{u}_h$ tel que

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h. \quad (5.2.5)$$

En évoquant les mêmes arguments que pour le problème continu, on déduit l'existence et l'unicité de $\mathbf{u}_h$ solution du problème; de plus cette solution satisfait la condition de bornitude suivante:

$$\|\mathbf{u}_h\|_* \leq C \sum_{\ell=1}^2 \left(\|\mathbf{f}^\ell\|_{(L^2(\Omega^\ell))^2} + \|\mathbf{g}^\ell\|_{(L^2(\Gamma_g^\ell))^2} \right), \quad (5.2.6)$$

où $C > 0$ est indépendant de h et des forces appliquées.

5.3 Estimation de l'erreur

5.3.1 Expression générale de l'erreur

Cette partie consiste à effectuer l'analyse numérique de l'erreur commise par l'approximation décrite précédemment.

L'outil de base, une version plus générale du lemme de Falk, permet de majorer l'erreur. Ce résultat joue le même rôle que le second lemme de Strang (1.3.1) pour le contact

bilatéral sans frottement et que le résultat (2.3.1) pour le contact unilatéral sans frottement.

Lemme 5.2 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème continu (5.1.8) vérifie $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^\nu(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^\nu(\Omega^2))^2$ avec $\frac{3}{2} < \nu \leq 2$. Soit $\mathbf{u}_h$ la solution du problème discrétisé (5.2.5). Alors*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C \Big\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h} \Big(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \Big| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)) \, d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} \\ + \Big| \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2| - |\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2|) \, d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} \Big) \\ + \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \Big| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_{hT}^1 - \mathbf{u}_{hT}^2|) \, d\Gamma \Big|^{\frac{1}{2}} \Big\}. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Preuve. Soit α la constante d'ellipticité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$. Alors

$$\alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h).$$

D'après (5.1.8) et (5.2.5), on écrit:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leq a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) &\leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h. \end{aligned}$$

On déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 &\leq a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) \\ &\quad - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) \\ &\quad + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) + j(\mathbf{v}_h) - j(\mathbf{u}_h). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

En appliquant la formule de Green sur Ω^1 et sur Ω^2 , on déduit:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_h) - L(\mathbf{v} - \mathbf{u}_h) = \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) \, d\Gamma.$$

En appliquant à nouveau la formule de Green, cela donne

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) - L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)) \, d\Gamma.$$

Comme la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, on écrit

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}) &\leq M \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_* \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_*, \\ &\leq M \left(\frac{\alpha}{2M} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_*^2 + \frac{M}{2\alpha} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_*^2 \right). \end{aligned}$$

Le report dans (5.3.2) des trois dernières estimations donne

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 &\leq \frac{M^2}{2\alpha} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{u}\|_*^2 + \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)) \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2| - |\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2|) \, d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_{hT}^1 - \mathbf{u}_{hT}^2|) \, d\Gamma. \end{aligned}$$

En prenant les deux infimum sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_h$, on conclut qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*^2 &\leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_*^2 + \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)) \, d\Gamma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2| - |\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2|) \, d\Gamma \right) \right. \\ &\quad \left. + \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left(\int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_{hT}^1 - \mathbf{u}_{hT}^2|) \, d\Gamma \right) \right\}. \end{aligned}$$

D'où le lemme. $\square$

On reconnaît ici l'erreur d'approximation

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* + \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)) \, d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \left| \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2| - |\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2|) \, d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Le premier terme intégral est dû à la nature du problème et ne disparaît pas, même dans le cas de maillages compatibles. Le second terme intégral s'annule dans le cas sans frottement. Dans l'étude à suivre, ces deux termes vont limiter le taux de convergence de la méthode.

L'erreur de consistance est

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1)\mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_{hT}^1 - \mathbf{u}_{hT}^2|) \, d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Cet infimum est généré par la non-conformité (i.e. $\mathbf{K}_h \not\subset \mathbf{K}$). Dans le cas conforme, ce terme disparaît. Comme pour le contact unilatéral sans frottement, on verra que le taux de convergence associé à cette erreur est meilleur que celui de l'erreur d'approximation.

5.3.2 Estimation de l'erreur d'approximation

Dans ce paragraphe, on donne une estimation de l'erreur d'approximation.

Lemme 5.3 *Supposons que la solution $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$ de (5.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$. Alors, il existe $\mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h$ qui satisfait les estimations suivantes*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2), \quad (5.3.3)$$

$$\left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)) \, d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2), \quad (5.3.4)$$

$$\left| \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2| - |\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2|) \, d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2^{\frac{3}{4}}), \quad (5.3.5)$$

où $C(\mathbf{u}) = C(\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}, \|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2})$.

Preuve. *i.*— Soit $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) \in \mathbf{K}$ vérifiant les hypothèses de régularité du lemme. Suivant des théorèmes de trace classiques dans les espaces de Sobolev, on a $\mathbf{u}^1|_{\Gamma_c} \in (H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c))^2$ et $\mathbf{u}^2|_{\Gamma_c} \in (H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c))^2$. En utilisant des opérateurs de relèvement, on déduit l'existence de $\mathbf{r} \in (H^2(\Omega^1))^2 \cap \mathbf{V}(\Omega^1)$ tel que $\mathbf{r} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ sur Γ_c et vérifiant la condition de stabilité

$$\|\mathbf{r}\|_{(H^2(\Omega^1))^2} \leq C\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|_{(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c))^2} \leq C(\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2} + \|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}).$$

En posant $\mathbf{w} = (\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2) = (\mathbf{u}^1 - \mathbf{r}, \mathbf{u}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$, il est clair que $\mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2 = 0$ sur Γ_c et

$$\mathbf{w} \in (H^2(\Omega^1))^2 \times (H^2(\Omega^2))^2.$$

Nous sommes ainsi dans une situation similaire au contact bilatéral. En procédant de manière analogue à [6], on approche $\mathbf{w}$ par $\mathbf{w}_h = (\mathbf{w}_h^1, \mathbf{w}_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2)$ vérifiant

$$\mathbf{w}_h^1 - \pi_h^1(\mathbf{w}_h^2) = 0 \text{ sur } \Gamma_c,$$

et l'estimation

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2),$$

avec $C(\mathbf{u})$ dépendant linéairement de $\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$ et $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}$. Ensuite, on définit

$$\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) = (\mathbf{w}_h^1 + \mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}, \mathbf{w}_h^2).$$

On vérifie que $\mathbf{v}_h$ appartient à $\mathbf{K}_h$

$$\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + (\pi_h^1 \mathbf{v}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 = (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}^1 = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \leq 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_* &\leq \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_* + \|\mathbf{r} - \mathcal{I}_h^1 \mathbf{r}\|_{(H^1(\Omega^1))^2}, \\ &\leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2) + Ch_1 \|\mathbf{r}\|_{(H^2(\Omega^1))^2}, \\ &\leq C(\mathbf{u})(h_1 + h_2),\end{aligned}$$

ce qui donne la première majoration du lemme.

ii.- Pour déterminer une borne supérieure du premier terme intégral, on écrit

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)) \, d\Gamma \right| \\ &= \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot (\mathbf{w}_h^1 - \mathbf{w}_h^2) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r} - \mathbf{r}) \, d\Gamma \right|, \\ &\leq \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot (\mathbf{w}_h^1 - \mathbf{w}_h^2) \, d\Gamma \right| + \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r} - \mathbf{r}) \, d\Gamma \right|.\end{aligned}$$

Le premier terme est évalué de manière classique comme en [13], et donne

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot (\mathbf{w}_h^1 - \mathbf{w}_h^2) \, d\Gamma \right| &= \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot (\pi_h^1(\mathbf{w}_h^2) - \mathbf{w}_h^2) \, d\Gamma \right|, \\ &\leq C(\mathbf{u})(h_1^2 + h_2^2).\end{aligned}$$

Le second terme est traité comme suit

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot (\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r} - \mathbf{r}) \, d\Gamma \right| &\leq \|\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1\|_{(L^2(\Gamma_c))^2} \|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r} - \mathbf{r}\|_{(L^2(\Gamma_c))^2}, \\ &\leq Ch_1^{\frac{3}{2}} \|\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1\|_{(L^2(\Gamma_c))^2} \|\mathbf{r}\|_{(H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c))^2}, \\ &\leq C(\mathbf{u})h_1^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

iii.- Le dernier terme (5.3.5) donne

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2| - |\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2|) \, d\Gamma \right| \\ &\leq \|s\|_{L^2(\Gamma_c)} \|(\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2) - (\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2)\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ &\leq C\|s\|_{L^2(\Gamma_c)} \|(\mathbf{v}_h^1 - \mathbf{v}_h^2) - (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)\|_{(L^2(\Gamma_c))^2}, \\ &\leq C\|s\|_{L^2(\Gamma_c)} (\|\pi_h^1(\mathbf{w}_h^2) - \mathbf{w}_h^2\|_{(L^2(\Gamma_c))^2} + \|\mathcal{I}_h^1 \mathbf{r} - \mathbf{r}\|_{(L^2(\Gamma_c))^2}).\end{aligned}$$

La quantité $\|\pi_h^1(\mathbf{w}_h^2) - \mathbf{w}_h^2\|_{(L^2(\Gamma_c))^2}$ est évaluée comme en [13], en utilisant les résultats de [5], et donne

$$\|\pi_h^1(\mathbf{w}_h^2) - \mathbf{w}_h^2\|_{(L^2(\Gamma_c))^2} \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{1}{2}}(h_1 + h_2)) \leq C(\mathbf{u})h_2^{\frac{3}{2}}.$$

Par conséquent

$$\left| \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_{hT}^1 - \mathbf{v}_{hT}^2| - |\mathbf{u}_T^1 - \mathbf{u}_T^2|) \, d\Gamma \right| \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{2}} + h_2^{\frac{3}{2}}).$$

D'où le lemme. □

Remarque 5.1. Dans le cas sans frottement (cf. chapitre 2), l'erreur d'approximation est majorée par $C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2)$. La prise en compte du frottement ramène seulement la convergence à

$$C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2^{\frac{3}{4}}).$$

5.3.3 Première estimation de l'erreur de consistance

Ce paragraphe est destiné à trouver une première borne supérieure pour l'erreur de consistance. Cette estimation nous permet ensuite de donner un premier taux de convergence global.

Lemme 5.4 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (5.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (5.2.5). Alors*

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_{hT}^1 - \mathbf{u}_{hT}^2|) d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \\ \leq C(\mathbf{u}) h_1^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

où $C(\mathbf{u}) = C \|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}$.

Preuve. En choisissant $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$ tel que

$$\mathbf{v}^1|_{\Gamma_c} = \mathbf{u}_h^1|_{\Gamma_c} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2|_{\Gamma_c} = \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2|_{\Gamma_c}, \quad \mathbf{v}_T^2|_{\Gamma_c} = \mathbf{u}_{hT}^2|_{\Gamma_c},$$

ce qui est possible en utilisant des opérateurs de relèvement, on écrit:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_{hT}^1 - \mathbf{u}_{hT}^2|) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

et ainsi: $\forall \psi_h \in \mathbf{M}_h^1(\Gamma_c)$,

$$\int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \psi_h \cdot \mathbf{n}^2)(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma.$$

Par dualité, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \right| \\ \leq \inf_{\psi_h \in \mathbf{M}_h^1(\Gamma_c)} \|\sigma_n(\mathbf{u}) - \psi_h \cdot \mathbf{n}^2\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))'} \|\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ petit, on déduit

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \right| \leq Ch_1 \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} h_1^\varepsilon \|\mathbf{u}_h^2\|_{(H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_c))^2}.$$

L'utilisation d'une inégalité inverse implique

$$\left| \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \right| \leq Ch_1 \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^\varepsilon \|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega_1))^2} \|\mathbf{u}_h\|_*.$$

Le résultat est obtenu en utilisant la stabilité de la solution discrète donnée par (5.2.6) et l'hypothèse sur h_1/h_2 . $\square$

5.3.4 Deuxième estimation de l'erreur de consistance

Désormais, nous sommes en mesure d'obtenir un premier taux de convergence de l'erreur globale commise par la méthode éléments finis. En utilisant les estimations des trois derniers lemmes, on obtient le taux de convergence suivant:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{1}{2}} + h_2^{\frac{3}{4}}),$$

si $\mathbf{u}|_{\Omega^1} \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}|_{\Omega^2} \in (H^2(\Omega^2))^2$. C'est l'erreur de consistance du lemme précédent qui limite la vitesse de convergence. Ainsi, nous appliquons un argument de bootstrap afin d'améliorer la majoration (5.3.6). Ceci est fait dans le lemme suivant

Lemme 5.5 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (5.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (5.2.5). Alors*

$$\begin{aligned} \inf_{v \in K} \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \cdot \mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2|) d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \\ \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2^{\frac{7}{8}}), \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

où $C(\mathbf{u}) = C(\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}, \|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2})$.

Preuve. En rassemblant les résultats (5.3.3), (5.3.4), (5.3.5) et (5.3.6) dans (5.3.1), on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{1}{2}} + h_2^{\frac{3}{4}}). \quad (5.3.9)$$

Une telle estimation permet d'améliorer la borne supérieure de l'erreur de consistance. En considérant à nouveau le terme intermédiaire (5.3.7), on note qu'il peut s'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma &= \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})((\pi_h^1 \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_c} \sigma_n(\mathbf{u})(\pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - (\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma. \end{aligned}$$

Pour la clarté de la présentation, on notera T_1, T_2 et T_3 les trois quantités intervenant dans la somme. On commence par borner la première, ce qui est fait en procédant de manière analogue à [13] :

$$|T_1| \leq C'(\mathbf{u})h_1^2,$$

avec $C'(\mathbf{u})$ dépendant linéairement de $\|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2}^2$.

Estimons le second terme T_2 . En utilisant les propriétés de l'opérateur de projection π_h^1 , on déduit: $\forall \psi_h \in \mathbf{M}_h^1(\Gamma_c)$,

$$T_2 = \int_{\Gamma_c} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \psi_h \cdot \mathbf{n}^2) ((\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma.$$

Par dualité, on obtient

$$|T_2| \leq \inf_{\psi_h \in \mathbf{M}_h^1(\Gamma_c)} \|\sigma_n(\mathbf{u}) - \psi_h \cdot \mathbf{n}^2\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))'} \|(\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2 - \pi_h^1(\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{n}^2\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

En observant que $\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2$ appartient à $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2$ et grâce à la continuité (5.2.2), on déduit

$$|T_2| \leq Ch_1 \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2}.$$

L'emploi de la propriété d'interpolation et de l'inégalité $2h_1 h_2 \leq h_1^2 + h_2^2$ donnent

$$|T_2| \leq C'(\mathbf{u})(h_1^2 + h_2^2).$$

Il reste à considérer le dernier terme T_3 . En procédant de manière analogue que pour T_2 , on arrive à

$$|T_3| \leq Ch_1 \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} h_1^\varepsilon \|\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\Gamma_c))^2}.$$

L'utilisation d'une inégalité inverse et l'insertion de $\mathbf{u}^2$ donnent

$$\begin{aligned} |T_3| &\leq Ch_1 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^\varepsilon \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \|\mathbf{u}_h^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c))^2}, \\ &\leq Ch_1 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^\varepsilon \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* + \|\mathbf{u}^2 - \mathcal{I}_h^2 \mathbf{u}^2\|_{(H^1(\Omega^2))^2}). \end{aligned}$$

On utilise alors l'estimation (5.3.9) conjointement avec la propriété d'interpolation ainsi que la bornitude de h_1/h_2 . Ceci implique

$$|T_3| \leq C'(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{2}} + h_2^{\frac{7}{4}}).$$

En assemblant ensuite les termes T_1, T_2 et T_3 , on déduit que l'erreur de consistance décroît au moins aussi rapidement que l'erreur d'approximation. Ceci établit le lemme. $\square$

5.3.5 Estimation de l'erreur globale et dernière estimation de l'erreur de consistance

Dans le théorème suivant, nous donnons une estimation de l'erreur globale.

Théorème 5.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (5.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$, et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (5.2.5). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_* \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{3}{4}} + h_2^{\frac{3}{4}}),$$

où $C(\mathbf{u}) = C(\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}, \|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2})$.

Preuve. Il suffit d'assembler les résultats (5.3.3), (5.3.4), (5.3.5) et (5.3.8) dans (5.3.1). $\square$

Remarque 5.2. Dans le cas de maillages compatibles, sans frottement (cf. [35]), le taux de convergence est en $(h_\ell^{\frac{3}{4}})$ en norme de l'énergie. Dans le cas de maillages incompatibles, sans frottement (cf. chapitre 2), le taux de convergence est identique. Dans le cas présent de maillages incompatibles et de prise en compte de frottement, nous obtenons le même taux de convergence.

On peut appliquer une fois de plus l'argument de bootstrap sur l'erreur de consistance et on vérifie facilement l'estimation suivante:

Corollaire 5.1 *Supposons que la solution $\mathbf{u}$ du problème (5.1.8) est telle que $\mathbf{u}^1 \in (H^2(\Omega^1))^2$ et $\mathbf{u}^2 \in (H^2(\Omega^2))^2$ et soit $\mathbf{u}_h$ la solution de (5.2.5). Alors*

$$\begin{aligned} \inf_{v \in K} \left| \int_{\Gamma_c} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot ((\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2) - (\mathbf{u}_h^1 - \mathbf{u}_h^2)) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} s(|\mathbf{v}_T^1 - \mathbf{v}_T^2| - |\mathbf{u}_{hT}^1 - \mathbf{u}_{hT}^2|) d\Gamma \right|^{\frac{1}{2}} \\ \leq C(\mathbf{u})(h_1^{\frac{7}{8}} + h_2^{\frac{7}{8}}), \end{aligned}$$

où $C(\mathbf{u}) = C(\|\mathbf{u}^1\|_{(H^2(\Omega^1))^2}, \|\mathbf{u}^2\|_{(H^2(\Omega^2))^2})$.

Preuve. Par application supplémentaire de la technique de bootstrap. $\square$

Remarque 5.3. Cette dernière estimation de l'erreur de consistance ne permet plus d'améliorer l'estimation globale car cette dernière est limitée par les majorations (5.3.4) et (5.3.5).

5.4 Questions d'existence et d'unicité à propos du frottement de Coulomb

Dans cette section, on considère le problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb entre deux solides élastiques.

Les équations régissant ce problème sont (5.1.1)–(5.1.7) où $s = \mu|\sigma_n(\mathbf{u})|$. La différence essentielle avec la première partie du chapitre est que s est inconnu. On a désigné par $\mu \in L^\infty(\Gamma_c)$ le coefficient de frottement donné sur la zone de contact.

Dans le cas présent, il ne s'agit pas de considérer le problème continu dont l'étude de l'existence et de l'unicité n'est pas close à notre connaissance. Pour les questions d'existence, on pourra se référer à [51],[39],[35] qui établissent l'existence dans le cas d'un coefficient de frottement petit. La détermination de l'unicité est un problème ouvert.

Nous nous intéresserons au problème discrétisé. Comme précédemment, la discrétisation est telle que les maillages sont incompatibles sur la zone de contact.

La technique de démonstration reprend le cheminement de [31],[32]. Toutefois des modifications sont effectuées à plusieurs niveaux.

1) Les multiplicateurs représentant la contrainte normale sur la zone de contact sont pris continus et affines par morceaux sur l'un des deux maillages et non plus constants par morceaux. Ceci évite le recours à certaines hypothèses de compatibilité entre les deux maillages.

2) Lorsque l'on est dans le cas de maillages compatibles, la discrétisation considérée revient à la condition de contact classique nœud à nœud. C'est pour cela que la condition de contact de type intégral adoptée dans [31] est délaissée. De plus, il y a fort à parier que cette dernière condition traduise moins bien le contact (voir le cas sans frottement, chapitre 4, section 2, où une telle condition est étudiée).

3) On s'affranchit de l'hypothèse de stabilité utilisée dans [31] pour obtenir un résultat de même nature.

Finalement, on conclut à l'existence d'une solution, pour tout pas de discrétisation $h = (h_1, h_2)$, et l'on déduit l'unicité pour un coefficient de frottement μ suffisamment petit. Le problème majeur provient de la condition de petitesse sur le coefficient de frottement qui est du type

$$\mu \leq C\sqrt{h_1}.$$

On évoquera la question sur la possibilité d'affaiblir l'hypothèse de petitesse.

5.4.1 Formulation du problème

La section reprend les hypothèses et notations de la section 2.1, que nous résumons: Ω^1 et Ω^2 sont deux solides discrétisés indépendamment et initialement en contact sur le segment Γ_c . Le pas de discrétisation sur Ω^1 (resp. Ω^2) est h_1 (resp. h_2).

On notera $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2)$ avec

$$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \{ \mathbf{v}_h^\ell \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}^\ell))^2, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_\kappa \in (\mathbb{P}_1(\kappa))^2 \quad \forall \kappa \in T_h^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_c^\ell} = 0 \},$$

où κ est un élément de la triangulation T_h^ℓ de Ω^ℓ . Soit M_h le convexe fermé des multiplicateurs défini par

$$M_h = \left\{ \lambda_h \in W_h^1, \quad \int_{\Gamma_c} \lambda_h \varphi_h d\Gamma \leq 0, \quad \forall \varphi_h \in W_h^1, \quad \varphi_h \geq 0 \right\},$$

où W_h^1 est l'espace des fonctions continues et affines par morceaux sur la trace du maillage de Ω^1 sur Γ_c . On notera que les multiplicateurs ne sont pas nécessairement négatifs sur tout Γ_c .

Pour des raisons de simplicité de notations, on notera $[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2$ et $[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}] = \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{t} - \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{t}$ où $\mathbf{v}^\ell = (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{n}^\ell) \mathbf{n}^\ell + \mathbf{v}_T^\ell$. On désignera par $\mu \in L^\infty(\Gamma_c)$ le coefficient de frottement sur la zone de contact, $a(\cdot, \cdot)$ et $L(\cdot)$ désignant respectivement la forme bilinéaire et linéaire introduites en (2.1.9) et (2.1.10).

Le problème avec frottement de Coulomb nécessite l'introduction d'un problème intermédiaire "à seuil de glissement fixé" (cf. sections 5.1–5.3). Le problème discrétisé de contact unilatéral avec frottement et à seuil de glissement $g_h \in M_h$ fixé, s'écrit sous la forme suivante: trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\lambda_h \in M_h$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h ([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] - [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]) d\Gamma \\ \quad - \int_{\Gamma_c} \mu g_h (|[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}]| - |[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}]|) d\Gamma \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \int_{\Gamma_c} (\mu_h - \lambda_h) (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \geq 0, \quad \forall \mu_h \in M_h. \end{array} \right. \quad (5.4.1)$$

Ce problème sera noté $(P(g_h))$.

Par application du lemme 3.1, on déduit que la condition de contact considérée est du type

$$\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0,$$

où π_h^1 est l'opérateur de projection L^2 sur le maillage de Ω^1 .

En appliquant des techniques de base sur les point-selle (cf. lemmes 3.1 et 3.2), on déduit l'existence et l'unicité d'un couple $(\mathbf{u}_h, \lambda_h) \in \mathbf{V}_h \times M_h$ solution de $(P(g_h))$.

On peut donc définir une application: $M_h \rightarrow \mathbf{V}_h \times M_h$ qui à g_h associe le couple $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$. On notera Ψ_h la première composante (i.e. $\Psi_h(g_h) = \mathbf{u}_h$) et Φ_h la deuxième composante (i.e. $\Phi_h(g_h) = \lambda_h$).

La définition du problème discrétisé avec frottement de Coulomb (cf. [31]) est inspirée de la définition du problème continu (cf. [39],[31]) et consiste en la recherche d'un point fixe sur les multiplicateurs:

Définition 5.1 *On appelle solution du problème discrétisé de contact unilatéral avec frottement de Coulomb entre deux solides élastiques, le champ de déplacements $\mathbf{u}_h$ vérifiant*

$$\mathbf{u}_h = \Psi_h(g_h) \text{ où } g_h \text{ est un point fixe de } \Phi_h.$$

5.4.2 Existence de la solution

Nous nous intéressons désormais à l'existence du problème discret. Pour établir l'existence, il suffit de montrer que Φ_h admet un point fixe sur M_h .

Théorème 5.2 (*Existence*) *Si $\mu \in L^\infty(\Gamma_c)$, alors il existe une solution du problème discrétisé.*

Preuve. *i.* – Dans un premier temps, on montre que Ψ_h est continue de M_h dans $\mathbf{V}_h$.

Soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ (resp. $(\overline{\mathbf{u}}_h, \overline{\lambda}_h)$) la solution de $(P(g_h))$ (resp. $(P(\overline{g}_h))$). On a

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] - [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}])d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \mu g_h(|[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}]| - |[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}]|)d\Gamma \\ \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h - \overline{\mathbf{u}}_h) - \int_{\Gamma_c} \overline{\lambda}_h([\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] - [\overline{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n}])d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \mu \overline{g}_h(|[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}]| - |[\overline{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{t}]|)d\Gamma \\ \geq L(\mathbf{v}_h - \overline{\mathbf{u}}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

En prenant $\mathbf{v}_h = \overline{\mathbf{u}}_h$ dans la première inéquation, $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans la seconde inéquation et en utilisant (5.4.1), on obtient:

$$a(\mathbf{u}_h, \overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_c} \mu g_h(|[\overline{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{t}]| - |[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}]|)d\Gamma \geq L(\overline{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h),$$

et

$$a(\overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h) - \int_{\Gamma_c} \mu \overline{g}_h(|[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}]| - |[\overline{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{t}]|)d\Gamma \geq L(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h).$$

Donc

$$a(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}}_h) \leq \int_{\Gamma_c} \mu (\overline{g}_h - g_h)(|[\overline{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{t}]| - |[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}]|)d\Gamma. \quad (5.4.2)$$

En notant $\|\cdot\|_*$, la norme $\|\cdot\|_{(H^1(\Omega^1))^2 \times (H^1(\Omega^2))^2}$ et α la constante de coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$, on déduit:

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_*^2 &\leq \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \|g_h - \overline{g_h}\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ &\leq C \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \|g_h - \overline{g_h}\|_{L^2(\Gamma_c)} \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_*. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_* \leq \frac{C \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)}}{\alpha} \|g_h - \overline{g_h}\|_{L^2(\Gamma_c)}, \quad (5.4.3)$$

ce qui démontre la continuité de l'application Ψ_h .

C'est la majoration grossière

$$\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{L^2(\Gamma_c)} \leq C \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_*,$$

qui va être à l'origine des problèmes d'unicité. On en discutera plus loin.

ii.- Dans un deuxième temps, on démontre que Φ_h est continue de M_h dans M_h . On rappelle que W_h^1 désigne l'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux sur le maillage de Ω^1 sur Γ_c . On pose donc, pour tout $\mu_h \in W_h^1$

$$\|\mu_h\|_{-\frac{1}{2},h} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h} \frac{\int_{\Gamma_c} \mu_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma}{\|\mathbf{v}_h\|_*}.$$

On vérifie facilement que $\|\cdot\|_{-\frac{1}{2},h}$ est une norme dépendante du maillage sur W_h^1 .

Soient $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ et $(\overline{\mathbf{u}_h}, \overline{\lambda_h})$ les solutions de $(P(g_h))$ et $(P(\overline{g_h}))$ respectivement. En reprenant le raisonnement du (i), on déduit

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

et

$$a(\overline{\mathbf{u}_h}, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \overline{\lambda_h} [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

où $\tilde{\mathbf{V}}_h$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{V}_h$ formé des fonctions $\mathbf{v}_h$ vérifiant $[\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{t}] = 0$ sur Γ_c . Ainsi

$$a(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} (\lambda_h - \overline{\lambda_h}) [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_c} (\lambda_h - \overline{\lambda_h}) [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \leq M \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_* \|\mathbf{v}_h\|_*, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

Soit

$$\begin{aligned} \|\lambda_h - \overline{\lambda_h}\|_{-\frac{1}{2},h} &\leq M \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_*, \\ &\leq \frac{MC \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)}}{\alpha} \|g_h - \overline{g_h}\|_{L^2(\Gamma_c)}. \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

On conclut que Φ_h est continue de M_h dans M_h .

iii. – Cette dernière étape consiste à utiliser le théorème de point fixe de Schauder afin d'établir l'existence d'une solution.

Soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_h)$ la solution de $(P(g_h))$. On a

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_c} \mu g_h |[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}]| d\Gamma = L(\mathbf{u}_h),$$

donc

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \leq L(\mathbf{u}_h), \quad \text{puis} \quad \alpha \|\mathbf{u}_h\|_*^2 \leq C_1 \|\mathbf{u}_h\|_*,$$

où C_1 est une constante qui dépend des forces appliquées. On a donc

$$\|\mathbf{u}_h\|_* \leq \frac{C_1}{\alpha}.$$

En utilisant la définition de $\tilde{\mathbf{V}}_h$, on obtient

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

d'où

$$\int_{\Gamma_c} \lambda_h [\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \leq M \|\mathbf{u}_h\|_* \|\mathbf{v}_h\|_* + C_1 \|\mathbf{v}_h\|_*, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

et

$$\begin{aligned} \|\lambda_h\|_{-\frac{1}{2},h} &\leq M \|\mathbf{u}_h\|_* + C_1, \\ &\leq \left(\frac{M}{\alpha} + 1\right) C_1. \end{aligned}$$

Cela donne

$$\|\Phi_h(g_h)\|_{-\frac{1}{2},h} \leq C, \quad \forall g_h \in M_h,$$

ce qui démontre le théorème. □

5.4.3 A propos de l'unicité

Soient λ_h et $\overline{\lambda}_h$ deux points fixes de Φ_h . D'après (5.4.4) et l'utilisation d'une inégalité inverse, on a

$$\begin{aligned} \|\lambda_h - \overline{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},h} &\leq \frac{MC\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)}}{\alpha} \|\lambda_h - \overline{\lambda}_h\|_{L^2(\Gamma_c)}, \\ &\leq C_1\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)}h_1^{-\frac{1}{2}}\|\lambda_h - \overline{\lambda}_h\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}. \end{aligned}$$

L'équivalence des normes $\|\cdot\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$ et $\|\cdot\|_{-\frac{1}{2},h}$ sur W_h (cf. section 3.2) fournit l'existence d'une constante C indépendante de h telle que

$$\|\lambda_h - \overline{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},h} \leq C\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)}h_1^{-\frac{1}{2}}\|\lambda_h - \overline{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},h}.$$

On obtient ainsi l'unicité de la solution lorsque $C\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_c)}h_1^{-\frac{1}{2}} < 1$. Le problème est que la condition d'unicité dépend de h , et de mauvaise manière: lorsque h tend vers 0, on perd l'unicité.

On regarde donc de plus près les majorations effectuées pour obtenir (5.4.4). La majoration qui est à l'origine de l'apparition de la dépendance en h pour la condition d'unicité apparaît dans (5.4.2): on majore avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz par le produit des normes $L^2(\Gamma_c)$ et $L^2(\Gamma_c)$, ce qui conduit ensuite à une majoration grossière. Majorons à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz par le produit des normes $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. Si l'on arrivait à montrer

$$\| |[\overline{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{t}]| - |[\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}]| \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C \| [\overline{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{t}] - [\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{t}] \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)},$$

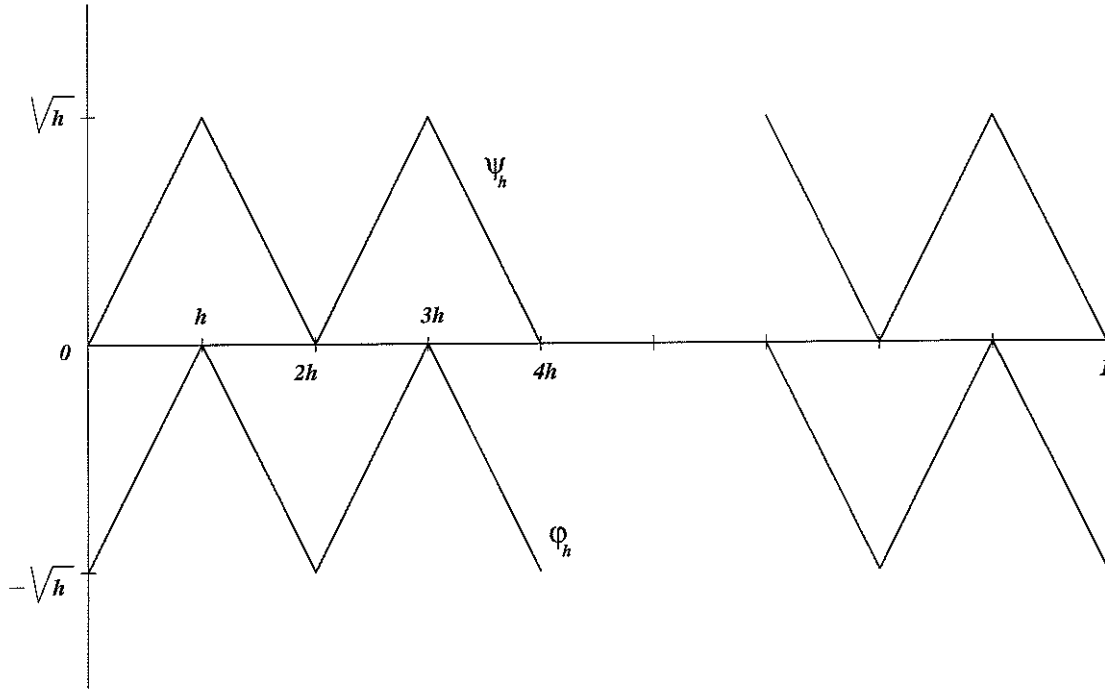
il s'ensuit que l'on obtiendrait l'unicité indépendamment de h . Le problème est évidemment le même dans le cas d'un seul maillage; nous considérons donc cette configuration. Cela revient à chercher l'existence d'une inégalité du type suivant sur W_h (φ_h et ψ_h jouant le rôle de deux déplacements tangentiels):

$$\| |\psi_h| - |\varphi_h| \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} \leq C \|\psi_h - \varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)},$$

ce qui n'aboutit pas en utilisant la définition de la norme sur $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$. On peut alors chercher des cas "pathologiques", c'est à dire des familles $(\psi_h)_h$ et $(\varphi_h)_h$ pour lesquelles on a $\|\psi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$ et $\|\varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}$ bornées et

$$\| |\psi_h| - |\varphi_h| \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)} = Ch^{-\frac{1}{2}} \|\psi_h - \varphi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)}.$$

Ce cas défavorable conduirait à une condition d'unicité du même type que celle dont nous disposons. Malheureusement, de telles familles de fonctions existent, (cf. figure suivante) ce qui tend à prouver que la majoration (5.4.2) n'est pas si grossière que cela pourrait sembler.



