Mémoire

présenté à

L'UNIVERSITÉ de SAVOIE

en vue d'obtenir une

Habilitation à diriger des recherches

Présenté par

Patrick HILD

Spécialité : mathématiques appliquées

Contribution à l'analyse numérique de problèmes de contact et de frottement

Soutenue le 14 Novembre 2001 devant le jury composé de :

Ioan IONESCU	Université de Savoie	
Patrick LABORDE	Université Paul Sabatier	
Patrick LE TALLEC	Université Paris Dauphine et Ecole Polytechnique	Rapporteur
Yvon MADAY	Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
Jean-Claude PAUMIER	Université Joseph Fourier	
Mircea SOFONEA	Université de Perpignan	Rapporteur

Laboratoire de Mathématiques (UMR CNRS 5127)
Equations aux Dérivées Partielles
Unité Mixte de Recherches CNRS - Université de Savoie
UFR SFA, Université de Savoie, 73376 Le Bourget du Lac, France

Plan

Partie I

Curriculum Vitae

Curriculum Vitae

Patrick HILD

Adresse personnelle :	225, chemin de Beauvoir, 73290 La Motte Servolex
Téléphone :	04 79 26 13 22
Date de naissance :	23/02/1971
Situation de famille :	Marié
Fonction :	Maître de Conférences à l'Université de Savoie
Adresse :	Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 5127, Université de Savoie, 73376 Le Bourget du Lac. Tél : 04 79 75 87 65 Fax : 04 79 75 81 42 E-mail : hild@univ-savoie.fr
Nationalité :	Française

Cursus

- 1998–2001 : Maître de Conférences à l'Université de Savoie.
- 1997–1998 : Allocataire MESR et Moniteur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse (Univ. Toulouse 3). Thèse de Mathématiques Appliquées soutenue à l'Université Paul Sabatier le 8 janvier 1998.
- 1996–1997 : Service National (12 mois). Scientifique du contingent au Laboratoire de Mécanique et Technologie à l'ENS Cachan.
- 1994–1996 : Allocataire MESR et Moniteur à l'Université Paul Sabatier.
- 1993–1994 : DEA de Mathématiques Appliquées à l'Université Paul Sabatier.

Activités d'enseignement

- 1998–2001

  (00/01 : 112h en premier cycle, 60h en second cycle, 60h en troisième cycle)

  (99/00 : 72h en premier cycle, 60h en second cycle, 77h en troisième cycle)

  (98/99 : 72h en premier cycle, 65h en second cycle, 62h en troisième cycle)

  – DESS d'Ingénierie Mathématique à l'Université de Savoie.
    - ∗ Cours et travaux pratiques sur le code de calcul par éléments finis CASTEM.
    - ∗ Travaux dirigés d'optimisation.

  – Maîtrise de Mathématiques à l'Université de Savoie.
    - ∗ Cours et travaux dirigés de discrétisation des équations aux dérivées partielles.
    - ∗ Travaux dirigés de calcul différentiel et optimisation.

- Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Chambéry (ESIGEC).
  * Travaux dirigés de mathématiques (Analyse) en première année.
- DEUG à l'Université de Savoie.
  * Travaux dirigés de mathématiques (Analyse et Algèbre) en deuxième année.
  * Travaux dirigés de mathématiques (Analyse et Algèbre) en première année.

- 1997–1998 : Travaux dirigés de mathématiques (Analyse et Algèbre) en première année de DEUG dans le cadre du monitorat à l'Université Paul Sabatier (64h).
- 1996–1997 : Travaux dirigés de mathématiques (Analyse fonctionnelle) en licence de mécanique à l'Université Paris 6 / ENS Cachan (20h).
- 1994–1996 : Travaux dirigés de mathématiques (Analyse et Algèbre) en première année de DEUG dans le cadre du monitorat à l'Université Paul Sabatier (64h/an).

Encadrement d'étudiants de $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ cycle

- Co-encadrement avec I. Ionescu d'un étudiant en thèse (financé par une allocation de recherche) étudiant la stabilité et la non-unicité de problèmes de contact et de frottement à partir de septembre 2001.
- Encadrement du projet de trois étudiants du DESS d'Ingénierie Mathématique pendant la période allant de fin janvier à fin mars 2001.
- Encadrement du projet de quatre étudiants du DESS d'Ingénierie Mathématique pendant la période allant de fin janvier à fin mars 2000.
- Encadrement du projet de trois étudiants du DESS d'Ingénierie Mathématique pendant la période allant de fin janvier à fin mars 1999.
- Encadrement du projet d'une étudiante de Maîtrise de Mathématiques de l'Université de Savoie pendant le second semestre de l'année 98/99.

Domaines de recherche

- Méthodes par éléments finis pour les problèmes de contact avec ou sans frottement : méthodes primales, méthodes mixtes, méthodes non conformes, méthodes avec joints.
- Estimateurs d'erreur et optimisation des calculs pour les problèmes de contact avec ou sans frottement.
- Problèmes d'existence, d'unicité et de non-unicité pour le modèle de contact avec frottement de Coulomb.
- Méthodes de joints pour le fluide de Bingham et étude du fluide de Bingham non homogène.

Diffusion de la recherche

- 15 articles parus ou acceptés dans des revues avec comité de lecture.
- 2 articles soumis dans des revues avec comité de lecture.
- 9 publications dans des actes de congrès avec comité de lecture.
- 8 communications orales à des congrès.
- 7 communications orales à des journées thématiques.
- 11 communications orales à des séminaires de laboratoires (ou groupes de travail) extérieurs.

Activités administratives

- Responsable du DESS d'Ingénierie Mathématique de l'Université de Savoie depuis septembre 2001 (promotion de 31 étudiants en 2001/2002).

Réalisations diverses

- BQR à l'Université de Savoie : "Modélisation numérique du contact 3D" en 1999.
- Organisation du colloque "Instabilité du Frottement" à l'Université de Savoie, 27–29 septembre 1999 (20 conférences d'une heure + session posters) avec R. Hassani et I. Ionescu.
- Organisation du Séminaire Junior du Laboratoire MIP à l'Université Toulouse 3 (hebdomadaire) avec M. Fournié et S. Genieys, 1995–1996.

Connaissances linguistiques

- Allemand : lu, écrit et parlé couramment.
- Anglais : lu, écrit et parlé.
- Espagnol : scolaire.

Partie II
Synthèse des activités

Sommaire

Synthèse des activités d'enseignement, administratives et de recherche.

1 Activités d'enseignement

1.1 Université de Savoie (1998–2001)

1.1.1 DESS d'Ingénierie Mathématique

L'enseignement et l'implication dans le DESS d'Ingénierie Mathématique constitue une de mes activités prépondérantes : 62h équivalent TD (eq. TD) en 98/99, 77h eq. TD en 99/00, 60h eq. TD en 00/01.

Les enseignements que je dispense dans cette filière sont :

- (1998–2001) Travaux dirigés d'optimisation. Dans le cadre du module d'optimisation, les étudiants effectuent en plus des travaux dirigés deux travaux pratiques d'une durée de un mois chacun. Ce travaux visent à mettre en œuvre numériquement les algorithmes d'optimisation et les méthodes par éléments finis pour un problème issu de la mécanique des solides et de la mécanique des fluides. Ces TP sont présentés par les étudiants lors d'une soutenance orale de 10mn.

- (1998–2001) Cours et travaux pratiques sur un code de calcul par éléments finis. Il s'agit de familiariser les étudiants avec le code de calcul industriel CASTEM 2000 du CEA que j'avais fait installer à l'Université de Savoie à l'automne 1998. Après un cours bref destiné à acquérir les notions indispensables pour démarrer la programmation sur un code de calcul, les étudiants effectuent des travaux pratiques de difficulté croissante. Il est à noter que la combinaison des TP d'optimisation et des TP de code de calcul est très instructive pour les étudiants. Le fait d'avoir programmé de bout en bout leur simulation par éléments finis dans le premier cas leur donne plus de recul et de sens critique lorsqu'ils interprètent les résultats fournis par le code de calcul industriel.

