

## Résolution numérique d'un problème de contact entre corps élasto-viscoplastiques et maillages éléments finis incompatibles

José R. FERNÁNDEZ GARCÍA <sup>a</sup>, Patrick HILD <sup>b</sup>, Juan M. VIAÑO <sup>a</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela, 15706 Santiago de Compostela, Spain

Courriel : jramon@usc.es, maviano@usc.es

<sup>b</sup> Laboratoire de Mathématiques, Université de Savoie, CNRS EP 2067, 73376 Le Bourget du Lac, France

Courriel : hild@univ-savoie.fr

(Reçu le , accepté le )

---

**Résumé.** On considère le problème quasistatique de contact unilatéral sans frottement entre deux solides élasto-viscoplastiques. L'inéquation variationnelle d'évolution est approchée en la variable espace par des méthodes d'éléments finis non conformes qui permettent le traitement de maillages incompatibles sur la zone de contact. Un schéma d'Euler rétrograde est utilisé pour la discrétisation temporelle. Nous montrons l'existence et l'unicité du problème discrétisé ainsi que la convergence vers la solution du problème continu. Les résultats numériques correspondants sont obtenus. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

*Numerical analysis of a contact problem between elasto-viscoplastic bodies and nonmatching finite element meshes*

**Abstract.** *We consider a quasistatic frictionless unilateral contact problem between two elastic-viscoplastic bodies. The corresponding time-dependent variational inequality is approximated in the space variable with nonconforming finite element methods which allow the handling of nonmatching meshes on the contact part. A backward Euler scheme is used for the time discretization. We show the existence and uniqueness of the discrete solution and the convergence towards the continuous solution is obtained. Finally, some corresponding numerical results are shown.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

Note présentée par Philippe G. CIARLET

S0764-4442(00)01641-4/FLA

© 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abridged English version

We consider the quasistatic contact problem without friction between two elasto–viscoplastic bodies. This problem is written as problem  $P$  (see Section 1 for notations).

Using Green’s formula, the following variational formulation of problem  $P$  is obtained:

**Problem  $PV$ .** Find the displacement field  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbf{K}$  and the stress field  $\boldsymbol{\sigma} : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  such that:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, & \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}^0, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t)\right) + G(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) \text{ a.e. } t \in (0, T), \\ (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq \langle \mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t) \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad t \in [0, T]. \end{cases}$$

Existence and uniqueness of solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{K} \times \mathcal{H})$  is proved in [7]. In this work we present a numerical method to solve problem  $PV$  using Euler’s backward scheme to discretize in time and nonconforming finite element methods which allow the handling of nonmatching meshes on the contact part. For each time step, problem  $PV_{hk}$  must be solved:

**Problem  $PV_{hk}$ .** Find the displacement field  $\mathbf{u}_{hk} = \{\mathbf{u}_{hk}^n\}_{n=0}^N \subset \mathbf{K}_h$  and the stress field  $\boldsymbol{\sigma}_{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n\}_{n=0}^N \subset Q_h$  such that:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{hk}^0 \in \mathbf{K}_h, & \boldsymbol{\sigma}_{hk}^0 \in Q_h, \\ \delta \boldsymbol{\sigma}_{hk}^n = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{hk}^n) + G(\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{hk}^n)), & n = 1, 2, \dots, N, \\ (\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_{hk}^n))_{\mathcal{H}} \geq \langle \mathbf{F}^n, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_{hk}^n \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h, & n = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

where the approximation of the admissible displacement convex set  $\mathbf{K}$  has been done using either an interpolation or a projection operator. We prove the existence and uniqueness of solution for a sufficiently small time step (Proposition 1). A main result for the convergence and error estimates is established (Theorem 2):

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left( \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_{hk}^n\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\sigma}(t_n) - \boldsymbol{\sigma}_{hk}^n\|_{\mathcal{H}} \right) \leq C \left( \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_{hk}^0\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}_{hk}^0\|_{\mathcal{H}} \right) + C(h_1^r + h_2 + k).$$

Finally, in Section 3 we present some numerical experiences. The nonlinear problem  $PV_{hk}$  is solved by a penalty-duality algorithm (see [2]). In order to compare the two possibilities of discretizing  $\mathbf{K}$  we consider a compression test. In Figures 1 and 2 we can see the results obtained using the projection and interpolation operators, respectively.