Les familles en question ont un comportement en dents de scie. On peut poser le problème de l'existence de chargements induisant de tels déplacements tangentiels. La question est à l'étude.

5.5 Conclusion

Au vu de la première partie de ce chapitre (sections 5.1–5.3), il apparaît que le taux de convergence de la méthode éléments finis n'est pas amoindri lors de la prise en compte d'une condition de frottement, pour peu que l'on adopte le raccord projection.

En adoptant une démarche similaire à celle effectuée dans les trois chapitres qui précèdent celui-ci, on obtiendrait l'analogue des résultats qui y sont démontrés. Ceci signifie que les études effectuées pour l'inéquation variationnelle du contact unilatéral s'étendent à l'inéquation variationnelle plus générale traduisant le problème avec frottement. En particulier, on établirait la supériorité de la condition de contact globale incorporée dans le raccord projection par rapport à la condition locale de type nœud–segment correspondant au raccord ponctuel.

Par ailleurs, la considération de conditions de frottement plus générales est en cours. On citera en particulier la loi de Coulomb,[26],[35],[50], pour laquelle on a brièvement évoqué certaines difficultés liées au problème discrétisé, mais également la loi de Coulomb non locale,[25],[20],[21] et les lois à déflexion normale,[47].

Chapitre 6

Mise en œuvre numérique

(Ce chapitre ne requiert pas la lecture des chapitres précédents)

Dans ce chapitre, on se propose d'effectuer la mise en œuvre numérique des techniques de raccord de maillages entre solides déformables discrétisés indépendamment; l'étude théorique de ces techniques de raccord figure dans les chapitres précédents. Les essais numériques ont été effectués avec le code éléments finis Castem 2000 du Laboratoire de Mécanique et Technologie à l'E.N.S. de Cachan.

Dans un souci d'auto-suffisance de la présentation, on rappelle brièvement dans ce chapitre les équations et formulations variationnelles (continue et discrétisée) décrivant le problème de contact unilatéral. Puis, on donne la formulation matricielle qui s'ensuit; on insistera sur l'écriture matricielle des diverses conditions de contact considérées. Dans un but de clarté, on compare ces dernières sur un exemple simple. Après avoir rappelé l'algorithme de résolution adopté dans le code de calcul, on décrit la démarche suivie pour le calcul numérique des erreurs de discrétisation et des taux de convergence associés. Finalement, on présente plusieurs tests. A la lumière de ces simulations, on voit clairement que l'utilisation du *raccord projection* donne ce qu'il y a de meilleur à espérer d'une définition du contact unilatéral sur des maillages incompatibles.

6.1 Le problème à résoudre

On considère dans l'espace bidimensionnel deux solides notés Ω^1 et Ω^2 , dont les frontières sont divisées en trois parties: une première partie soumise à des conditions de type forces imposées, une seconde partie (éventuellement vide) soumise à des conditions de type déplacements imposés et une troisième partie qui constitue la zone candidate au contact. On applique des forces volumiques à l'intérieur des solides et on impose des conditions de contact unilatéral (avec éventuellement un jeu initial entre les deux solides) sans frottement sur la zone candidate au contact. On se place dans l'hypothèse des petites

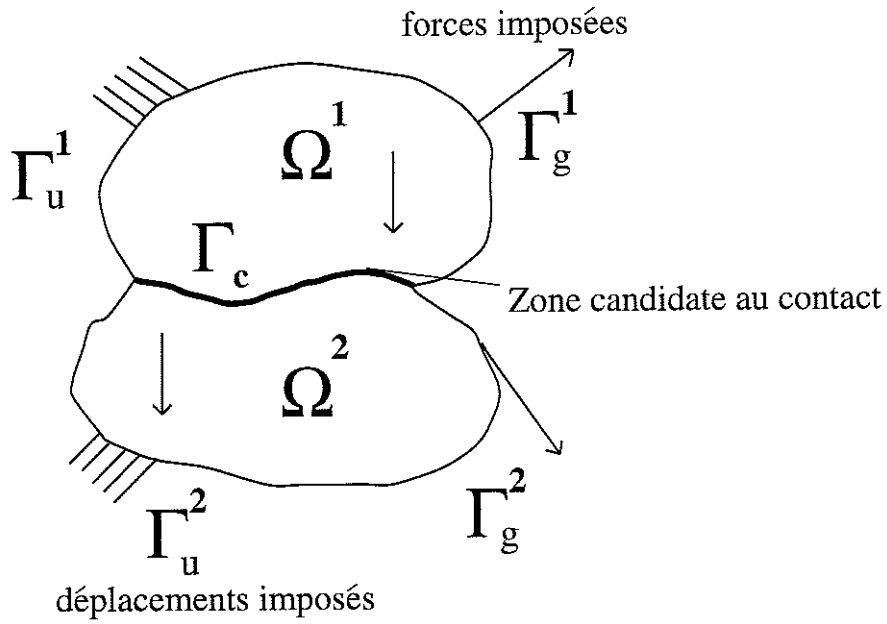
déformations.

6.1.1 Le problème continu: rappel

Les trois parties de la frontière de Ω^ℓ comprennent Γ_c qui est la zone de contact initiale entre les deux solides:

$$\partial\Omega^\ell = \Gamma_u^\ell \cup \Gamma_g^\ell \cup \Gamma_c, \quad \ell = 1, 2.$$

Le vecteur normal unitaire sortant de Ω^ℓ est noté $\mathbf{n}^\ell$, $\ell = 1, 2$. On désigne par $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$ (avec $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}|_{\Omega^\ell}$), le champ des déplacements et $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2)$ (avec $\sigma^\ell = \sigma|_{\Omega^\ell}$) représente le champ des contraintes.



Les équations et inéquations décrivant le problème sont les suivantes

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) + \mathbf{f}^\ell &= 0 && \text{dans } \Omega^\ell, \\ \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) &= C^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell) && \text{dans } \Omega^\ell, \\ \sigma^\ell(\mathbf{u}^\ell) \mathbf{n}^\ell &= \mathbf{g}^\ell && \text{sur } \Gamma_g^\ell, \\ \mathbf{u}^\ell &= 0 && \text{sur } \Gamma_u^\ell. \end{aligned}$$

Les conditions sur Γ_c sont

$$\begin{aligned} (\sigma^1(\mathbf{u}^1) \mathbf{n}^1) \cdot \mathbf{n}^1 &= (\sigma^2(\mathbf{u}^2) \mathbf{n}^2) \cdot \mathbf{n}^2 = \sigma_n(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 &\leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u})(\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2) = 0, \\ \sigma_T^1(\mathbf{u}^1) &= \sigma_T^2(\mathbf{u}^2) = 0, \end{aligned}$$

où $\sigma_T^{\ell}(\mathbf{u}^{\ell})$ désigne la composante tangentielle du vecteur contrainte $\sigma^{\ell}(\mathbf{u}^{\ell})\mathbf{n}^{\ell}$ et $\sigma_n(\mathbf{u})$ représente la contrainte normale sur Γ_c . L'opérateur d'élasticité est noté C^{ℓ} et $\varepsilon(\mathbf{v}^{\ell})$ désigne le tenseur des déformations linéarisé induit par le champ de déplacements $\mathbf{v}^{\ell}$.

On notera $\mathbf{V}(\Omega^{\ell})$ l'espace des fonctions vérifiant la condition d'encastrement sur Γ_u^{ℓ} et défini dans (2.1.6).

On pose alors, pour tous $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $\mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^{\ell}} C^{\ell} \varepsilon(\mathbf{u}^{\ell}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}^{\ell}) \, d\mathbf{x}. \quad (6.1.1)$$

Ainsi, $a(.,.)$ désigne la fonctionnelle bilinéaire symétrique classique de l'élasticité. On pose également

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_{\Omega^{\ell}} \mathbf{f}^{\ell} \cdot \mathbf{v}^{\ell} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_g^{\ell}} \mathbf{g}^{\ell} \cdot \mathbf{v}^{\ell} \, d\Gamma^{\ell} \right). \quad (6.1.2)$$

La forme linéaire $L(.)$ prend en compte l'action des forces extérieures $\mathbf{f}^{\ell}$ et $\mathbf{g}^{\ell}$. On définit ensuite le convexe des déplacements admissibles noté $\mathbf{K}$ et comprenant la condition de non-interpénétration des deux solides sur Γ_c :

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2), \quad \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c \right\}.$$

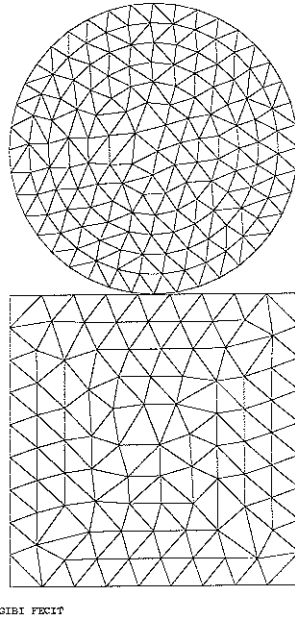
La formulation variationnelle associée au problème de contact unilatéral sans frottement entre deux solides élastiques est alors (cf. [26],[35],[40]): trouver $\mathbf{u}$ tel que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}.$$

Ce problème est bien posé et admet une solution unique dans le cas où les deux solides sont encastres (ou plus généralement soumis à une condition de type déplacement imposé) sur une partie de mesure non nulle de leur frontière. Le problème admet également une solution unique dans le cas où l'on n'a pas de condition de type déplacement imposé; dans ce cas il suffit d'une condition sur les déplacements rigides (cf. [40]). Le cas de contact avec jeu initial entre les deux solides (cf. section 3.5) se traite de manière analogue et fera l'objet d'un essai numérique (cf. Test 5).

6.1.2 Discrétisation par éléments finis

Les deux solides sont discrétisés par éléments finis, indépendamment l'un de l'autre et il s'ensuit des nœuds qui ne sont pas en vis à vis sur la zone de contact. La figure suivante présente une telle configuration.



On utilisera des éléments finis de type P1 (triangles à 3 nœuds). La raison essentielle de ce choix est que les solutions des problèmes de type contact ne sont pas assez régulières pour que des éléments finis de degré supérieur soient avantageux sur le plan de la convergence. On notera $V_h(\Omega^\ell)$ l'analogue discret de l'espace $V(\Omega^\ell)$. Les fonctions $v_h \in V_h(\Omega^\ell)$ sont continues sur Ω^ℓ , polynomiales de degré un sur chaque triangle de la discrétisation et vérifient l'éventuelle condition d'encastrement sur Γ_u^ℓ . On notera $V_h = V_h(\Omega^1) \times V_h(\Omega^2)$ et $h = (h_1, h_2)$, où h_ℓ est le pas de discrétisation sur Ω^ℓ .

Il s'agit de trouver l'analogue discret de K . On cherche la meilleure approximation discrète de la condition de non-interpénétration sachant qu'elle est à définir sur des nœuds qui ne sont généralement pas en vis à vis.

Le but est donc de trouver une condition de contact telle que

- 1) l'implantation numérique dans un code éléments finis de cette condition soit aisée,
- 2) les solutions discrètes vérifiant cette condition convergent "rapidement" vers la solution du problème continu.

Plusieurs conditions de contact ont été étudiées sur le plan théorique dans les chapitres

précédents. Toutes seront évoquées dans le présent chapitre et l'on discutera pour chacune d'entre elles, de leur comportement vis à vis des conditions 1) et 2) souhaitées.

Dans tous les cas, le convexe des déplacements admissibles discrétisé est de la forme:

$$\mathbf{K}_h = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h, \quad \text{t.q. condition de contact discrète sur } \Gamma_c \right\}.$$

Le problème discrétisé associé devient: trouver $\mathbf{u}_h$ tel que

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{K}_h, \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \geq L(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h. \quad (6.1.3)$$

Ce problème est bien posé et admet une solution unique (cf. étude du problème continu).

6.2 Formulation matricielle

Le but de cette section est de mettre sous forme adaptée à la résolution numérique, le problème de contact unilatéral entre deux solides dont les maillages sont incompatibles. On notera $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ le maillage 1D sur Γ_c issu de Ω^ℓ , $\ell = 1, 2$.

6.2.1 Condition de contact de type intégral

On commence par considérer, comme en [38], la solution discrète $\mathbf{u}_h$ construite à partir du convexe suivant:

$$\mathbf{K}_h = \left\{ \mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h, \quad \int_{\Gamma_c} (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) q_h d\Gamma \geq 0, \quad \forall q_h \in N_h(\Gamma_c) \right\}, \quad (6.2.1)$$

où $N_h(\Gamma_c)$ est l'ensemble des fonctions continues définies sur Γ_c , négatives et affines par morceaux sur $\mathcal{T}_{c,h}^1$.

On considère la formulation mixte suivante: trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\lambda_h \in N_h(\Gamma_c)$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \int_{\Gamma_c} (\mu_h - \lambda_h) (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \geq 0, & \forall \mu_h \in N_h(\Gamma_c). \end{cases} \quad (6.2.2)$$

En fait, le problème de point-selle sur $\mathbf{V}_h \times N_h(\Gamma_c)$ est associé au lagrangien suivant:

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \mu_h (\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma. \quad (6.2.3)$$

En suivant les techniques adoptées aux chapitres 3 (formulation en problème de point-selle) et 4 (raccord intégral), on montre que $\mathbf{u}_h$ est la solution du problème (6.1.3) construit à partir du convexe $\mathbf{K}_h$ défini en (6.2.1), et que le multiplicateur λ_h tend vers la contrainte normale $\sigma_n(\mathbf{u})$ du modèle continu quand h_1 et h_2 tendent vers zéro.

Afin de donner la formulation matricielle de ce problème mixte, on fixe $h = (h_1, h_2)$. On dispose alors d'une discrétisation comprenant $N = N_1 + N_2$ nœuds où N_ℓ est le nombre de nœuds appartenant à Ω^ℓ . Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a pas de conditions de type déplacements imposés. Les N fonctions de base de $\mathbf{V}_h$ sont notées Φ_i , $i = 1, \dots, N$, de telle sorte que si $\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2)$ on a

$$\mathbf{v}_h^1 = \sum_{i=1}^{N_1} v_h^1(i) \Phi_i, \quad \mathbf{v}_h^2 = \sum_{i=N_1+1}^N v_h^2(i) \Phi_i.$$

On désigne par m le nombre de nœuds sur Γ_c appartenant au maillage de Ω^1 et les valeurs de i comprises entre 1 et m correspondent à ces nœuds. On désigne par n le nombre de nœuds sur Γ_c appartenant au maillage de Ω^2 et les valeurs de i comprises entre $N_1 + 1$ et $N_1 + n + 1$ correspondent à ces nœuds.

Considérons l'équation de (6.2.2), c'est à dire (avec des notations évidentes déduites de (6.1.1)):

$$a^1(\mathbf{u}_h^1, \mathbf{v}_h^1) + a^2(\mathbf{u}_h^2, \mathbf{v}_h^2) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = L^1(\mathbf{v}_h^1) + L^2(\mathbf{v}_h^2),$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. En prenant $\mathbf{v}_h = (\Phi_j, 0)$, pour $j = 1, \dots, N_1$, on obtient

$$\begin{aligned} a^1(\mathbf{u}_h^1, \Phi_j) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h(\Phi_j \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma &= L^1(\Phi_j), \quad j = 1, \dots, m, \\ a^1(\mathbf{u}_h^1, \Phi_j) &= L^1(\Phi_j), \quad j = m + 1, \dots, N_1. \end{aligned}$$

Ecrivons

$$\lambda_h = \sum_{k=1}^m \lambda_h(k) \psi_k, \quad \text{où } \psi_k = \Phi_k \cdot \mathbf{n}^1, \quad k = 1, \dots, m.$$

Les ψ_k , au nombre de m , sont les fonctions scalaires de base sur $\mathcal{T}_{c,h}^1$.

On déduit ainsi le système d'équations suivant, d'inconnues $\mathbf{U}^1$ et Λ

$$K^1 \mathbf{U}^1 - \begin{pmatrix} A^1 \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = \mathbf{b}^1,$$

où

- $\mathbf{U}^1$ est le vecteur de composantes $u_h^1(i)$, $1 \leq i \leq N_1$,
- Λ est le vecteur de composantes $\lambda_h(k)$, $1 \leq k \leq m$,
- K^1 est la matrice carrée d'ordre N_1 de coefficients $k_{i,j}^1 = a^1(\Phi_i, \Phi_j)$, $1 \leq i, j \leq N_1$,
- A^1 est la matrice carrée d'ordre m de coefficients $a_{j,k}^1 = \int_{\Gamma_c} \psi_k \psi_j d\Gamma$, $1 \leq j, k \leq m$,
- $\mathbf{b}^1$ est le vecteur de composantes $b_j^1 = L^1(\Phi_j)$, $j = 1, \dots, N_1$.

De la même manière, en prenant $\mathbf{v}_h = (0, \Phi_j)$, pour $j = N_1 + 1, \dots, N$, et en notant $\varphi_k = \Phi_k \cdot \mathbf{n}^2$, $k = N_1 + 1, \dots, N_1 + n + 1$, les n fonctions scalaires de base sur $\mathcal{T}_{c,h}^2$, on obtient le système d'équations d'inconnues $\mathbf{U}^2$ et Λ s'écrivant

$$K^2 \mathbf{U}^2 - \begin{pmatrix} A^{2,1} \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = \mathbf{b}^2,$$

où

- $\mathbf{U}^2$ est le vecteur de composantes $u_h^2(i)$, $N_1 + 1 \leq i \leq N$,
- K^2 est la matrice carrée d'ordre N_2 de coefficients $k_{i,j}^2 = a^2(\Phi_i, \Phi_j)$, $N_1 + 1 \leq i, j \leq N$,
- $A^{2,1}$ est la matrice rectangulaire à n lignes et m colonnes de coefficients $a_{j,k}^2 = \int_{\Gamma_c} \psi_k \varphi_j d\Gamma$, $j = N_1 + 1, \dots, N_1 + n + 1$, $k = 1, \dots, m$,
- $\mathbf{b}^2$ est le vecteur de composantes $b_j^2 = L^2(\Phi_j)$, $j = N_1 + 1, \dots, N$.

Finalement l'équation de (6.2.2) devient

$$\begin{pmatrix} K^1 & 0 \\ 0 & K^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^1 \\ \mathbf{U}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^1 \\ 0 \\ A^{2,1} \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{pmatrix},$$

ou bien

$$K\mathbf{U} - A\Lambda = \mathbf{F} \text{ dans } \mathbb{R}^N. \quad (6.2.4)$$

D'autre part, l'inéquation de (6.2.2) donne

$$\int_{\Gamma_c} \mu_h (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \geq 0, \quad \forall \mu_h \in N_h(\Gamma_c).$$

En désignant par $u_{hN}^\ell(i)$ la composante normale de $u_h^\ell(i)$, cette dernière inéquation s'écrit également

$$\sum_{i=1}^m u_{hN}^1(i) \int_{\Gamma_c} \psi_k(\Phi_i \cdot \mathbf{n}^1) d\Gamma + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+n+1} u_{hN}^2(i) \int_{\Gamma_c} \psi_k(\Phi_i \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \leq 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

c'est à dire

$${}^t A^1 U_N^1 + {}^t A^{2,1} U_N^2 \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m,$$

avec

- U_N^1 désignant le vecteur de composantes $u_{hN}^1(i)$, $1 \leq i \leq m$,
- U_N^2 désignant le vecteur de composantes $u_{hN}^2(i)$, $N_1 + 1 \leq i \leq N_1 + n + 1$.

Finalement, le problème de point-selle (6.2.2) s'écrit

$$\begin{cases} KU - A\Lambda & = \mathbf{F} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ {}^tA^1U_N^1 + {}^tA^{2,1}U_N^2 & \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \Lambda & \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ ({}^tA^1U_N^1 + {}^tA^{2,1}U_N^2).\Lambda & = 0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque 6.1. Dans le cas présent, la condition de contact de type intégral s'écrit ${}^tA^1U_N^1 + {}^tA^{2,1}U_N^2 \leq 0$. On notera que A^1 représente la matrice de masse (symétrique) sur la trace du maillage de Ω^1 sur Γ_c . On dira que $A^{2,1}$ est la matrice de couplage des deux maillages sur la zone de contact. Lorsque les nœuds des deux solides sont en vis à vis, $A^1 = A^{2,1}$ et la condition précédente devient $A^1(U_N^1 + U_N^2) \leq 0$; ce qui ne revient pas à la condition de contact nœud à nœud qui est $U_N^1 + U_N^2 \leq 0$.

6.2.2 Condition de contact de type projection

En vue d'une implantation numérique, on présente la formulation matricielle d'une condition de contact de type raccord projection. Rappelons la définition du convexe incorporant cette condition:

$$\mathbf{K}_h = \{\mathbf{v}_h = (\mathbf{v}_h^1, \mathbf{v}_h^2) \in \mathbf{V}_h, \quad \mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}, \quad (6.2.5)$$

où π_h^1 désigne l'opérateur de projection L^2 sur le maillage de Ω^1 sur Γ_c . En d'autres termes, $\pi_h^1(\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)$ désigne la fonction définie sur Γ_c , continue et affine par morceaux sur le maillage de Ω^1 et qui est la plus proche de $\mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2$ pour la norme $L^2(\Gamma_c)$. Ceci confère bien évidemment un caractère global à cette condition de contact.

De la même manière que dans la partie précédente, on considère la formulation mixte suivante: trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\lambda_h \in M_h(\Gamma_c)$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_c} \lambda_h(\mathbf{v}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{v}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \int_{\Gamma_c} (\mu_h - \lambda_h)(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \geq 0, & \forall \mu_h \in M_h(\Gamma_c), \end{cases} \quad (6.2.6)$$

où $M_h(\Gamma_c)$ est constitué des fonctions continues et affines par morceaux sur $\mathcal{T}_{c,h}^1$ et vérifiant une condition affaiblie de négativité sur Γ_c (pour la définition exacte, cf. (3.2.2)). Le problème de point-selle sur $\mathbf{V}_h \times M_h(\Gamma_c)$ est associé au lagrangien défini en (6.2.3).

Les résultats du chapitre 3 montrent que $\mathbf{u}_h$ est la solution du problème (6.1.3) construit à partir du convexe $\mathbf{K}_h$ défini en (6.2.5), et que le multiplicateur λ_h tend vers la contrainte normale $\sigma_n(\mathbf{u})$ du modèle continu quand h_1 et h_2 tendent vers zéro.

L'équation de (6.2.6) s'écrit matriciellement: $KU - A\Lambda = \mathbf{F}$. De l'inéquation de (6.2.6), on tire

$$\int_{\Gamma_c} \mu_h(\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) d\Gamma \geq 0, \quad \forall \mu_h \in M_h(\Gamma_c).$$

Il a été montré en (3.2.3) que ceci est équivalent à

$$\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c,$$

cette dernière équivalence résultant d'un choix adéquat de $M_h(\Gamma_c)$ (cf. (3.2.2)).

Pour traduire cette condition, il reste donc à déterminer la formulation matricielle de l'opérateur faisant correspondre aux fonctions scalaires de type éléments finis sur $\mathcal{T}_{c,h}^2$, la projection L^2 sur l'espace des fonctions scalaires de type éléments finis sur $\mathcal{T}_{c,h}^1$. La matrice correspondant à cet opérateur possède m lignes et n colonnes, m et n désignant le nombre de nœuds des maillages de Ω^1 et Ω^2 sur Γ_c . L'ensemble des fonctions scalaires de type éléments finis sur $\mathcal{T}_{c,h}^\ell$ est noté $W_h^\ell(\Gamma_c)$. Pour $\varphi_h^2 \in W_h^2(\Gamma_c)$, la définition de l'opérateur de projection donne (cf. [15])

$$\int_{\Gamma_c} (\varphi_h^2 - \pi_h^1 \varphi_h^2) \psi_h^1 d\Gamma = 0, \quad \forall \psi_h^1 \in W_h^1(\Gamma_c), \quad (6.2.7)$$

soit

$$\int_{\Gamma_c} \varphi_h^2 \psi_h^1 d\Gamma = \int_{\Gamma_c} (\pi_h^1 \varphi_h^2) \psi_h^1 d\Gamma, \quad \forall \psi_h^1 \in W_h^1(\Gamma_c).$$

En décomposant suivant les fonctions de base de $W_h^1(\Gamma_c)$ et $W_h^2(\Gamma_c)$, on déduit (A^1 et $A^{2,1}$ ayant été définies précédemment) que

$${}^t A^{2,1} \varphi^2 = A^1 (\pi \varphi^2) \quad \text{puis} \quad \pi \varphi^2 = ((A^1)^{-1} {}^t A^{2,1}) \varphi^2,$$

où φ^2 désigne le vecteur dont les composantes sont les valeurs nodales (sur $\mathcal{T}_{c,h}^2$) de φ_h^2 . De manière analogue, $\pi \varphi^2$ désigne le vecteur dont les composantes sont les valeurs nodales (sur $\mathcal{T}_{c,h}^1$) de $\pi_h^1 \varphi_h^2$.

En adoptant les mêmes notations que dans la partie précédente, on déduit la formulation matricielle du problème de point-selle (6.2.6)

$$\begin{cases} KU - A\Lambda & = \mathbf{F} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \\ U_N^1 + (A^1)^{-1} {}^t A^{2,1} U_N^2 & \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ A^1 \Lambda & \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ (U_N^1 + (A^1)^{-1} {}^t A^{2,1} U_N^2) \cdot (A^1 \Lambda) & = 0 \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque 6.2. Dans ce cas, la condition de contact s'écrit $U_N^1 + \Pi U_N^2 \leq 0$ où $\Pi = (A^1)^{-1} {}^t A^{2,1}$ représente la matrice de projection. On a désigné par A^1 la matrice de masse

(symétrique) sur la trace du maillage de Ω^1 sur Γ_c et par $A^{2,1}$ la matrice de couplage entre les deux maillages sur la zone de contact. Dans le cas de maillages compatibles, $A^1 = A^{2,1}$ et la condition précédente devient $U_N^1 + U_N^2 \leq 0$, ce qui est précisément la condition de contact nœud à nœud classique.

Remarque 6.3. Le cas similaire où l'on utilise un opérateur de projection qui conserve les valeurs au bord de la zone de contact (cf. chapitre 2) conduit à des considérations techniques supplémentaires que nous n'évoquerons pas dans le cadre de cette étude. L'utilisation d'un tel opérateur se justifie pleinement dans une théorie plus générale de problèmes de contact; par exemple lorsque qu'il apparaît des points appartenant simultanément à trois zones de contact, ou bien des zones de contact et d'encastrement qui sont adjacentes, ou plus généralement un couplage avec une décomposition de domaines.

Remarque 6.4. Les deux conditions de contact (intégral et projection), présentées dans cette partie, autorisent l'interpénétration des deux solides dans le cas général de maillages incompatibles (cf. aussi chapitre 2, section 2 et chapitre 4, section 2). Notons que la condition de type projection est plus forte que celle de type intégral au sens suivant: si U_N^1 et U_N^2 vérifient $U_N^1 + (A^1)^{-1} {}^t A^{2,1} U_N^2 \leq 0$ alors la multiplication par la matrice à termes positifs A^1 , implique ${}^t A^1 U_N^1 + {}^t A^{2,1} U_N^2 \leq 0$. La réciproque est fausse, même dans le cas de maillages compatibles, la matrice $(A^1)^{-1}$ n'ayant pas ses termes tous positifs.

6.2.3 Mise sous forme de problème de minimisation et résolution algorithmique

Afin d'évoquer le principe de résolution, nous considérons dans cette partie le problème de contact sur des maillages incompatibles.

En se référant à la partie précédente, on considère le problème sous la forme de recherche d'un point-selle de lagrangien, qui, mis sous forme matricielle s'écrit:

$$\max_{A^1 \Lambda \leq 0} \left(\min_{\mathbf{V}} \frac{1}{2} {}^t \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{V} - {}^t \mathbf{V} \mathbf{F} - {}^t (\mathbf{B} \mathbf{V}) A^1 \Lambda \right),$$

la matrice $\mathbf{B}$ traduisant la condition de contact (ci-après de type projection) définie par

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} I_m & 0 & ((A^1)^{-1} {}^t A^{2,1}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2.8)$$

où l'on désigne par I_m la matrice identité d'ordre m et où $\mathbf{K}, A^1, A^{2,1}, \Lambda, \mathbf{F}, A$ ont été définis dans la partie 6.2.1. Le cas d'un raccord ponctuel est abordé de la même manière en écrivant les conditions correspondantes dans (6.2.8).

Sachant que $K\mathbf{U} - A\Lambda = \mathbf{F}$ et que K est inversible, il s'ensuit que le problème revient à trouver

$$\max_{A^1\Lambda \leq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t(K^{-1}(\mathbf{F} + A\Lambda))K(K^{-1}(\mathbf{F} + A\Lambda)) - {}^t(K^{-1}(\mathbf{F} + A\Lambda))\mathbf{F} - {}^t(BK^{-1}(\mathbf{F} + A\Lambda))A^1\Lambda \right).$$

En notant $\Gamma = A^1\Lambda$ la quantité représentant les forces nodales de contact sur le premier maillage, l'expression précédente devient

$$\max_{\Gamma \leq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t(\mathbf{F} + A(A^1)^{-1}\Gamma)K^{-1}(\mathbf{F} + A(A^1)^{-1}\Gamma) - {}^t(\mathbf{F} + A(A^1)^{-1}\Gamma)K^{-1}\mathbf{F} - {}^t(BK^{-1}(\mathbf{F} + A(A^1)^{-1}\Gamma))\Gamma \right).$$

On note ensuite que $A(A^1)^{-1} = {}^tB$ ce qui donne

$$\max_{\Gamma \leq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t(\mathbf{F} + {}^tB\Gamma)K^{-1}(\mathbf{F} + {}^tB\Gamma) - {}^t(\mathbf{F} + {}^tB\Gamma)K^{-1}\mathbf{F} - {}^t(BK^{-1}(\mathbf{F} + {}^tB\Gamma))\Gamma \right),$$

puis, en regroupant les termes et par un changement de signe, on arrive au problème de minimisation suivant

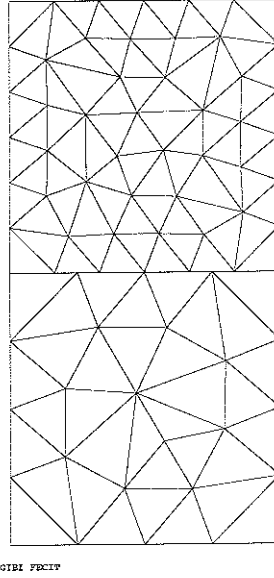
$$\min_{\Gamma \leq 0} \left(\frac{1}{2} {}^t\Gamma BK^{-1}{}^tB\Gamma + {}^t\Gamma BK^{-1}\mathbf{F} + \frac{1}{2} {}^t\mathbf{F}K^{-1}\mathbf{F} \right). \quad (6.2.9)$$

Comme B est de rang maximal, la matrice $BK^{-1}{}^tB$ est symétrique définie positive. Le problème consiste alors à résoudre ce problème de minimisation de fonctionnelle quadratique définie positive sous contraintes convexes. Dans ce cas, le champ de déplacements $\mathbf{U}$ se déduit aisément de Γ par la formule $\mathbf{U} = K^{-1}(\mathbf{F} + A(A^1)^{-1}\Gamma)$. Afin de résoudre le problème (6.2.9), le code de calcul castem 2000 adopte l'algorithme de Frank et Wolfe [28],[49]. Il s'agit d'un algorithme itératif dont la convergence est démontrée sous les hypothèses présentes (cf. [49], théorème 9 p.211).

On notera que le multiplicateur Λ est reconstruit à partir des forces nodales Γ négatives comme suit: $\Lambda = (A^1)^{-1}\Gamma$, A^1 représentant la matrice de masse correspondant au maillage du premier solide sur la zone de contact. Il s'ensuit que Λ n'est pas nécessairement négatif (cf. Test 4).

6.2.4 Formulation matricielle de différentes conditions de contact sur un exemple

Dans le but de présenter clairement les différences entre les raccords évoqués précédemment (type projection, ponctuel et intégral), on se propose d'illustrer leurs principales caractéristiques sur un exemple. La configuration choisie consiste en une superposition de deux solides dont les zones de contact (subdivisées respectivement en 6 et 4 segments de longueurs égales) contiennent respectivement 7 et 5 nœuds. On désignera par Ω^1 (resp. Ω^2) le solide du haut (resp. du bas).



Raccord projection sans condition au bord

On considère la condition de contact faisant intervenir l'opérateur de projection L^2 classique. Elle s'écrit (cf. partie 6.2.2)

$$\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0,$$

où π_h^1 désigne l'opérateur de projection sur le maillage de Ω^1 défini en (6.2.7).

En reprenant l'étude de la partie précédente, on déduit que la matrice correspondant à l'opérateur de projection s'écrit $(A^1)^{-1} {}^t A^{2,1}$ où

- A^1 est la matrice de masse carrée d'ordre 7 de coefficients $a_{j,k}^1 = \int_{\Gamma_c} \psi_k \psi_j d\Gamma$, $1 \leq j, k \leq 7$,
- $A^{2,1}$ est la matrice de couplage rectangulaire à 5 lignes et 7 colonnes de coefficients $a_{j,k}^{2,1} = \int_{\Gamma_c} \varphi_j \psi_k d\Gamma$, $1 \leq j \leq 5$, $1 \leq k \leq 7$.

On a désigné par ψ_k (resp. φ_k) les fonctions scalaires de base définies sur la zone de contact et associées au maillage de Ω^1 (resp. Ω^2).