- (1998–2001) Encadrement et responsable d'étudiants dans le cadre de leur projet à l'Université de Savoie pendant la période allant de fin janvier à fin mars. Les projets sont choisis par les étudiants à qui je propose des sujets de calcul scientifique comprenant la lecture d'une ou de plusieurs références (généralement des articles). Cette étude est toujours suivie d'une partie appliquée passant par un travail de programmation le plus souvent effectué avec le code CASTEM 2000. Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale de 30mn. Les projets que j'ai proposé et encadré ces trois dernières années sont:

  - R. Collado (98/99) : méthodes d'éléments finis non conformes pour les fluides de Bingham.
  - A. Defunti (98/99) : approche numérique de l'optimisation topologique.

- H. Razafimahatratra (98/99) : modélisation mathématique et numérique du contact unilatéral avec frottement de Coulomb.
- N. Galley (99/00) : estimations d'erreur a posteriori en élasticité.
- A.-S. Noe (99/00) : optimisation topologique (dans la continuité du projet de A. Defunti).
- C. Moreau (99/00) : maillages éléments finis incompatibles en élasticité.
- V. Queguiner (99/00) : contact unilatéral et frottement de Coulomb (dans la continuité du projet de H. Razafimahatratra).
- T. Kamagne (00/01) : modélisation et simulation de problèmes de plaques.
- T. Roche (00/01) : optimisation topologique pour les problèmes de plaques et de coques.
- B. Trinquier (00/01): déformation thermo-élastique d'un cube.

Début avril, les étudiants partent effectuer leur stage en entreprise pour une durée de 4 à 5 mois. Il a été décidé récemment d'apporter un suivi régulier à plusieurs de ces stages afin d'aider les étudiants lorsque leur sujet est dans notre domaine de compétences mais aussi afin de nouer des liens avec les entreprises. Pour ma part, j'encadre deux étudiants cette année : G. Miguet effectue un stage intitulé "étude des paramètres s'exerçant dans l'évolution d'une fracture tibiale traitée par un clou centro médullaire" en lien avec l'hôpital de Moutiers et S. Cohade est en stage chez Michelin à Clermont-Ferrand où il s'occupe de l'amélioration de la modélisation du contact dans un code de calcul éléments finis.

1.1.2 Maîtrise d'Ingénierie Mathématique et Maîtrise de Mathématiques Pures

L'enseignement que je dispense en Maîtrise de Mathématiques (entre 60h et 65h eq. TD par an) correspond à deux branches appliquées des mathématiques : les méthodes d'approximation des équations (discrétisation) et les méthodes de résolution des équations approchées (optimisation et algorithmique).

- (1998–2001) Travaux dirigés de discrétisation des équations aux dérivées partielles. On étudie du point de vue théorique les deux méthodes d'approximation des équations les plus répandues : méthodes de différences finies et méthodes par éléments finis. Le TD est complété par deux travaux pratiques (un pour chaque méthode) que les étudiants effectuent sur une durée de 6 semaines environ pour chaque TP.

- (1999–2001) Travaux dirigés d'optimisation. On présente les techniques de base de l'optimisation qui seront approfondies et appliquées sur machine pour les étudiants désireux de poursuivre en DESS. Le TD est complété par un devoir à la maison.

- (1998–1999) Encadrement du projet de L. Verjus ayant pour titre "Problèmes de proximité de matrices".

1.1.3 DEUG STPI

- (1998–2001) Travaux dirigés de mathématiques (Analyse et Algèbre) en seconde année. J'effectue les TD de mathématiques pendant toute la seconde année de DEUG STPI (sciences et technologies pour l'ingénieur) à un groupe de TD unique (72h). Dans cette activité, une de mes priorités consiste à faire progresser les étudiants en ayant le souci de présenter les mathématiques de manière aussi concrète que possible tout en préservant la rigueur.

- (2000–2001) Il s'agit d'un TD de première année de DEUG STPI ayant lieu au second semestre et correspondant à 20h. Le TD est effectué dans le même esprit que pour les étudiants de seconde année.

1.2 ESIGEC (1998–1999)

- Travaux dirigés de mathématiques (Analyse) en première année d'Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Chambéry. (20h)

1.3 Université Paul Sabatier / Toulouse 3, (1994–1996) et (1997–1998)

- Travaux dirigés de mathématiques (Analyse et Algèbre) en première année de DEUG dans le cadre du monitorat à l'Université Paul Sabatier (64h/an).

1.4 Ecole Normale Supérieure de Cachan et Université Pierre et Marie Curie/ Paris 6, (1996–1997)

- Travaux dirigés de mathématiques (Analyse fonctionnelle) en licence de mécanique à l'Université Paris 6 / ENS Cachan. (20h)

2 Activités administratives

- Responsable du DESS d'Ingénierie Mathématique de l'Université de Savoie depuis septembre 2001 (promotion de 31 étudiants en 2001/2002).

- Membre élu du conseil du Laboratoire de Mathématiques.

- Obtention d'un BQR à l'Université de Savoie : “Modélisation numérique du contact 3D” en 1999. Financement obtenu : 50KF.

3 Activités de recherche

Le sujet général de mes recherches est l'analyse mathématique et la simulation numérique en mécanique des solides. Je m'intéresse plus particulièrement aux problèmes de contact et de frottement entre solides. Avant de présenter mes activités de recherche après la thèse de doctorat, je rappelle ci-après les principaux résultats obtenus dans ma thèse [Th] intitulée "Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles".

Notations.

Mes publications sont signalées comme suit :

- [1a] – [15a] désigne les articles parus ou acceptés,
- [16s] – [17s] désigne les articles soumis,
- [18p] – [19p] désigne les travaux en préparation,
- [20c] – [28c] désigne les publications dans les actes de congrès.

Les références externes sont numérotées comme suit :

- [29] – [119].

Résumé du travail effectué dans la thèse de doctorat

Dans ma thèse effectuée sous la direction de P. Laborde au Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique (UMR CNRS 5640) à l'Université Paul Sabatier, je me suis intéressé à l'analyse mathématique et à la simulation numérique par éléments finis de problèmes de contact entre solides lorsque les maillages ne sont pas en vis à vis sur la zone de contact. On parle alors de maillages "incompatibles" ou "non-coïncidants".

Le sujet était motivé par le fait que les problèmes de contact et d'impact représentent depuis longtemps une part significative du calcul de structures non linéaire en contexte industriel et que les méthodes d'éléments finis y sont d'un usage courant pour l'approximation numérique du problème (voir ouvrages généraux : [82, 75, 118, 109]). Dans ce contexte, un point essentiel réside dans l'élaboration de méthodes numériques qui prennent en compte les conditions de contact de manière convenable car, dans ce type de problème, la gestion du contact occupe une proportion importante du temps de calcul. Une cause prédominante, et souvent inévitable, est que les maillages des solides déformables sont fréquemment incompatibles sur la zone de contact. La difficulté majeure qui en découle réside dans la gestion des nœuds du maillage dans cette zone. Aussi, la question de la définition des conditions de contact unilatéral sur des maillages incompatibles est d'un intérêt certain.

Nous avons d'abord considéré (avec F. Ben Belgacem et P. Laborde) des modèles de contact simples faisant intervenir des discrétisations indépendantes de solides élastiques avec maillages incompatibles sur la zone de contact. Le premier modèle étudié a été le contact bilatéral (ce problème est linéaire et peut être mis sous la forme d'une équation variationnelle : il prend en compte seulement le glissement des solides l'un sur l'autre). Dans ce cas, nous avons considéré plusieurs approches, en particulier les méthodes introduites en [40] et plus généralement étudiées en [41] (voir aussi [36]) sous le nom de "mortar method" ("méthode de joints" en français) et appliquées dans le cas d'un solide élastique en [96]. Cette méthode de décomposition de domaines prenant en compte les maillages incompatibles assure l'obtention de résultats théoriques de convergence des solutions par éléments finis (voir [3a]).

La prise en compte du contact unilatéral est effectué dans [1a] ; ce problème est non linéaire et peut être modélisé par une inéquation variationnelle [61, 85, 108, 68, 69, 73]. Ce modèle prend en compte, en plus du cas bilatéral, la possibilité de décollement des solides. Cette étude a été complétée pour des hypothèses de régularité plus générales dans [5a]. A notre connaissance, il s'agit du premier résultat de convergence pour une inéquation variationnelle faisant intervenir des maillages incompatibles (voir aussi l'étude [38] considérant d'autres hypothèses de régularité et [74] pour le cas compatible). Ces travaux ont également fait l'objet de communications à des congrès : [20c], [21c].

