C. R. Acad. Sci. Paris (to appear)
Analyse Numérique/*Numerical Analysis*

Approximations par éléments finis non conformes pour les fluides de Bingham

PATRICK HILD

Résumé. Dans cette note, on considère le problème de l'écoulement d'un fluide visqueux plastique dans une conduite cylindrique. Nous appliquons à ce problème régi par une inéquation variationnelle, la méthode non conforme de décomposition de domaines des éléments finis avec joints. Nous établissons la convergence de la méthode et obtenons une vitesse de convergence identique à celle existant dans le cas conforme.

Nonconforming finite element approximations for Bingham fluids.

Abstract. In this note, we consider the problem of the flow of a viscous plastic fluid in a cylindrical pipe. We apply the nonconforming mortar finite element domain decomposition method to this problem governed by a variational inequality. We prove the convergence of the method and we obtain the same convergence rate as for the existing conforming case.

1. Introduction

La méthode non conforme de décomposition de domaines des éléments finis avec joints [1] permet de coupler efficacement différentes discrétisations faisant intervenir des maillages incompatibles aux interfaces des sous-domaines. Dans la présente note, on étend le champ d'application de cette méthode à une inéquation variationnelle régissant l'écoulement d'un fluide plastique dans une conduite cylindrique. Pour étudier la convergence de la méthode, on introduit une version adaptée du lemme de Falk [5] dont la caractéristique principale est de mesurer un terme essentiel de l'erreur de consistance (due à la non-conformité) en norme $W^{1,1}$ et ainsi de pouvoir obtenir un taux de convergence de l'ordre de $h^{1/2}$ comme dans le cas conforme [6].

2. Le fluide de Bingham: position du problème

On considère un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$ régulière et l'on pose $V = H_0^1(\Omega)$. Soient μ et g deux constantes strictement positives et soit $f \in L^2(\Omega)$. La formulation variationnelle du problème du fluide de Bingham est: *trouver u tel que*

$$u \in V, \qquad \mu \int_\Omega \nabla u.(\nabla v - \nabla u)\, d\Omega + g \int_\Omega (|\nabla v| - |\nabla u|)\, d\Omega \geq \int_\Omega f(v-u)\, d\Omega, \qquad \forall v \in V. \quad (2.1)$$

Le problème (2.1) admet une solution unique (*voir* [6]). On dispose du résultat de régularité suivant (*voir* [2]): $u \in H^2(\Omega) \cap V$. Si de plus Ω est convexe, on a $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq (C/\mu)\|f\|_{L^2(\Omega)}$, où C ne dépend que de Ω.

Dans le cas particulier où f est constante sur Ω, le problème (2.1) modélise l'écoulement laminaire stationnaire d'un fluide de viscosité μ et de seuil de plasticité g dans une conduite cylindrique de section Ω, $u(x)$ désignant la vitesse du fluide au point $x \in \Omega$ et f représentant la chute linéaire de pression dans le cylindre (*voir* [4]).

3. Discrétisation par la méthode des éléments finis avec joints

Le domaine Ω supposé rectangulaire est divisé en deux domaines rectangulaires Ω^1 et Ω^2 pour simplifier. Dans ce cas, $\overline{\Omega^1} \cap \overline{\Omega^2} = \gamma$ où γ est un segment. On définit ensuite les espaces

$$X(\Omega^\ell) = \Big\{ v^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad v^\ell|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega^\ell} = 0 \Big\}, \qquad \ell = 1, 2$$

et

$$X = \Big\{ v \in L^2(\Omega), \quad \forall \ell, \quad v^\ell = v|_{\Omega^\ell} \in X(\Omega^\ell) \Big\}.$$

La norme sur X est notée $\|.\|$ et définie par $\|v\| = \Big(\|v^1\|^2_{H^1(\Omega^1)} + \|v^2\|^2_{H^1(\Omega^2)} \Big)^{\frac{1}{2}}$. On pose alors

$$a(u,v) = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} \nabla u^\ell . \nabla v^\ell \, d\Omega^\ell, \qquad j(v) = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} |\nabla v^\ell| \, d\Omega^\ell,$$

$$L(v) = \sum_{\ell=1}^{2} \int_{\Omega^\ell} f^\ell v^\ell \, d\Omega^\ell, \qquad \forall u, v \in X.$$