La condition de contact s'écrit alors :

$$U_N^1 + ((A^1)^{-1} {}^t A^{2,1}) U_N^2 \leq 0,$$

c'est à dire pour l'exemple considéré

$$\begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_4^1 \\ U_5^1 \\ U_6^1 \\ U_7^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0283 & -0.0566 & 0.0278 & 0.0011 & -0.0005 \\ 0.2767 & 0.7799 & -0.0555 & -0.0022 & 0.0011 \\ -0.0518 & 0.7703 & 0.2777 & 0.0076 & -0.0037 \\ 0.0139 & -0.0278 & 1.0280 & -0.0283 & 0.0139 \\ -0.0037 & 0.0074 & 0.2768 & 0.7723 & -0.0518 \\ 0.0010 & -0.0020 & -0.0518 & 0.7723 & 0.2767 \\ -0.0003 & 0.0005 & 0.0139 & -0.0283 & 1.0283 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \\ U_5^2 \end{pmatrix} \leq 0$$

Le caractère non local de l'opérateur de projection se distingue clairement par le fait de coefficients tous non nuls. Bien évidemment, les coefficients de la matrice proches de 1 concernent les nœuds des deux solides qui sont voisins ou confondus. De la même manière, les petits coefficients éloignés de la "diagonale" de la matrice traduisent la relation de contact entre nœuds distants.

Raccord projection avec condition au bord

On considère la condition de contact faisant intervenir l'opérateur de projection π_h^{1*} défini en (2.2.4) et s'écrivant

$$\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^{1*}(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0.$$

Cet opérateur est très voisin de l'opérateur de projection classique dont l'écriture matricielle a été établie précédemment. Le fait qu'il conserve les valeurs aux bords facilite le traitement de problèmes de contact avec décomposition de domaines qui sont à l'étude.

La condition de contact s'écrit alors :

$$U_N^1 + \Pi^* U_N^2 \leq 0,$$

c'est à dire dans le cas étudié

$$\begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_4^1 \\ U_5^1 \\ U_6^1 \\ U_7^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.2947 & 0.7440 & -0.0379 & -0.0016 & 0.0008 & 0.0000 \\ -0.0566 & 0.7799 & 0.2727 & 0.0080 & -0.0040 & 0.0000 \\ 0.0152 & -0.0303 & 1.0303 & -0.0303 & 0.0152 & 0.0000 \\ -0.0040 & 0.0080 & 0.2727 & 0.7799 & -0.0566 & 0.0000 \\ 0.0008 & -0.0016 & -0.0379 & 0.7740 & 0.2947 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \\ U_5^2 \end{pmatrix} \leq 0$$

Dans ce cas également, le caractère non local de l'opérateur se manifeste clairement.

Raccord ponctuel

On considère une condition de contact faisant intervenir l'opérateur d'interpolation de Lagrange. C'est à dire que l'on définit le contact pour chaque nœud du premier maillage en faisant intervenir le segment le plus proche défini par deux nœuds du deuxième maillage. Ceci confère à la condition (appelée aussi condition de contact nœud-segment), un caractère local (cf. chapitre 4, section 1, pour l'étude théorique). Ceci s'écrit

$$\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathcal{I}_h^1(\mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0,$$

où $\mathcal{I}_h^1$ désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds du maillage de Ω^1 sur Γ_c . Il est clair que dans le cas de maillages compatibles, cette condition revient à la condition nœud à nœud classique. La condition de contact devient :

$$U_N^1 + IU_N^2 \leq 0,$$

où I est la matrice représentant l'opérateur d'interpolation de Lagrange. Ceci se traduit de la manière suivante pour le test choisi:

$$\begin{pmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_4^1 \\ U_5^1 \\ U_6^1 \\ U_7^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3333 & 0.6666 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6666 & 0.3333 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3333 & 0.6666 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.6666 & 0.3333 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \\ U_5^2 \end{pmatrix} \leq 0$$

Le caractère local de cette condition se traduit par un grand nombre de coefficients de la matrice nuls; ces coefficients correspondant aux nœuds qui n'entrent pas en interaction lors de la définition du contact nœud-segment.

Raccord intégral

La condition de contact visant à traduire le contact unilatéral sous forme intégrale est

$$\int_{\Gamma_c} (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) q_h \geq 0,$$

pour tout q_h continu, affine par morceaux et négatif sur le premier maillage. Une telle condition a été considérée et étudiée plus en détail au chapitre 4, section 2. De plus, il a été vu dans la partie 6.2.1 que cette condition de contact s'écrit

$$A^1 U_N^1 + {}^t A^{2,1} U_N^2 \leq 0,$$

où la matrice de masse A^1 et la matrice de couplage $A^{2,1}$ ont été introduites dans la partie 6.2.1.

Dans le cas présent, en supposant par exemple que la longueur de Γ_c est 6, on a

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0.1666 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.1666 & 0.6666 & 0.1666 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.1666 & 0.6666 & 0.1666 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1666 & 0.6666 & 0.1666 & 0.1666 & 0.1666 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1666 & 0.6666 & 0.1666 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1666 & 0.6666 & 0.1666 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1666 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

et

$${}^t A^{2,1} = \begin{pmatrix} 0.3889 & 0.1111 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3472 & 0.6389 & 0.0139 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0139 & 0.6389 & 0.3472 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.1111 & 0.7778 & 0.1111 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3472 & 0.6389 & 0.0139 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0139 & 0.6389 & 0.3472 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1111 & 0.3889 \end{pmatrix}$$

Cas d'un jeu initial

Dans les cas considérés précédemment, nous avons fait l'hypothèse que la zone de contact initiale contenait la zone de contact finale. Dans cette partie numérique, nous prendrons en compte la possibilité d'élargissement de la zone de contact initiale. Dans ce cas, il faut tenir compte du jeu initial entre les deux surfaces candidates au contact. Pour le problème continu, la condition de non-interpénétration est du type $\mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \leq g$ où la fonction g définie sur la zone candidate au contact, est connue et positive. Cette fonction représente la distance initiale entre les deux solides (cf. [40]).

Ceci donne, après discrétisation incorporant le raccord projection par exemple, une condition de contact du type suivant

$$U_N^1 + ((A^1)^{-1} {}^t A^{2,1}) U_N^2 \leq G, \quad (6.2.10)$$

qui généralise la condition vue précédemment où $G = 0$. On a désigné par G un vecteur dont les composantes sont les valeurs discrètes de la distance initiale entre les deux solides (cf. [40]). Cette condition de contact sera utilisée plus loin pour le test de contact entre un demi-disque et un socle déformables.

6.3 Détermination numérique de l'erreur

Dans les chapitres précédents, on a étudié d'un point de vue théorique les taux de convergence des solutions discrétisées vers la solution du modèle continu. Cette partie consiste à déterminer numériquement ces taux de convergence.

Il s'agit de calculer l'erreur commise sur la solution exacte (notée $\mathbf{u}$) par les différentes approximations par éléments finis. Comme l'on ne dispose pas de solution analytique pour les problèmes de contact unilatéral, on est amené à calculer sur un maillage très fin la solution discrète que l'on considèrera comme solution de référence (dans le calcul de l'erreur) et que nous noterons $\mathbf{u}_{ref}$.

L'étape suivante consiste à construire une famille de maillages emboîtés. Cette famille est obtenue à l'aide d'un algorithme de sous-découpage des triangles: on démarre d'un maillage très grossier et le maillage suivant est obtenu par le découpage naturel de chaque triangle en 4 triangles. On calcule ensuite une solution approchée $\mathbf{u}_h$ sur chaque maillage. Suivant la remarque précédente, l'erreur $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_*$ (c'est à dire $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{(H^1(\Omega^1))^2 \times (H^1(\Omega^2))^2}$), est évaluée numériquement par $\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_*$. Il en est de même pour $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{(L^2(\Omega^1 \cup \Omega^2))^2}$.

L'étape suivante consiste à évaluer $\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_*$. Pour cela, on approche $\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_*$ par $\|\mathcal{I}_h \mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_*$ où $\mathcal{I}_h$ désigne l'opérateur d'interpolation de Lagrange. Finalement, $\|\mathcal{I}_h \mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|_*$ est évalué au moyen de la norme équivalente $\|\sigma(\mathcal{I}_h \mathbf{u}_{ref}) - \sigma(\mathbf{u}_h)\|_{(L^2(\Omega^1 \cup \Omega^2))^2}$.

Le maillage le plus fin de la famille construite à partir de l'algorithme de sous-découpage constitue le maillage de référence. L'utilisation d'une famille de maillages emboîtés pour le calcul de l'erreur, plutôt qu'une famille quelconque de maillages générée par le mailleur, est dictée par la meilleure cohérence des résultats obtenus.

Pour des raisons évidentes de validité des résultats, on ne peut pas calculer d'erreur sur le maillage de référence. Suivant des raisons guidées par l'expérience pratique de ce type de démarche, on fera le dernier calcul de solution approchée sur l'avant-avant dernier maillage qui possède donc 16 fois moins de triangles que le maillage de référence.

Dans le cadre des tests numériques, on s'intéressera à deux taux de convergence:

- le taux α correspondant à $\frac{\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|}{\|\mathbf{u}_{ref}\|} = Ch_1^\alpha$,
- le taux β correspondant à $\frac{\|\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h\|}{\|\mathbf{u}_{ref}\|} = C\left(\frac{1}{\sqrt{m_h}}\right)^\beta$,

où

- $\|\cdot\| = \|\cdot\|_*$ ou $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{(L^2(\Omega^1 \cup \Omega^2))^2}$,
- h_1 désigne le pas de discrétisation du solide supérieur,
- m_h correspond au nombre total de degrés de liberté du problème.

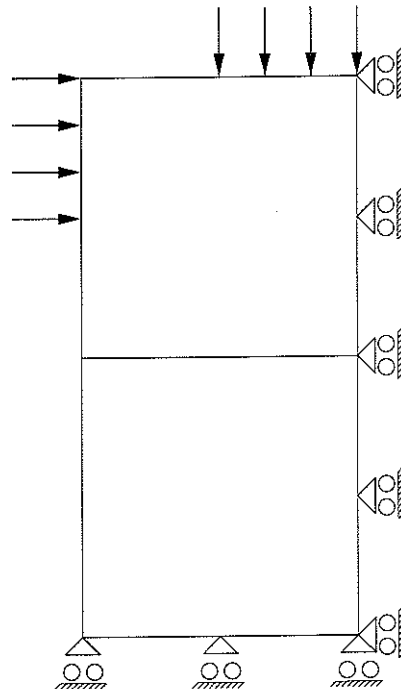
6.4 Tests numériques

Cette section présente plusieurs tests visant à implanter et comparer les conditions de contact présentées précédemment. Tous les calculs ont été effectués sur station de travail HP série K (processeur PA 8000 à 180 Mhz).

Par la suite, le symbole $\triangleleft \circ \circ \circ$ indiquera une condition aux limites fournie par la symétrie du problème (déplacement normal nul), les flèches représentent les forces appliquées sur la partie de la frontière correspondante. La partie de la frontière soumise à des conditions d'encastrement est représentée par une hachure. Les parties de la frontière ne correspondant à aucune des conditions évoquées ci-dessus sont soit en contact initialement, soit soumises à des forces nulles.

6.4.1 Test1: comparaison maillage compatible–maillage incompatible

On considère le problème de contact unilatéral représenté par la figure ci-dessous. Afin d'éliminer les singularités de type Neumann–Dirichlet qui pourraient masquer les éventuelles singularités de type contact, on adopte des conditions de symétrie. Le problème sans conditions de symétrie comprend trois solides et deux zones de contact. La figure suivante représente ainsi le quart supérieur gauche du problème.



La longueur des côtés de chaque carré est de 1 *mm*. Le module de Young du solide du haut (resp. du bas) est $E_1 = 13000 \text{ Mpa}$ (resp. $E_2 = 30000 \text{ Mpa}$). Le coefficient de Poisson pour les deux solides est $\nu = 0.2$. Les contraintes appliquées sur les deux parties de la frontière du solide supérieur sont de 100 *daN/mm²*.

On choisit des triangles à 3 nœuds et on calcule le taux de convergence en utilisant soit des maillages compatibles sur la zone de contact, soit des maillages incompatibles avec raccord projection.

Maillages compatibles

La solution de référence (figure 6.1.2) est calculée pour des maillages compatibles sur la zone de contact comprenant au total 65536 éléments et 66564 ddl (figure 6.1.1). La zone de contact comporte 129 nœuds en vis à vis et on utilise la condition de non-interpénétration nœud à nœud (qui coïncide ici avec le raccord projection). Le maillage de référence est obtenu par construction d'une famille de maillages emboîtés (figure 6.1.3). Le calcul de la solution de référence nécessite 6 minutes 52 secondes de temps CPU.

Le calcul de l'erreur s'effectue sur 5 maillages (figure 6.1.3), le plus fin comportant 33 nœuds en vis à vis sur la zone de contact.

Maillages incompatibles avec raccord projection

La solution de référence (figure 6.1.5) est calculée pour des maillages incompatibles sur la zone de contact comprenant au total 28160 éléments et 28804 ddl (figure 6.1.4). Le maillage de référence comporte 65 nœuds du premier solide et 97 nœuds du second solide. Il est obtenu par construction d'une famille de maillages emboîtés (figure 6.1.6). Le calcul de la solution de référence (comprenant le calcul de la matrice de projection) nécessite 9 minutes 12 secondes de temps CPU.

Le calcul de l'erreur s'effectue sur 4 maillages (figure 6.1.6), le plus fin comportant 17 nœuds sur le premier solide et 25 nœuds sur le second solide. On utilisera l'opérateur de projection sur le maillage du solide supérieur; c'est à dire que suivant les notations de la partie 6.2.2, le solide du haut (resp. du bas) joue le rôle de Ω^1 (resp. de Ω^2).

Commentaires

Le taux de convergence α (cf. section 6.3) obtenu lors du calcul de l'erreur en fonction du pas de discrétisation du solide supérieur (figures 6.1.7 et 6.1.9) est égal à

- pour la norme H^1 : 1.21 en compatible et 1.26 en incompatible,

- pour la norme L^2 : 1.75 en compatible et 1.69 en incompatible.

Le taux de convergence β (cf. section 6.3) obtenu lors du calcul de l'erreur en fonction de $(\text{nombre de ddl})^{-\frac{1}{2}}$ (figures 6.1.8 et 6.1.10) est égal à

- pour la norme H^1 : 1.41 en compatible et 1.46 en incompatible,
- pour la norme L^2 : 2.03 en compatible et 1.95 en incompatible.

Sur cet exemple, on observe que les taux de convergence ne sont pas amoindris lors de l'utilisation de maillages incompatibles avec une condition de contact discrète de type projection, en comparaison avec le cas compatible et une condition de contact nœud à nœud.

Sur les figures 6.1.7 et 6.1.9, l'erreur relative est plus faible dans le cas de maillages incompatibles par rapport au cas compatible. Ceci est dû au fait suivant: pour un même pas de discrétisation du solide supérieur, le solide du bas est plus raffiné dans le cas incompatible, ce qui donne une meilleure approximation de la solution sur le solide inférieur. Lorsque l'erreur est exprimée en fonction des degrés de liberté (figures 6.1.8 et 6.1.10) c'est l'erreur du cas compatible qui est la plus faible.

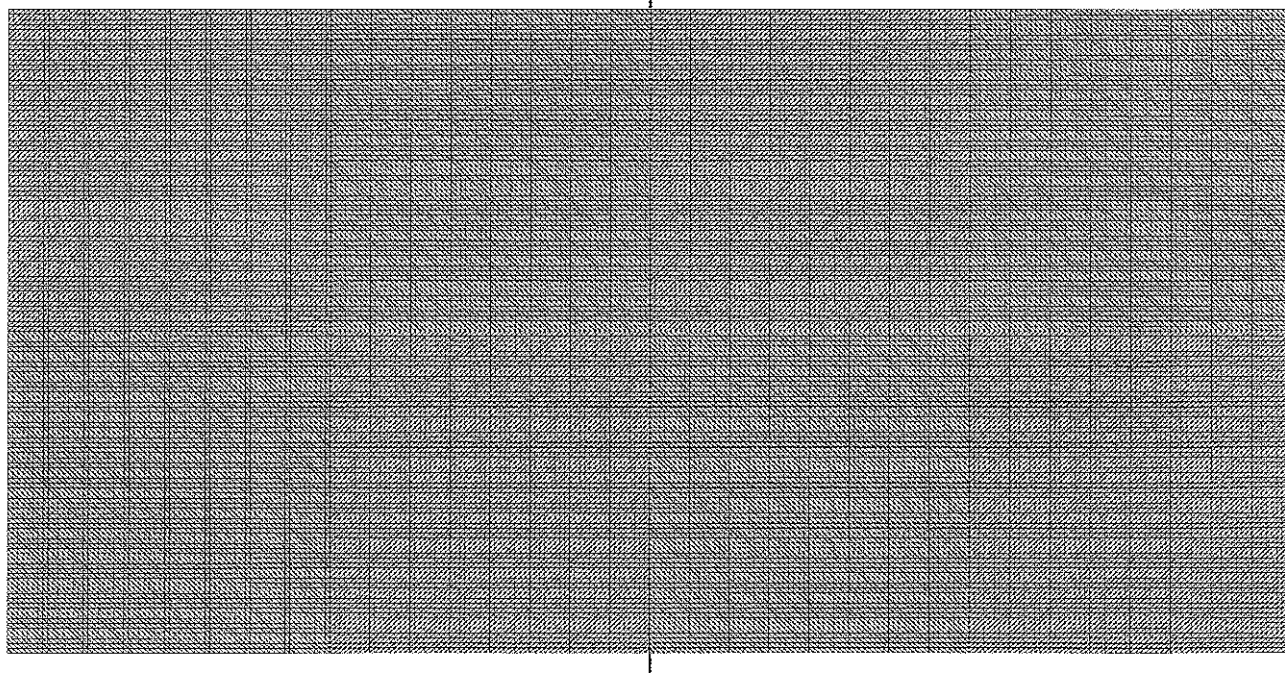


Figure 6.1.1

Cas compatible: maillage pour le calcul de la solution de référence

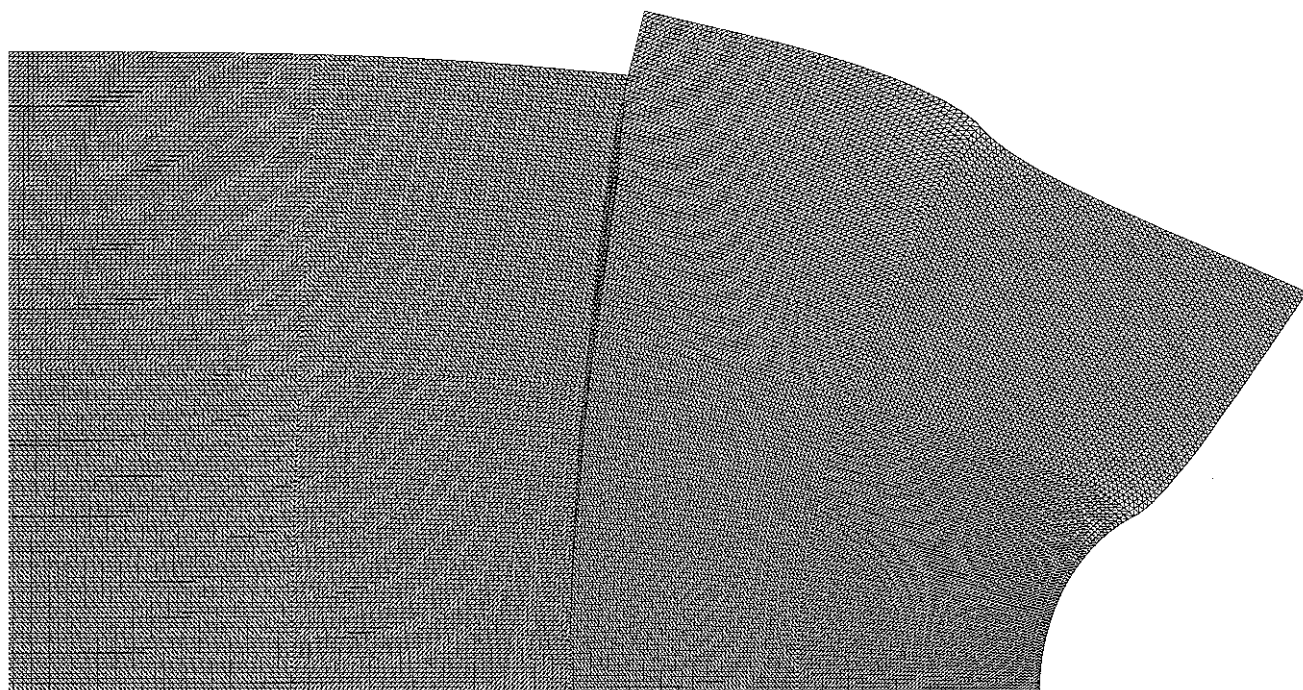
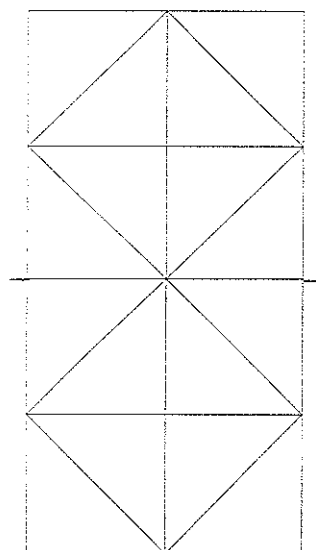
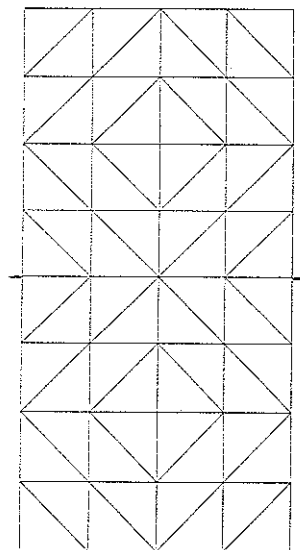


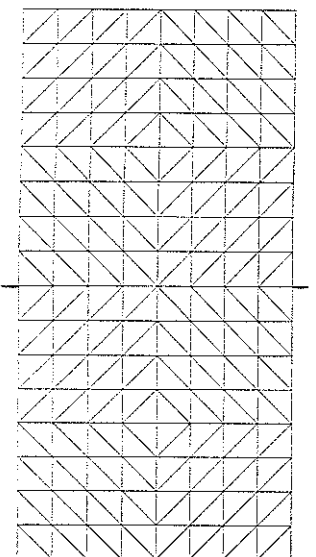
Figure 6.1.2
Cas compatible: déformée (amplification 40)



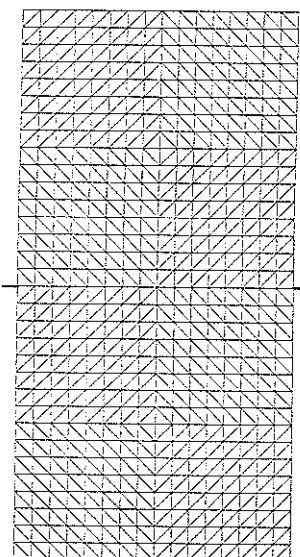
GISI PECIT



GISI PECIT

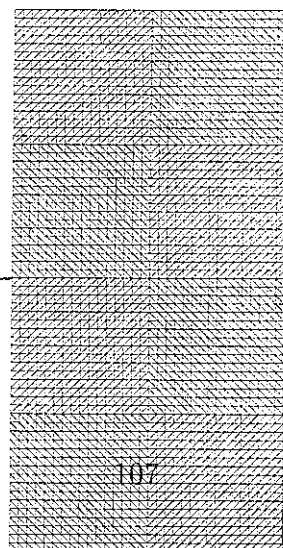


GISI PECIT



GISI PECIT

Figure 6.1.3
Cas compatible: famille
de maillages pour
le calcul de l'erreur



GISI PECIT

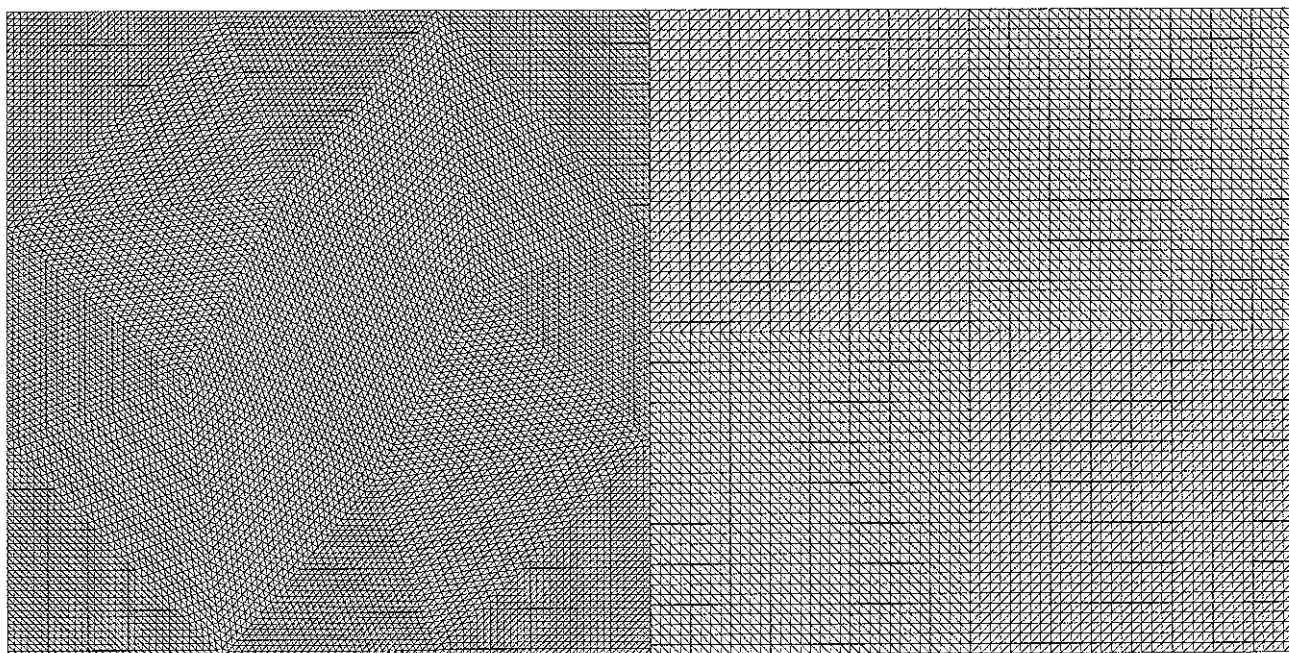


Figure 6.1.4
Cas incompatible: maillage de référence

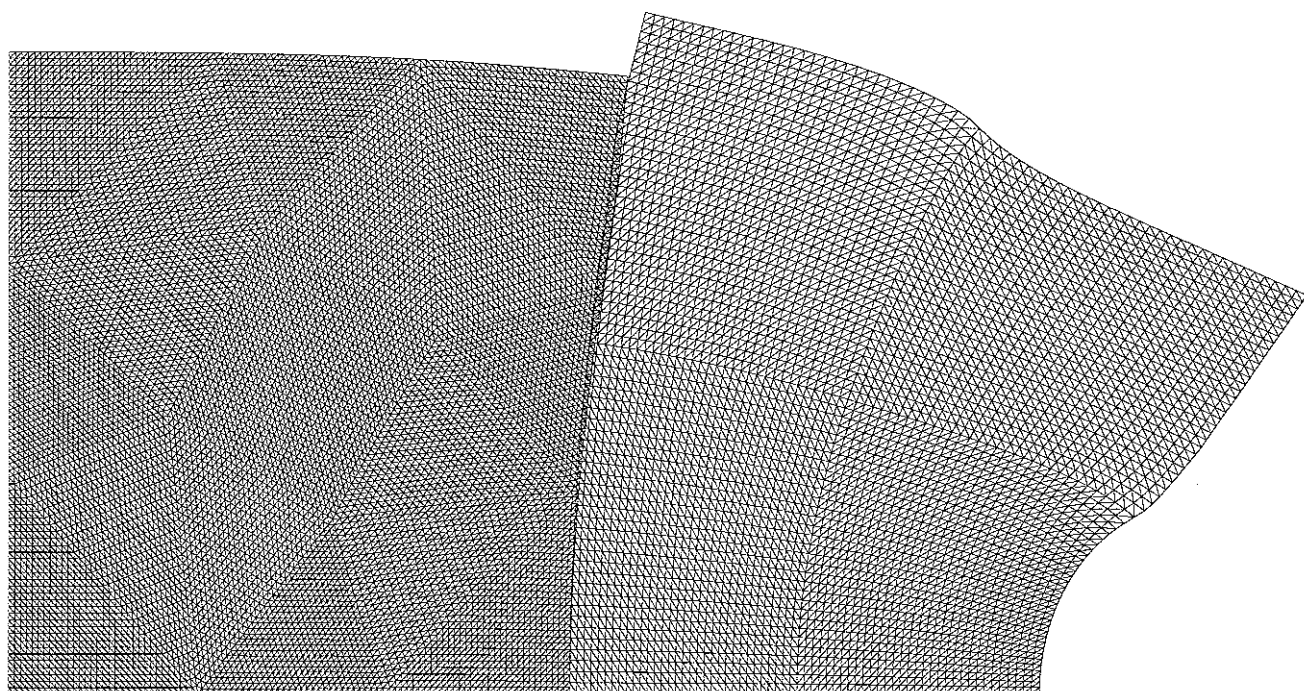
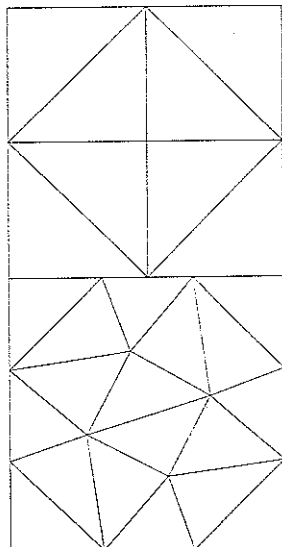
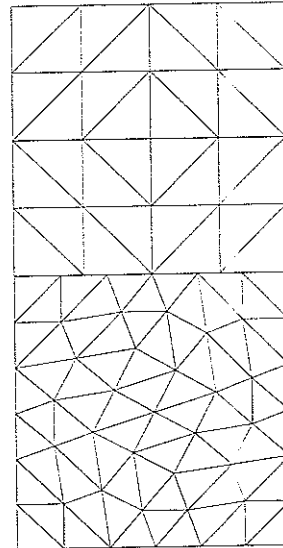


Figure 6.1.5
Cas incompatible: déformée (amplification 40)

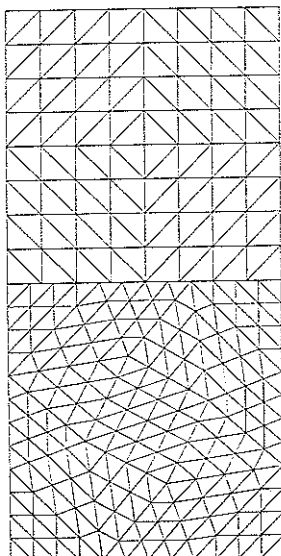
Figure 6.1.6
Cas incompatible: famille de maillages pour le calcul de l'erreur