Par la suite, j'ai obtenu en [2a] une extension des techniques précédentes pour un modèle incorporant en plus du contact unilatéral des conditions de frottement simples ; ces résultats pouvant être étendus à des conditions de frottement plus classiques [34].

3.1 Résumé des travaux de recherche après la thèse de doctorat

Je présente maintenant les deux parties principales de mon activité de recherche après la thèse :

- Analyse de méthodes par éléments finis pour les problèmes de contact et de frottement,
- Contrôle de la qualité des calculs pour les problèmes de contact et de frottement.

Ce résumé des travaux de recherche est complété par la présentation d'une étude des fluides viscoplastiques de type Bingham.

3.1.1 Analyse de méthodes par éléments finis pour les problèmes de contact et de frottement

Dans cette partie, je résume les résultats obtenus lors de travaux réalisés pour la plupart en collaboration sur l'analyse mathématique et l'implantation numérique de diverses méthodes par éléments finis en mécanique du contact. Les études contenues dans cette partie concernent les **compléments liés au sujet de thèse et réalisés après la soutenance**, puis les **méthodes par éléments finis mixtes** et les **méthodes par éléments finis quadratiques** pour les problèmes de contact unilatéral en élasticité, les **méthodes par éléments finis non conformes** pour traiter les problèmes de contact avec maillages non-coïncidants en élasto-viscoplasticité ainsi que **les études d'unicité et de non-unicité pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement**.

Avant tout, nous présentons ci-après les équations du contact d'un solide déformable Ω dans $\mathbb{R}^n, (n = 2, 3)$ sur un socle rigide indéformable. Le bord Γ du solide comporte 3 parties : $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_C}$ où Γ_D, Γ_N et Γ_C sont disjoints deux à deux. Le champ de déplacements est connu sur la partie de mesure non nulle Γ_D (on peut par exemple supposer que le solide est encastré sur Γ_D). La partie Γ_N est soumise à une densité de forces notée $\boldsymbol{F} \in (L^2(\Gamma_N))^n$. La partie restante Γ_C est la "zone de contact" avec le socle rigide.

Le solide Ω est soumis à une densité volumique de forces $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^n$. On note $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal unitaire sortant de Ω et on désigne par $\mu \geq 0$ le coefficient de frottement (supposé constant sur Γ_C pour simplifier).

Le problème de contact avec frottement de Coulomb consiste à trouver un champ de déplacements $\boldsymbol{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et un champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \longrightarrow \mathscr{S}_n$ vérifiant les équations et conditions (1)–(8) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{div}\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \quad \text{dans } \Omega, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} \quad \text{sur } \Gamma_N, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{sur } \Gamma_D, \tag{4}$$

où $\mathscr{S}_n$ désigne l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^n$, la notation $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^T)/2$ représente le tenseur des déformations linéarisé, $\mathcal{E}$ est le tenseur d'ordre quatre symétrique et elliptique de l'élasticité linéaire et $\boldsymbol{div}$ représente l'opérateur divergence des fonctions à valeurs tensorielles. En résumé, les équations (1), (2), (3) et (4) désignent respectivement la relation de comportement, l'équation d'équilibre, la condition de Neumann et la condition de Dirichlet.

Afin d'introduire les équations sur la zone de contact, nous adoptons les notations suivantes sur Γ_C : $\boldsymbol{u} = u_n\boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_t$ (u_n : déplacement normal, $\boldsymbol{u}_t$: déplacement tangentiel) et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = \sigma_n(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{u})$ ($\sigma_n(\boldsymbol{u})$: contrainte normale, $\boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{u})$: contrainte tangentielle). Les équations modélisant le contact unilatéral sur Γ_C deviennent :

$$u_n \leq 0, \tag{5}$$

$$\sigma_n(\boldsymbol{u}) \leq 0, \tag{6}$$

$$\sigma_n(\boldsymbol{u})\, u_n = 0, \tag{7}$$

où (5), (6), (7) désignent respectivement la non-pénétration dans le socle, la condition de signe sur la contrainte normale et la condition de complémentarité (dans le cas où ces trois conditions sont remplacées par "$u_n = 0$", on dit que le contact est bilatéral). Lorsque $n = 2$, on peut écrire $\boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{u}) = \sigma_t(\boldsymbol{u})\boldsymbol{t}$ où $\boldsymbol{t}$ est un vecteur unitaire tangent fixé. Les conditions de frottement de Coulomb sur Γ_C s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{0} \implies |\boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{u})| \leq \mu|\sigma_n(\boldsymbol{u})|, \\ \boldsymbol{u}_t \neq \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{u}) = -\mu|\sigma_n(\boldsymbol{u})|\dfrac{\boldsymbol{u}_t}{|\boldsymbol{u}_t|}. \end{array} \right. \tag{8}$$

Dans le cas sans frottement (i.e. $\mu = 0$), les conditions de contact unilatéral (5)–(7) demeurent inchangées et la condition de frottement (8) se résume à $\boldsymbol{\sigma}_t(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.

La formulation variationnelle de (1)–(8), obtenue par Duvaut et Lions [61] consiste à trouver $\boldsymbol{u}$ vérifiant :

$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}, \qquad a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq L(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}, \tag{9}$$

où

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\, d\Omega, \qquad L(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}.\boldsymbol{v}\, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{F}.\boldsymbol{v}\, d\Gamma,$$

sont définis pour tous $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ dans l'espace de Sobolev standard $(H^1(\Omega))^n$ et les notations $\cdot$ et $:$ représentent les produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{S}_n$ respectivement. Dans (9), $\boldsymbol{K}$ est le cône convexe fermé des déplacements admissibles satisfaisant les conditions de non-pénétration :

$$\boldsymbol{K} = \Big\{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^n;\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma_D,\ v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\Big\}. \tag{10}$$

La fonctionnelle $j(.,.)$ donnée formellement par

$$j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \ = \ \int_{\Gamma_C} \mu|\sigma_n(\boldsymbol{u})||\boldsymbol{v}_t|\, d\Gamma, \tag{11}$$

traduit le frottement. Dans le cas sans frottement, la fonctionnelle (11) disparaît dans (9) et le problème de contact unilatéral admet une solution unique selon [65, 66] et d'après le théorème de Stampacchia [43]. Notons que le cas où le socle rigide est remplacé par un solide déformable conduit à des équations similaires.

Le premier résultat d'existence pour le problème (1)–(8) a été obtenu dans [106] suivi par diverses améliorations et généralisations [80, 81, 62] prouvant l'existence pour des coefficients de frottement petits. Il n'existe à l'heure actuelle pas de résultat d'unicité, ni d'exemple de non-existence ou de non-unicité pour ce problème.

La loi de frottement "non-locale" de Coulomb régularisant les contraintes normales est introduite en [60] et étudiée en [59, 50, 82]. Ce procédé de régularisation introduit dans le modèle de Coulomb permet d'obtenir l'existence pour tous les coefficients de frottement et l'unicité pour des coefficients de frottement petits : [60, 59, 50, 82]. Le même type de résultat (existence pour tout coefficient de frottement et unicité pour des coefficients petits est obtenu en [87, 88] pour le modèle de "compliance normale" introduit initialement en [107] (voir aussi [99]). Finalement, remarquons que les conditions suffisantes d'unicité (frottement petit) obtenues pour ces deux modèles régularisés ne s'accompagnent pas de conditions suffisantes de non-unicité ou bien d'exemples de non-unicité.

A la suite de cette brève présentation du contact avec frottement, je résume les résultats obtenus.

<u>Compléments concernant le sujet de thèse et réalisés après la soutenance : [4a], [7a]</u>

Dans l'annexe de ma thèse, je me suis intéressé à l'optimalité de la convergence des méthodes par éléments finis pour le problème de contact unilatéral sans frottement. Ces estimations sont obtenues à l'aide d'une adaptation du lemme de Falk : [63, 48, 49]. Dans l'analyse de la convergence se pose la question d'approcher les fonctions de $\boldsymbol{K}$ défini en (10) par des fonctions de type éléments finis. Plus précisément, on est ramené à la recherche d'un opérateur à valeurs dans un espace de fonctions de type éléments finis sur Γ_C, conservant la positivité et donnant de bonnes approximations dans des normes duales intervenant dans l'analyse. J'ai proposé des solutions pouvant raisonnablement laisser penser que les analyses de convergence de la thèse étaient limitées par l'utilisation de certains opérateurs. Ce pressentiment s'est transformé après la soutenance en une certitude : j'ai montré en [4a] à l'aide de contre-exemples que certains opérateurs intervenant dans l'analyse de la convergence du problème de contact unilatéral discrétisé ne possèdent pas de propriétés d'approximation optimales. Il est à noter que ce résultat a une portée plus générale que le cadre spécifique de l'étude des maillages incompatibles de la thèse.