### 1. Problème mécanique

On considère deux corps elasto-viscoplastiques  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  dont on étudie l’évolution sur l’intervalle de temps  $[0, T]$ ,  $T > 0$ . Le problème de contact unilatéral quasistatique sans frottement entre les deux corps élasto-viscoplastiques s’écrit:

**Problème  $P$ .** Trouver le champ de déplacements  $\mathbf{u} : (\Omega^1 \cup \Omega^2) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  et le champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma} : (\Omega^1 \cup \Omega^2) \times [0, T] \rightarrow \mathcal{S}_2$  tels que:

## Résolution numérique d'un problème de contact entre corps...

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma^\ell}{\partial t} &= \mathcal{E}^\ell \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{u}^\ell}{\partial t} \right) + G^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(\mathbf{u}^\ell)), & \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\
 \operatorname{div} \sigma^\ell + \mathbf{f}^\ell &= 0, & \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \\
 \mathbf{u}^\ell &= 0, & \text{sur } \Gamma_D^\ell \times (0, T), \\
 \sigma^\ell \mathbf{n}^\ell &= \mathbf{g}^\ell, & \text{sur } \Gamma_N^\ell \times (0, T), \\
 (\sigma^1 \mathbf{n}^1) \cdot \mathbf{n}^1 &= (\sigma^2 \mathbf{n}^2) \cdot \mathbf{n}^2 = \sigma_n, \quad \sigma_t^1 = \sigma_t^2 = 0, & \text{sur } \Gamma_C \times [0, T], \\
 [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad \sigma_n [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] &= 0, & \text{sur } \Gamma_C \times [0, T], \\
 \mathbf{u}^\ell(0) &= \mathbf{u}^{0,\ell}, \quad \sigma^\ell(0) = \sigma^{0,\ell}, & \text{dans } \Omega^\ell,
 \end{aligned}$$

où la frontière de  $\Omega^\ell$  est composée de  $\Gamma_D^\ell$  (de mesure non nulle),  $\Gamma_N^\ell$  et  $\Gamma_C$ . Les notations  $\mathbf{u}^\ell$  et  $\sigma^\ell$  désignent  $\mathbf{u}|_{\Omega^\ell}$  et  $\sigma|_{\Omega^\ell}$  respectivement et  $\varepsilon(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v})$  représente le tenseur des déformations linéarisé. On désigne par  $\mathbf{n}^\ell$  le vecteur normal unitaire sortant de  $\Omega^\ell$  et par  $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}] = \mathbf{u}^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}^2 \cdot \mathbf{n}^2$  le saut du déplacement normal relatif au travers de  $\Gamma_C$ . Sur  $\Gamma_C$ , le vecteur contrainte est écrit  $\sigma^\ell \mathbf{n}^\ell = ((\sigma^\ell \mathbf{n}^\ell) \cdot \mathbf{n}^\ell) \mathbf{n}^\ell + \sigma_t^\ell$ . On supposera que le tenseur d'ordre quatre  $\mathcal{E}^\ell$  est borné dans  $\Omega^\ell$ , symétrique et  $\mathcal{S}_2$ -elliptique ( $\mathcal{S}_2$  désigne l'espace des tenseurs d'ordre deux symétriques), et que la fonction de viscoplasticité  $G^\ell$  est lipschitzienne. Les chargements extérieurs sont représentés par  $\mathbf{f}^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; (L^2(\Omega^\ell))^2)$  et  $\mathbf{g}^\ell \in W^{1,\infty}(0, T; (L^2(\Gamma_N^\ell))^2)$ .