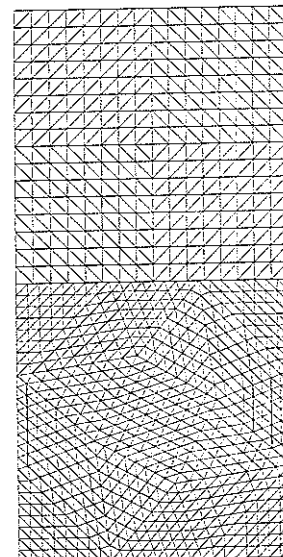
GIBI FPCIT



GIBI FPCIT



GIBI FPCIT



GIBI FPCIT

Figure 6.1.7

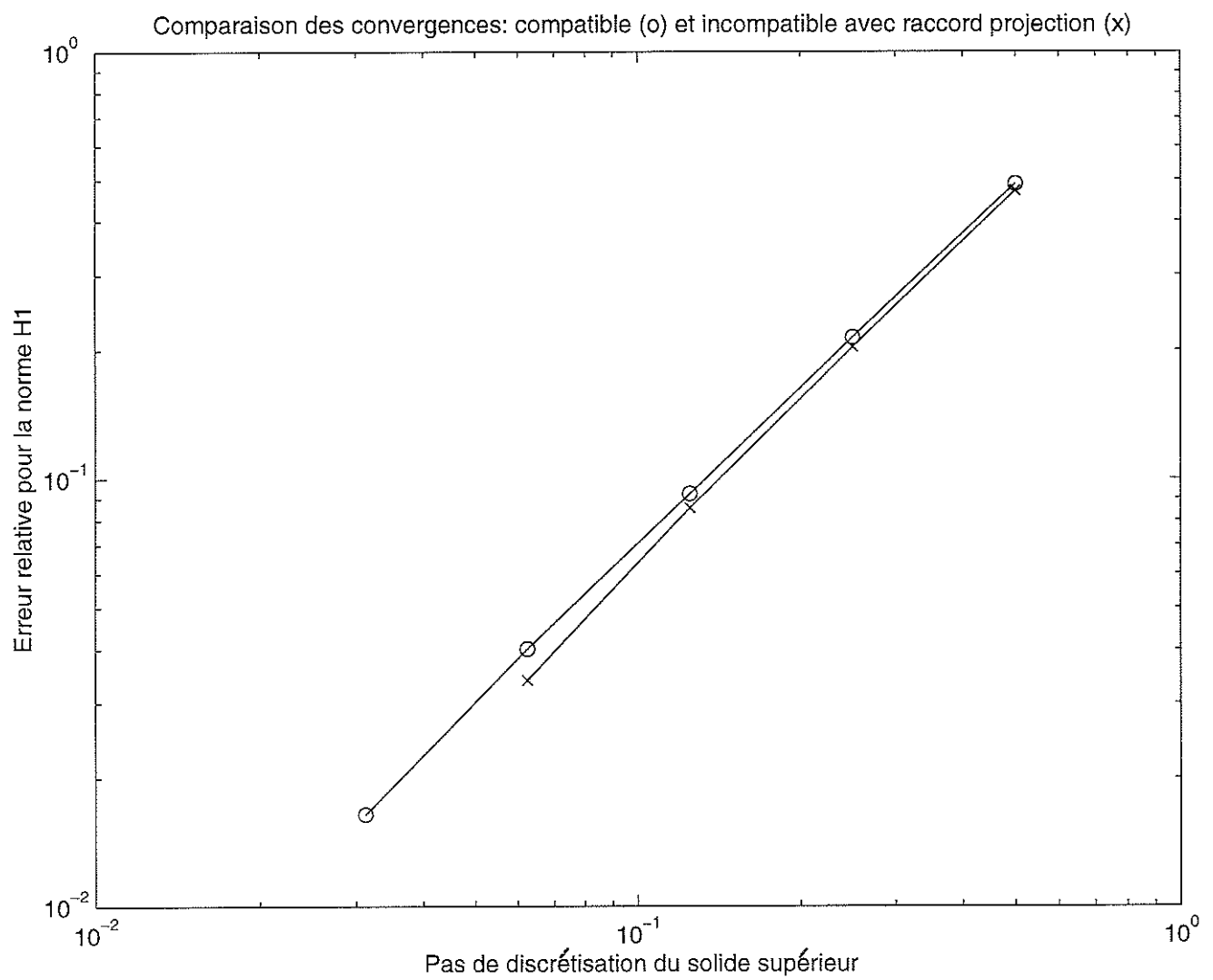


Figure 6.1.8

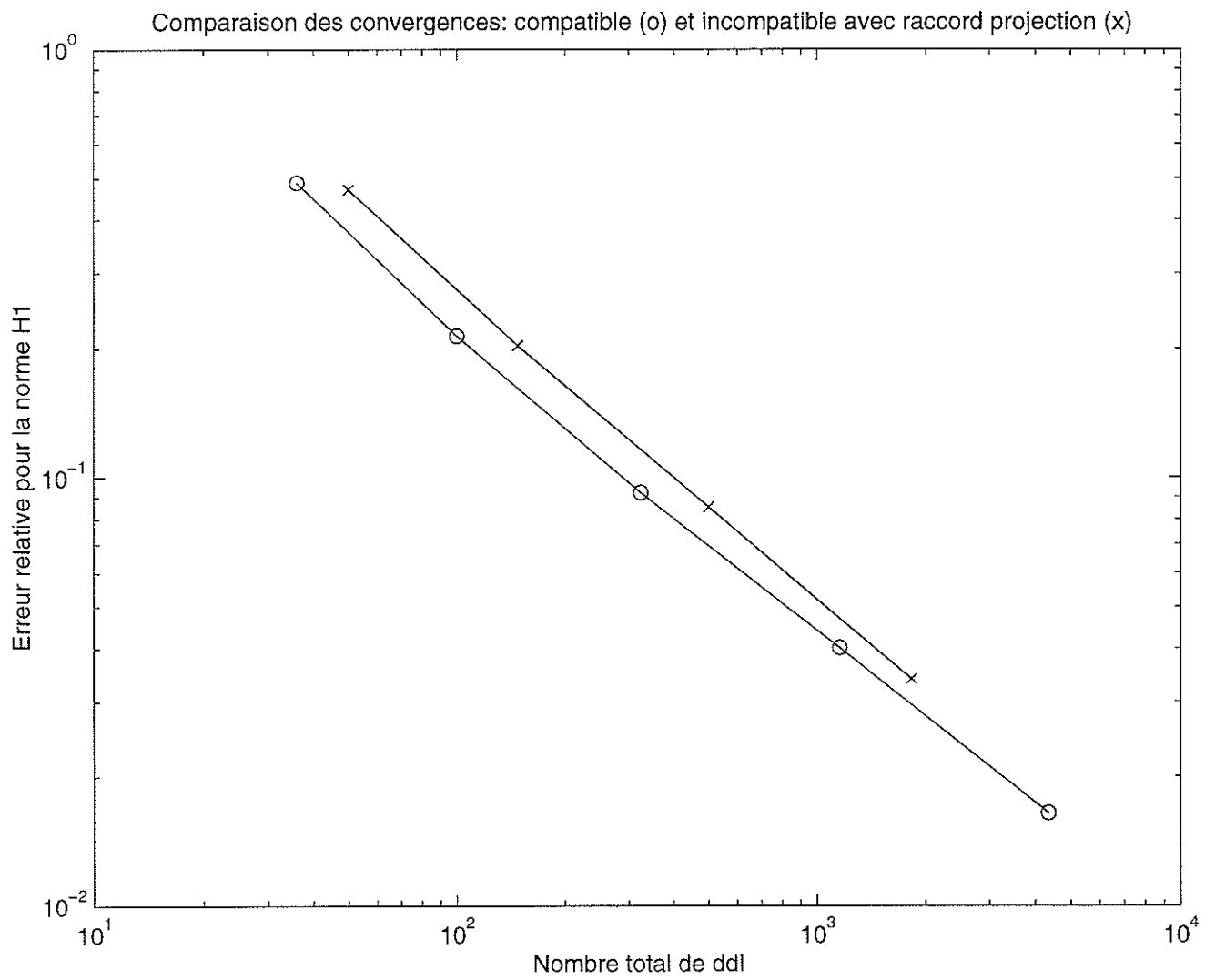


Figure 6.1.9

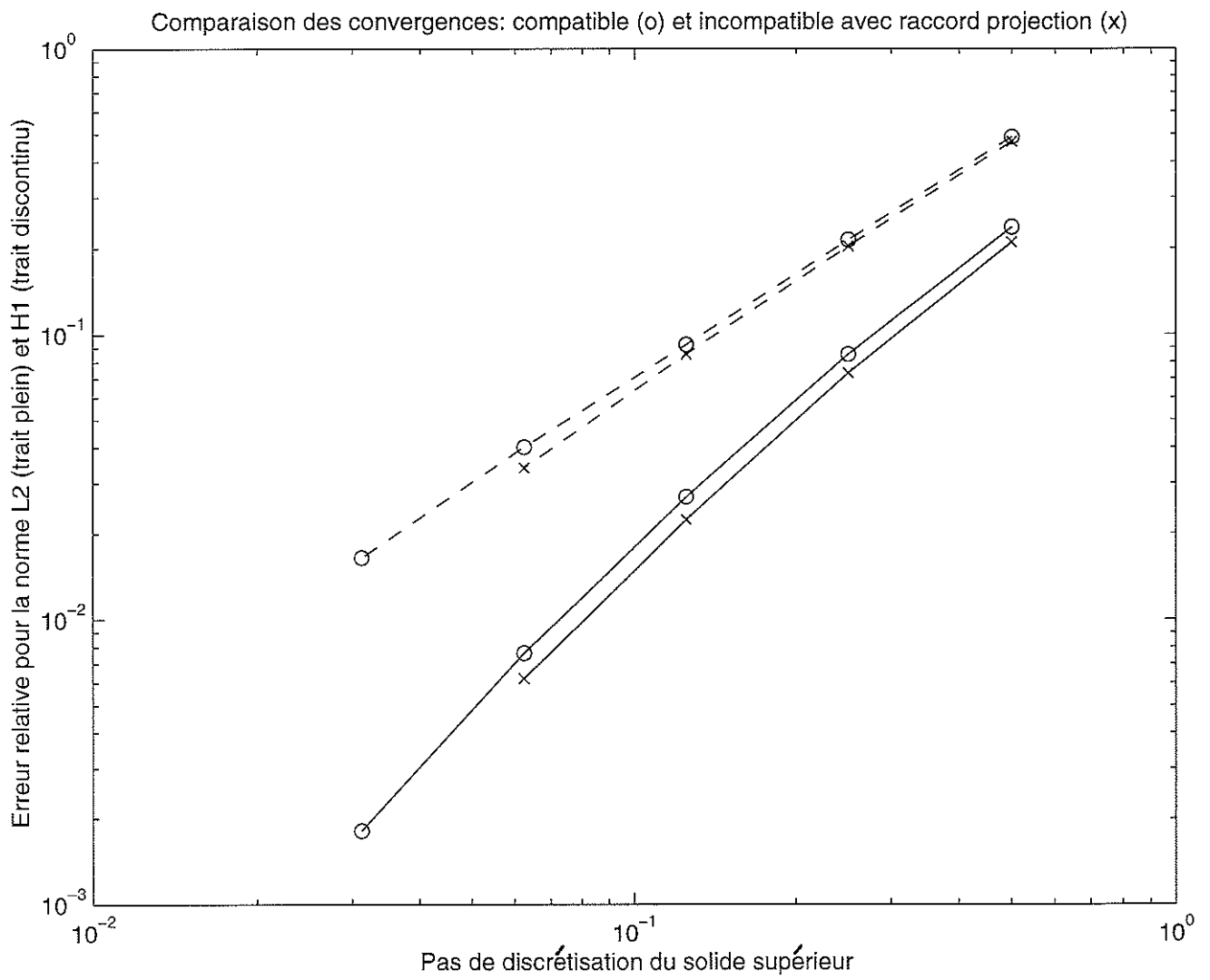
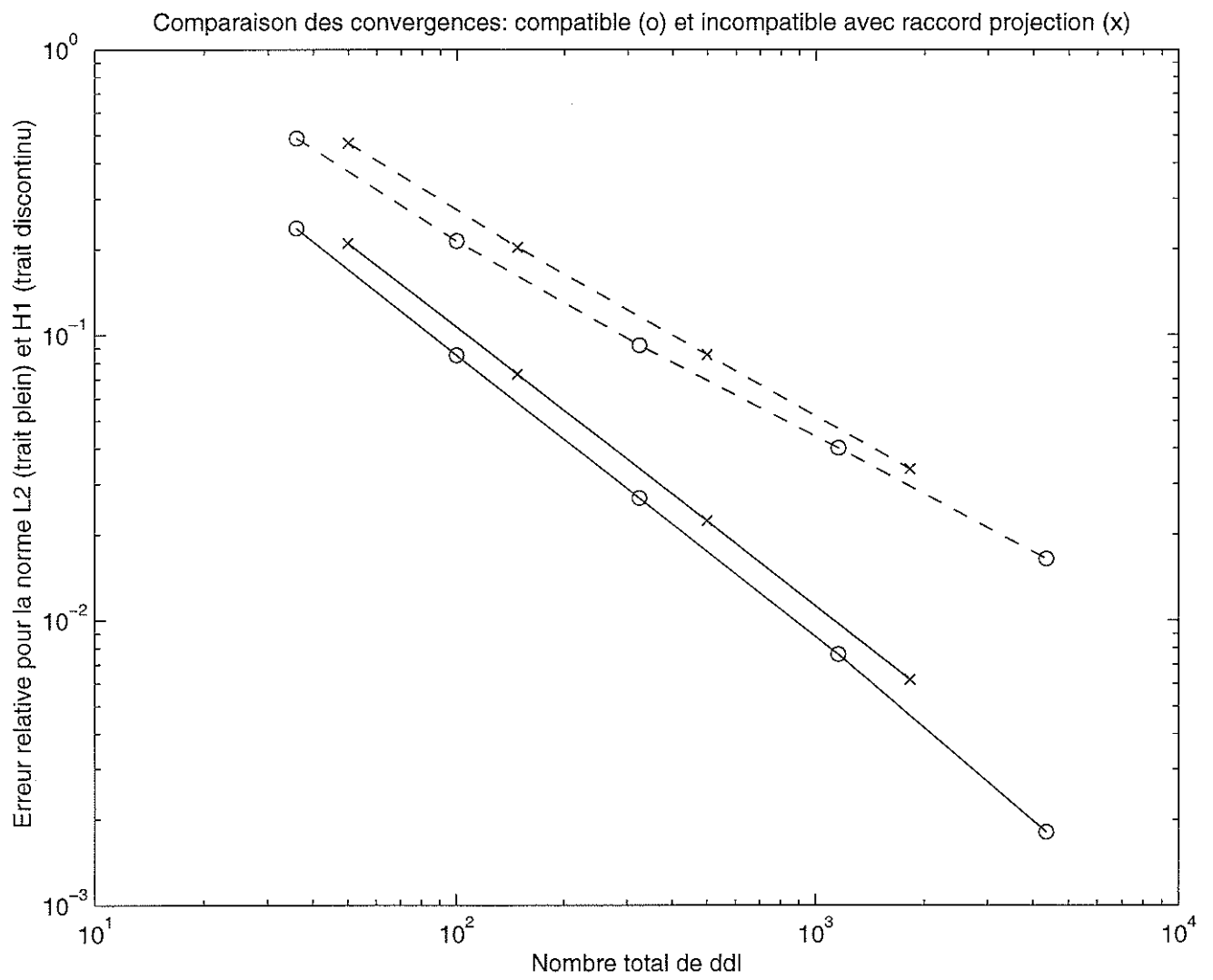
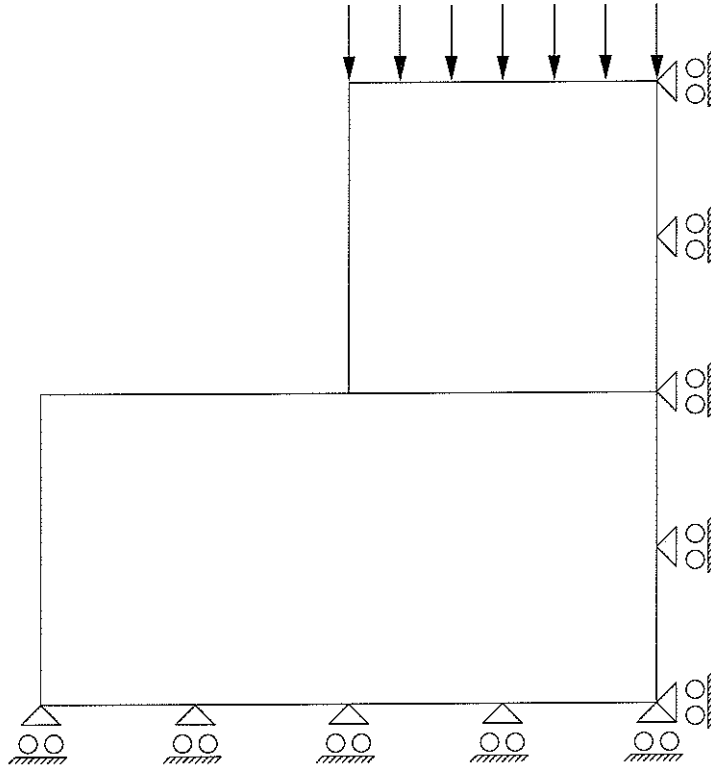


Figure 6.1.10



6.4.2 Test2: comparaison compatible-incompatible pour un cas plus singulier

On considère le problème suivant de contact unilatéral entre deux solides. Contrairement au test précédent pour lequel on observe un décollement, les forces appliquées dans le test présent n'autorisent pas le décollement et rendent la solution plus singulière.



Les dimensions du solide du haut (resp. du bas) sont de $0.5 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$ (resp. $0.5 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$). Le module de Young du solide du haut (resp. du bas) est $E_1 = 13000 \text{ Mpa}$ (resp. $E_2 = 30000 \text{ Mpa}$). Le coefficient de Poisson pour les deux solides est $\nu = 0.2$. Les contraintes appliquées sur la frontière supérieure sont de 100 daN/mm^2 .

De la même manière qu'au test précédent, on choisit des triangles à 3 nœuds et on calcule le taux de convergence en utilisant soit des maillages compatibles sur la zone de contact, soit des maillages incompatibles avec raccord projection.

Maillages compatibles

Le maillage de référence comporte 24576 éléments et 25220 ddl (figure 6.2.1). Il comprend 65 nœuds en vis à vis sur la zone de contact. Il est obtenu par construction d'une famille de maillages emboîtés. Le calcul de la solution de référence utilise la condition de contact nœud à nœud (qui coïncide ici avec le raccord projection) et nécessite 1 minute 7 secondes de temps CPU.

Le calcul de l'erreur s'effectue sur 5 maillages, le plus fin comportant 17 nœuds en vis à vis sur la zone de contact.

Maillages incompatibles avec raccord projection

Le maillage de référence comporte 34816 éléments et 35588 ddl (figure 6.2.2). Sur la zone de contact, il comprend 97 nœuds sur le premier solide et 65 nœuds sur le second solide. Il est obtenu par construction d'une famille de maillages emboîtés. Le calcul de la solution de référence (comprenant le calcul de la matrice de projection) nécessite 11 minutes 39 secondes de temps CPU .

Le calcul de l'erreur s'effectue sur 4 maillages, le plus fin comportant 25 nœuds sur le premier solide et 17 nœuds sur le second solide. On utilisera l'opérateur de projection sur le maillage du solide supérieur; c'est à dire que suivant les notations de la partie 6.2.2, le solide du haut (resp. du bas) joue le rôle de Ω^1 (resp. de Ω^2).

Commentaires

Le taux de convergence α (cf. section 6.3) obtenu lors du calcul de l'erreur en fonction du pas de discrétisation du solide supérieur (figures 6.2.3 et 6.2.5) est égal à

- pour la norme H^1 : 1.04 en compatible et 0.99 en incompatible,
- pour la norme L^2 : 1.50 en compatible et 1.55 en incompatible.

Le taux de convergence β (cf. section 6.3) obtenu lors du calcul de l'erreur en fonction de (nombre de ddl)^{-1/2} (figures 6.2.4 et 6.2.6) est égal à

- pour la norme H^1 : 1.21 en compatible et 1.13 en incompatible,
- pour la norme L^2 : 1.76 en compatible et 1.77 en incompatible.

On constate que les taux de convergence sont globalement moindres par rapport au test précédent. Sur cet exemple également, les taux de convergence ne sont pas amoindris

lors de l'utilisation de maillages incompatibles avec une condition de contact de type projection par rapport au cas compatible.

De plus, sur la figure 6.2.4, on constate que l'erreur relative en norme H^1 est identique, voire plus faible dans le cas incompatible, ceci pour un même nombre de ddl.

Remarque 6.1. Dans le cas compatible, le calcul des taux de convergence ne prend pas en compte l'erreur obtenue avec le maillage le plus grossier.