Les simulations numériques correspondant aux différentes études théoriques ont constitué une part importante dans ma thèse. Après la soutenance, cette étude numérique a été complétée pour faire l'objet de la publication [7a].

Méthodes par éléments finis mixtes pour les problèmes de contact unilatéral : [12a]

Dans cette étude réalisée en collaboration avec P. Coorevits (Université de Picardie Jules Verne), K. Lhalouani et T. Sassi (INSA de Lyon), on propose et on étudie différentes méthodes variationnelles mixtes [110] en vue d'approcher par éléments finis les problèmes unilatéraux intervenant en mécanique du contact. La formulation considérée consiste à trouver $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ et $\lambda \in M$ tels que

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\lambda, \boldsymbol{v}) = L(\boldsymbol{v}), & \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \\ b(\alpha - \lambda, \boldsymbol{u}) \leq 0, & \forall\, \alpha \in M, \end{cases}$$

où $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^2;\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ sur } \Gamma_D\}$, M est un cône convexe de formes linéaires positives sur Γ_C (λ représente $-\sigma_n(\boldsymbol{u})$) et $b(\alpha, \boldsymbol{v})$ désigne formellement $\int_{\Gamma_C} \alpha\, v_n \, d\Gamma$. Les conditions de contact discrétisées peuvent être exprimées en utilisant des multiplicateurs de Lagrange soit continus et affines par morceaux comme dans cette étude, soit discontinus et constants par morceaux [76, 75, 97] dans la formulation en point-selle du problème. On établit plusieurs estimations d'erreur a priori pour ce type d'approximation et on compare numériquement les taux de convergence des différentes méthodes afin de valider les résultats théoriques. Notons aussi que cette étude se termine par une annexe incorporant une estimation d'erreur en norme $(L^2(\Omega))^2$ (pour les champs de déplacements dans le cas le plus simple de contact unilatéral) qui à notre connaissance est la première (voir [39, 105] pour des estimations d'erreur L^2 concernant des inéquations variationnelles).

Méthodes par éléments finis non conformes pour le contact en élasto-viscoplasticité : [10a], [16s], [24c], [26c]

Ce volet est directement dans la continuité des études menées dans ma thèse. Il s'agit de généraliser les résultats obtenus dans la thèse pour les solides linéaires élastiques au cas des solides élasto-viscoplastiques dont la relation de comportement est du type [55, 78] :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}) + G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) \qquad \text{dans } \Omega \times (0, T),$$

où la fonction constitutive G satisfait des conditions de Lipschitz. Ce travail est réalisé en collaboration avec J.-R. Fernández et J.-M. Viaño de l'Université de Saint Jacques de Compostelle (Espagne). On y considère une inéquation variationnelle d'évolution [113, 111] modélisant le contact quasi-statique entre solides élasto-viscoplastiques. Le problème est approché en la variable espace par deux méthodes par éléments finis non conformes permettant la prise en compte de maillages non-coïncidants sur la zone de contact et par un schéma implicite en temps. On effectue l'analyse numérique de ce type d'approximation pour aboutir à des taux de convergence théoriques satisfaisants (voir [70] pour l'analyse dans le cas conforme). Finalement, des essais numériques utilisant un algorithme adapté [115, 116, 46, 64] illustrent les possibilités offertes par ce type de méthode.

Méthodes par éléments finis quadratiques pour les problèmes de contact unilatéral : [15a]

Cette étude est réalisée en collaboration avec P. Laborde de l'Université Paul Sabatier de Toulouse et concerne l'utilisation d'éléments finis quadratiques pour simuler le problème de contact unilatéral entre solides élastiques (voir les études [44, 45, 83, 35] concernant les éléments finis quadratiques pour des problèmes gouvernés par des inéquations variationnelles). L'intérêt d'utiliser de tels éléments finis est de pouvoir espérer une amélioration de la précision des calculs par rapport aux éléments linéaires lorsque la régularité du problème le permet [84, 104]. Nous considérons une formulation mixte du problème dans laquelle les inconnues sont les champs de déplacements et la contrainte normale. Nous proposons une formulation par éléments finis dans laquelle les éléments sont quadratiques. La condition discrétisée de non-pénétration est soit une condition de non-pénétration exacte, soit une condition nodale. Dans les deux cas, nous étudions la convergence des solutions par éléments finis et nous obtenons des estimations d'erreur a priori. Finalement, des simulations numériques confrontent l'approche quadratique avec l'approche linéaire et justifient l'intérêt des éléments quadratiques pour certains problèmes convenablement déterminés.

Etude de conditions de non-unicité pour le problème de contact avec frottement de Coulomb : [17s], [27c]

Ce travail effectué en commun avec R. Hassani et I. Ionescu de l'Université de Savoie concerne les conditions de non-unicité pour le problème continu de contact unilatéral avec frottement de type Coulomb. Il est à noter que l'étude mathématique de ce problème présente des difficultés considérables soulevées il y a trente ans et demeurant irrésolues : seuls quelques résultats très partiels ont été établis (voir le début de la présente section 3.1.1). L'approche choisie dans cette étude consiste non plus à concevoir le problème de manière classique sous sa forme variationnelle (9) mais de faire intervenir un problème spectral annexe du type suivant : trouver $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{0} \neq \mathbf{\Phi} \in (H^1(\Omega))^2$ tels que

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{\Phi}) = \mathcal{E}\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{\Phi}), \qquad \boldsymbol{div}\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{\Phi}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{\Phi})\boldsymbol{n} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_N, \qquad \mathbf{\Phi} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_D, \qquad \Phi_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C, \\ \sigma_t(\mathbf{\Phi}) = \lambda \sigma_n(\mathbf{\Phi}) \quad \text{sur } \Gamma_C.\end{gathered}$$

L'étude de ce problème se ramène, après régularisation de la contrainte normale, à l'étude du spectre d'un opérateur compact. Ceci permet alors d'exhiber, sous certaines conditions (en particulier l'existence d'une valeur propre réelle découlant de [90], ou bien [56, 57]), une infinité de solutions au problème initial. Ce résultat constitue une contribution inédite à l'étude de la non-unicité du problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. Un résultat de convergence des solutions du problème spectral discrétisé par éléments finis [67, 100, 31] et reposant sur les techniques de [89] est présenté. De plus, des essais numériques par éléments finis viennent corroborer les résultats théoriques.

Conditions d'unicité et exemple de non-unicité pour le problème de contact avec frottement de Coulomb discrétisé par éléments finis : [14a]

Il s'agit d'un problème qui m'est particulièrement cher depuis plusieurs années déjà mais que je n'ai jamais réussi à entamer raisonnablement jusqu'à il y a peu de temps. La question qui m'intéresse concerne l'unicité du problème discrétisé de contact unilatéral avec frottement de Coulomb (l'unicité du problème continu est également un problème ouvert, mais est beaucoup moins simple, cf. travail mentionné précédemment). On sait que le problème discrétisé par éléments finis admet toujours une solution [71, 72, 75] et que cette solution est unique si le coefficient de frottement est assez petit. Notons aussi qu'un résultat de convergence de solutions discrètes vers une solution du problème continu est démontré dans [71]. Jusqu'à présent, il semblait que la condition d'unicité du problème discret (i.e. la condition de petitesse du coefficient de frottement) soit essentiellement fonction de la taille des mailles, mais de mauvaise manière : ceci sous entend que lorsque la taille des mailles devient petite, on perd très rapidement toute condition d'unicité. J'ai donc souhaité étudier ce problème en détail afin de savoir si la perte de l'unicité était réelle ou bien due à un défaut de l'analyse mathématique. Les résultats obtenus prouvent que la taille des mailles influe de manière négligeable sur les conditions d'unicité. Par ailleurs, je montre sur un exemple très simple (un élément fini) que le problème discret peut admettre une, plusieurs ou une infinité de solutions et que le nombre de solutions décroît dans certains cas lorsque le coefficient de frottement augmente. Ces résultats complètent les études déjà existantes dans un contexte de dimension finie (utilisant en particulier des systèmes de ressorts) : [79, 86, 30, 33].