Afin d'introduire la formulation variationnelle du problème  $P$ , on définit les espaces suivants:

$$\mathbf{V}(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v}^\ell \in (H^1(\Omega^\ell))^2, \quad \mathbf{v}^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\ell \right\}, \quad \mathcal{H}(\Omega^\ell) = L^2(\Omega^\ell; \mathcal{S}_2),$$

et les espaces produits  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\Omega^1) \times \mathbf{V}(\Omega^2)$  et  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega^1) \times \mathcal{H}(\Omega^2)$  munis des normes Hilbertiennes correspondantes  $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ . Soit  $\mathbf{F} \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{V}')$  l'élément défini par le théorème de Riesz représentant  $\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{g}^1$  et  $\mathbf{g}^2$ . Alors, l'ensemble des déplacements admissibles est défini comme:

$$\mathbf{K} = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}, \quad [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\}.$$

On notera  $\varepsilon(\mathbf{v}) = (\varepsilon(\mathbf{v}^1), \varepsilon(\mathbf{v}^2))$ ,  $\forall \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2) \in \mathbf{V}$ ,  $\mathcal{E}\varepsilon = (\mathcal{E}^1 \varepsilon^1, \mathcal{E}^2 \varepsilon^2)$ ,  $\forall \varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \in \mathcal{H}$  et  $G(\sigma, \varepsilon) = (G^1(\sigma^1, \varepsilon^1), G^2(\sigma^2, \varepsilon^2))$ ,  $\forall \varepsilon = (\varepsilon^1, \varepsilon^2) \in \mathcal{H}$ ,  $\forall \sigma = (\sigma^1, \sigma^2) \in \mathcal{H}$ . On suppose que les conditions initiales satisfont  $\mathbf{u}^0 = (\mathbf{u}^{0,1}, \mathbf{u}^{0,2}) \in \mathbf{K}$  et  $(\sigma^0, \varepsilon(\mathbf{u}^0))_{\mathcal{H}} = \langle \mathbf{F}(0), \mathbf{u}^0 \rangle$ . La formulation variationnelle du problème  $P$  (voir [7]) devient:

**Problème PV.** Trouver le champ de déplacements  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow \mathbf{K}$  et le champ de contraintes  $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$  satisfaisant:

$$\begin{cases}
 \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \sigma(0) = \sigma^0, \\
 \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t) = \mathcal{E}\varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t) \right) + G(\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{u}(t))), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \\
 (\sigma(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}(t)))_{\mathcal{H}} \geq \langle \mathbf{F}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t) \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad t \in [0, T].
 \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème PV notée  $(\mathbf{u}, \sigma) \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{K} \times \mathcal{H})$  est démontrée dans [7].

## 2. Le problème discrétisé

On suppose que chaque solide  $\Omega^\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ , est un polygone et que  $\Gamma_C$  est un segment satisfaisant  $\bar{\Gamma}_C \cap \bar{\Gamma}_D^\ell = \emptyset$  (bien que l'on puisse étendre les résultats obtenus au cas où  $\Gamma_C$  est une ligne brisée ainsi qu'au cas de conditions de Dirichlet adjacentes à  $\Gamma_C$ ) et l'on associe à  $\Omega^\ell$  une famille régulière de triangulations

notée  $\mathcal{T}_h^\ell$ . Comme les solides sont discrétisés de manière indépendante, il s'ensuit que les nœuds de  $\mathcal{T}_h^1$  et  $\mathcal{T}_h^2$  ne coïncident pas sur  $\Gamma_C$  ce qui correspond à des maillages incompatibles. On supposera cependant que les extrémités de  $\Gamma_C$  sont des nœuds communs aux triangulations  $\mathcal{T}_h^1$  et  $\mathcal{T}_h^2$ . Le paramètre de discrétisation sur  $\Omega^\ell$  est  $h_\ell = \max_{\kappa \in \mathcal{T}_h^\ell} h_\kappa$  où  $h_\kappa$  est le diamètre du triangle  $\kappa$ .

On considère l'espace de tenseurs symétriques et constants sur chaque élément pour approcher les champs de contraintes:

$$Q_h(\Omega^\ell) = \left\{ \boldsymbol{\tau}_h^\ell \in L^2(\Omega^\ell; \mathcal{S}_2), \quad \boldsymbol{\tau}_h^\ell|_\kappa \in (P_0(\kappa))^4, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h^\ell \right\},$$

et l'on pose  $Q_h = Q_h(\Omega^1) \times Q_h(\Omega^2)$ . Les champs de déplacements sont approchés par

$$\mathbf{V}_h(\Omega^\ell) = \left\{ \mathbf{v}_h^\ell \in (\mathcal{C}(\overline{\Omega}^\ell))^2, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_\kappa \in (P_1(\kappa))^2, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h^\ell, \quad \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_D} = 0 \right\},$$

et l'on pose  $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2)$  de sorte que  $\varepsilon(\mathbf{V}_h) \subset Q_h$ . On supposera de plus que  $G(Q_h, Q_h) \subset Q_h$  et  $\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{V}_h) \subset Q_h$ .