On introduit pour chaque sous-domaine Ω^ℓ une famille régulière de discrétisations $\mathscr{T}_h^\ell$ (*voir* [3]) composées de triangles κ de diamètre h_κ et on pose $h = \max_{\kappa \in \cup_{\ell=1}^2 \mathscr{T}_h^\ell} h_\kappa$. Comme $\mathscr{T}_h^1$ et $\mathscr{T}_h^2$ sont générées de manière indépendante, il s'ensuit que les mailles provenant des deux sous-domaines ne coïncident pas sur l'interface γ d'extrémités a_1 et a_2. On notera $\mathbb{P}_q(\kappa)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à q sur κ . On pose

$$V_h(\Omega^\ell) = \big\{ v_h^\ell \in \mathscr{C}(\overline{\Omega}^\ell), \quad \forall \kappa \in \mathscr{T}_h^\ell, \quad v_h^\ell|_\kappa \in \mathbb{P}_1(\kappa), \quad v_h^\ell|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega^\ell} = 0 \ \big\}.$$

On définit les espaces $W_h^\ell(\gamma) = \big\{ v_h^\ell|_\gamma, \ v_h^\ell \in V_h(\Omega^\ell) \big\}$ constitués des fonctions continues sur γ, affines par morceaux sur la trace $\mathcal{T}_h^\ell$ de la triangulation $\mathscr{T}_h^\ell$ sur γ et nulles en a_1 et a_2. On introduit également l'espace des multiplicateurs de Lagrange

$$M_h^\ell(\gamma) = \big\{ q_h^\ell \in W_h^\ell(\gamma), \quad q_h^\ell|_T \in \mathbb{P}_0(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h^\ell \text{ t.q. } a_1 \text{ ou } a_2 \in T \big\}.$$

L'espace d'approximation considéré est (*voir* [1]) :

$$V_h = \big\{ v_h = (v_h^1, v_h^2) \in V_h(\Omega^1) \times V_h(\Omega^2), \qquad \int_\gamma (v_h^1 - v_h^2) q_h \, d\gamma = 0, \quad \forall q_h \in M_h(\gamma) \big\},$$

où $M_h(\gamma) = M_h^1(\gamma)$ ou bien $M_h(\gamma) = M_h^2(\gamma)$. Dans le cas général de maillages incompatibles sur γ, l'approximation est non conforme (i.e. $V_h \not\subset V$) et dans le cas de maillages compatibles sur γ on a $V_h \subset V$ (*voir* [6]). Le problème discret issu de (2.1) devient : *trouver* u_h *tel que*

$$u_h \in V_h, \qquad \mu a(u_h, v_h - u_h) + g j(v_h) - g j(u_h) \geq L(v_h - u_h), \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{3.1}$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) découlent de la continuité et de la V_h-ellipticité de $a(.,.)$ (*voir* [1]) ainsi que de la convexité et de la continuité de $j(.)$ sur V_h.

4. Estimation d'erreur

Il s'agit de donner une majoration de l'erreur $u - u_h$ pour la norme $\|.\|$. On commence par adapter le résultat de Falk [5] à notre cas.

LEMME 1 – *Soient $u \in V$ la solution du problème (2.1) et $u_h \in V_h$ la solution du problème discrétisé (3.1). Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\|u-u_h\|^2 \leq C\Big\{\inf_{v_h\in V_h}\Big(\|u-v_h\|^2+\|u-v_h\|\Big)+\inf_{v\in V}\Big(\sum_{\ell=1}^{2}\|v^\ell-u_h^\ell\|_{W^{1,1}(\Omega^\ell)}\Big)+\Big|\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n^1}(u_h^1-u_h^2)d\gamma\Big|\Big\}.$$

Preuve. L'utilisation du lemme de Falk (*voir* [3, 5, 6]) nous conduit après quelques opérations "usuelles" à la majoration suivante:

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|^2 \leq\ & C\Big\{\Big(\|u-v_h\|^2+|j(v_h)-j(u)|+\|u-v_h\|\Big)+\Big(|j(v)-j(u_h)| \\ & +(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)})\sum_{\ell=1}^{2}\|v^\ell-u_h^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}+\Big|\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n^1}(u_h^1-u_h^2)d\gamma\Big|\Big)\Big\},\end{aligned}$$

pour tous $v \in V$ et $v_h \in V_h$ ($\partial u/\partial n^1$ désignant la dérivée normale extérieure à Ω^1 de u). Le terme nonlinéaire $|j(v) - j(u_h)|$ est majoré comme suit:

$$|j(v)-j(u_h)| = \Big|\sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^\ell}|\nabla v^\ell|-|\nabla u_h^\ell|d\Omega^\ell\Big| \leq \sum_{\ell=1}^{2}\int_{\Omega^\ell}|\nabla(v^\ell-u_h^\ell)|d\Omega^\ell \leq \sum_{\ell=1}^{2}\|v^\ell-u_h^\ell\|_{W^{1,1}(\Omega^\ell)}.$$

La norme $\|v^\ell - u_h^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}$ est majorée en utilisant l'injection continue $W^{1,1}(\Omega^\ell) \hookrightarrow L^2(\Omega^\ell)$. □

Dans le Lemme 1, la nonconformité de la méthode fait apparaître deux termes supplémentaires en comparaison avec le cas conforme étudié dans [6]: le second infimum (sur V) ainsi que le terme intégral. L'estimation du premier infimum (i.e. l'erreur d'approximation) est un résultat standard de la méthode de joints établi dans [1] que nous rappelons dans le lemme suivant.

LEMME 2 – *Il existe $v_h \in V_h$ vérifiant*

$$\|u - v_h\| \leq Ch,$$

où C est indépendante de h et de u.

Le terme intégral du Lemme 1 pouvant être majoré par Ch (en utilisant la bornitude uniforme en h de $\|u_h\|$), l'estimation de l'erreur de consistance repose alors sur le lemme suivant.

LEMME 3 – *Il existe $v \in V$ vérifiant*

$$\sum_{\ell=1}^{2}\|v^\ell-u_h^\ell\|_{W^{1,1}(\Omega^\ell)} \leq C(h^{1/2}\|u-u_h\|+h^{3/2}),$$

où C est indépendante de h et de u.

Preuve. On choisit $v^2 = u_h^2$ sur Ω^2. Sur Ω^1, on définit $\varphi^1 = u_h^1 + R(u_h^2 - u_h^1)$ où R désigne un relèvement continu de $L^1(\gamma)$ dans $W^{1,1}(\Omega^1)$ satisfaisant $R(u_h^2 - u_h^1) = 0$ sur $\partial\Omega \cap \partial\Omega^1$. D'où

$$\|\varphi^1-u_h^1\|_{W^{1,1}(\Omega^1)} \leq C\|u_h^2-u_h^1\|_{L^1(\gamma)} \leq C'(h^{1/2}\|u-u_h\|+h^{3/2}).$$

On démontre ensuite que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v^1 \in X(\Omega^1)$ vérifiant $v^1 = u_h^2$ sur γ et tel que

$$\|v^1 - \varphi^1\|_{W^{1,1}(\Omega^1)} \leq \varepsilon.$$

Le v choisi satisfait alors l'estimation du lemme. □

En regroupant les estimations obtenues précédemment, on obtient le résultat final suivant.
THEOREME 4 – *Soient u la solution de (2.1) et u_h la solution de (3.1). On a*

$$\|u - u_h\| \leq Ch^{1/2},$$

où C est indépendante de h et de u.

Cette borne de l'erreur est similaire à celle obtenue dans le cas conforme [6].

Références bibliographiques

1. **Bernardi C., Maday Y. et Patera A. T., 1994.** A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method, Collège de France seminar, eds. H. Brezis, J.-L. Lions, Pitman, p. 13-51.
2. **Brezis H., 1971.** Monotonicity in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, in *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, E. Zarantonello ed., Acad. Press, New York, p. 101-156.
3. **Ciarlet P.-G.., 1991.** *Basic error estimates for elliptic problems*, in Handbook of Numerical Analysis, Volume II, Part 1, Eds. P.-G. Ciarlet and J.-L. Lions, North Holland, 17–352.
4. **Duvaut G., Lions J.-L, 1972.** *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod.
5. **Falk R. S., 1974.** Error estimates for the approximation of a class of variational inequalities, *Math. of Comp.* Vol. 28, p. 963–971.
6. **Glowinski R., 1980.** *Lectures on numerical methods for non–linear variational problems*, Springer.

Laboratoire de Mathématiques, EP CNRS 2067
Université de Savoie, 73376 LE BOURGET DU LAC, France.