3.1.2 Contrôle de la qualité des calculs pour les problèmes de contact et de frottement

Cette seconde partie concerne l'étude d'estimateurs d'erreur a posteriori en mécanique du contact frottant et leur couplage avec des procédures d'adaptation de maillages dans le but de contrôler et d'optimiser les calculs. Cette étude a été initialisée pour les problèmes de contact sans frottement lors de mon séjour à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan pour mon service national.

La motivation pour ce type d'étude est que la méthode par éléments finis est couramment utilisée dans le calcul numérique de problèmes d'ingénierie et qu'une tâche importante consiste à évaluer numériquement la qualité des simulations en utilisant des estimateurs (a posteriori) d'erreur. En élasticité, de nombreuses approches conduisant à différents estimateurs d'erreur ont été développées. En particulier les estimateurs introduits dans [32] basés sur la mesure des résidus des équations d'équilibre, les estimateurs liés au lissage des contraintes [119] et les estimateurs reposant sur le concept d'erreur en relation de comportement [91, 93] ainsi que sur la construction de champs admissibles [94]. Signalons que la référence [114] est un recueil plus complet des estimateurs d'erreur en élasticité.

<u>Estimateurs d'erreur a posteriori pour les problèmes de contact unilatéral : [6a], [9a], [22c], [23c]</u>

Ce travail, réalisé en collaboration avec P. Coorevits et J.-P. Pelle (ENS Cachan) concerne la recherche et l'obtention d'estimateurs d'erreur pour le contact. Nous avons choisi d'entamer l'étude par la recherche d'un estimateur d'erreur “en relation de comportement”. Les estimateurs d'erreur mesurant les résidus des équations d'équilibre avaient été étudiés [117, 47] pour une formulation pénalisée du contact unilatéral ramenant ainsi le problème à une équation variationnelle.

La définition et l'étude de l'estimateur d'erreur pour le problème de contact unilatéral le plus simple (un seul solide élastique en contact sans frottement avec un socle rigide, sans pénalisation) est détaillé en [6a]. La discussion sur le choix (primordial) d'une approximation adéquate des conditions unilatérales ainsi que les premiers essais numériques sont effectués dans cette référence. Dans [9a] on étudie la délicate généralisation aux maillages incompatibles de cet estimateur et on propose un cadre permettant d'évaluer (théoriquement et pratiquement) tout calcul par éléments finis entre solides élastiques avec maillages incompatibles. Les essais numériques correspondants sont réalisés : calcul effectif des erreurs et couplage avec une procédure d'adaptation de maillages efficace étudiée en [52, 53, 92, 51]. Une partie de ces travaux a également été présentée lors de communications dans des congrès [22c], [23c].

Estimateurs d'erreur a posteriori pour le contact avec frottement de Coulomb : [13a], [25c], [28c]

Il s'agit, dans cette étude effectuée plus récemment avec P. Coorevits (Université de Picardie Jules Verne) et M. Hjiaj (Université de Lille), d'étendre les résultats précédents au problème de contact avec frottement de Coulomb (pour le problème de frottement régularisé par compliance, voir [95]). Bien que nous obtenons un estimateur d'erreur prenant en compte cette non linéarité de frottement supplémentaire, une nouvelle étude (par rapport au cas sans frottement) plus fine de la méthode par éléments finis doit être effectuée dans le but de prouver l'existence de solutions. Nous proposons ainsi une méthode par éléments finis mixtes à trois champs et nous étudions ses propriétés afin de pouvoir calculer effectivement l'estimateur. L'information donnée par les estimations d'erreur est ensuite utilisée conjointement avec une technique d'adaptation de maillages destinée à fournir à l'utilisateur un outil certifiant une qualité de calcul choisie au préalable tout en minimisant les coûts de calcul.

Un travail en cours avec P. Coorevits [18p] consiste à généraliser ces travaux au cas tridimensionnel.

3.1.3 Etude des fluides de Bingham

Ces études concernent les fluides viscoplastiques de type Bingham qui ont pour lien principal avec les travaux précédents d'être gouvernés par une inéquation variationnelle du type [61, 68, 98] : trouver le champ de vitesses u défini dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{aligned} u \in H_0^1(\Omega), \qquad \mu \int_\Omega \nabla u.(\nabla v - \nabla u)\, d\Omega + \int_\Omega g(|\nabla v| - |\nabla u|)\, d\Omega \\ \geq \int_\Omega f(v-u)\, d\Omega, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{12}$$

où $\mu > 0$ représente la viscosité, $g > 0$ est le seuil de plasticité du fluide et f traduit la chute linéaire de pression dans le cylindre de section Ω. De nombreuses études ont été menées pour l'inéquation (12) : régularité des solutions [42], propriétés qualitatives fines des solutions [101, 102, 103] et approximations par éléments finis [68, 112].

Ici, je m'intéresse à deux problèmes : l'extension de la méthode de décomposition de domaines des éléments finis avec joints à ce modèle et la recherche de conditions de blocage pour un fluide de Bingham non homogène.

Extension de la méthode des éléments finis avec joints à une inéquation variationnelle modélisant l'écoulement d'un fluide de Bingham : [8a], [11a]

Dans le cadre de la thèse, la méthode des éléments finis avec joints [41] a été étudiée pour une inéquation variationnelle. Je me suis ensuite intéressé à l'extension du domaine d'application de cette méthode, permettant entre autres de raccorder les maillages incompatibles, à de nouveaux problèmes physiques régis par des inéquations. Il est apparu que l'inéquation modélisant l'écoulement du fluide de Bingham pouvait se prêter à l'analyse mathématique de convergence d'une telle méthode par éléments finis tout comme d'autres problèmes issus de la mécanique des fluides l'avaient été auparavant [29, 37, 58].

Etude de la condition de blocage pour une fluide de Bingham non homogène : [19p]

Ce travail entamé plus récemment est effectué avec I. Ionescu, T. Lachand-Robert (Université de Savoie) et I. Rosca (Université de Bucarest). Nous nous intéressons à l'écoulement d'un fluide de Bingham dont le seuil de plasticité est non homogène (i.e. $g = g(x), x \in \Omega$), contrairement aux références antérieures [61, 68, 78, 77, 101]. Le seuil de plasticité hétérogène est une hypothèse essentielle dans la récente modélisation des glissements de terrain réalisée dans [54]. La partie intéressante sur laquelle nous nous sommes focalisés ensuite et qui constitue le point principal de cette étude concerne la propriété de blocage pour ce type de fluide. En effet, ce fluide reste immobile si les sollicitations extérieures f ne sont pas assez importantes. La recherche des sollicitations extérieures "minimales" telles qu'un flux apparaisse revient à trouver la relation liant f et g lorsque

$$\int_\Omega g|\nabla v| \, d\Omega \geq \int_\Omega fv \, d\Omega, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Des résultats encourageants ont été obtenus et la recherche d'un algorithme numérique adapté fait actuellement l'objet de nos recherches.

3.2 Publications et communications

3.2.1 Publications dans des revues avec comité de lecture

I. Articles parus ou acceptés

[1a] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.324, Série I, 123–127, 1997.

[2a] P. Hild, *Eléments finis non conformes pour un problème de contact unilatéral avec frottement*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.324, Série I, 707–710, 1997.

[3a] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *The mortar finite element method for contact problems*, Math. Comput. Model., Vol. 28, No. 4–8, 263–271, 1998.

[4a] P. Hild, *A propos d'approximation par éléments finis optimale pour les problèmes de contact unilatéral*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.326, Série I, 1233–1236, 1998.

[5a] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact*, Math. Models Methods Appl. Sci. (M3AS), Vol. 9, No. 2, 287–303, 1999.

[6a] P. Coorevits, P. Hild et J.-P. Pelle, *Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral*, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 8, No. 1, 7–29, 1999.

[7a] P. Hild, *Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 184, No. 1, 99–123, 2000.

[8a] P. Hild, *Approximations par éléments finis non conformes pour les fluides de Bingham*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.330, Série I, 143–146, 2000.

[9a] P. Coorevits, P. Hild and J.-P. Pelle, *A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and nonmatching meshes.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 186, No. 1, 65–83, 2000.

[10a] J.R. Fernández, P. Hild et J.M. Viaño, *Résolution numérique d'un problème de contact entre corps élasto-viscoplastiques et maillages éléments finis incompatibles*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.331, Série I, 833–838, 2000.