Soient  $W_h^\ell(\Gamma_C) = \{ \mathbf{v}_h^\ell|_{\Gamma_C} \cdot \mathbf{n}^\ell, \mathbf{v}_h^\ell \in \mathbf{V}_h(\Omega^\ell) \}$  et  $\pi_h^\ell$  l'opérateur de projection orthogonale sur  $W_h^\ell(\Gamma_C)$  pour le produit scalaire  $L^2(\Gamma_C)$ . On note  $\mathcal{I}_h^\ell$  l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un associé au maillage induit par  $\mathcal{T}_h^\ell$  sur  $\Gamma_C$ . Nous approchons de deux manières différentes la condition unilatérale incorporée dans  $\mathbf{K}$  dans les deux cones convexes suivants:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_h^\pi &= \{ \mathbf{v}_h = (v_h^1, v_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad v_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \pi_h^1(v_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \}, \\ \mathbf{K}_h^{\mathcal{I}} &= \{ \mathbf{v}_h = (v_h^1, v_h^2) \in \mathbf{V}_h(\Omega^1) \times \mathbf{V}_h(\Omega^2), \quad v_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathcal{I}_h^1(v_h^2 \cdot \mathbf{n}^2) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \}. \end{aligned}$$

Dans le cas de maillages compatibles, les deux convexes précédents coïncident et traduisent une non-interpénétration des solides:  $v_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + v_h^2 \cdot \mathbf{n}^2 \leq 0$  sur  $\Gamma_C$ . Dans le cas de maillages incompatibles, les deux convexes diffèrent et autorisent de l'interpénétration en règle générale. Au vu de la nature des opérateurs  $\pi_h^\ell$  et  $\mathcal{I}_h^\ell$  (ici on a choisi  $\ell = 1$  mais la définition symétrique avec  $\ell = 2$  est également possible), il apparaît que le convexe  $\mathbf{K}_h^\pi$  traduit des conditions de contact plus globales que  $\mathbf{K}_h^{\mathcal{I}}$  lorsque les maillages sont incompatibles (voir [5]).

Pour discrétiser la variable temporelle, on considère une subdivision de l'intervalle  $[0, T]$ :  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , et on définit  $k_n = t_n - t_{n-1}$  pour  $n = 1, 2, \dots, N$  de sorte que  $k = \max_n k_n$  soit le paramètre de discrétisation temporelle. Pour toute suite  $\{w^n\}_{n=0}^N$ , on définit  $\delta w^n = (w^n - w^{n-1})/k_n$ . Le problème  $PV$  complètement discretisé avec la méthode d'Euler implicite et les conditions initiales  $\mathbf{u}_{hk}^0, \boldsymbol{\sigma}_{hk}^0$  devient:

**Problème  $PV_{hk}$ .** Trouver un champ de déplacements  $\mathbf{u}_{hk} = \{\mathbf{u}_{hk}^n\}_{n=0}^N \subset \mathbf{K}_h$  et un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}_{hk} = \{\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n\}_{n=0}^N \subset Q_h$  vérifiant

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{hk}^0 \in \mathbf{K}_h, \quad \boldsymbol{\sigma}_{hk}^0 \in Q_h, \\ \delta \boldsymbol{\sigma}_{hk}^n = \mathcal{E} \delta \varepsilon(\mathbf{u}_{hk}^n) + G(\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n, \varepsilon(\mathbf{u}_{hk}^n)), \quad n = 1, 2, \dots, N, \\ (\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n, \varepsilon(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_{hk}^n))_{\mathcal{H}} \geq \langle \mathbf{F}^n, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_{hk}^n \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{K}_h, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

où  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^\pi$  ou bien  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^{\mathcal{I}}$  et  $\mathbf{F}^n = \mathbf{F}(t_n)$ .