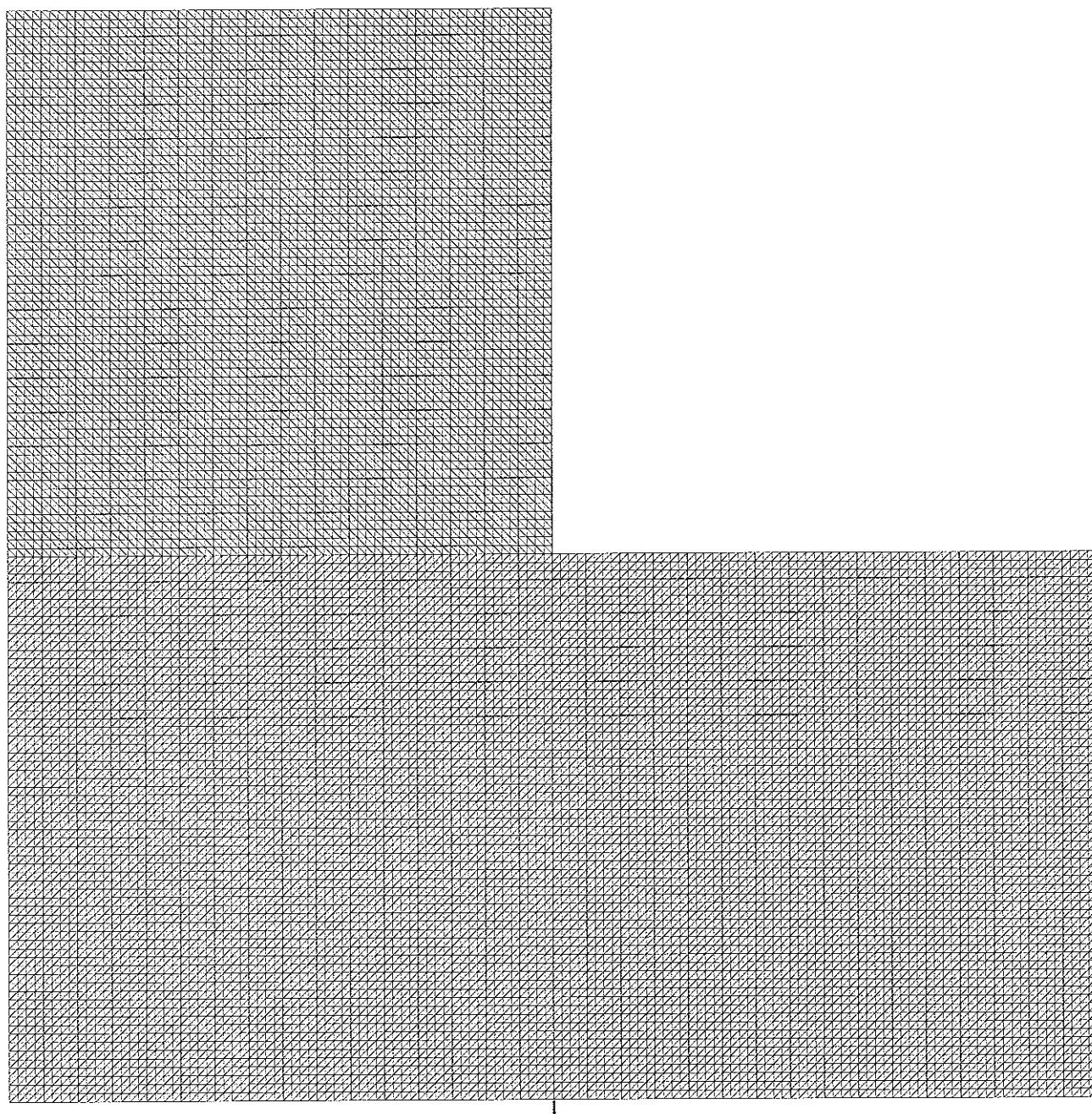


Figure 6.2.1
Cas compatible: maillage de référence

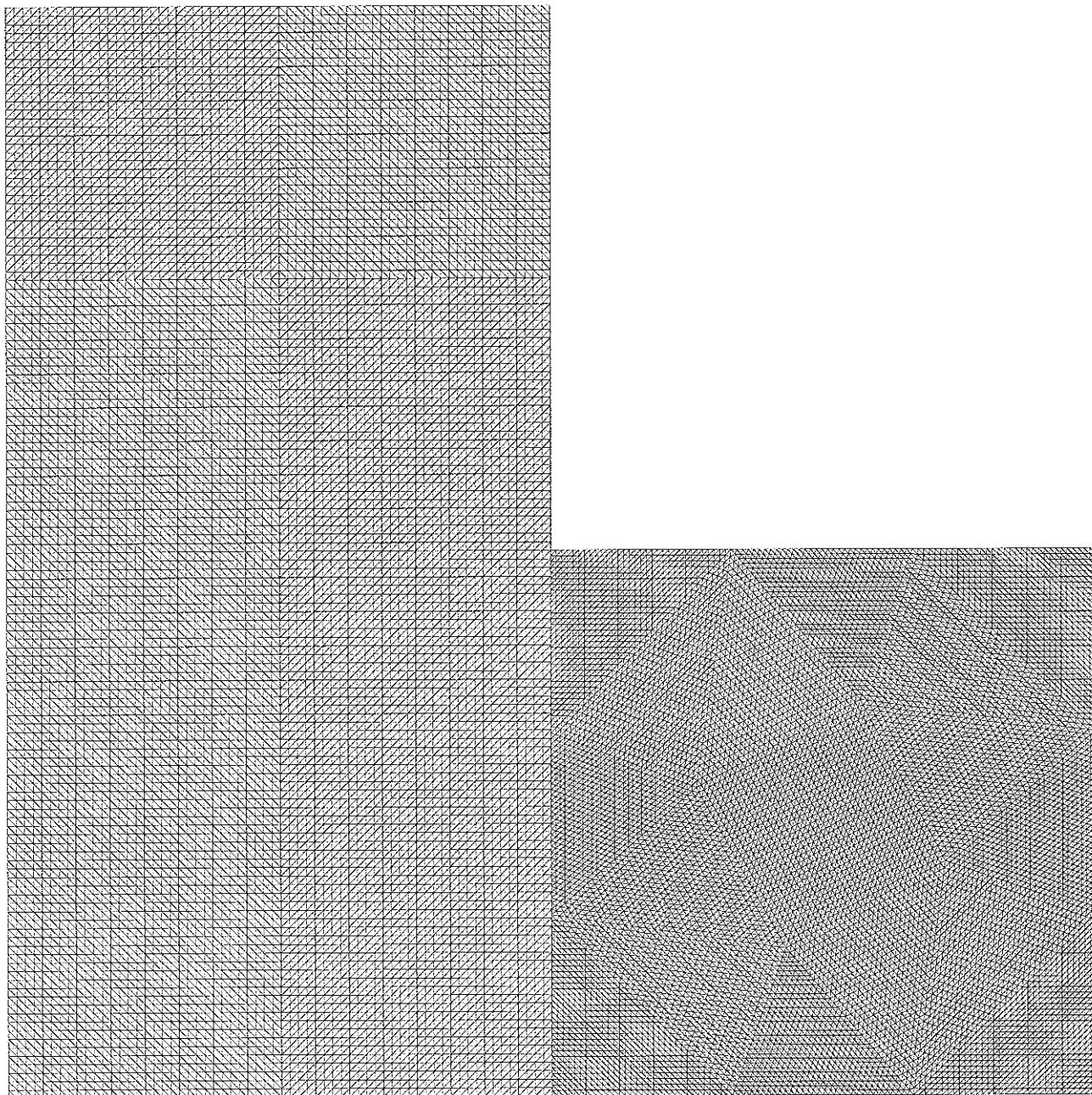


Figure 6.2.2
Cas incompatible: maillage de référence

Figure 6.2.3

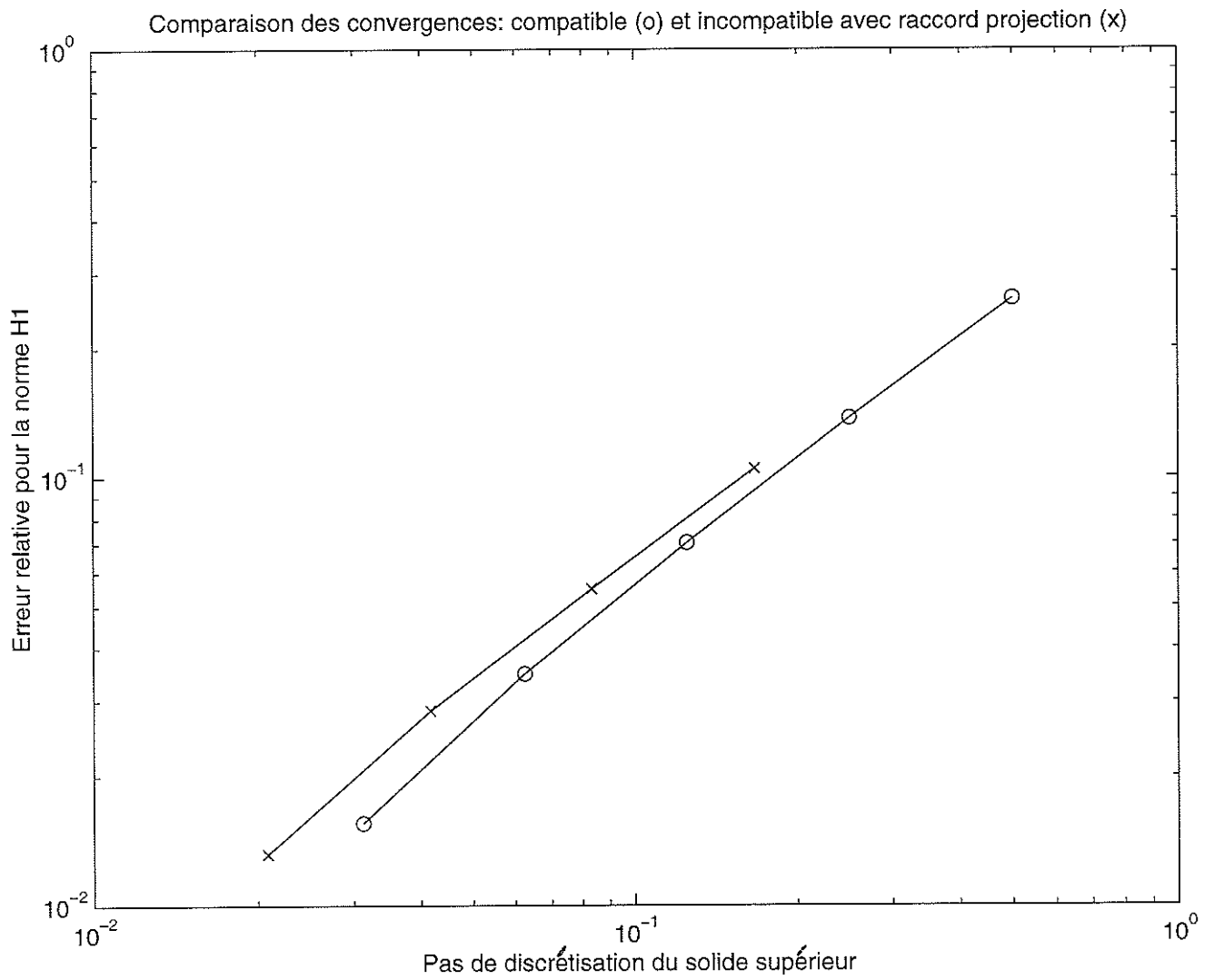


Figure 6.2.4

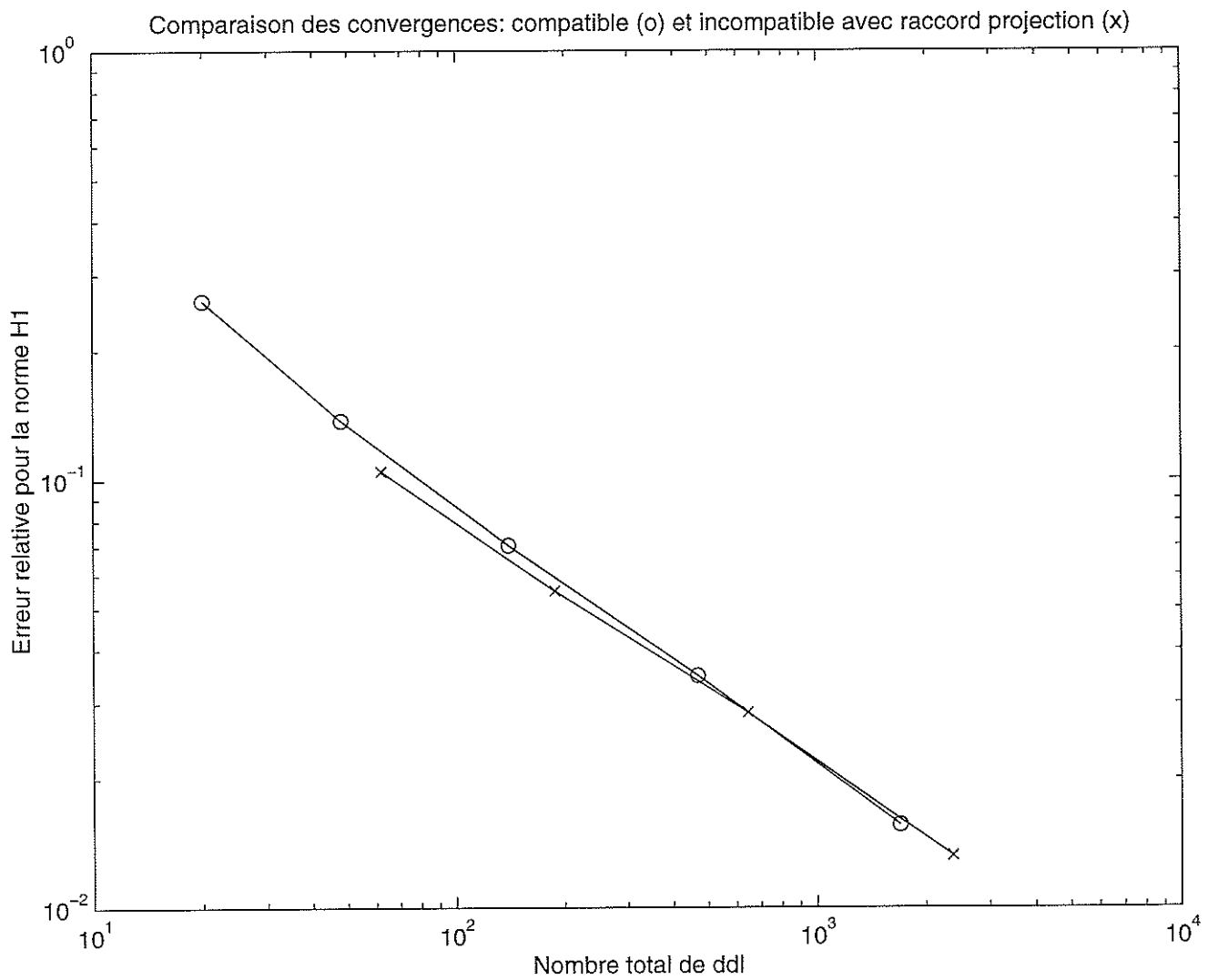


Figure 6.2.5

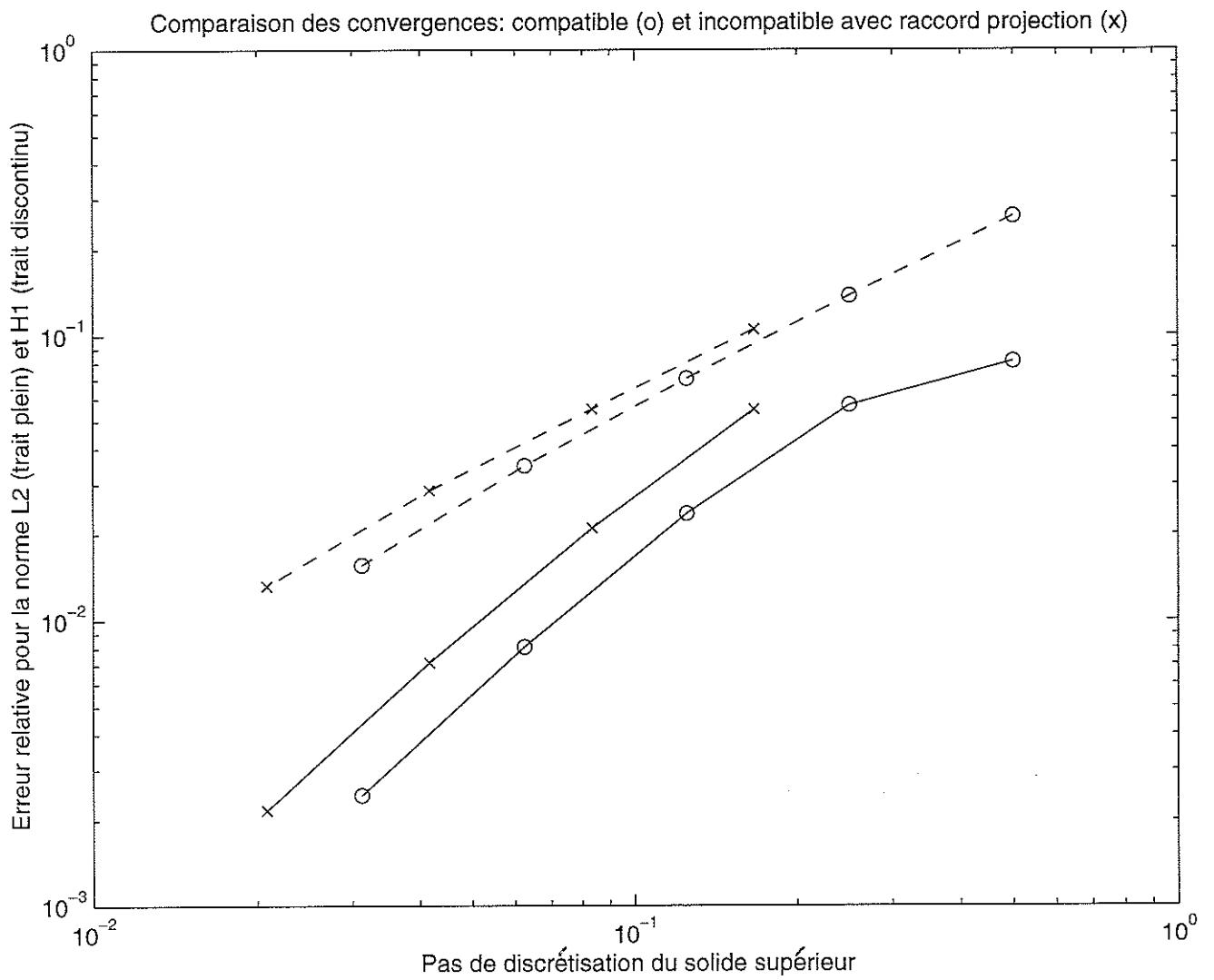
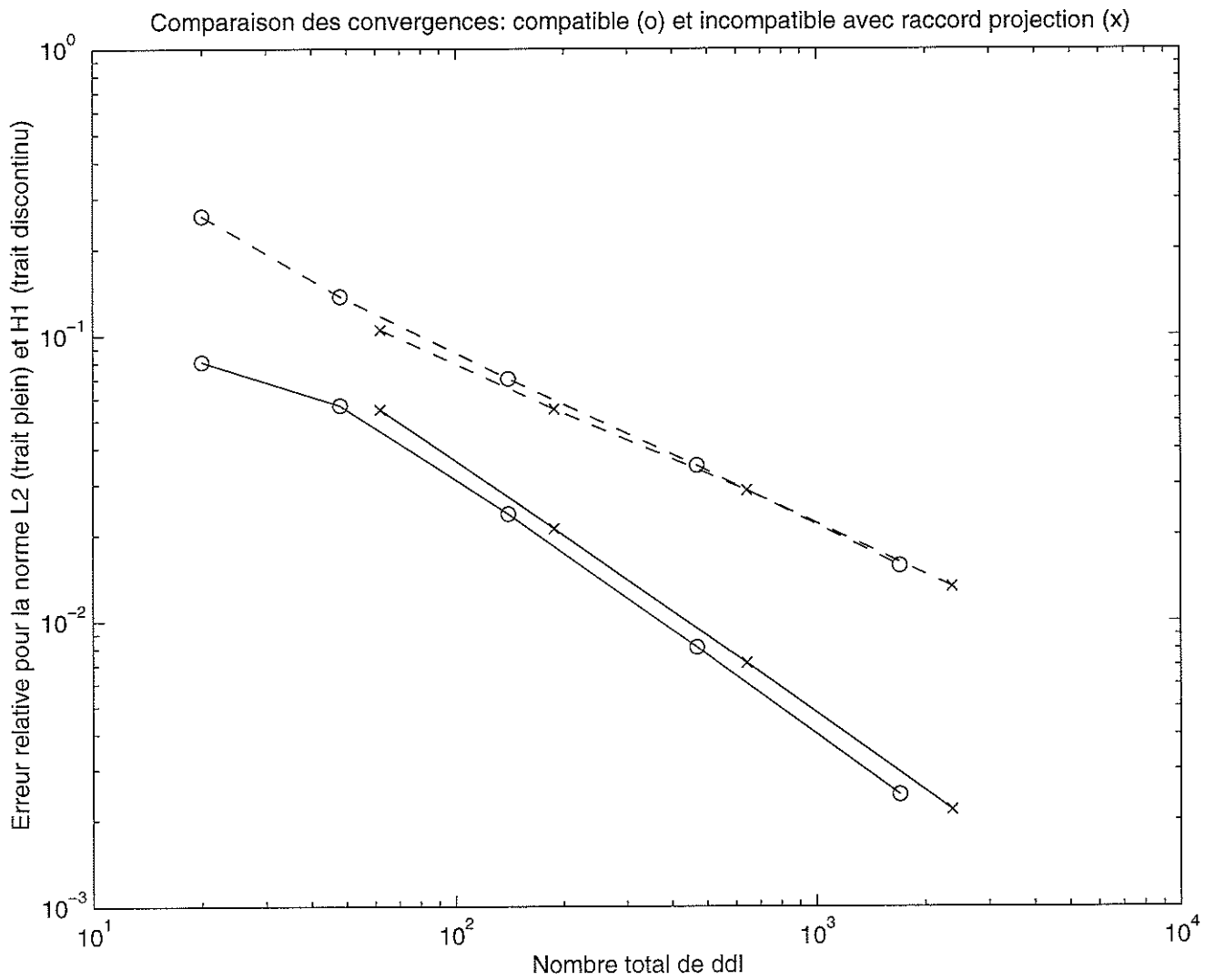


Figure 6.2.6



6.4.3 Test3: comparaison raccord projection–raccord ponctuel

Il s'agit de comparer le raccord projection (de type global) et le raccord ponctuel (de type local). Pour ce test, les conditions de contact discrètes de type ponctuel et projection sont définies sur le solide du haut.

On considère deux configurations de contact:

- 1) le problème du test 1, destiné à l'étude des taux de convergence pour les deux raccords,
- 2) un problème de compression, destiné à une comparaison plus qualitative des solutions éléments finis calculées sur un maillage fixe.

Le problème du test 1

On reprend le problème de contact unilatéral étudié dans le premier test. On se place dans le cas de maillages incompatibles.

Le maillage de référence (figure 6.3.1) comporte 63488 éléments et 64388 ddl. Sur la zone de contact, il comprend 65 nœuds sur le premier solide et 161 nœuds sur le second solide. Le calcul de la solution de référence (comprenant le calcul de la matrice de projection) nécessite 1 heure 15 minutes 38 secondes de temps CPU. Cette dernière est obtenue en considérant un raccord de type projection.

Pour les deux raccords, le calcul de l'erreur s'effectue sur 4 maillages emboîtés, le plus fin comportant 17 nœuds sur le premier solide et 41 nœuds sur le second solide. La comparaison se fait donc sur des maillages rigoureusement identiques, seul diffère la condition de contact.

Commentaires

Le taux de convergence α (cf. section 6.3) obtenu lors du calcul de l'erreur en fonction du pas de discrétisation du solide supérieur (figure 6.3.2) est égal à

- pour la norme H^1 : 1.26 (raccord projection) et 0.98 (raccord ponctuel),
- pour la norme L^2 : 1.69 (raccord projection) et 1.53 (raccord ponctuel).

Le taux de convergence β (cf. section 6.3) obtenu lors du calcul de l'erreur en fonction de (nombre de ddl)^{-1/2} (figure 6.3.3) est égal à

- pour la norme H^1 : 1.38 (raccord projection) et 1.07 (raccord ponctuel),
- pour la norme L^2 : 1.85 (raccord projection) et 1.68 (raccord ponctuel).

On constate un taux de convergence meilleur et une erreur relative plus faible dans le cas du raccord projection par rapport au raccord ponctuel (figures 6.3.2 et 6.3.3). De plus, la comparaison avec les taux de convergence obtenus à partir des discrétisations utilisées pour le test 1 (figures 6.3.4 et 6.3.5) confirme le taux de convergence correspondant au raccord projection.

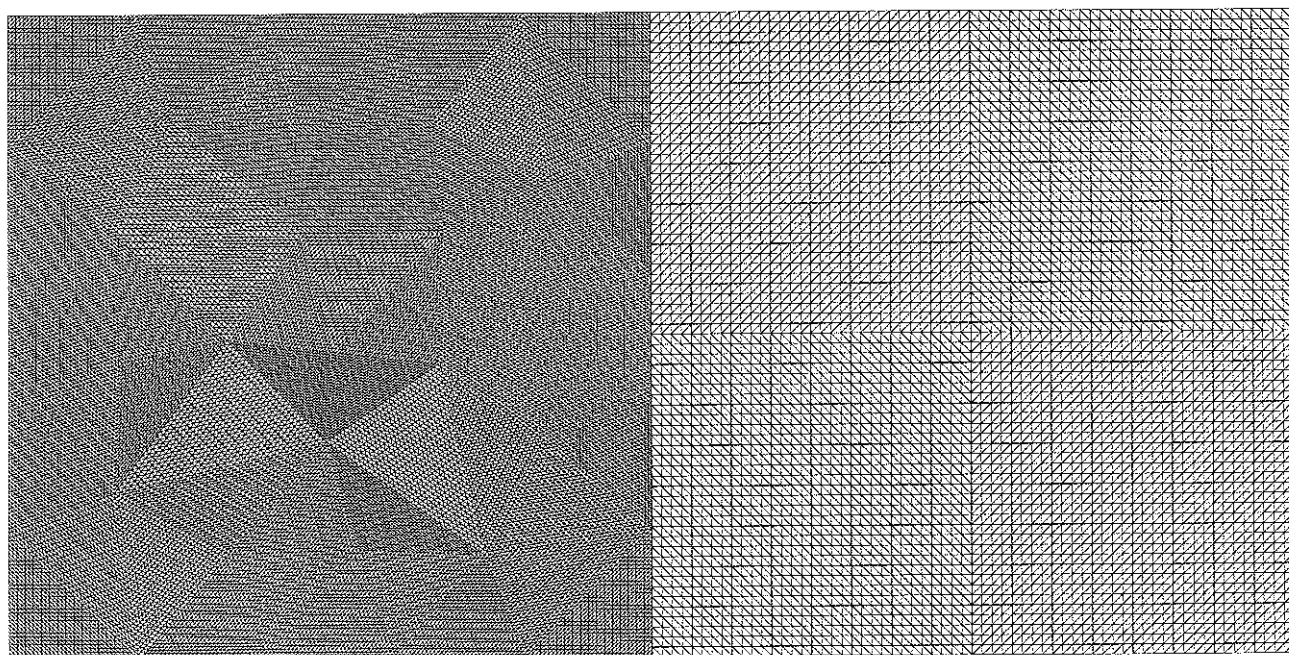


Figure 6.3.1
Maillage de référence

Figure 6.3.2

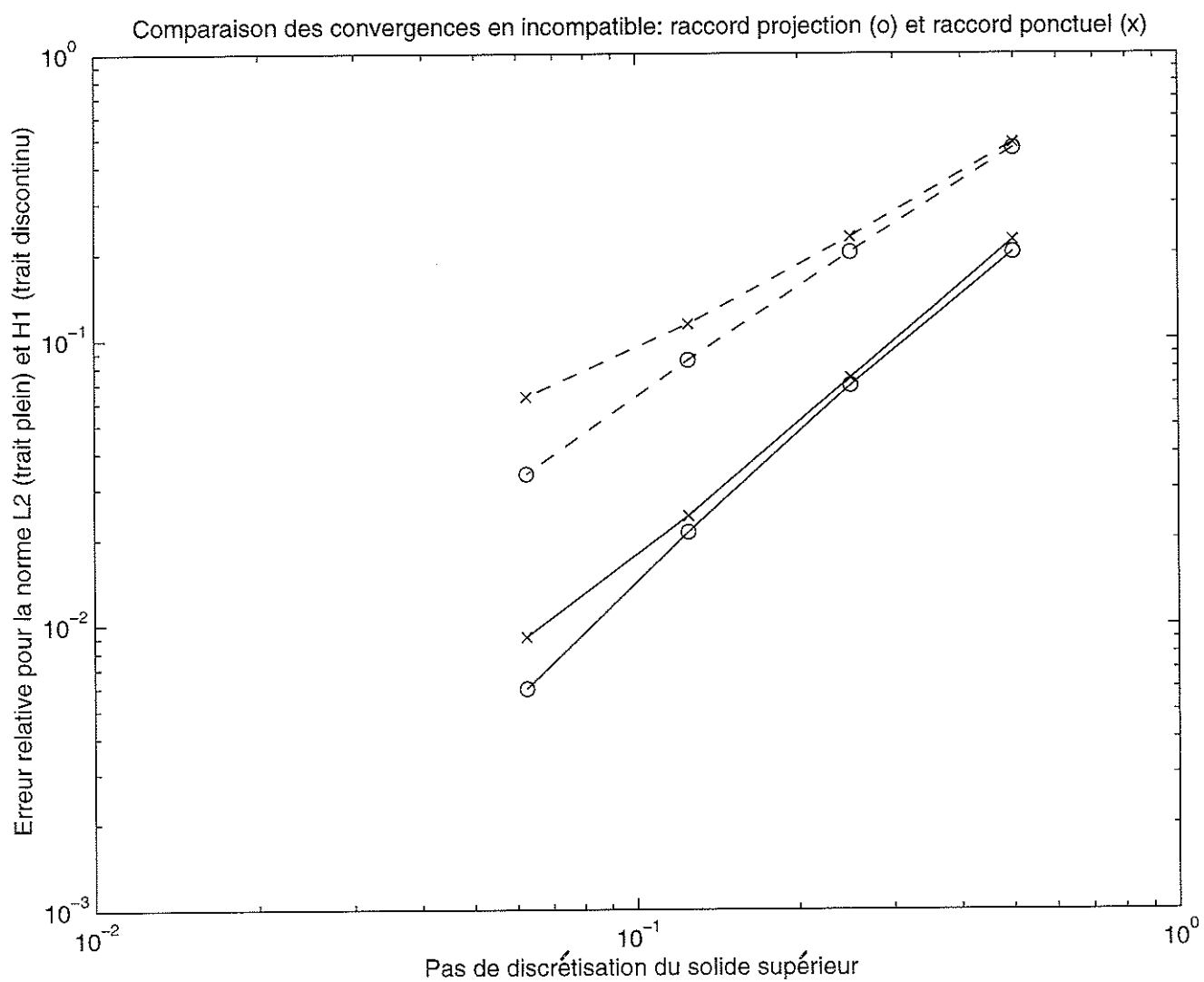


Figure 6.3.3

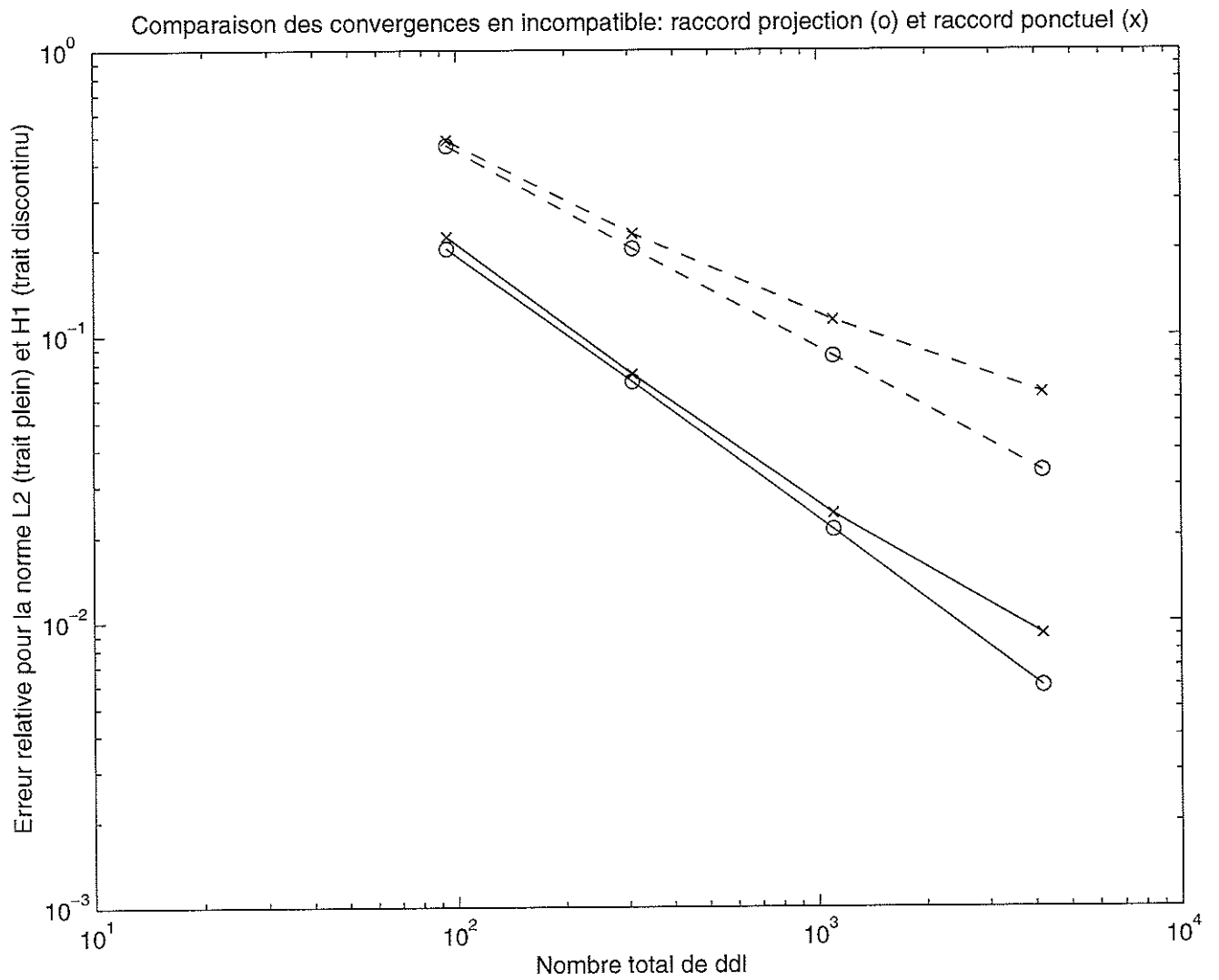


Figure 6.3.4

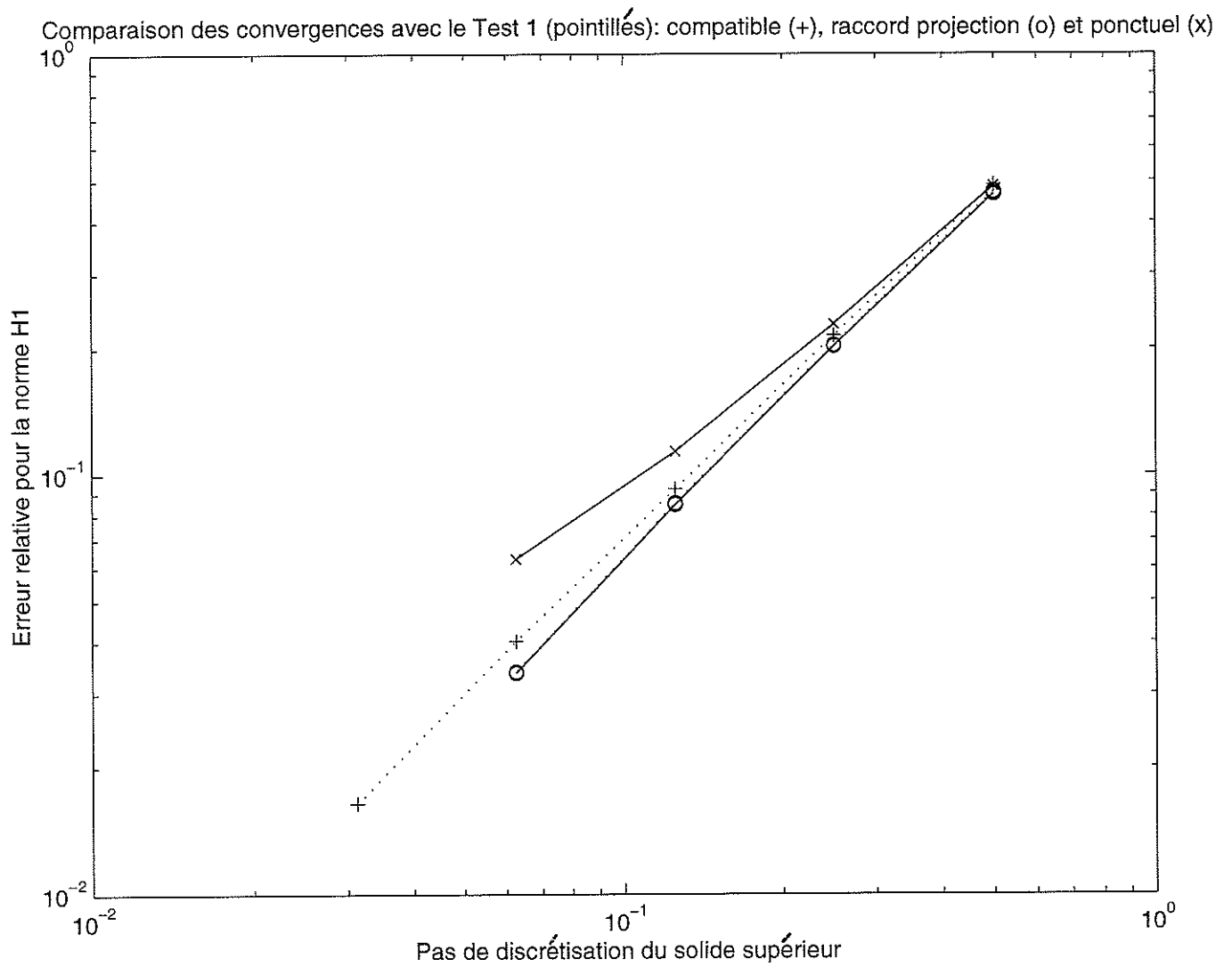
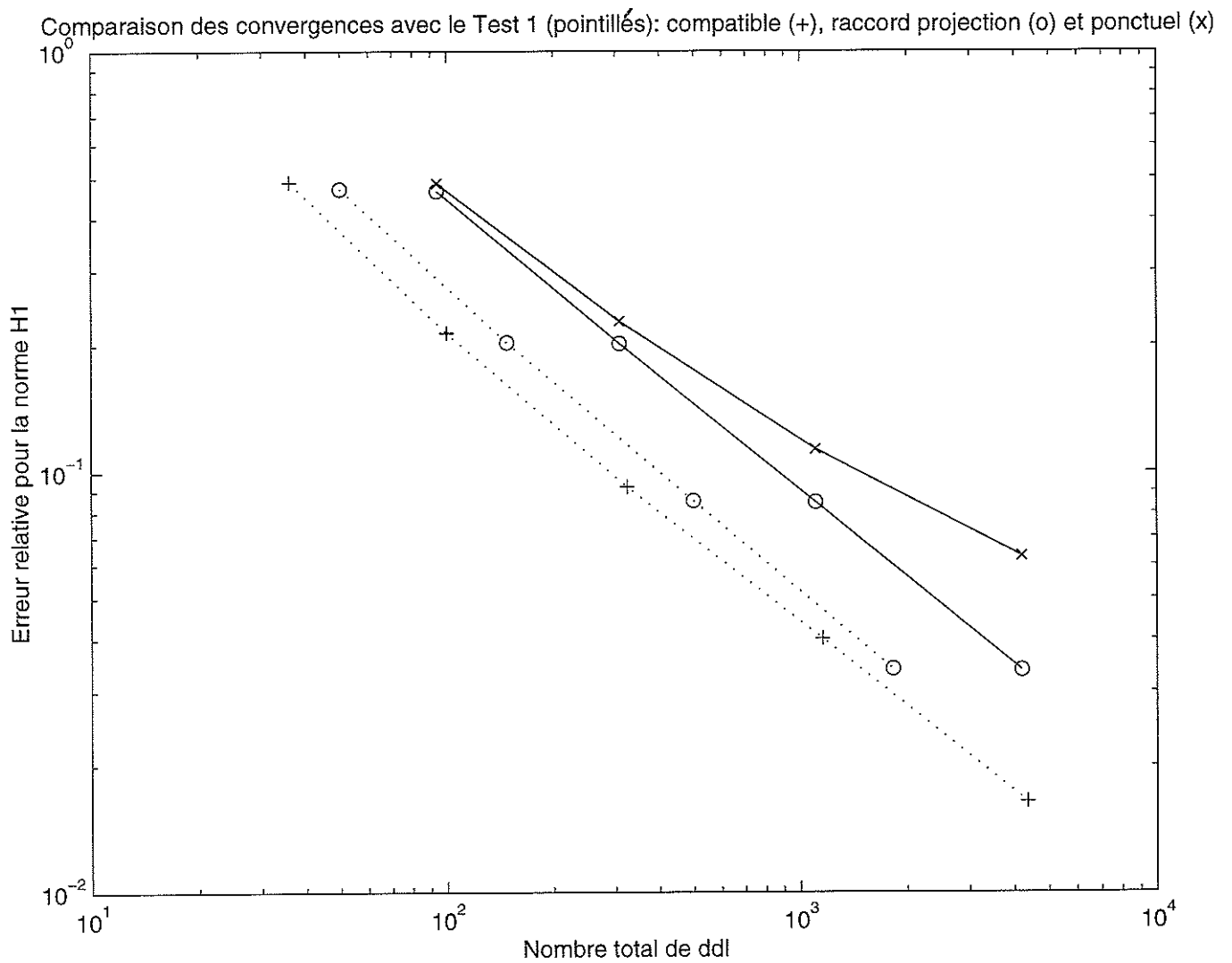


Figure 6.3.5

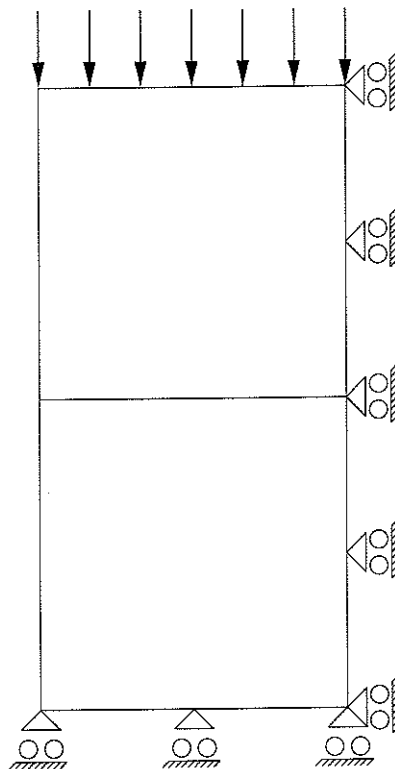


Un problème de compression

On considère le problème de contact unilatéral présenté dans la figure ci-dessous. Les caractéristiques géométriques et matérielles des deux solides sont les mêmes que dans le cas du test 1.

Le chargement latéral est supprimé et un chargement de 100 daN/mm^2 agit sur le haut de l'édifice.

On adopte une discrétisation incorporant des maillages incompatibles sur la zone de contact (figure 6.3.6) et l'on compare deux différentes manières de raccorder les maillages incompatibles.



Commentaires

La différence entre les solutions incorporant des conditions de type ponctuel et projection est très importante. Pour un même nombre d'inéquations (13) correspondant au nombre de nœuds sur la zone de contact du solide supérieur, le raccord projection (figures 6.3.7 et 6.3.8) donne une solution très satisfaisante (avec une interpénétration indécélable et avec une surface de contact finale plane), alors que le raccord ponctuel (figures 6.3.9 et 6.3.10) donne une solution peu convenable (avec une interpénétration importante et une surface de contact "en dents de scie").

Pour ce qui concerne le champ de contraintes (calculé en utilisant la relation de comportement), la solution exacte de ce problème de compression est telle que σ_{yy} (suivant la verticale y) est uniforme et égale à la contrainte imposée au sommet de l'édifice. Dans le cas du raccord projection (figure 6.3.11), le champ σ_{yy} calculé est uniforme et correspond à la réalité mécanique, tandis que son homologue obtenu avec le raccord ponctuel (figure 6.3.12) présente d'importantes irrégularités, principalement au voisinage de la zone de contact.

De plus, le champ σ_{xx} (suivant la l'horizontale x) obtenu avec le raccord projection (figure 6.3.13) est quasiment nul et uniforme et traduit correctement ce problème de compression (solution exacte: $\sigma_{xx} = 0$), tandis que l'analogue obtenu avec le raccord ponctuel (figure 6.3.14) ne vérifie ni la nullité, ni l'uniformité.

Finalement, on notera que le multiplicateur (noté Λ dans la partie 6.2.3), destiné à représenter les contraintes normales sur la zone de contact, est conforme à la réalité mécanique dans le cas du raccord projection, ce qui n'est pas le cas pour le multiplicateur correspondant au raccord ponctuel (figure 6.3.15).

Il est clair que sur ce test, le raccord ponctuel a été mis en défaut. On notera que les maillages (l'un fin, l'autre grossier) n'ont pas été choisis au hasard. Ceci faisant, il devient évident que la condition de contact locale, définie à partir de 13 inéquations, ne représente pas complètement le contact, certains nœuds du maillage du solide inférieur n'intervenant pas. En ce sens, les 13 inéquations globales sont d'une richesse bien plus grande. Ceci explique en grande partie les différences spectaculaires entre les deux raccords et la nette supériorité du raccord projection.

