

Compte rendu de stage de Master 2

Paul FRAUX

27 avril-30 juin 2019

Table des matières

1	Solution de Schwarzschild	5
1.1	Symbole de Christoffel	5
1.2	Coordonnées de Eddington-Finkelstein	6
1.3	Prolongement analytique maximal	8
2	Sphère des photons	9
2.1	Quelques autres solutions exactes	9
2.2	La sphère des photons : cas d'une solution à symétrie sphérique statique	10
2.3	Cercle de photons dans la géométrie de Kerr	12
3	Compactification conforme	14
3.1	Définition de la compactification conforme	14
3.2	Construction dans Minkowski	14
3.3	Construction dans Schwarzschild	16
3.4	Interlude d'analyse fonctionnelle	17
3.5	Une application de la compactification : décroissance à l'infini	19
4	Conclusion et vision d'ensemble	21
A	Un critère d'auto-adjonction	22

Introduction

Le 10 avril 2019, le monde entier a pu découvrir la première image d'un trou noir. Cet objet astronomique a, depuis sa découverte théorique, enflammé l'imagination, dans les oeuvres de fiction mais aussi des chercheurs. Si il s'agit des premières solutions exactes non triviales de la théorie de la relativité générale, la géométrie de ces objets est souvent mal connue, et encore aujourd'hui des résultats importants sont publiés.

La théorie de la relativité générale décrit l'univers comme une variété Lorentzienne de dimension 4 appelé espace-temps, où la gravité est la manifestation de la courbure de cet espace temps. Les 4 dimensions correspondent au temps et à l'espace, deux concepts qui s'intriquent, s'emmêlent en un seul plus global.

L'équation tensorielle :

La théorie prédit une influence de l'énergie et de l'impulsion sur la courbure d'une métrique Lorentzienne via l'équation (ici sous forme tensorielle) suivante :

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

La donnée est ici le tenseur énergie-impulsion T_{ab} de la matière, énergie et impulsion présentes dans l'univers. L'inconnue est une métrique Lorentzienne g_{ab} , un tenseur $(0,2)^1$ symétrique non dégénéré de signature $(+, -, -, -)$. Le tenseur d'Einstein G_{ab} est défini à partir de la courbure de Ricci R_{ab} et la courbure scalaire R de la métrique g_{ab} par

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{R}{2} g_{ab}$$

La courbure scalaire est la trace de la courbure de Ricci, elle même la trace de la courbure de Riemann R^a_{bcd} ² :

$$R = R^a_a \quad R_{ab} = R^c_{acb}$$

Enfin, la courbure de Riemann se calcule à partir des symboles de Christoffel de la métrique³ :

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (g_{bd,a} + g_{ad,b} - g_{ab,d})$$

et

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{db} - \partial_d \Gamma^a_{cb} + \Gamma^a_{ce} \Gamma^e_{db} - \Gamma^a_{de} \Gamma^e_{cb}.$$

Enfin apparaissent dans l'équation 3 constantes fondamentales : la constante cosmologique Λ , la constante universelle de la gravitation G et la vitesse de la lumière c . Dans la suite, on fixe les unités de temps et de masse⁴ de manière à avoir $c = 1$ et $G = 1$

1. ici il s'agit d'une forme bilinéaire, voir la définition d'un tenseur pour le cadre général

2. Nous utilisons ici (et par la suite) la convention d'Einstein, aussi appelé convention d'indice répété : si un indice formel est répété en indice et en exposant, alors on somme les termes correspondants sur les indices existants

3. Ici nous utilisons la notation que les indices après la virgule correspondent à une dérivation : $g_{ab,c} = \partial_c(g_{ab})$

4. par rapport à l'unité de distance

Premières solutions et trou noir :

Les termes de courbure dans le tenseur d'Einstein contiennent des produits de dérivées premières et secondes de la métrique, ce qui nous donne un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire, difficile à résoudre en général. Néanmoins, il existe un certain nombre de solutions exacte à l'équation d'Einstein.

La première solution est la solution dans le vide (on suppose donc que $T_{ab} = 0$), avec constante cosmologique Λ nulle triviale. On prend la métrique lorentzienne la plus simple sur \mathbb{R}^4 et on obtient alors l'espace de Minkowski :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

La première solution non triviale dans le vide avec constante cosmologique nulle fut trouvé par Schwarzschild. Il s'agit d'une solution à symétrie sphérique valide sur $\mathbb{R} \times]2M, +\infty[\times S^2$ (et sur $\mathbb{R} \times]0, 2M[\times S^2$) :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 - r^2 dw^2,$$

où dw^2 est la métrique classique sur la sphère⁵.