On a le résultat d'existence et d'unicité reposant sur une technique de point fixe (voir [4]) ainsi que l'estimation d'erreur correspondante:

**Proposition 1.** Soit  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^\pi$  ou  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^{\mathcal{I}}$ . Il existe une constante  $k_0 > 0$  telle que si  $k \leq k_0$ , alors le problème  $PV_{hk}$  admet une unique solution  $\{(\mathbf{u}_{hk}^n, \boldsymbol{\sigma}_{hk}^n)\}_{n=0}^N$ .

**Théorème 2.** Soit  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{K} \times \mathcal{H})$  la solution du problème  $P$ . Supposons que  $\mathbf{u}^\ell \in$

## Résolution numérique d'un problème de contact entre corps...

$L^\infty(0, T; (H^2(\Omega^\ell))^2)$ . Soit  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^\pi$  ou  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^I$  et soit  $\{\mathbf{u}_{hk}^n\}_{n=0}^N, \{\boldsymbol{\sigma}_{hk}^n\}_{n=0}^N$  la solution du problème  $PV_{hk}$ . On a les estimations d'erreur suivantes où  $r = \frac{3}{4}$  si  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^\pi$  et  $r = \frac{1}{2}$  si  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^I$

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left( \|\mathbf{u}(t_n) - \mathbf{u}_{hk}^n\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\sigma}(t_n) - \boldsymbol{\sigma}_{hk}^n\|_{\mathcal{H}} \right) \leq C \left( \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_{hk}^0\|_{\mathbf{V}} + \|\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}_{hk}^0\|_{\mathcal{H}} \right) + C(h_1^r + h_2 + k).$$

*Démonstration:* La preuve du théorème repose sur une combinaison des techniques issues du problème de contact élastique statique avec maillages incompatibles (voir [1]) et de celles provenant de l'approximation du problème quasi-statique avec maillages compatibles (voir [4]).

**Remarque** La méthode d'approximation étudiée (éléments finis P1 en déplacements et schéma d'Euler rétrograde) n'est pas la seule qui puisse être proposée. Il serait en fait possible d'obtenir des estimations d'erreur pour des méthodes plus précises, par exemple pour un schéma de Crank-Nicholson et des éléments finis quadratiques en déplacements. Ces derniers sont étudiés dans le cas du contact entre solides élastiques dans [6].

### 3. Résultats numériques

L'inéquation non linéaire du problème  $PV_{hk}$  est résolue suivant les idées que l'on peut trouver dans [2] par exemple. Afin de comparer les résultats obtenus pour l'approche locale (correspondant à  $\mathbf{K}_h^I$ ) avec ceux de l'approche globale (associée à  $\mathbf{K}_h^\pi$ ), on a implanté numériquement le problème décrit dans la Figure 1, où  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  désignent respectivement le solide supérieur et inférieur.

Le problème  $P$  est résolu avec les données suivantes

$$\begin{aligned} T &= 1 \text{ sec.}, \\ \mathbf{f}^1 &= 0 \text{ N/m}^2, \quad \mathbf{f}^2 = 0 \text{ N/m}^2, \quad \mathbf{g}^2 = 0 \text{ N/m}, \\ \mathbf{g}^1(x_1, x_2, t) &= (0, -10t) \text{ N/m}, \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= 0 \text{ N/m}^2, \quad \mathbf{u}^0 = 0 \text{ m}. \end{aligned}$$

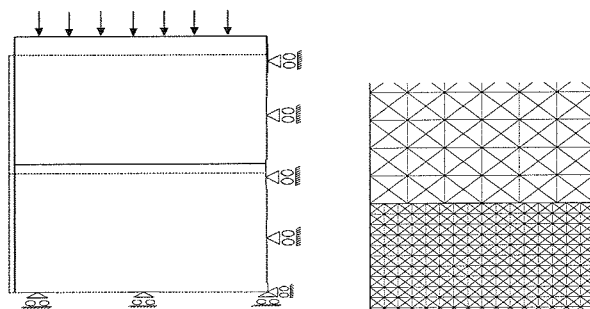


Figure 1. – Projection: Non interpénétration.