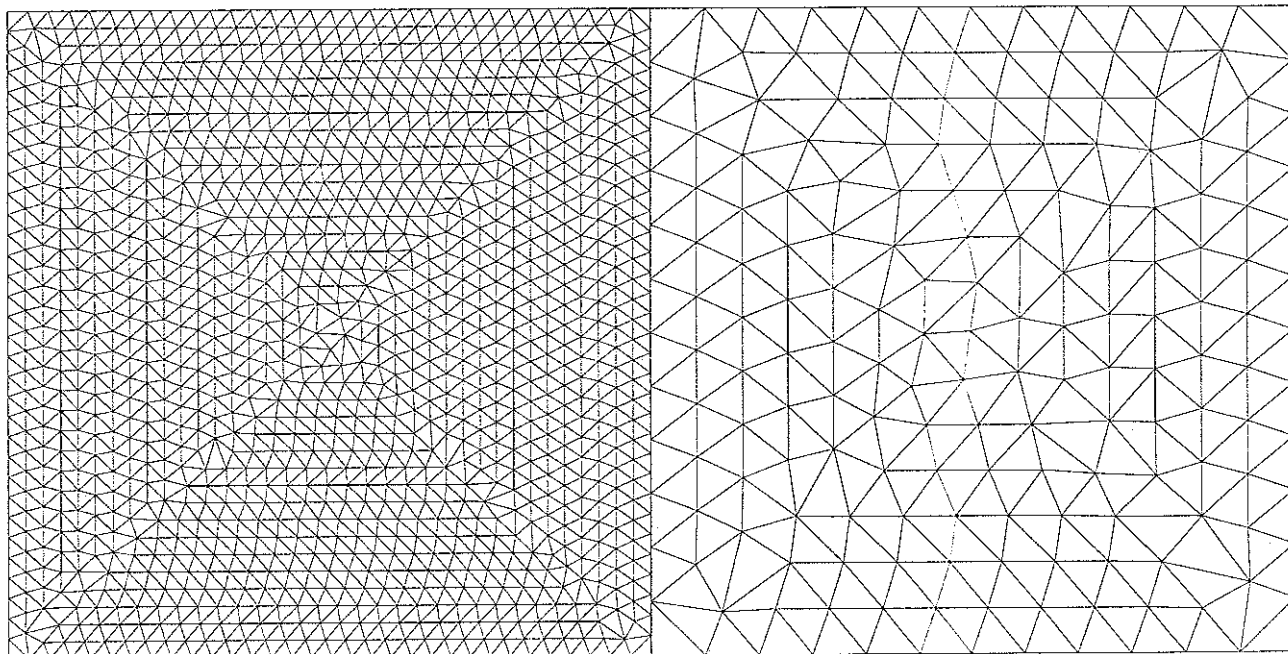


Figure 6.3.6
Configuration initiale

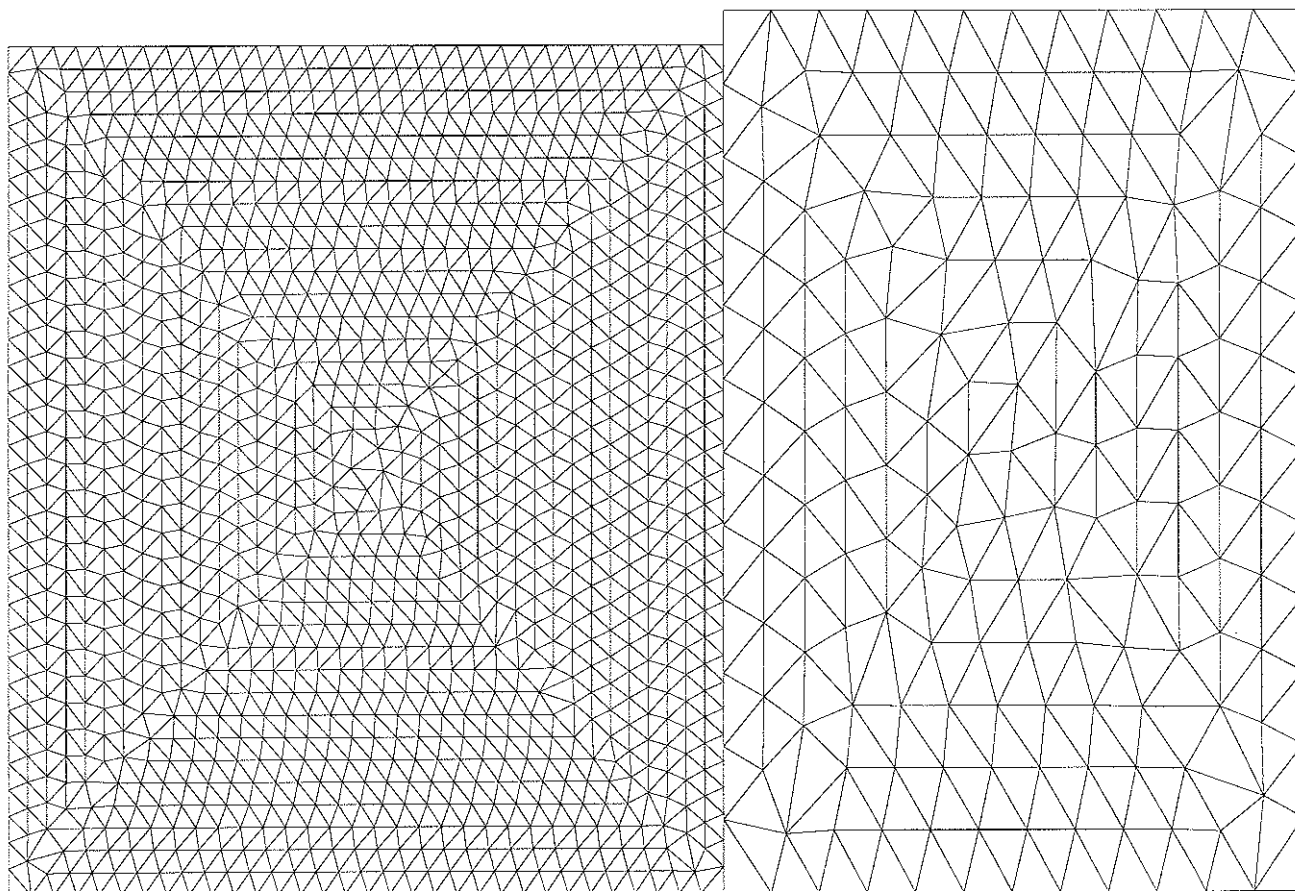


Figure 6.3.7
Raccord projection: déformée (amplification 40)



Figure 6.3.8

Raccord projection: agrandissement de la déformée (amplification 40)

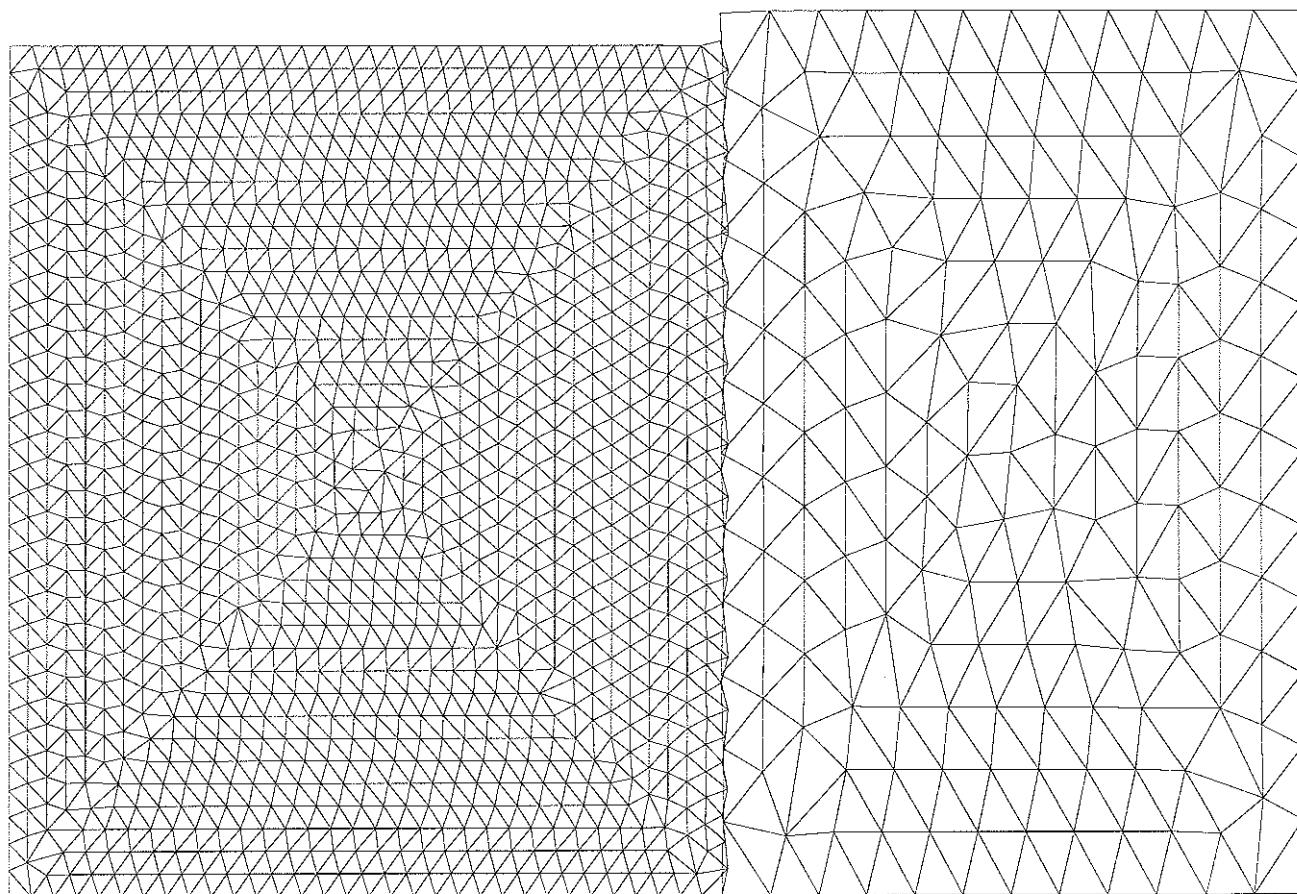


Figure 6.3.9
Raccord ponctuel: déformée (amplification 40)

Figure 6.3.10
Raccord ponctuel: agrandissement de la déformée (amplification 40)

Figure 6.3.11

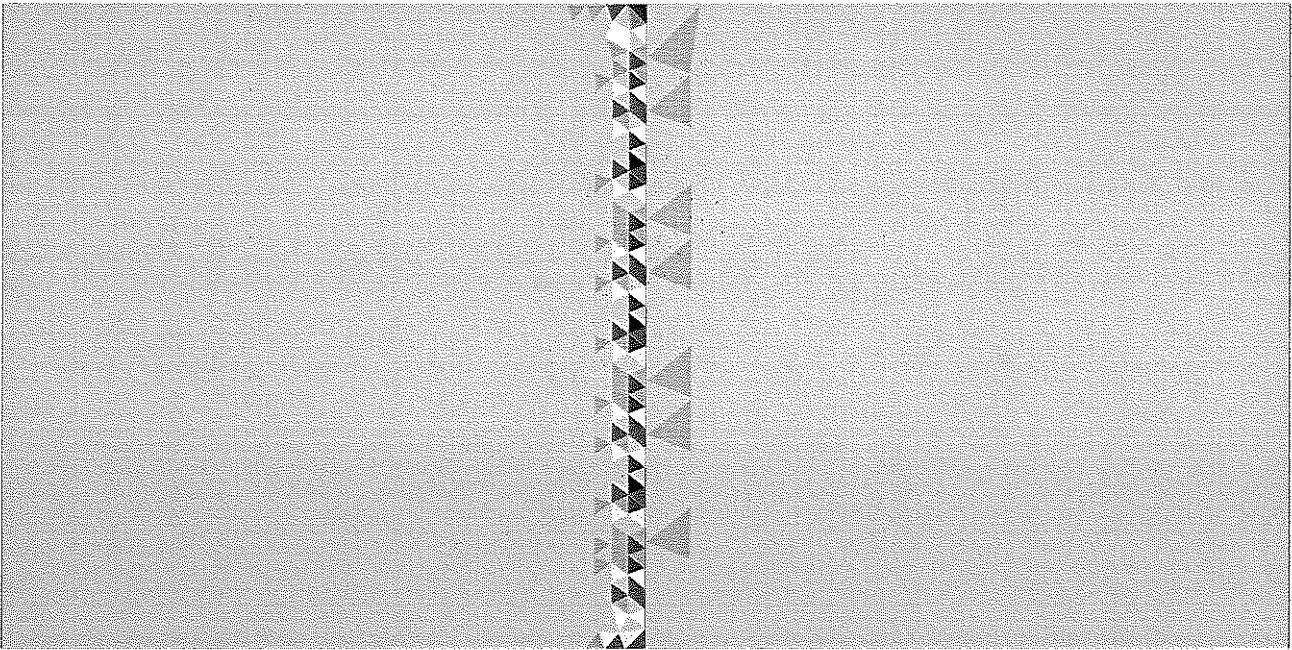


Figure 6.3.12
 Raccord ponctuel: champ σ_{yy}

VAL - ISO

	-2.26E+02
	-2.09E+02
	-1.93E+02
	-1.77E+02
	-1.60E+02
	-1.44E+02
	-1.28E+02
	-1.11E+02
I	-95.
J	-79.
K	-63.
L	-46.
M	-30.
	-14.

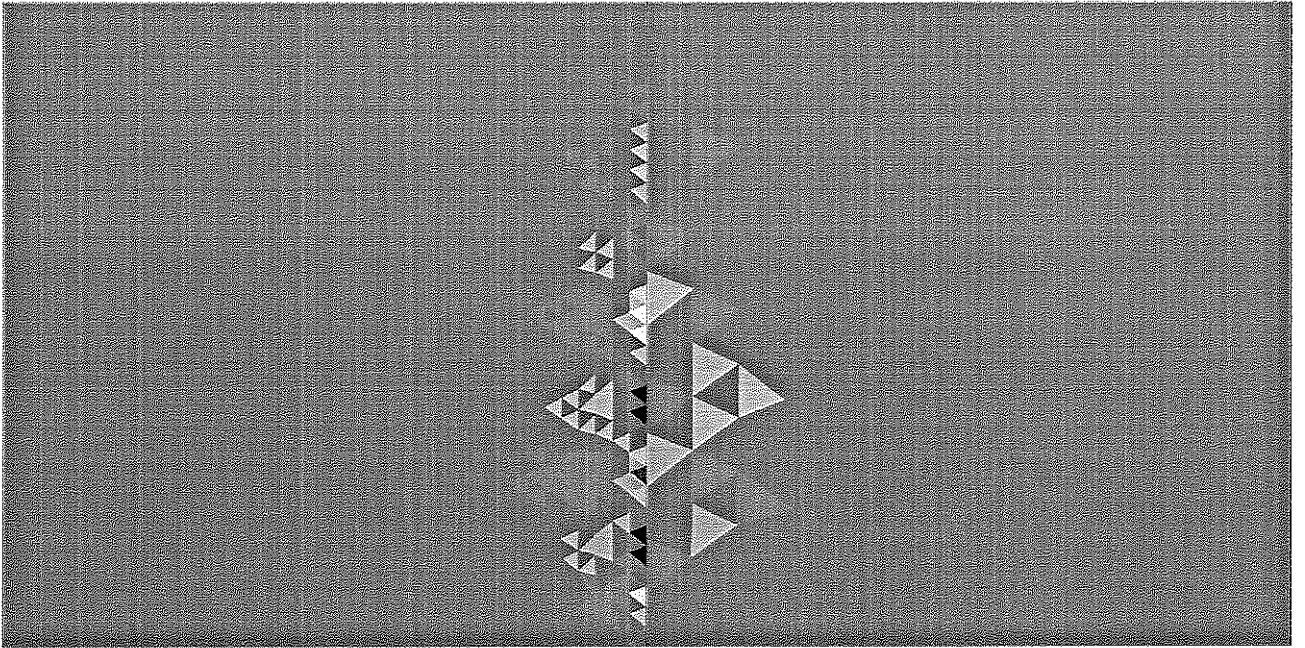


Figure 6.3.13
Raccord projection: champ σ_{xx}

VAL - ISO	
■	-4.65E-05
■	-3.85E-05
■	-3.06E-05
■	-2.26E-05
■	-1.46E-05
■	-6.59E-06
■	1.40E-06
■	9.38E-06
■	1.74E-05
■	2.54E-05
■	3.33E-05
■	4.13E-05
■	4.93E-05
■	5.73E-05

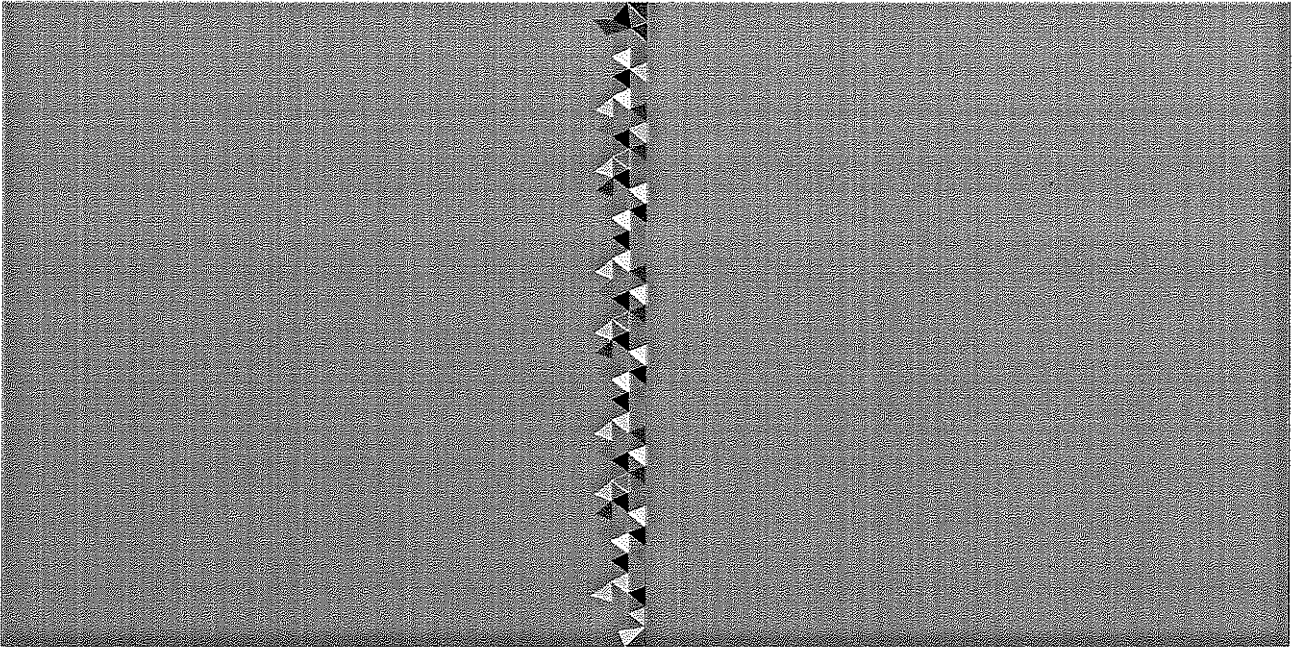
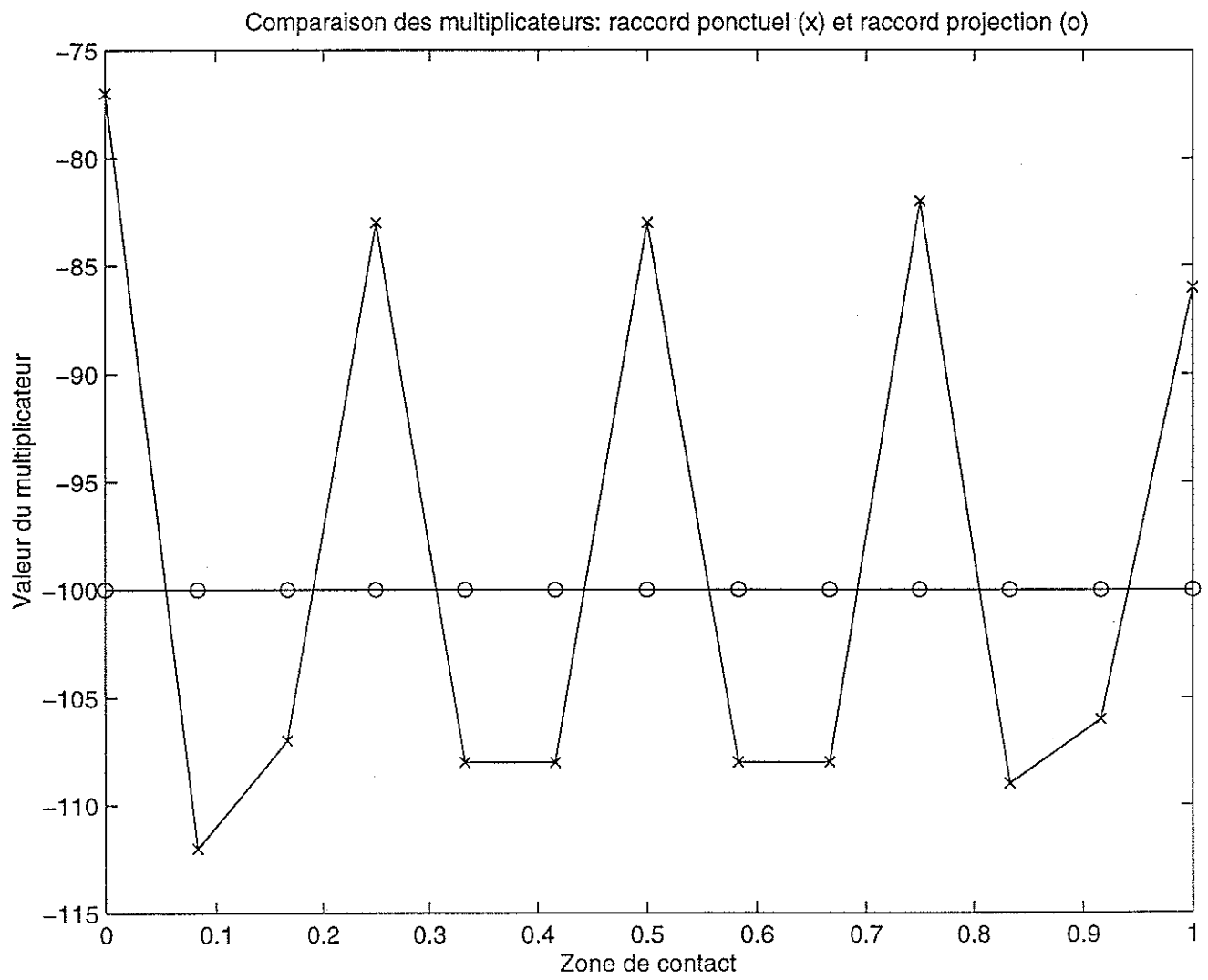


Figure 6.3.14
Raccord ponctuel: champ σ_{xx}

Figure 6.3.15



6.4.4 Test4: comportement du raccord projection pour un cas extrême de maillages incompatibles

Il s'agit de s'assurer du bon comportement du raccord projection dans le cas où l'on choisit une discrétisation pour laquelle un grand nombre de nœuds sont quasiment en vis à vis. Pour cela, on discrétise de telle manière à ce que le second solide ait un nœud de plus que le premier sur la zone de contact. Pour les deux exemples traités, on utilisera l'opérateur de projection sur le maillage du solide supérieur. Ces deux exemples sont

- 1) le problème du test 1 avec des maillages encore plus incompatibles,
- 2) un problème incluant un cas extrême de maillages non-compatibles.

Le problème du test 1

On considère à nouveau le problème de contact unilatéral étudié dans le premier test. On se place dans le cas de maillages incompatibles où la zone de contact du premier solide comprend 30 éléments de longueurs égales et celle du second solide 31 éléments de longueurs égales (figure 6.4.1). Le calcul de la solution nécessite 16 secondes de temps CPU, temps comprenant le calcul de la matrice de projection.

Commentaires

On constate une bonne restitution de la condition de contact sur ce cas difficile. En particulier, on observe graphiquement la continuité du champ de contraintes σ_{yy} (suivant la verticale y) au travers de l'interface de contact (figures 6.4.2 et 6.4.3).

De plus, on notera la similitude du multiplicateur traduisant la contrainte normale sur la zone de contact avec le multiplicateur provenant de la solution de ce même problème avec maillages compatibles et 33 nœuds en vis à vis (figure 6.4.4). On remarque en particulier sur la figure 6.4.4 que les multiplicateurs reconstruits à partir de forces nodales négatives ne sont pas nécessairement négatifs sur toute la zone de contact (cf. partie 6.2.3).

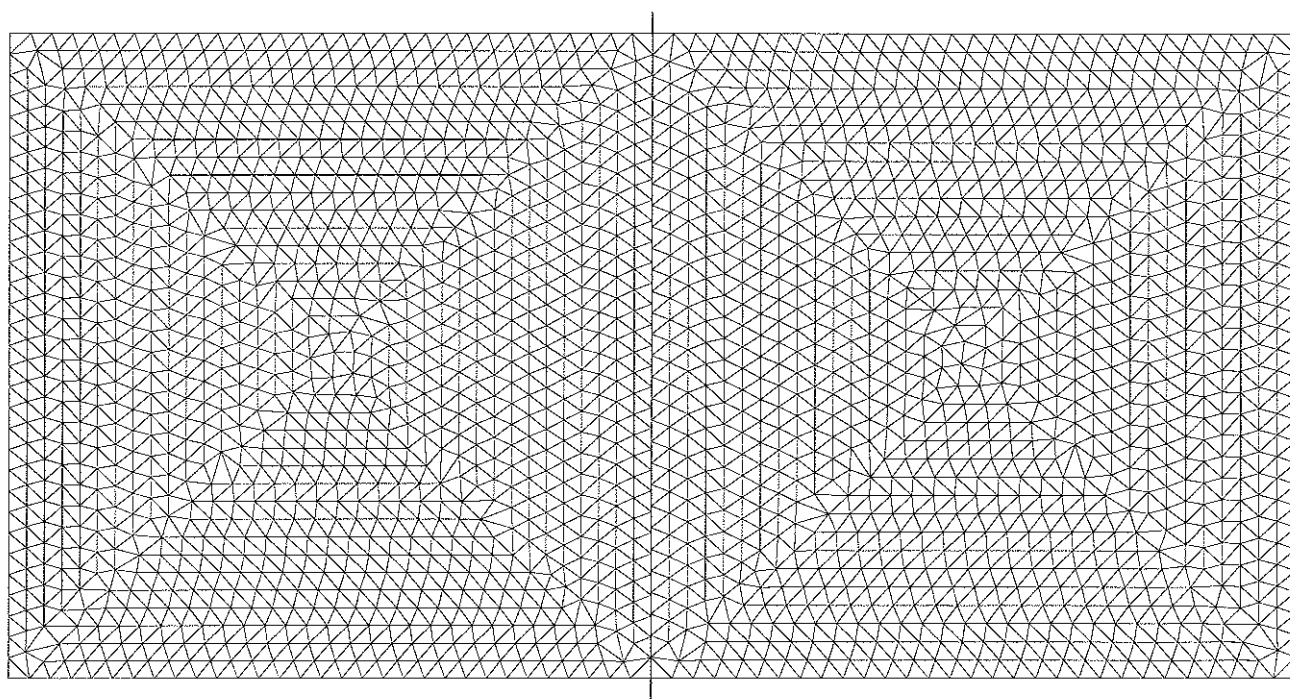


Figure 6.4.1
Configuration initiale

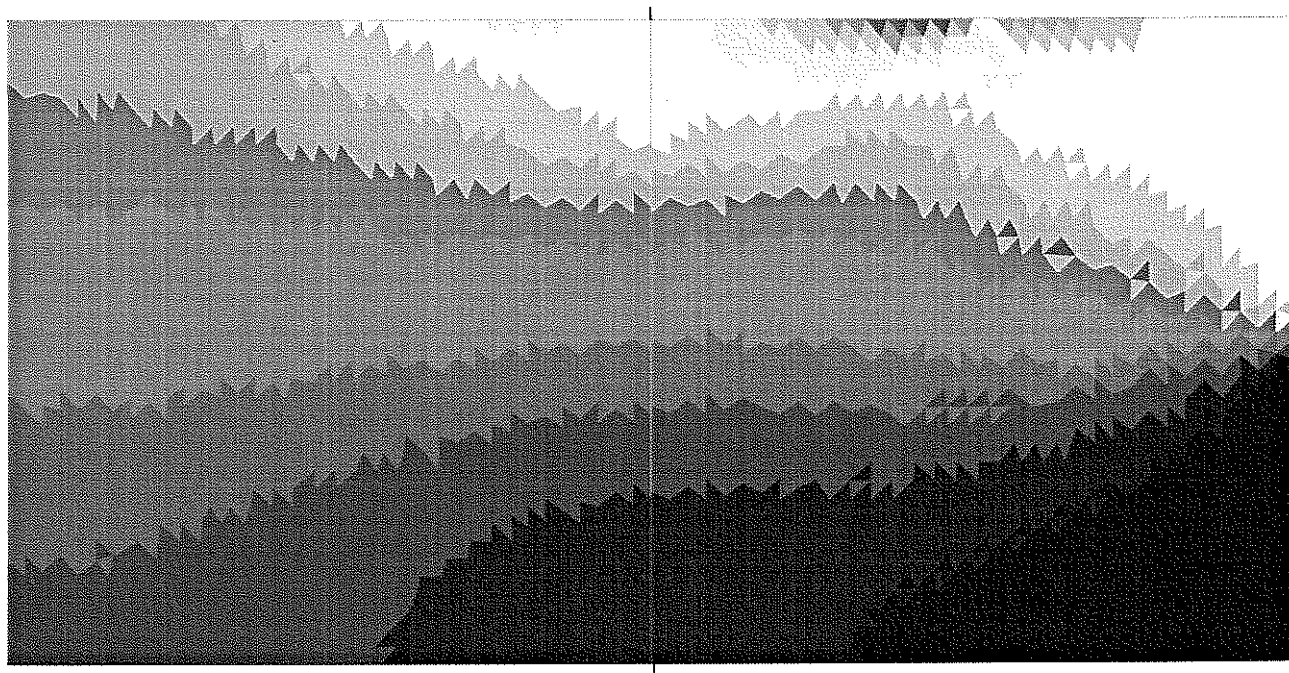


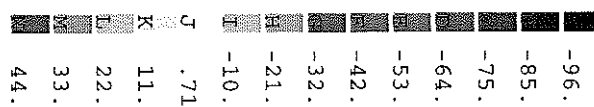
Figure 6.4.2

Champ σ_{yy}

Page suivante:

Figure 6.4.3

Champ σ_{yy} (agrandissement)



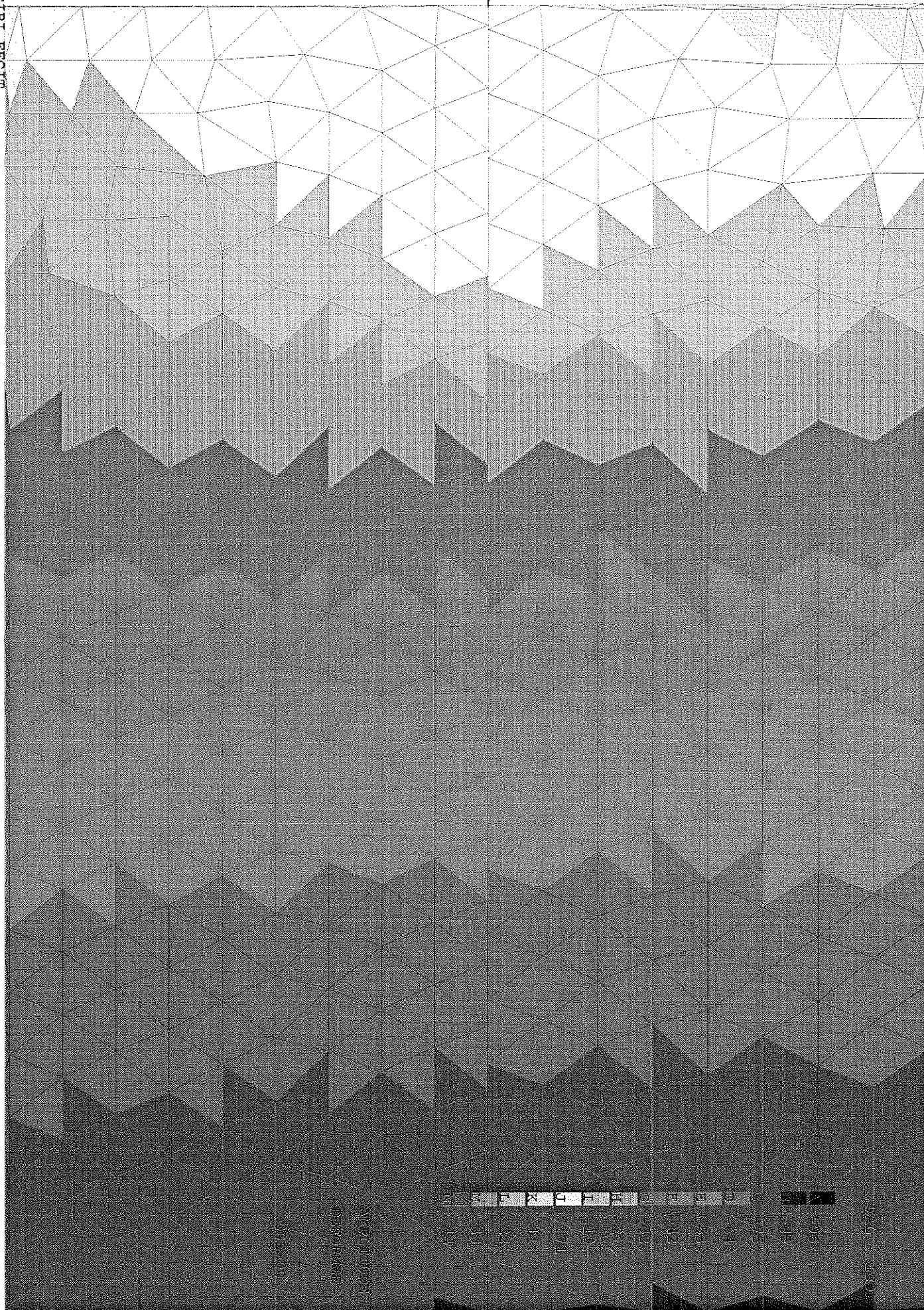
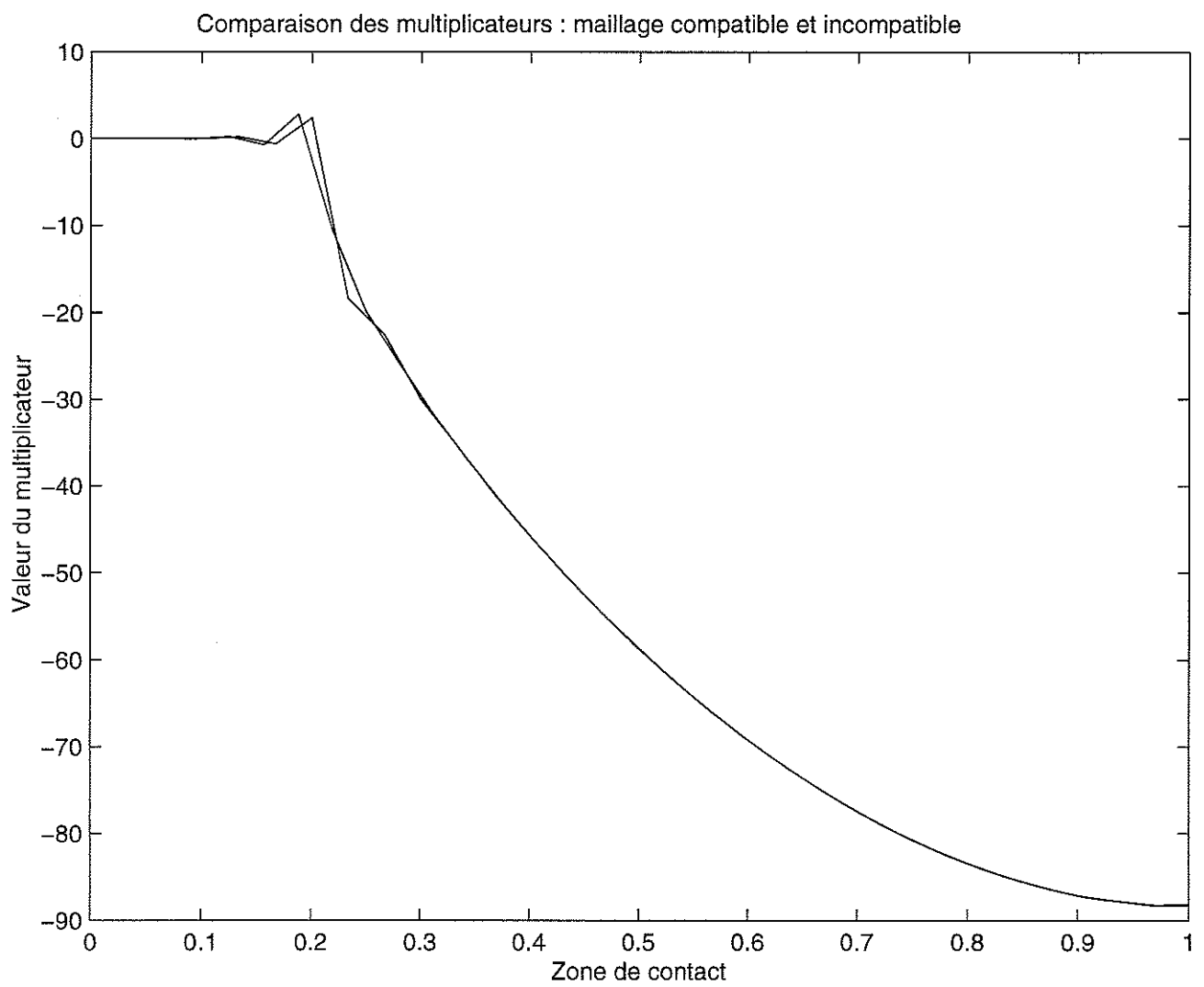
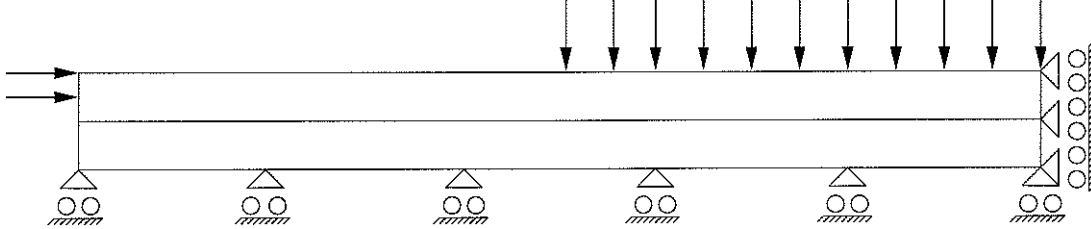


Figure 6.4.4



Non-compatibilités extrêmes

On considère le problème de contact unilatéral dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes:



Les dimensions de chaque rectangle sont de $1\text{ mm} \times 0.05\text{ mm}$. Le module de Young du solide du haut (resp. du bas) est $E_1 = 13000\text{ Mpa}$ (resp. $E_2 = 30000\text{ Mpa}$). Le coefficient de Poisson pour les deux solides est $\nu = 0.2$. Les contraintes appliquées sur les deux parties de la frontière sont de 100 daN/mm^2 .