On peut d'abord y voir la solution de l'équation d'Einstein pour un astre massif de rayon R_p supérieur à $2M$ placé en 0 : La solution est alors valide pour $r > R_p$. Mais rien dans l'équation n'empêche d'avoir un astre tel que $R_p < 2M$. Que se passe-t-il alors ?

A première vue, il semblerait qu'il y ait un problème, une singularité en $r = 2M$, comme la métrique explose. Mais comme nous le verrons plus tard, il s'agit d'une fausse singularité, due au choix des coordonnées : les géodésiques arrivent en temps propre fini en la singularité, et on peut trouver un autre système de coordonnées qui permet d'étendre sur $r \in]0, +\infty[$ en prolongeant certaines géodésiques.

Cette solution admet une particularité, un horizon des événements que la lumière ne peut traverser que dans un sens. Nous avons là un trou noir (ou un trou blanc suivant le choix de l'extension). Mais là encore, certaines géodésiques atteignent le bord de l'ouvert de définition en un temps fini. Un nouveau changement de coordonnées (le prolongement analytique maximal), qui englobe ces deux choix permet d'avoir un système complet.

Sphere des photons :

Nous verrons ensuite quelques solutions plus générales, avant de nous intéresser à une de leur structure particulière : les cercles de photons. Il s'agit d'une 1-sphere spatiale (voir une 2-sphère) correspondant via la courbure de l'espace temps a une trajectoire circulaire de la lumière. Physiquement, cela signifie qu'un observateur placé sur cette sphère verrait l'arrière de sa tête en regardant droit devant lui. Une caractéristique étonnante de cette sphère est (dans le cas d'une solution à symétrie sphérique du moins) son invariance vis à vis de la constante cosmologique. Même s'il peut sembler hasardeux de comparer deux solutions des équations d'Einstein puisqu'il s'agit de deux univers différents, on a dans notre cas des coordonnées similaires (ou dit autrement, la même variété différentielle sous-jacente à la variété Lorentzienne) qui permettent une comparaison.

Nous regarderons aussi rapidement ce que devient cette sphère de photons dans le cas d'un trou noir en rotation (trou noir de Kerr).

5. $dw^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2$ en coordonnées sphériques

Compactification conforme et infini :

Enfin, nous verrons une méthode pour construire l'infini et le ramener à distance fini à des fins d'analyses. Nous verrons une construction complète dans l'espace de Minkowski, mais aussi une méthode pour dépasser certaines obstructions dans l'espace de Schwarzschild. L'idée est de regarder comment se comporte une fonction d'onde à l'infini : est ce qu'elle décroît rapidement ou pas, est ce que de l'énergie reste dans l'espace fini, comment bien calculer des caractéristiques de notre fonction d'ondes. Ce sont autant de questions intéressantes que l'on peut essayer de résoudre via la compactification conforme.

Afin de résoudre certaines de ces questions qui forment un premier pas vers la quantification de la structure que nous regardons, nous aurons besoin d'un critère d'auto-adjonction et d'un théorème spectral. Avec ces outils d'analyse, nous pourrons finalement utiliser la compactification conforme pour démontrer une décroissance des solutions de l'équation d'onde.

1 Solution de Schwarzschild

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la solution de Schwarzschild aux équations d'Einstein dans le vide :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 d\omega^2$$

Nous calculerons les symboles de Christoffel de cette métrique dans ce système de coordonnées, nous verrons ensuite comment dépasser la singularité apparente en $r = 2m$ avec un nouveau système de coordonnées, avant de nous intéresser à certaines trajectoires géodésiques particulières de cet espace temps.

L'importance de cette métrique est soulignée par le théorème suivant (on peut trouver une ébauche de preuve dans [1]) :

Théorème 1.1. *Birkhoff 1923*

Soit une variété Lorentzienne à symétrie sphérique dont la métrique est solution des équations d'Einstein dans le vide, alors elle est localement isométrique à un ouvert de la solution de Schwarzschild.

1.1 Symbole de Christoffel

Proposition 1.1.1. *Dans les coordonnées (t, r, θ, ϕ) , en rappelant que $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, les symboles de christoffels non nuls sont :*

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{rr} &= \frac{-m}{r(r-2m)} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -(r-2m) & \Gamma^r_{tt} &= \frac{m(r-2m)}{r^3} & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -(r-2m)\sin^2(\theta) \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \cotan(\theta) \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \Gamma^t_{tr} &= \frac{m}{r(r-2m)} \end{aligned}$$

Démonstration. On calcule directement, la métrique est diagonale dans ces coordonnées, donc le calcul de l'inverse est immédiat :

$$g_{tt} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad g_{rr} = \frac{-r}{r-2m} \quad g_{\theta\theta} = -r^2 \quad g_{\phi\phi} = -r^2 \sin(\theta),$$

et on utilise ensuite la formule $\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}(g_{bd,a} + g_{ad,b} - g_{ab,d})$.