Aux tenseurs d'élasticité  $\mathcal{E}^1$  et  $\mathcal{E}^2$  sont associés les modules de Young  $E^1 = E^2 = 3 \times 10^{11} \text{ Pa}$  et les coefficients de Poisson  $\nu^1 = \nu^2 = 0.3$ . Pour modèle viscoplastique, on considère la loi de Perzyna (voir [3]):

$$G^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}^\ell) = -\frac{1}{2\lambda^\ell} \mathcal{E}^\ell \left( \boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{P}_{B^\ell}(\boldsymbol{\sigma}^\ell) \right),$$

$\lambda^\ell$  étant un coefficient de viscosité et  $\mathcal{P}_{B^\ell}$  désignant l'opérateur de projection orthogonale (pour la norme  $\|\boldsymbol{\tau}^\ell\|^2 = (\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\tau}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}(\Omega^\ell)}$ ) sur le convexe de plasticité  $B^\ell = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_2; \tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 - \tau_{11}\tau_{22} + 3\tau_{12}^2 \leq (\sigma_Y^\ell)^2\}$ . On a choisi les paramètres  $\lambda^\ell = 10$  et  $\sigma_Y^\ell = 1 \text{ N/m}^2$  ( $\ell = 1, 2$ ).

Pour les deux méthodes, le maillage éléments finis est identique et composé de 1168 triangles et 630 nœuds. Dans la Figure 1, on représente la déformée lorsque  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^\pi$ . On remarque que les contraintes de Von-Mises obtenues numériquement sont constantes (conformément à la solution exacte) dans  $\Omega^1 \cup \Omega^2$  ce qui est loin d'être le cas lorsque  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^I$  (voir Figure 2). La précision des deux méthodes est aussi évaluée par la mesure de l'interpénétration commise par la solution discrète au temps  $T$  (notée ici  $\mathbf{u}_h = (\mathbf{u}_h^1, \mathbf{u}_h^2)$ ), c'est à dire:

$$\int_{\Gamma_C} (\mathbf{u}_h^1 \cdot \mathbf{n}^1 + \mathbf{u}_h^2 \cdot \mathbf{n}^2)_+ d\Gamma,$$

où  $(\cdot)_+$  désigne la partie positive. On notera que l'interpénétration est quasi-indétectable lorsque  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^\pi$  (Figure 1) et qu'elle est importante lorsque  $\mathbf{K}_h = \mathbf{K}_h^I$ , ce qui donne lieu à des contraintes artificielles dans l'interface (Figure 2).

Cet exemple numérique peut justifier l'utilisation de l'opérateur de projection au lieu de l'opérateur d'interpolation pour approcher les conditions de non-interpénétration.

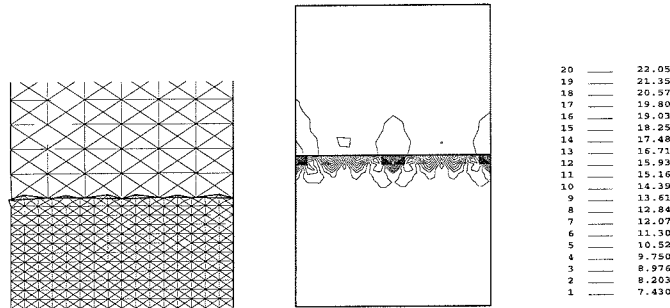


Figure 2. – Interpolation: Interpénétration et contraintes à l'interface.

Ce travail fait partie du projet "Métodos asintóticos y numéricos en diversos problemas en elasto-viscoplasticidad (DGESIC-Spain, Ref: PB98-0637)".

### Références bibliographiques

- [1] Ben Belgacem F., Hild P. and Laborde P., Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact, *Math. Mod. and Meth. in the Appl. Sci.*, 9 (1999) 287–303.
- [2] Burguera, M. and Viaño, J.M., Numerical solving of frictionless contact problems in perfect plastic bodies, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 120 (1995) 303–322.
- [3] Cristescu, N. and Suliciu, I., *Viscoplasticity*, Martius Nijhoff, Editura Tehnica, Bucharest, 1982.
- [4] Han W. and Sofonea M., Numerical analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic materials, *Rapport Interne LTS*, 16 (1998), Université de Perpignan.
- [5] Hild P., Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184 (2000) 99-123.
- [6] Hild P. and Laborde P., Quadratic finite element methods for unilateral contact problems. Internal report LAMA, 00-07c (2000).
- [7] Rochdi M. and Sofonea M., On frictionless contact between two elastic-viscoplastic bodies, *Quarterly J. Mech. Appl. Math.*, 50 (1997) 481–496.