La zone de contact du premier solide comprend 120 éléments de longueurs égales et celle du second solide 121 éléments de longueurs égales (figure 6.4.5). Le calcul de la solution nécessite 9 minutes 42 secondes de temps CPU, temps comprenant le calcul de la matrice de projection. L'allure de la déformée est représentée sur la figure 6.4.6.

Commentaires

Dans ce cas également, les commentaires précédents s'appliquent. En particulier, l'allure du champ de contraintes σ_{yy} (figures 6.4.7 et 6.4.8), qui vérifie la condition de continuité au travers de la zone de contact.

De plus, il a été jugé intéressant de faire figurer les forces nodales intervenant en premier lieu dans la résolution algorithmique (cf. partie 6.2.3) et représentées par des flèches sur la zone de contact (figures 6.4.9 et 6.4.10). Enfin, le multiplicateur reconstruit à partir de ces forces est représenté sur la figure 6.4.11.

Figure 6.4.5
Configuration initiale

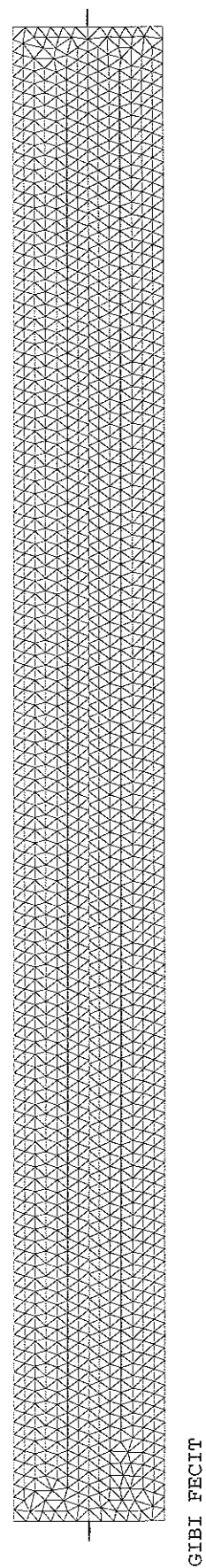
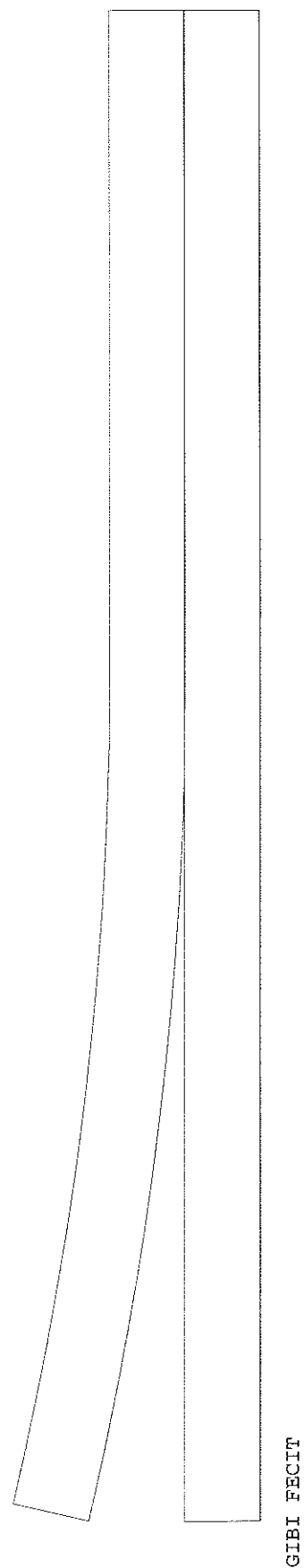


Figure 6.4.6
Déformée (amplification 2)



VAL - ISO

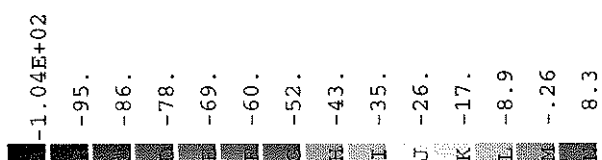
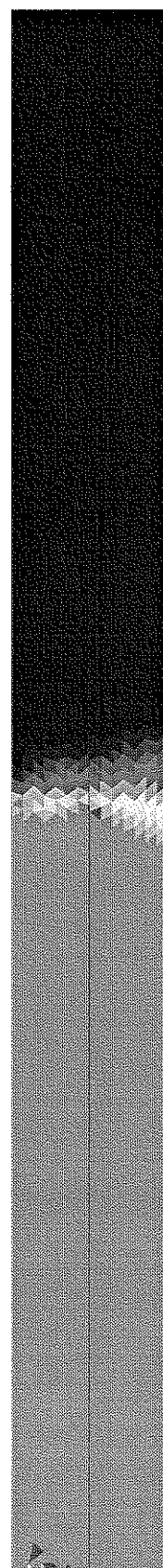
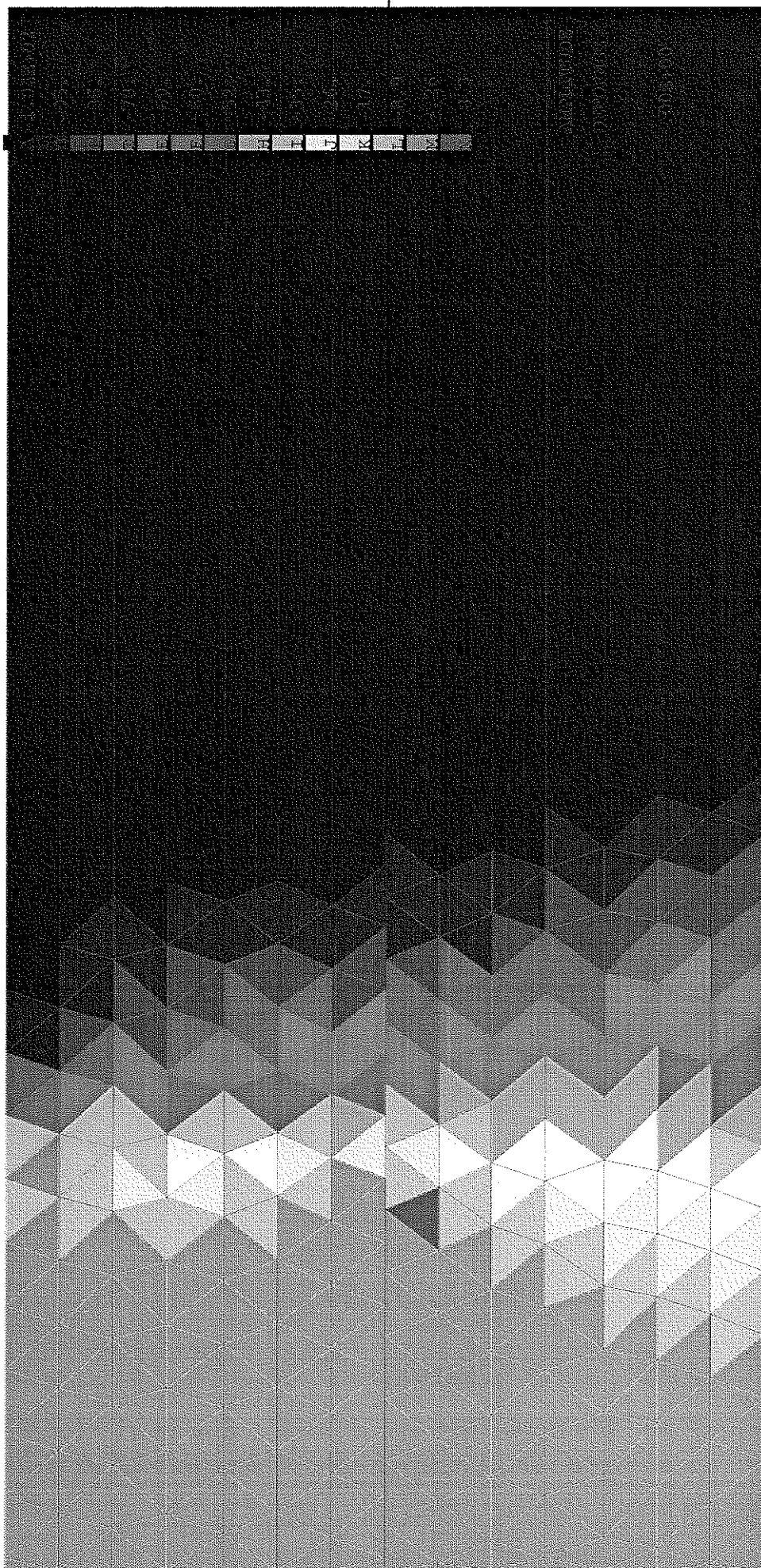


Figure 6.4.7
Champ σ_{yy}

Page suivante:
Figure 6.4.8
Champ σ_{yy} (agrandissement)



GIBI FECIT



COMPOSANTE
VECTEURS

FX FY

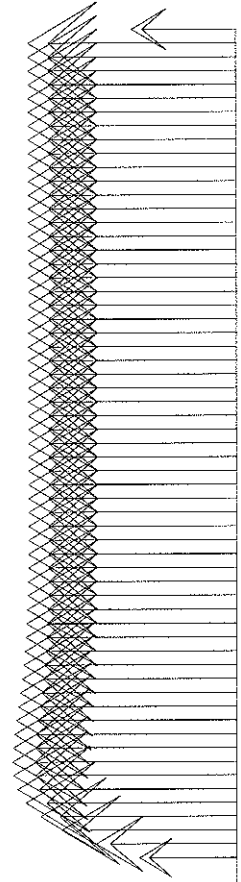


Figure 6.4.9
Forces nodales

GIBI FECIT

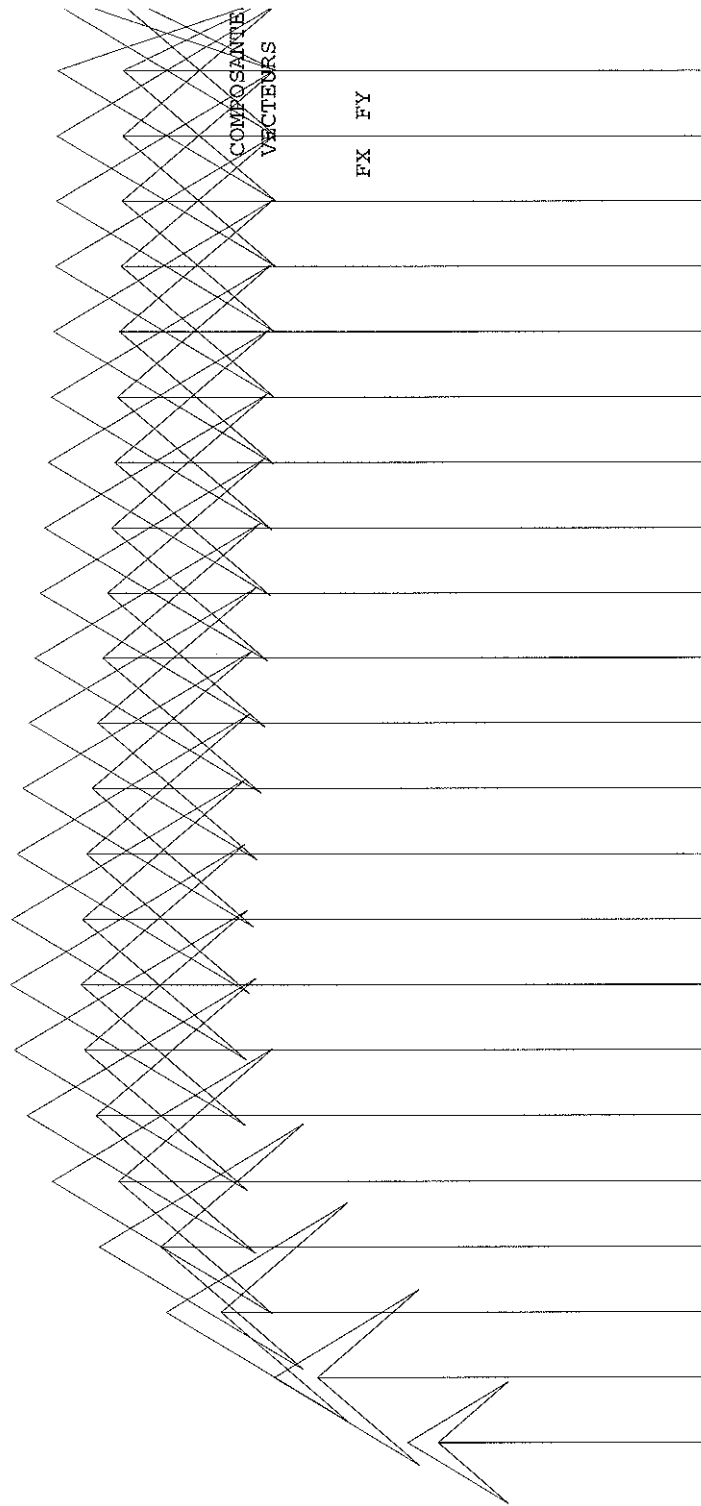
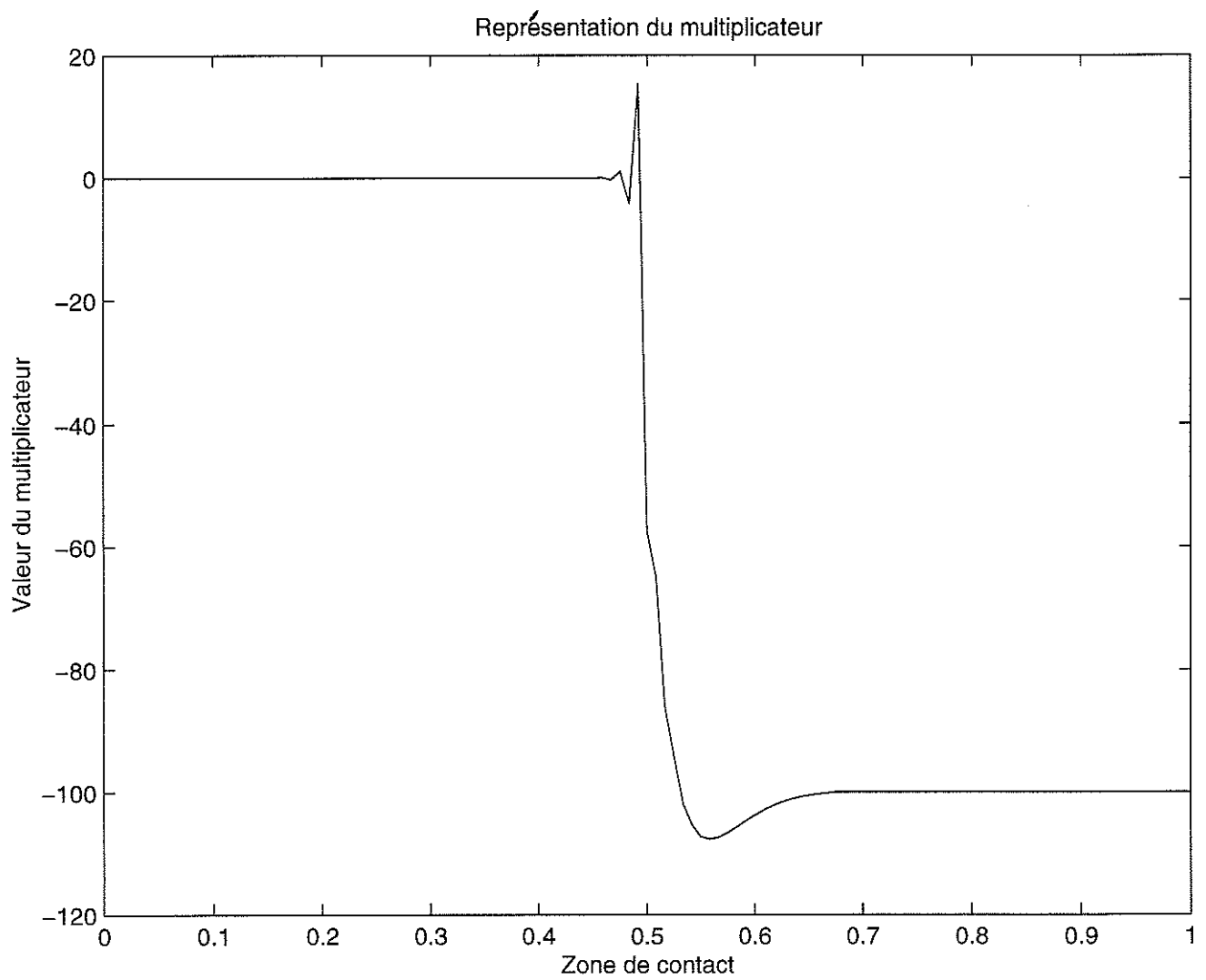


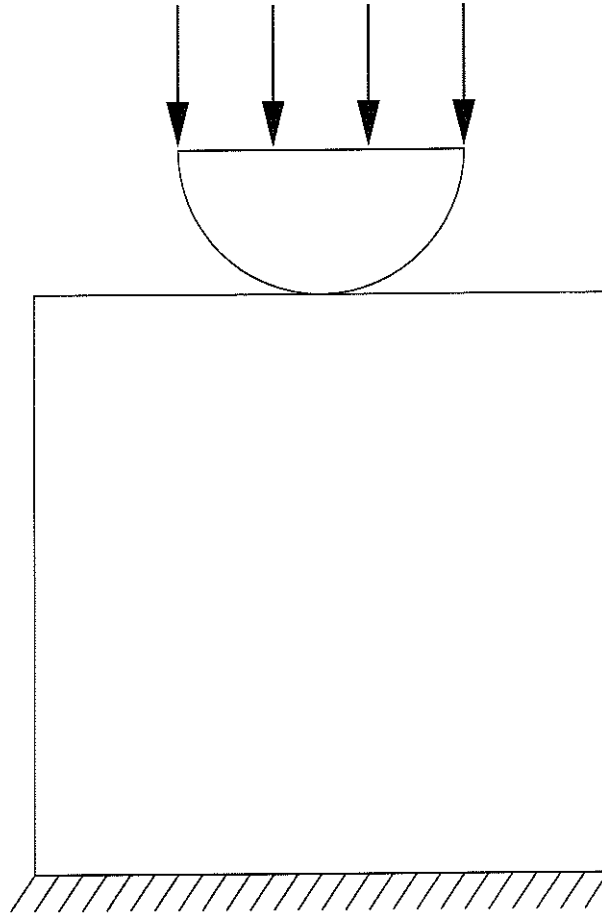
Figure 6.4.10
Forces nodales
(agrandissement)

Figure 6.4.11



6.4.5 Test5: contact d'un demi-disque déformable sur socle déformable

On considère le problème de contact entre un demi-disque et un socle, tous deux étant déformables.



Compte tenu des géométries des corps en contact, l'utilisation de maillages incompatibles est une nécessité. Cette configuration fait également apparaître un jeu initial: certains points qui ne sont pas initialement en contact le sont après déformation. On définit le contact en utilisant le raccord projection et en tenant compte du jeu initial entre les deux solides (cf. (6.2.10)).

Le diamètre du demi-disque est de 20 mm et la longueur du côté du carré est de 40 mm . Le module de Young du demi-disque est $E_1 = 25000\text{ Mpa}$ et celui du carré est $E_2 = 15000\text{ Mpa}$. Le coefficient de Poisson pour les deux solides est $\nu = 0.2$. Les contraintes appliquées sur la partie supérieure du demi-disque sont de 100 daN/mm^2 .

La figure 6.5.1 comprend le maillage initial et les figures 6.5.2 et 6.5.3 représentent les

configurations initiale et déformée.

Commentaires

On observe graphiquement une configuration déformée dont l'allure est satisfaisante, notamment au niveau de la zone de contact.

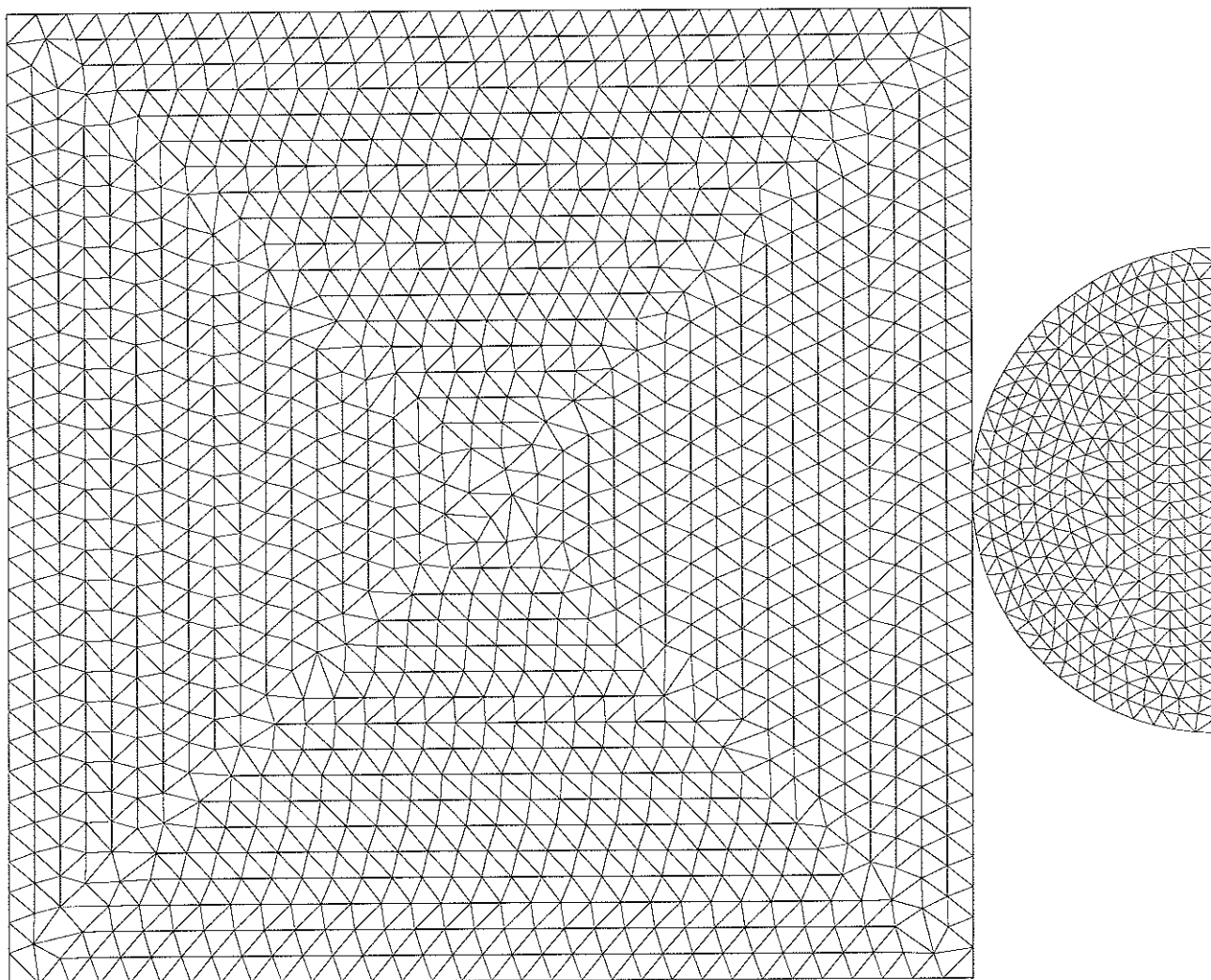


Figure 6.5.1
Configuration initiale

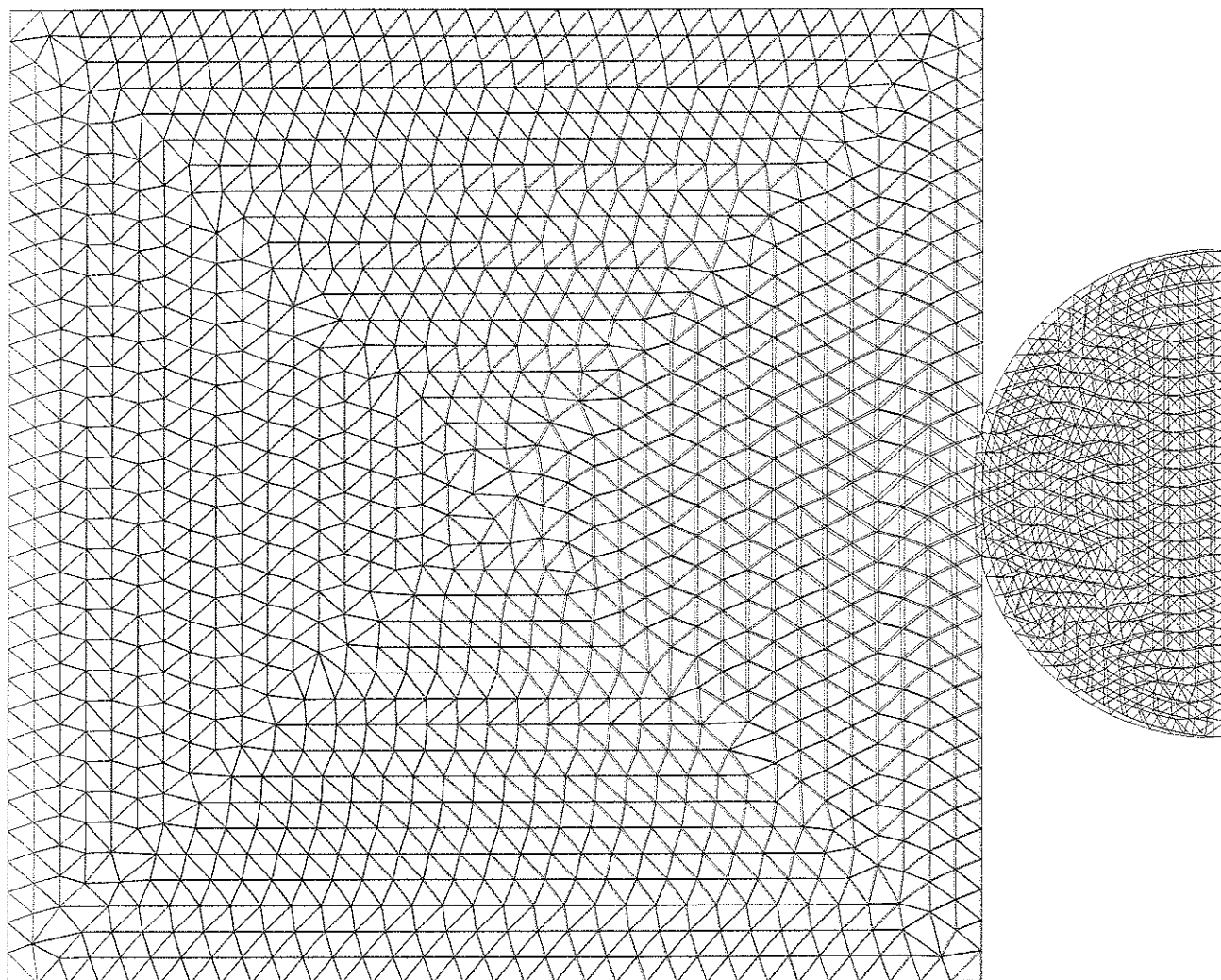
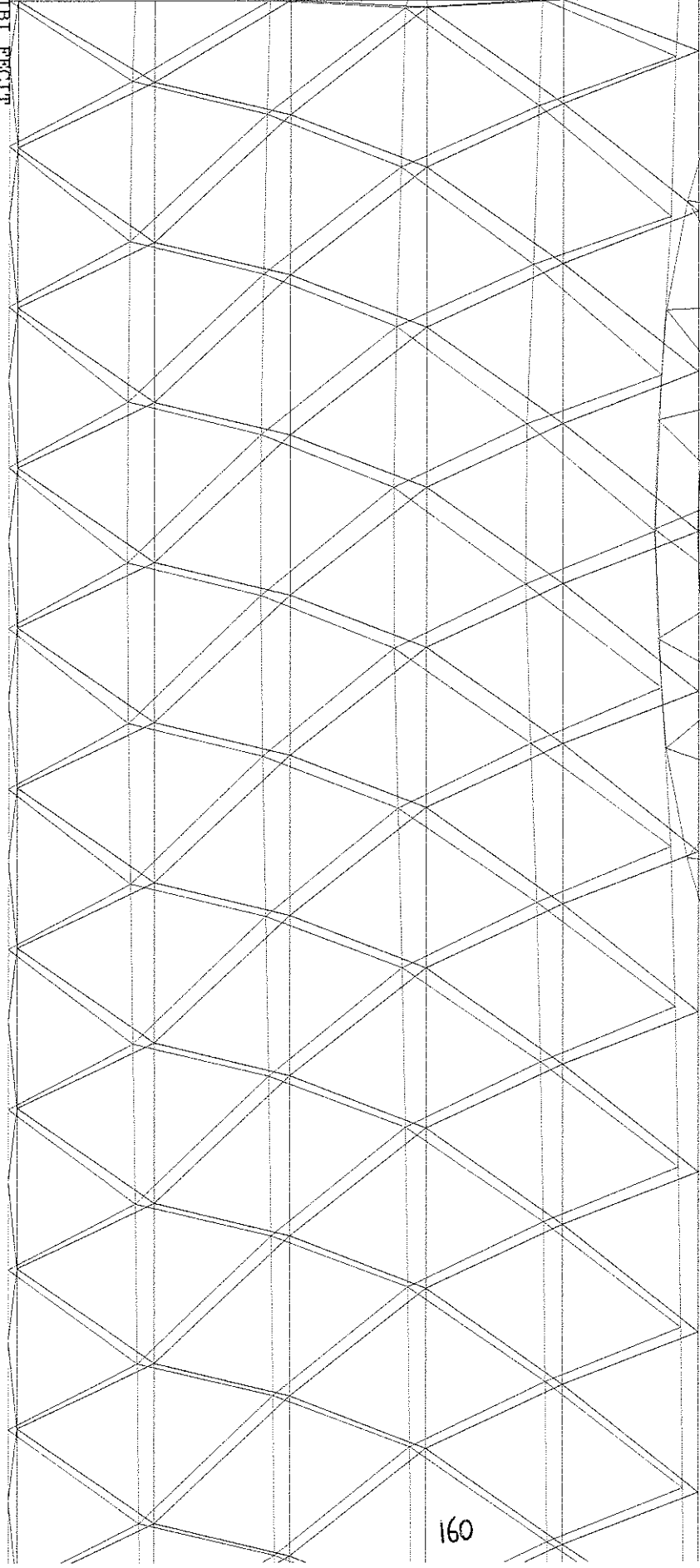


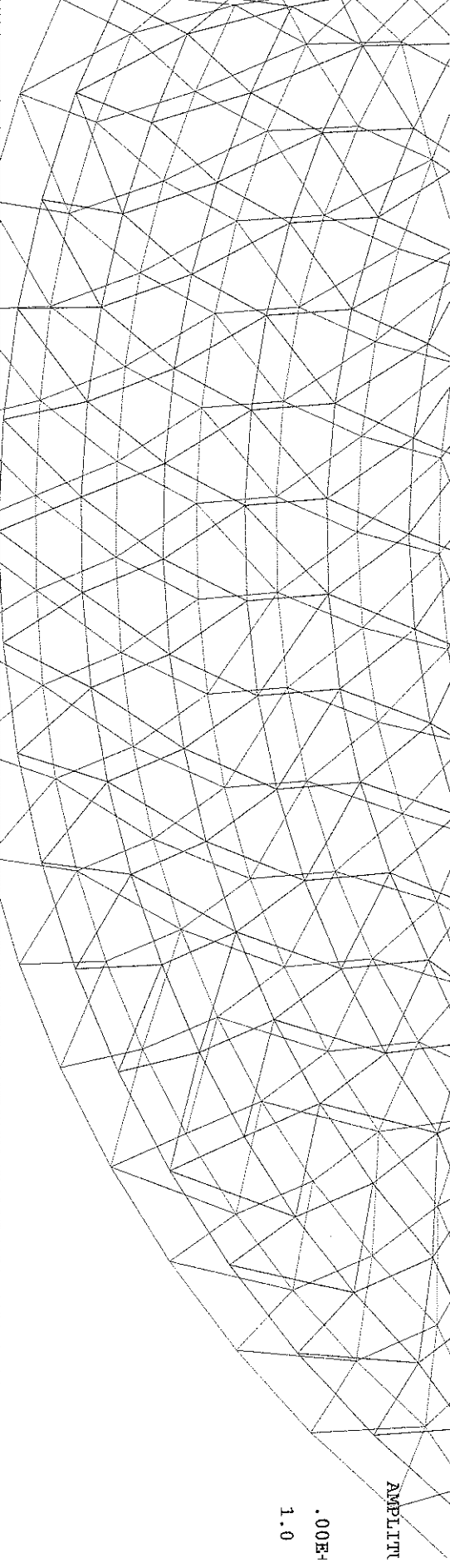
Figure 6.5.2
Maillage initial (bleu) et déformé (rouge)

Page suivante:
Figure 6.5.3
Agrandissement de la figure 6.5.2

GIBI PECIT



160



AMPLIT
.00E+
1.0

Conclusion

L'apport de cette thèse consiste principalement en deux points qui sont les suivants:

- l'extension aux maillages incompatibles de l'analyse par éléments finis des problèmes de contact,
- l'extension à l'étude des inéquations variationnelles de techniques issues de la méthode de décomposition de domaines des éléments finis avec joints.