[11a] P. Hild, *The mortar finite element method for Bingham fluids*, Math. Model. Numer. Anal. (M2AN), Vol. 35, No. 1, 153–164, 2001.

[12a] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani and T. Sassi, *Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies*, Mathematics of Computation, Vol. 71, No. 237, 1–25, 2002.

[13a] P. Coorevits, P. Hild and M. Hjiaj, *A posteriori error control of finite element approximations for Coulomb's frictional contact*, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 23, No. 3, 976–999, 2001.

[14a] P. Hild, *On finite element uniqueness studies for Coulomb's frictional contact model*, à paraître dans Appl. Math. Comp.

[15a] P. Hild and P. Laborde, *Quadratic finite element methods for unilateral contact problems*, à paraître dans Appl. Numer. Math.

II. Articles soumis pour publication

[16s] J.R. Fernández, P. Hild and J.M. Viaño, *Numerical approximation of the elastic-viscoplastic contact problem with non-matching meshes.* Rapport interne du Laboratoire de Mathématiques n° 01-01a (janvier 2001). Soumis à Numer. Math.

[17s] R. Hassani, P. Hild and I. Ionescu, *On non-uniqueness of the elastic equilibrium with Coulomb friction: a spectral approach.* Rapport interne du Laboratoire de Mathématiques n° 01-04c (avril 2001). Soumis à Math. Methods Appl. Sci.

III. Articles en préparation

[18p] P. Coorevits and P. Hild, *Adaptive finite elements for threedimensional bodies in contact*, en préparation.

[19p] P. Hild, I. Ionescu, T. Lachand-Robert and I. Rosca, *The blocking property for nonhomogeneous Bingham fluids*, en préparation.

3.2.2 Publications dans des actes de congrès avec comité de lecture

[20c] P. Hild, F. Ben Belgacem et P. Laborde, *Raccord de maillages pour un problème de contact.* Actes du troisième colloque national en calcul de structures, Giens, 20–23 Mai 1997. Ed. Presses Académiques de l'Ouest, Nantes, 405–410.

[21c] P. Hild, F. Ben Belgacem and P. Laborde, *Unilateral contact for non-matching finite element meshes: the global contact condition.* Proceedings of the fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos-Aires, Argentina, 29 June – 2 July, 1998, (CDROM, 20 pages).

[22c] P. Coorevits, P. Hild et J.-P. Pelle, *Problèmes de contact unilatéral : contrôle et adaptation des calculs éléments finis.* Actes du quatrième colloque national en calcul de structures, Giens, 18–21 Mai 1999. Ed. Teknea, Toulouse, 265–271.

[23c] P. Coorevits, P. Hild et J.-P. Pelle, *Estimations d'erreur a posteriori pour les problèmes de contact unilatéral.* Actes du quatorzième congrès français de mécanique, Toulouse, 30 août – 3 septembre 1999, Ed. Universal (CDROM, 6 pages).

[24c] J.R. Fernández, P. Hild and J.M. Viaño, *Nonconforming finite element methods for elastic-viscoplastic contact.* Proceedings of the fourteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2000), Perpignan, France, June 19–23, 2000, (CDROM, 8 pages).

[25c] P. Coorevits, P. Hild et M. Hjiaj, *Calcul d'erreur a posteriori pour les approximations éléments finis du contact avec frottement de Coulomb.* Actes du cinquième colloque national en calcul de structures, Giens, 15–18 Mai 2001. Ed. Teknea, Toulouse, 271–278.

[26c] J.R. Fernández, P. Hild and J.M. Viaño, *Numerical approximation of the elastic-viscoplastic contact problem using noncoinciding finite element meshes.* Proceedings of the third Contact Mechanics International Symposium (CMIS 2001), Peniche, Portugal, June 18–21, 2001. To appear in the "Solid Mechanics and its Applications" Series of the Kluwer Academic Publishers (8 pages).

[27c] R. Hassani, P. Hild and I. Ionescu, *Analysis of eigenvalue problems modelling friction: sufficient conditions of non-uniqueness for the elastic equilibrium.* Proceedings of the third Contact Mechanics International Symposium (CMIS 2001), Peniche, Portugal, June 18–21, 2001. To appear in the "Solid Mechanics and its Applications" Series of the Kluwer Academic Publishers (8 pages).

[28c] P. Coorevits, P. Hild and M. Hjiaj, *An a posteriori error estimator for frictional contact problems.* To appear in the Proceedings of the first Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics (APCOM 2001), Sydney, Australia, November 20–23, 2001, (6 pages).

3.2.3 Thèse de doctorat

[Th] P. Hild, *Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles.* Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse 3, n° 2903, soutenue le 8 janvier 1998.

3.2.4 Communications orales

I. Communications orales à des congrès

- 3ème Symposium international "Contact Mechanics International Symposium (CMIS 2001)", Peniche, Portugal, 18–21 juin 2001.
- 5ème Colloque national en calcul de structures, Giens, 15–18 mai 2001.
- 14ème Symposium international "Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS 2000)", Perpignan, 19–23 juin 2000.
- 14ème Congrès français de mécanique, Toulouse, 30 août – 3 septembre 1999.
- 4ème Colloque national en calcul de structures, Giens, 18–21 mai 1999.
- 30ème Congrès d'Analyse Numérique, Latitudes, 18–22 mai 1998.
- 3ème Colloque national en calcul de structures, Giens, 20–23 mai 1997.
- 28ème Congrès d'Analyse Numérique, La Londe les Maures, 28–31 mai 1996.

II. Communications orales à des journées thématiques

- ACI "Prévention des catastrophes naturelles" (IPG, Carry-le-Rouet), 5–6 novembre 2001.
- ACI "Prévention des catastrophes naturelles" (LAMA, Chambéry), 17–18 mai 2001.
- CEMRACS 98, (CIRM, Luminy), 20 juillet – 19 août 1998.
- Journées de Metz "Méthodes numériques et calcul scientifique : développements récents" à l'Université de Metz, (MMAS, Metz), 22–23 avril 1998.
- Journée thématique "Analyse variationnelle et numérique des problèmes de contact en élasticité et viscoplasticité" à l'Université de Perpignan, (LTS, Perpignan), 13 juin 1997.
- Journée Bordeaux-Toulouse-Pau à l'Université de Bordeaux, (MAB, Bordeaux), 7 mai 1996.
- Journée parallélisme au LAAS, (LAAS/CNRS, Toulouse), 16 Mai 1995.

III. Communications orales à des séminaires de laboratoires

- Séminaire du Département de Mécanique de la Faculté de Mathématiques de l'Université de Bucarest, (Bucarest), 20 septembre 2000.
- Séminaire du Département de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, (DMA, Lausanne), 14 janvier 2000.
- Séminaire de l'équipe EDP et analyse numérique de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (Laboratoire J. A. Dieudonné, Nice), 23 septembre 1999.
- Séminaire du Centre de Mise en Forme des Matériaux de L'Ecole des Mines de Paris, (CEMEF, Sophia-Antipolis), 1 juin 1999.
- Séminaire du Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Savoie, (LAMA, Chambéry), 6 avril 1999.
- Séminaires (2 exposés) du Département de Mathématiques Appliquées à l'Université de Santiago de Compostela, (DMA, Santiago de Compostela), 24 et 25 février 1999.
- Séminaire de l'équipe EDP du Laboratoire de Modélisation et Calcul à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, (LMC, Grenoble), 8 octobre 1998.
- Séminaire de l'équipe EDP et analyse numérique de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (Laboratoire J. A. Dieudonné, Nice), 30 avril 1998.
- Séminaire du Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique de l'Université Paul Sabatier, (MIP, Toulouse), 28 avril 1998.
- Séminaire du Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Savoie, (LAMA, Chambéry), 31 mars 1998.

IV. Communications orales à des groupes de travail

- Groupe de travail AIV (Algorithmes pour les Inéquations Variationnelles) du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon (MAPLY, Lyon), 30 juin 2000.
- Groupe de travail SIGMAS (Structures et Instabilités en Géophysique et Mécanique, Analyse et Simulation) du Laboratoire de Modélisation et Calcul à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, (LMC, Grenoble), 11 mai 2000.
- Quatre exposés dans le cadre de la réunion du secteur Structures et Systèmes du Laboratoire de Mécanique et Technologie à l'ENS de Cachan, (LMT, Cachan), 1997.
- Plusieurs exposés dans le cadre du groupe de travail Structures et Matériaux du Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique à l'Université Paul Sabatier, (MIP, Toulouse), 1995-1997.

3.3 Références externes

[29] Y. Achdou and O. Pironneau, A fast solver for Navier-Stokes equations in the laminar regime using mortar finite element and boundary element methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 32 (1995) 985–1016.

[30] P. Alart, Critères d'injectivité et de surjectivité pour certaines applications de $\mathbb{R}^n$ dans lui même : application à la mécanique du contact, *Math. Model. Numer. Anal.*, 27 (1993) 203–222.

[31] I. Babuška and J. Osborn, *Eigenvalue problems*, in: P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., Handbook of Numerical Analysis, Volume II, Part 1, North Holland, Amsterdam, (1991) 641–787.

[32] I. Babuška and W. Rheinboldt, Error estimates for adaptive finite element computations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 (1978) 736–754.

[33] P. Ballard, A counter-example to uniqueness in quasi-static elastic contact problems with small friction, *Int. J. Engng. Sci.*, 37 (1999) 163–178.

[34] G. Bayada, M. Chambat, K. Lhalouani et T. Sassi, Elements finis avec joints pour des problèmes de contact avec frottement de Coulomb non local, *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.*, 325 (1997) 1323–1328.

[35] Z. Belhachmi et F. Ben Belgacem, Elements finis d'ordre deux pour l'inéquation variationnelle de Signorini, *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.*, 331 (2000) 727–732.

[36] F. Ben Belgacem, The mortar finite element method with Lagrange multipliers, *Numer. Math.*, 84 (1999) 173–197.

[37] F. Ben Belgacem, The mixed mortar finite element method for the incompressible Stokes problem: convergence analysis, *SIAM J. Numer. Anal.*, 37 (2000) 1085–1100.

[38] F. Ben Belgacem, Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 37 (2000) 1198–1216.

[39] A.E. Berger, The truncation method for the solution of a class of variational inequalities, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér.*, 10 (1976) 29–42.

[40] C. Bernardi, N. Débit and Y. Maday, Coupling finite element and spectral methods: first results, *Math. Comp.*, 54 (1990) 21–39.

[41] C. Bernardi, Y. Maday and A.T. Patera, *A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method*, Collège de France Seminar, Eds. H. Brezis and J.-L. Lions, Pitman, 13–51, (1994).

[42] H. Brezis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*. Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971), 101–156. Academic Press, New York, (1971).

[43] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Théorie et applications, Masson, Paris, (1983).

[44] F. Brezzi, W.W. Hager and P.A. Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities, *Numer. Math.*, 28 (1977) 431–443.

[45] F. Brezzi, W.W. Hager and P.A. Raviart, Error estimates for the finite element solution of variational inequalities, Part 2: Mixed Methods, *Numer. Math.*, 31 (1978) 1–16.

[46] M. Burguera and J.M. Viaño, Numerical solving of frictionless contact problems in perfect plastic bodies, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 120 (1995) 303–322.

[47] C. Carstensen, O. Scherf and P. Wriggers, Adaptive finite elements for elastic bodies in contact, *SIAM J. Sci. Comput.*, 20 (1999) 1605–1626.

[48] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, (1978).

[49] P.G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, in: P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., Handbook of Numerical Analysis, Volume II, Part 1, North Holland, Amsterdam, (1991) 17–352.

[50] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.*, 22 (1984) 567–575.

[51] P. Coorevits, *Sur l'automatisation des analyses par éléments finis*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris 6, (1997).

[52] P. Coorevits, P. Ladevèze and J.-P. Pelle, Mesh optimization for problems with steep gradients, *Engrg. Comput.*, 11 (1994) 129–144.

[53] P. Coorevits, P. Ladevèze and J.-P. Pelle, An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 121 (1995) 91–120.

[54] N. Cristescu, *A model of stability of slopes*, in Slope Stability 2000, proceedings of Geo-Denver 2000, 86–98 (2000).

[55] N. Cristescu and I. Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff Publishers, Editura Tehnica, Bucarest, (1982).

[56] R. Dautray and J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et techniques*, Tome 2, Chapitre VIII, Masson, Paris, (1985).

[57] R. Dautray and J.-L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, Volume 3, Chapter VIII, Springer, Berlin, (2000).

[58] N. Debit, *La méthode des éléments avec joints dans le cas du couplage de méthodes spectrales et méthodes d'éléments finis : résolution des équations de Navier-Stokes,* Thèse, Université Paris 6, (1991).

[59] L. Demkowicz and J.T. Oden, On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction, *Nonlinear Anal.*, 6 (1982) 1075–1093.

[60] G. Duvaut, Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb, *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.*, 290 (1980) 263–265.

[61] G. Duvaut et J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, (1972).

[62] C. Eck and J. Jarušek, Existence results for the static contact problem with Coulomb friction, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 8 (1998) 445–468.

[63] R.S. Falk, Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities, *Math. Comp.*, 28 (1974) 963–971.

[64] J.R. Fernández-García, *Análisis numérico de problemas de contacto sin rozamiento en viscoplasticidad*, Thèse, Université de Santiago de Compostela, (2001).

[65] G. Fichera, Problemi elastici con vincoli unilaterali il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, 8 (1964) 91–140.

[66] G. Fichera, *Existence theorems in elasticity*, in Handbuch der Physik, Band VIa/2 Springer, Berlin (1972) 347–389. *Boundary value problems of elasticity with unilataral constraints*, ibid, 391–424.

[67] G. Fix, Eigenvalue approximation by the finite element method, *Adv. in Math.*, 10 (1973) 300–316.

[68] R. Glowinski, *Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems.* Notes by M. G. Vijayasundaram and M. Adimurthi. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 65. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Springer-Verlag, Berlin-New York, (1980).

[69] R. Glowinski, J.-L. Lions et R. Trémolières, *Analyse numérique des inéquations variationnelles. Tome 1 : Théorie générale et premières applications. Tome 2 : Applications aux phénomènes stationnaires et d'évolution.* Méthodes Mathématiques de l'Informatique, 5. Dunod, Paris, (1976).

[70] W. Han and M. Sofonea, Numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190 (2000) 179-191.

[71] J. Haslinger, Approximation of the Signorini problem with friction, obeying the Coulomb law, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 5 (1983) 422–437.

[72] J. Haslinger, Least square method for solving contact problems with friction obeying Coulomb's law, *Aplikace Matematiky*, 29 (1984) 212–224.

[73] J. Haslinger and I. Hlaváček, Contact between Elastic Bodies -1.Continuous Problems, *Aplikace Matematiky*, 25 (1980) 324–347.

[74] J. Haslinger and I. Hlaváček, Contact between elastic bodies -2. Finite element analysis, *Aplikace Matematiky*, 26 (1981) 263–290.

[75] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas, *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics*, in: P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., Handbook of Numerical Analysis, Volume IV, Part 2, North Holland, Amsterdam (1996) 313–485.

[76] J. Haslinger and J. Lovišek, Mixed variational formulation of unilateral problems, *Commentat. Math. Univ. Carol.*, 21 (1980) 231–246.

[77] I. Ionescu and M. Sofonea, The blocking property in the study of the Bingham fluid, *Int. J. Engng. Sci.*, 24 (1986) 289–297.

[78] I. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and numerical methods in viscoplasticity.* Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1993).

[79] V. Janovský, *Catastrophic features of Coulomb friction model*, in: The mathematics of finite elements and applications IV, MAFELAP 1981, Proc. Conf., Uxbridge/Middlesex 1981, 259–264 (1982).

[80] J. Jarušek, Contact problems with bounded friction. Coercive case, *Czechoslovak. Math. J.*, 33 (1983) 237–261.

[81] Y. Kato, Signorini's problem with friction in linear elasticity, *Japan J. Appl. Math.*, 4 (1987) 237–268.

[82] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*. SIAM Studies in Applied Mathematics, 8. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, (1988).

[83] N. Kikuchi and Y. J. Song, Penalty/finite-element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity, *Quar. Appl. Math.*, 39 (1981) 1–22.

[84] D. Kinderlehrer, Estimates for the solution and its stability in Signorini's problem. *Appl. Math. Optim.*, 8 (1982) 159–188.

[85] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*. Pure and Applied Mathematics, 88. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, (1980).