Pour un problème de contact unilatéral qui est à définir sur des maillages incompatibles, différentes discrétisations de la condition de non-interpénétration sont considérées, étudiées et comparées tant du point de vue théorique que numérique.

Dans l'étude théorique, il se distingue une manière de définir le contact unilatéral sur des maillages quelconques. Cette définition, exprimée via le raccord projection, est globale: elle fait intervenir un opérateur de projection de type L^2 qui permet de "passer" d'un maillage à l'autre. Cette définition du contact sur des maillages incompatibles est optimale au sens suivant: le taux de convergence des solutions discrétisées incorporant cette condition, vers la solution du modèle continu, est le même que dans le cas où les maillages sont compatibles et que la condition de contact nœud à nœud classique est utilisée. De plus, dans le cas de maillages compatibles, le raccord projection revient précisément à la condition de contact nœud à nœud.

L'étude théorique d'autres conditions de contact, notamment la condition de contact locale nœud-segment, fait apparaître qu'il est toujours meilleur, sur le plan de la convergence, de considérer la condition de contact globale correspondant au raccord projection.

Les tests numériques confirment les résultats théoriques. En effet, la condition de contact locale ne donne pas satisfaction dans le cas général, et l'utilisation du raccord projection donne bien le même taux de convergence que pour des maillages compatibles. De plus, l'excellente tenue du raccord projection dans le cas de maillages "très difficiles" fait de ce raccord une condition de contact idéale.

Pour ce qui est des extensions envisageables du travail, il est clair que l'étude du modèle tridimensionnel serait très utile à réaliser. Par ailleurs, la considération des problèmes de contact et d'impact (cf. [53]) en quasi-statique et en dynamique, en utilisant le concept de

raccord projection, constitue une étude importante à effectuer. En effet, les avantages liés à l'absence de remaillage sont bien évidemment importants. D'autre part, la détermination pour ce problème d'un critère de maillage adaptatif par l'intermédiaire d'une estimation *a posteriori* de l'erreur, est digne d'intérêt et actuellement en cours. Pour cette étude, on utilise *l'erreur en relation de comportement* due à P. Ladevèze (cf. [43][44][22]).

Annexe A

Sur l'approximation en norme duale

Nous recherchons un opérateur à valeurs dans un espace de fonctions de type éléments finis en dimension un et vérifiant les deux propriétés suivantes (cf. démonstration de (2.3.4)): il conserve la positivité et donne de bonnes estimations pour la norme duale $\|\cdot\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'}$ définie pour toute forme linéaire φ sur $H^{\frac{1}{2}}[0,1]$ comme suit:

$$\|\varphi\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}[0,1]} \frac{\langle \varphi, \psi \rangle}{\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}[0,1]}},$$

où $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire dans la dualité $(H^{\frac{1}{2}}[0,1])', H^{\frac{1}{2}}[0,1]$.

Par un opérateur $\mathcal{A}_h$ qui vérifie de bonnes estimations pour la norme duale définie ci-dessus, nous entendons des propriétés d'approximation du type suivant:

$$\|u - \mathcal{A}_h u\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\sigma} \|u\|_{H^\sigma[0,1]}, \quad \sigma \geq 0,$$

pour tout $u \in H^\sigma[0,1]$. Le cas le plus intéressant, pour le problème de contact, correspond à $\sigma = \frac{3}{2}$ (cf. (2.3.4)).

Dans cette annexe, on considère deux opérateurs conservant la positivité et nous montrons sur des contre-exemples qu'ils ne vérifient pas les bonnes propriétés d'approximation en norme duale.

Avant de débiter cette étude, nous rappelons simplement que l'opérateur de projection au sens de L^2 sur l'espace vectoriel des fonctions continues, affines par morceaux, ne conserve pas la positivité. Il possède par contre de bonnes propriétés pour la norme duale, [2].

A.1 L'opérateur d'interpolation de Lagrange

Il est clair que l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un conserve le signe.

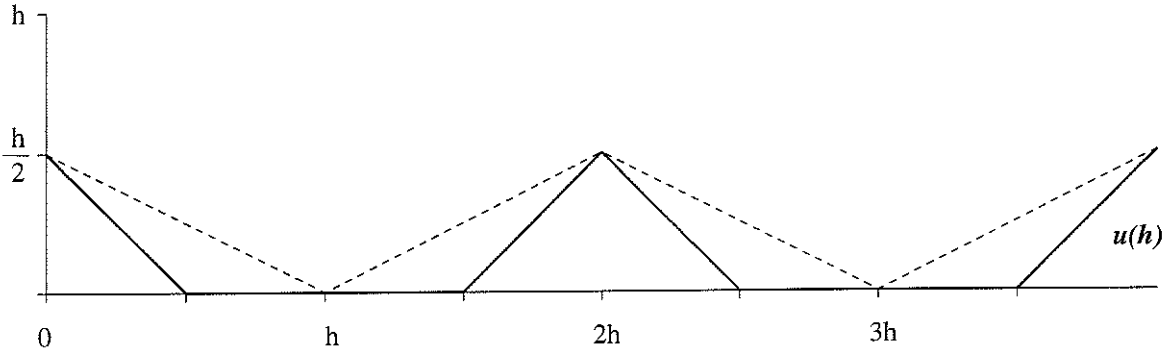
A.1.1 Approximation pour des fonctions H^1

On suppose que l'intervalle $[0, 1]$ est divisé en $\frac{1}{h}$ intervalles de longueur h et l'on note $\mathcal{I}_h$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un correspondant à cette subdivision. Il s'agit de montrer le résultat suivant:

Proposition A.1 *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il n'existe pas de constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait, pour tout $u \in H^1[0, 1]$*

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \leq C h^{1+\varepsilon} \|u\|_{H^1[0,1]}.$$

Preuve. Considérons la famille $(u(h))_h$ de fonctions dont la définition est suggérée par la figure suivante:



Par définition de la norme duale de $H^{\frac{1}{2}}[0, 1]$, on a

$$\|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}[0,1]} \frac{\int_0^1 (u(h) - \mathcal{I}_h u(h)) \psi \, dx}{\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}[0,1]}}.$$

En prenant $\psi = -1$ sur $[0, 1]$ et en écrivant $\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}[0,1]} = \|\psi\|_{L^2[0,1]} = 1$, il vient

$$\begin{aligned} \|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} &\geq \int_0^1 \mathcal{I}_h u(h) - u(h) \, dx, \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \mathcal{I}_h u(h) - u(h) \, dx, \\ &= \frac{h}{8}. \end{aligned}$$

On écrit alors

$$\|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \geq \frac{h}{8 \|u(h)\|_{H^1[0,1]}} \|u(h)\|_{H^1[0,1]}.$$

Majorons $\|u(h)\|_{H^1[0,1]}$ par une constante indépendante de h . Pour h assez petit, on a $\|u(h)\|_{L^2[0,1]} \leq 1$ et $\|(u(h))'\|_{L^2[0,1]} \leq 1$. Donc $\|u(h)\|_{H^1[0,1]}$ est borné et il existe C_0 indépendant de h tel que

$$\|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \geq C_0 h \|u(h)\|_{H^1[0,1]}. \quad (\text{A.1.1})$$

Soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe C indépendant de h tel que pour tout $v \in H^1[0,1]$ et $h > 0$, on ait

$$\|v - \mathcal{I}_h v\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \leq C h^{1+\varepsilon} \|v\|_{H^1[0,1]}.$$

D'après (A.1.1) on a pour h petit et $\varepsilon > 0$

$$\|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \geq \frac{C_0}{h^\varepsilon} h^{1+\varepsilon} \|u(h)\|_{H^1[0,1]}.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{C_0}{h^\varepsilon} = +\infty$, il existe h_0 tel que $\frac{C_0}{h_0^\varepsilon} > C$. On a donc, pour ce h_0 :

$$\|u(h_0) - \mathcal{I}_{h_0} u(h_0)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \geq C h_0^{1+\varepsilon} \|u(h_0)\|_{H^1[0,1]},$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

A.1.2 Approximation pour des fonctions H^2

De la même manière que précédemment, on peut s'assurer, sur un autre exemple simple, du caractère non optimal de l'approximation par l'opérateur d'interpolation de Lagrange en norme $(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'$. On suppose que l'intervalle $[0,1]$ est divisé en $\frac{1}{h}$ intervalles de longueur h . On note $\mathcal{I}_h$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un correspondant à cette subdivision.

On considère alors la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $[0,1]$. Par définition de la norme duale de $H^{\frac{1}{2}}[0,1]$ et en notant $u(x) = x^2$, il vient

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}[0,1]} \frac{\int_0^1 (u - \mathcal{I}_h u) \psi \, dx}{\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}[0,1]}}.$$

En prenant $\psi = -1$ sur $[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \|u - \mathcal{I}_h u\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} &\geq \int_0^1 \mathcal{I}_h u - u \, dx, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \mathcal{I}_h u - u \, dx. \end{aligned}$$

L'équation de la droite passant par les points $(\frac{i}{n}, \frac{i^2}{n^2})$ et $(\frac{i+1}{n+1}, \frac{(i+1)^2}{(n+1)^2})$ est:

$$y = \frac{2i+1}{n}x - \frac{i^2+i}{n^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{I}_h u - u \, dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \frac{2i+1}{n}x - \frac{i^2+i}{n^2} - x^2 \, dx, \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6n^3}, \\ &= \frac{1}{6n^2}, \\ &= \frac{h^2}{6}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \geq Ch^2 \|u\|_{H^2[0,1]}.$$

Dans ce cas aussi on perd $\sqrt{h}$ sur "l'optimalité".

A.1.3 Approximation pour des fonctions $H^{\frac{3}{2}}$

Il s'agit du cas le plus intéressant dans le cadre du contact unilatéral (cf. démonstration de (2.3.4)). On suppose que l'intervalle $[0, 1]$ est divisé en $\frac{1}{h}$ intervalles de longueur h et on désigne par $\mathcal{I}_h$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un correspondant à cette subdivision.

On se propose d'établir le résultat suivant, qui est à la source de la convergence en $h^{\frac{3}{4}}$ (sous les hypothèses de régularité H^2 des déplacements) pour le problème de contact unilatéral.

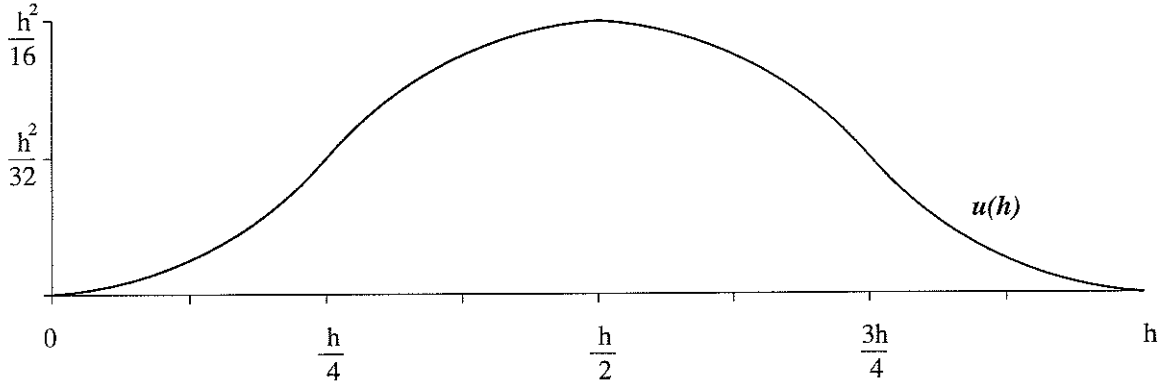
Proposition A.2 *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il n'existe pas de constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait, pour tout $u \in H^{\frac{3}{2}}[0, 1]$*

$$\|u - \mathcal{I}_h u\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \leq Ch^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \|u\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]}.$$

Preuve. Considérons une famille $u(h)$ de fonctions définie sur $[0, 1]$ comme suit.

Pour commencer, on définit $u(h)$ sur $[0, h]$:

$$u(h)(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \text{ sur } [0, \frac{h}{4}], \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{xh}{2} - \frac{h^2}{16} \text{ sur } [\frac{h}{4}, \frac{3h}{4}], \\ \frac{(x-h)^2}{2} \text{ sur } [\frac{3h}{4}, h]. \end{cases}$$



On définit ensuite $u(h)$, de période h sur $[0, 1]$.

En prenant $\psi = -1$ sur $[0, 1]$ dans la définition de la norme duale, on a

$$\begin{aligned} \|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} &\geq \int_0^1 u(h) \, dx, \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h u(h) \, dx, \\ &= Ch^2. \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à majorer $\|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]}$. On utilise le résultat ci-dessous.

Lemme A.1 *Il existe C indépendant de h tel que $\|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]} \leq C\sqrt{h}$.*

Suite de la preuve de la proposition. On a

$$\begin{aligned} \|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} &\geq Ch^2, \\ &= \frac{C}{\|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]}} h^2 \|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{\|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]}} \geq \frac{C}{\sqrt{h}}.$$

Donc

$$\|u(h) - \mathcal{I}_h u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \geq Ch^{\frac{3}{2}} \|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]},$$

avec C indépendant de h .

En reprenant le même raisonnement que pour (A.1.1), on déduit la proposition annoncée. $\square$

Preuve du lemme. On a

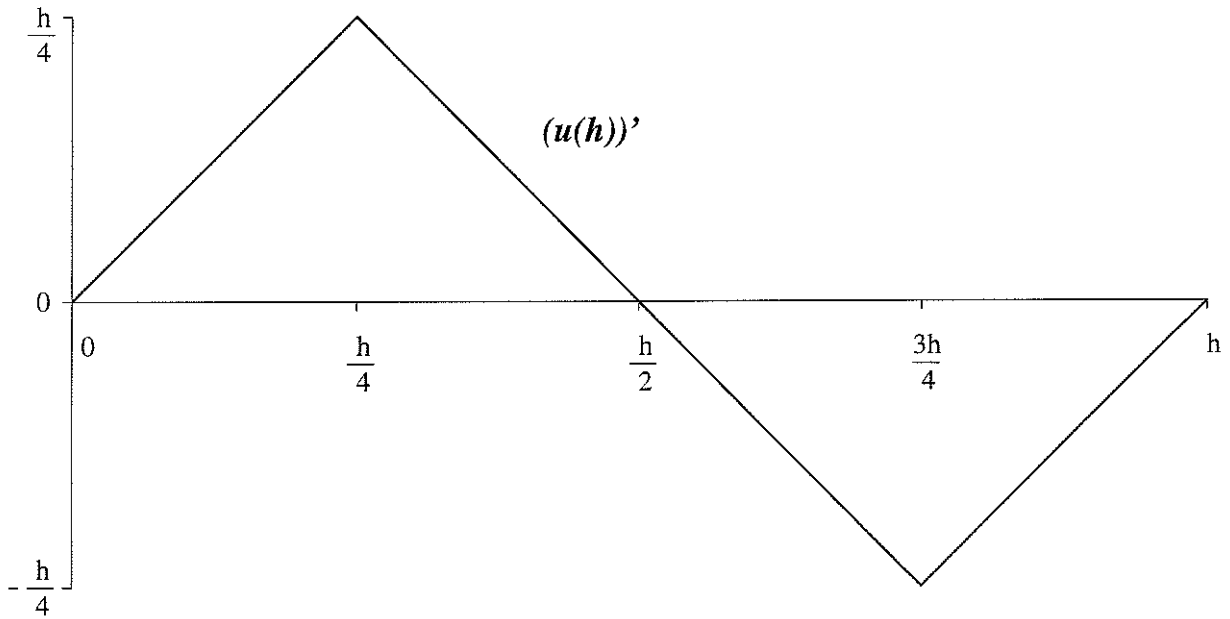
$$\|u(h)\|_{H^{\frac{3}{2}}[0,1]}^2 = \|u(h)\|_{H^1[0,1]}^2 + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x - y} \right)^2 dx dy,$$

$$\|u(h)\|_{L^2[0,1]}^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{h^2}{16}\right)^2 dx = Ch^4,$$

$$\|(u(h))'\|_{L^2[0,1]}^2 \leq \int_0^1 \left(\frac{h}{4}\right)^2 dx = Ch^2.$$

Il reste à majorer le terme le plus délicat

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x - y} \right)^2 dx dy.$$



Nous allons diviser $[0, 1]$ en $\frac{2}{h}$ intervalles de longueurs égales notés I_i $1 \leq i \leq \frac{2}{h}$. Il s'agit ensuite de décomposer l'intégrale double en $\frac{4}{h^2}$ surfaces élémentaires:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x - y} \right)^2 dx dy = \sum_{i=1}^{\frac{2}{h}} \sum_{j=1}^{\frac{2}{h}} \int_{I_i} \int_{I_j} \left(\frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x - y} \right)^2 dx dy.$$

On discute alors suivant les valeurs de $|i - j|$.

Si $|i - j| = 0$, on a $\left| \frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x - y} \right|^2 \leq (1)^2$ et $\frac{2}{h}$ possibilités de couples (i, j) .

Si $|i - j| = 1$, on a $\left| \frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x - y} \right|^2 \leq (1)^2$ et $2\left(\frac{2}{h} - 1\right)$ possibilités de couples (i, j) .

Si $|i-j| = 2$, on a $\left| \frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x-y} \right|^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ et $2\left(\frac{2}{h}-2\right)$ possibilités de couples (i, j) .

Si $|i-j| = 3$, on a $\left| \frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x-y} \right|^2 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ et $2\left(\frac{2}{h}-3\right)$ possibilités de couples (i, j) .

Si $|i-j| = 4$, on a $\left| \frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x-y} \right|^2 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^2$ et $2\left(\frac{2}{h}-4\right)$ possibilités de couples (i, j) ,

et ainsi de suite.

En sommant le tout et en utilisant le fait que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2$ converge, on arrive à

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x-y} \right)^2 dx dy = \sum_{i=1}^{\frac{2}{h}} \sum_{j=1}^{\frac{2}{h}} \int_{I_i} \int_{I_j} \left(\frac{(u(h))'(x) - (u(h))'(y)}{x-y} \right)^2 dx dy \leq 4h.$$

D'où le lemme. $\square$

A.2 L'opérateur de projection L^2 sur le cône convexe des fonctions continues, affines par morceaux et positives.

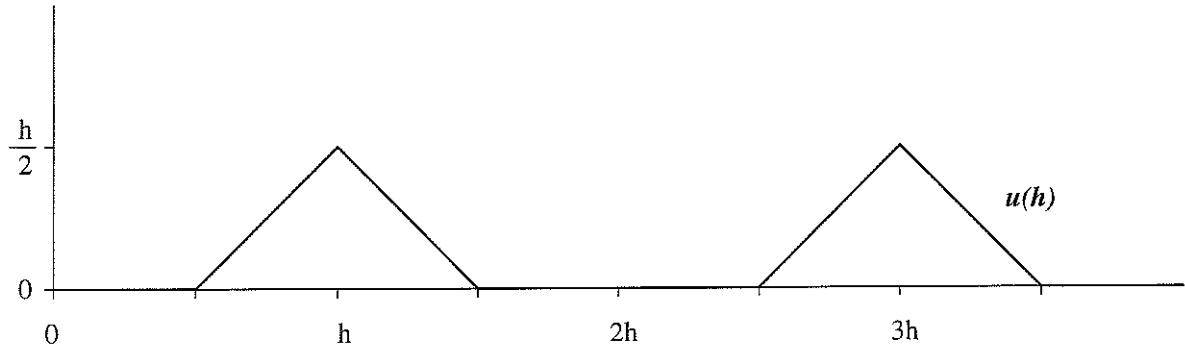
Dans cette partie, on considère un opérateur qui est un candidat "naturel" aux bonnes propriétés d'approximation pour la norme de $(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'$ et on montre sur un contre-exemple que ces dernières ne sont pas vérifiées.

On suppose que l'intervalle $[0, 1]$ est divisé en $\frac{1}{h}$ intervalles de longueur h et on désigne par π_h^+ l'opérateur de projection au sens de L^2 sur le cône convexe des fonctions continues positives, affines par morceaux sur les intervalles de la subdivision. On se propose de démontrer le résultat suivant:

Proposition A.3 *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il n'existe pas de constante $C > 0$ indépendante de h telle que l'on ait, pour tout $u \in H^1[0, 1]$, $u \geq 0$,*

$$\|u - \pi_h^+ u\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} \leq Ch^{1+\varepsilon} \|u\|_{H^1[0,1]}.$$

Preuve. Considérons la famille $u(h)$ de fonctions positives définie comme dans la section A.1.1 par:



Considérons l'intervalle $[0, h]$ et déterminons le projeté de $u(h)$ sur cet intervalle. Par définition de l'opérateur de projection, $\pi_h^+ u(h) = ax + b$ avec $b \geq 0$ et $ah + b \geq 0$.

On a

$$\begin{aligned} \|u(h) - \pi_h^+ u(h)\|_{L^2[0,h]}^2 &= \int_0^h (u(h) - \pi_h^+ u(h))^2 dx, \\ &= \int_0^{\frac{h}{2}} (ax + b)^2 dx + \int_{\frac{h}{2}}^h \left(x - \frac{h}{2} - (ax + b)\right)^2 dx, \\ &= \frac{h^3}{3} a^2 + hb^2 + h^2 ab - \frac{5h^3}{24} a - \frac{h^2}{4} b + \frac{h^3}{24}, \\ &= \psi(a, b). \end{aligned}$$

Cette dernière expression est à minimiser en les variables a et b , sous les contraintes $b \geq 0$ et $ah + b \geq 0$.

On écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(a, b)}{\partial a} = \frac{2h^3}{3} a + h^2 b - \frac{5h^3}{24}, \\ \frac{\partial \psi(a, b)}{\partial b} = h^2 a + 2bh - \frac{h^2}{4}. \end{cases}$$

La détermination de a et b annulant le gradient de ψ conduit à

$$a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{h}{8}.$$

Ce minimum ne vérifie pas la contrainte. On cherche donc le minimum sur la frontière de l'ensemble des contraintes.

Premier cas: Si $b = 0$ et $a \geq 0$,

$$\psi(a, b) = \frac{h^3}{3} a^2 - \frac{5h^3}{24} a + \frac{h^3}{24},$$

le minimum est atteint pour

$$a = \frac{5}{16},$$

et vaut

$$\frac{7h^3}{768}.$$

Deuxième cas: Si $b \geq 0$ et $ah + b = 0$,

$$\begin{aligned}\psi(a, b) &= \frac{h^3}{3}a^2 + hb^2 + h^2ab - \frac{5h^3}{24}a - \frac{h^2}{4}b + \frac{h^3}{24}, \\ &= \frac{h^3}{24}(8a^2 + a + 1),\end{aligned}$$

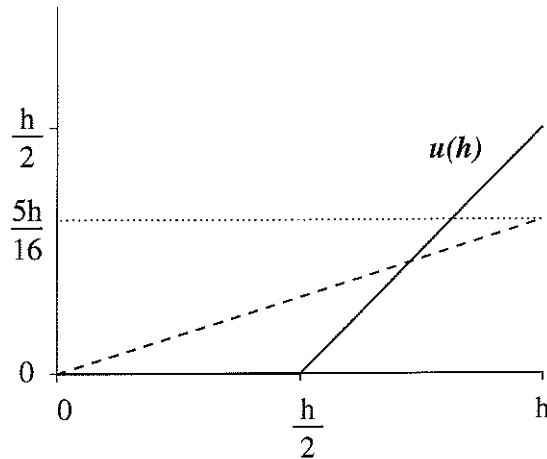
le minimum est atteint pour

$$a = -\frac{1}{16},$$

et vaut

$$\frac{31h^3}{768}.$$

Voici une représentation du projeté sur $[0, h]$:



Par périodicité, on en déduit le projeté de $u(h)$ sur $[0, 1]$.

Donc

$$\begin{aligned}\|u(h) - \pi_h^+ u(h)\|_{L^2[0,1]}^2 &= \sum_{\text{intervalles}} \int_0^h (u(h) - \pi_h^+ u(h))^2 dx, \\ &= \frac{7h^2}{768}.\end{aligned}$$

On a

$$\|u(h) - \pi_h^+ u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} = \sup_{\psi \in H^{\frac{1}{2}}[0,1]} \frac{\int_0^1 (u(h) - \pi_h^+ u(h)) \psi \, dx}{\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}[0,1]}}.$$

En prenant $\psi = -1$ sur $[0, 1]$, il vient

$$\begin{aligned} \|u(h) - \pi_h^+ u(h)\|_{(H^{\frac{1}{2}}[0,1])'} &\geq \int_0^1 \pi_h^+ u(h) - u(h) \, dx, \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_0^{\frac{h}{2}} \frac{5x}{16} \, dx + \int_{\frac{h}{2}}^h \frac{5x}{16} - \left(x - \frac{h}{2}\right) \, dx \right), \\ &= \frac{5h}{64}. \end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement que pour l'opérateur d'interpolation de Lagrange, on établit le résultat annoncé dans la proposition. $\square$

Bibliographie

- [1] Y. Achdou and O. Pironneau, *A Fast Solver for Navier-Stokes Equations in the Laminar Regime Using Mortar Finite Element and Boundary Element Methods*, SIAM J. Num. Anal. **32**, 985–1016, (1995).
- [2] I. Babuška and A. K. Aziz, *Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method*, in The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, A. K. Aziz ed., Academic Press, New-York, (1972).
- [3] A. Ben Abdallah, F. Ben Belgacem and Y. Maday, *The Mortar Finite Element Method of Class $H(\text{curl})$ and Application to the Maxwell Equations*, Eccomas 96, Paris.
- [4] F. Ben Belgacem, *Discrétisations 3D non conformes par la méthode de décomposition de domaine des éléments avec joints: analyse mathématique et mise en œuvre pour le problème de Poisson*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1993).
- [5] F. Ben Belgacem, *The Mortar Finite Element Method with Lagrange Multipliers*, Rapport interne du laboratoire MIP **RI 94.1**, submitted to *Numerische Mathematik*.
- [6] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *The Mortar Finite Element Method for Contact Problems*, Rapport interne du laboratoire MIP **RI 95.23**, to appear in *Mathematical and Computer Modeling*.
- [7] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *Approximation of the Unilateral Contact Problem by the Mortar Finite Element Method*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **324**, 123–127, (1997).
- [8] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *Extension of the Mortar Finite Element Method to a Variational Inequality Modeling Unilateral Contact*, soumis à *M3AS*.
- [9] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *Unilateral Contact and Non-matching Meshes*, Proceedings of the Fifth Meeting in Unilateral Problems in Structural Analysis, Ferrara, Italy, June 12–14, (1997).

- [10] C. Bernardi, *Optimal Finite Element Interpolation on Curved Domains*, SIAM, Jour. of Numer. Anal. **26**, 1212–1240, (1989).
- [11] C. Bernardi, N. Débit and Y. Maday, *Coupling Finite Element and Spectral Methods: First Results*, Math. of Comp. **54**, 21–39, (1990).
- [12] C. Bernardi, V. Girault, *A Local Regularisation Operator for Triangular and Quadrilateral Finite Elements*, Internal Report **95036**, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris, (1995).
- [13] C. Bernardi, Y. Maday and A. T. Patera, *A New Nonconforming Approach to Domain Decomposition: The Mortar Element Method*, Collège de France Seminar, H. Brezis, J.-L. Lions, Pitman, 13–51, (1994).
- [14] P. E. Bjørstad and O.B. Widlund, *Iterative Methods for the Solution of Elliptic Problems on Regions Partitioned into Substructures*, SIAM, Jour. of Numer. Anal. **23**, 1097–1120, (1986).
- [15] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, (1983).
- [16] F. Brezzi, W. W. Hager and P. A. Raviart, *Error Estimates for the Finite Element Solution of Variational Inequalities*, Numer. Math. **28**, 431–443, (1977).
- [17] L. Champaney, *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*, Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, (1996).
- [18] P.-G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, (1978).
- [19] P.-G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, in Handbook of Numerical Analysis, Volume II, Part 1, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions North Holland, 17–352, (1991).
- [20] M. Cocu, *Existence of Solutions of Signorini Problems with Friction*, Int. J. Eng. Sci. **22**, 567–575, (1984).
- [21] M. Cocu, E. Pratt, and M. Raous *Formulation and Approximation of Quasistatic Frictional Contact*, Int. J. Eng. Sci. **34**, 783–798, (1996).
- [22] P. Coorevits, P. Ladevèze and J.-P. Pelle, *An Automatic Procedure for Finite Element Analysis in 2D Elasticity*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. **121**, 91–120, (1995).

- [23] N. Debit, *La méthode des éléments avec joints dans le cas du couplage de méthodes spectrales et méthodes d'éléments finis: Résolution des équations de Navier-Stokes*, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1991).
- [24] N. Debit and Y. Maday, *The Coupling of Spectral and Finite Element Methods for the Approximation of the Stokes Problem*, in Computational Mathematics and Applications, actes du 8ème colloque joint France-URSS-Italie, Pavie, (1989).
- [25] G. Duvaut, *Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, **290**, 263–265, (1980).
- [26] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, (1972).
- [27] R. S. Falk, *Error Estimates for the Approximation of a Class of Variational Inequalities*, Math. of Comp. **28**, 963–971, (1974).
- [28] M. Frank and P. Wolfe *An Algorithm for Quadratic Programing*, Naval Research Logist Quarterly, **3**, 95–110, (1956).
- [29] R. Glowinski, J.-L. Lions et R. Trémolières, *Analyse numérique des inéquations variationnelles, Volumes 1 et 2*, Dunod, Paris, (1976).
- [30] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs and Studies in Mathematics, 24, Pitman, (1985).
- [31] J. Haslinger, *Approximation of the Signorini Problem with Friction, Obeying the Coulomb Law*, Math. Meth. Appl. Sci. **5**, 422–437, (1983).
- [32] J. Haslinger, *Least Square Method for Solving Contact Problems with Friction Obeying Coulomb's Law*, Apl. Mat. **29**, 212–224, (1984).
- [33] J. Haslinger and I. Hlaváček, *Contact between Elastic Bodies -1.Continuous Problems*, Aplikace Matematiky **25**, 324–347, (1980).
- [34] J. Haslinger and I. Hlaváček, *Contact between Elastic Bodies -2.Finite Element Analysis*, Aplikace Matematiky **26**, 263–290, (1981).
- [35] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas, *Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics*, in Handbook of Numerical Analysis, Volume IV, Part 2, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North Holland, 313–485, (1996).

- [36] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimisation Algorithms Volume I and II*, in Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften (305,306), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1993).
- [37] P. Hild, *Nonconforming Finite Elements for Unilateral Contact with Friction*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **324**, 707–710, (1997).
- [38] P. Hild, F. Ben Belgacem, and P. Laborde, *Raccord de maillages pour un problème de contact*, Actes du troisième colloque national en calcul des structures, Giens97, 20–23 juin 1997, Ed. Presses académiques de l’Ouest, 405–410, (1997).
- [39] J. Jarušek, *Contact Problems with Bounded Friction. Coercive Case*, Czech. Math. J. **33**, 237–261, (1983).
- [40] N. Kikuchi and J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, (1988).
- [41] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, New-York, (1980).
- [42] C. Lacour, *Analyse et résolution numérique de méthodes de sous-domaines non conformes pour des problèmes de plaques*, Thèse de l’Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1997).
- [43] P. Ladevèze, *Comparaison de modèles de milieux continus*, Thèse de l’Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1975).
- [44] P. Ladevèze and D. Leguillon, *Error Estimate Procedure in the Finite Element Method ans Applications*, SIAM J. Num. Anal. **20**, 485–509, (1983).
- [45] P. le Tallec and T. Sassi, *Domain Decomposition with Nonmatching Grids: Augmented Lagrangian Approach*, Math. of Comp. **64**, 1367–1396, (1995).
- [46] J.-L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, Dunod, Paris, (1968).
- [47] J. A. C. Martins and J. T. Oden, *Existence and Uniqueness Results for Dynamic Contact Problems with Nonlinear Normal and Friction Interface Laws*, Nonlinear Analysis, **11**, 407–428, (1987).
- [48] C. A. Mavriplis, *Non Conforming Discretizations and a Posteriori Error Estimations for Adaptive Spectral Element Technics*, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge. Ma., (1989).

- [49] M. Minoux, *Programmation mathématique, théorie et algorithmes, Tome 1*, Dunod, (1983).
- [50] C. Naéjus et A. Cimetière, *Sur la formulation variationnelle du problème de Signorini avec frottement de Coulomb*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **323**, 307–312, (1996).
- [51] J. Nečas, J. Jarušek and J. Haslinger, *On the Solution of the Variational Inequality to the Signorini Problem with Small Friction*, Boll. Un. Mat. Ital. **17**–B, 796–811, (1980).
- [52] J. E. Roberts and J.–M. Thomas, *Mixed and Hybrid Methods*, in Handbook of Numerical Analysis, Volume II, Part 1, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North Holland, 523–640, (1991).
- [53] Z.–H. Zhong, *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford, (1993).