[86] A. Klarbring, Examples of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems with friction, *Ing. Archiv*, 60 (1990) 529–541.

[87] A. Klarbring, A. Mikelíc and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engng. Sci.*, 26 (1988) 811–832.

[88] A. Klarbring, A. Mikelíc and M. Shillor, On friction problems with normal compliance, *Nonlinear Anal.*, 13 (1989) 935–955.

[89] W. Kolata, Approximation in variationally posed eigenvalue problems, *Numer. Math.*, 29 (1978) 159–171.

[90] M.G. Krein and M.A. Rutman, Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space., (Russian) *Uspehi Matem. Nauk* (N. S.) 3, (1948). no. 1(23), 3–95. Amer. Math. Soc. Translation 1950, (1950), no. 26, 128 pp.

[91] P. Ladevèze, *Comparaison de modèles de milieux continus*, Thèse, Université Paris 6, (1975).

[92] P. Ladevèze, G. Coffignal and J.-P. Pelle, *Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis.* Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations (Lisbon, 1984), 181–203, Wiley Ser. Numer. Methods Engrg., Wiley, Chichester, (1986).

[93] P. Ladevèze and D. Leguillon, Error estimate procedure in the finite element method and applications, *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 (1983) 485–509.

[94] P. Ladevèze, J.-P. Pelle and P. Rougeot, Error estimates and mesh optimization for FE computation, *Engrg. Comput.*, 8 (1991) 69–80.

[95] C.Y. Lee and J.T. Oden, A posteriori error estimation of $h-p$ finite element approximations of frictional contact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 113 (1994) 11–45.

[96] P. Le Tallec and T. Sassi, Domain decomposition with nonmatching grids: augmented lagrangian approach, *Math. Comp.*, 64 (1995) 1367–1396.

[97] K. Lhalouani and T. Sassi, Nonconforming mixed variational formulation and domain decomposition for unilateral problems, *East-West J. Numer. Math.*, 7 (1999) 23–30.

[98] J.-L. Lions and G. Stampacchia, Variational inequalities, *Comm. Pure. Appl. Math.*, XX (1967) 493–519.

[99] J.A.C. Martins and J.T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Anal.*, 11 (1987) 407–428.

[100] B. Mercier, J.E. Osborn, J. Rappaz and P.A. Raviart, Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods, *Math. Comp.*, 36 (1981) 427–453.

[101] P.P. Mosolov and V.P. Miasnikov, Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous-plastic medium. *PPM, J. Mech. and Appl. Math.*, 29 (1965) 545–577.

[102] P.P. Mosolov and V.P. Miasnikov, On stagnant flow regions of a viscous-plastic medium in pipes. *PPM, J. Mech. and Appl. Math.*, 30 (1966) 841–854.

[103] P.P. Mosolov and V.P. Miasnikov, On qualitative singularities of the flow of a viscoplastic medium in pipes. *PPM, J. Mech and Appl. Math.*, 31 (1967) 609–613.

[104] M. Moussaoui and K. Khodja, Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet–Signorini dans un domaine polygonal plan, *Commun. Part. Diff. Eq.*, 17 (1992) 805–826.

[105] F. Natterer, Optimale L^2-Konvergenz finiter Elemente bei Variationsungleichungen, *Bonn. Math. Schr.*, 89 (1976) 1–12.

[106] J. Nečas, J. Jarušek and J. Haslinger, On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction, *Boll. Unione Mat. Ital.*, 17-B(5) (1980) 796–811.

[107] J.T. Oden and J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 52 (1985) 527–634.

[108] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality problems in mechanics and applications*, Birkhäuser, Basel (1985).

[109] M. Raous, M. Jean and J.J. Moreau eds., *Proceedings of the second Contact Mechanics International Symposium* held September 19–23, 1994, in Carry-Le-Rouet, France. Plenum Press, New York, (1995).

[110] J.E. Roberts and J.-M. Thomas, *Mixed and hybrid methods*, in: P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., Handbook of Numerical Analysis, Volume II, Part 1, North Holland, Amsterdam, (1991) 523–639.

[111] M. Rochdi and M. Sofonea, On frictionless contact between two elastic-viscoplastic bodies, *Quart. Jl. Mech. Appl. Math.*, 50 (1997) 481–496.

[112] N. Roquet, R. Michel et P. Saramito, Estimations d'erreur pour un fluide viscoplastique par éléments finis P_k et maillages adaptés, *C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. I, Math.*, 331 (2000) 563–568.

[113] M. Sofonea, On a contact problem for elastic-viscoplastic bodies, *Nonlinear Anal.*, 29

(1997) 1037–1050.

[114] R. Verfürth, A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 176 (1999) 419–440.

[115] J.M. Viaño, Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contact unilateral sin rozamiento en elasticidad. Parte I: Formulación física y matemática de los problemas. *Rev. Internac. Métod. Numér. Cálc. Diseñ. Ingr.*, 1 (1986) 79–93.

[116] J.M. Viaño, Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contact unilateral sin rozamiento en elasticidad. Parte II: Aproximación y resolución de los problemas discretos. *Rev. Internac. Métod. Numér. Cálc. Diseñ. Ingr.*, 2 (1986) 63–86.

[117] P. Wriggers, O. Scherf and C. Carstensen, *Adaptive techniques for the contact of elastic bodies*. Recent developments in finite element analysis (Palo Alto, CA, 1994), 78–86, Internat. Center Numer. Methods Eng. (CIMNE), Barcelona, (1994).

[118] Z.H. Zhong, *Finite element procedures for contact-impact problems*, Oxford University Press, Oxford, (1993).

[119] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 24 (1987) 337–357.

Partie III

Articles annexés

Liste des articles annexés [1]

[2a] P. Hild, *Eléments finis non conformes pour un problème de contact unilatéral avec frottement*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.324, Série I, 707–710, 1997. (**p. 37**)

[3a] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *The mortar finite element method for contact problems*, Math. Comput. Model., Vol. 28, No. 4–8, 263–271, 1998. (**p. 41**)

[4a] P. Hild, *A propos d'approximation par éléments finis optimale pour les problèmes de contact unilatéral*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.326, Série I, 1233–1236, 1998. (**p. 51**)

[5a] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact*, Math. Models Methods Appl. Sci. (M3AS), Vol. 9, No. 2, 287–303, 1999. (**p. 55**)

[6a] P. Coorevits, P. Hild et J.-P. Pelle, *Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral*, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 8, No. 1, 7–29, 1999. (**p. 73**)

[7a] P. Hild, *Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 184, No. 1, 99–123, 2000. (**p. 97**)

[9a] P. Coorevits, P. Hild and J.-P. Pelle, *A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and nonmatching meshes.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 186, No. 1, 65–83, 2000. (**p. 123**)

[11a] P. Hild, *The mortar finite element method for Bingham fluids*, Math. Model. Numer. Anal. (M2AN), Vol. 35, No. 1, 153–164, 2001. (**p. 143**)

[12a] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani and T. Sassi, *Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies*, Mathematics of Computation, Vol. 71, No. 237, 1–25, 2002. (**p. 155**)

[13a] P. Coorevits, P. Hild and M. Hjiaj, *A posteriori error control of finite element approximations for Coulomb's frictional contact*, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 23, No. 3, 976–999, 2001. (**p. 181**)

[14a] P. Hild, *On finite element uniqueness studies for Coulomb's frictional contact model*, à paraître dans Appl. Math. Comp. (**p. 205**)

[15a] P. Hild and P. Laborde, *Quadratic finite element methods for unilateral contact problems*, à paraître dans Appl. Numer. Math. (**p. 223**)

[16s] J.R. Fernández, P. Hild and J.M. Viaño, *Numerical approximation of the elastic-viscoplastic contact problem with non-matching meshes.* Rapport interne du Laboratoire de Mathématiques n° 01-01a (janvier 2001). Soumis à Numer. Math. (**p. 247**)

[17s] R. Hassani, P. Hild and I. Ionescu, *On non-uniqueness of the elastic equilibrium with Coulomb friction: a spectral approach.* Rapport interne du Laboratoire de Mathématiques n° 01-04c (avril 2001). Soumis à Math. Methods Appl. Sci. (**p. 269**)

[1] Les notes aux Comptes Rendus [1a], [8a] et [10a] ne figurent pas dans cette annexe car elles sont des versions abrégées des articles [5a], [11a] et [16s].