Faisons par exemple le calcul de Γ^r_{rr} , les autres s'obtenant de la même manière. Comme g^{-1} est diagonal, on a :

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}) = -\frac{r-2m}{2r} \left(\frac{2m}{(r-2m)^2} \right) = \frac{-m}{r-2m}$$

□

Remarque : Ce calcul des symboles de Christoffel nous sera utile pour les équations des géodésiques, mais il permettrait de vérifier que la métrique est bien solution des équations d'Einstein (qui dans le vide prennent la forme $R_{ab} = 0$ ⁶).

6. On trouve que $R=0$ en prenant la trace du tenseur d'Einstein

1.2 Coordonnées de Eddington-Finkelstein

La solution de Schwarzschild semble présenter une singularité en $r = 2m$, avec

$$\lim_{r \rightarrow 2m^+} g_{rr} = \infty \quad \lim_{r \rightarrow 2m^+} g_{tt} = 0.$$

Mais comme nous allons le voir ici, la singularité n'est qu'apparente, au même titre que sur la sphère, la métrique $dw^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2$ semble avoir un problème pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, mais celui-ci n'est dû qu'à un choix de coordonnées inadaptes au point où l'on fait l'analyse. Pour plus de détails sur ce qui va suivre, voir [1] ou [9].

La première étape consiste en un changement de variables pour enlever la singularité $\lim_{r \rightarrow 2m^+} g_{rr} = \infty$. On définit $\tilde{V} = t + r^* = t + r + 2m \ln(\frac{r}{2m} - 1)$ de manière à avoir $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} = \frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}$.

Remarque : on notera que les lignes $\tilde{V} = \text{Constante}$ correspondent aux géodésiques isotropes radiales entrantes.

Proposition 1.1.2. *En coordonnées \tilde{V}, r (dite coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrante), la métrique de Schwarzschild s'écrit :*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\tilde{V}^2 - 2d\tilde{V}dr - r^2 dw^2$$

Démonstration. Par définition de \tilde{V} , on a que :

$$d\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} dr = dt + \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr,$$

ou encore

$$dt = d\tilde{V} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr.$$

On a alors

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 dw^2 \quad (1.1)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(d\tilde{V} - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr^2 - r^2 dw^2 \quad (1.2)$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\tilde{V}^2 - 2d\tilde{V}dr + 0 - r^2 dw^2 \quad (1.3)$$

□

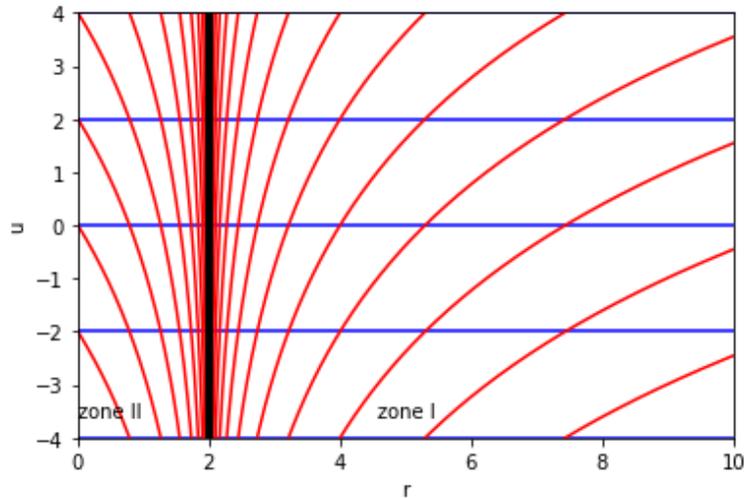
Comme on le voit dans la figure 1, on a construit un prolongement analytique de la métrique tel que les géodésiques entrantes soient complètes. Mais il y a aussi une autre manière de procéder pour que ce soient les géodésiques sortantes qui soient complètes, voir la figure 2.

Remarque : Comme on le voit sur le passage de la ligne (1.2) à (1.3) de la démonstration, c'est le carré de $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial r}$ qui intervient pour annuler le terme qui explose dans les coordonnées de Schwarzschild. On aurait donc aussi pu prendre

$$\tilde{U} = t - r^* = t - r - 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right),$$

et cette fois les lignes $\tilde{U} = \text{Constante}$ correspondraient aux géodésiques radiales sortantes.

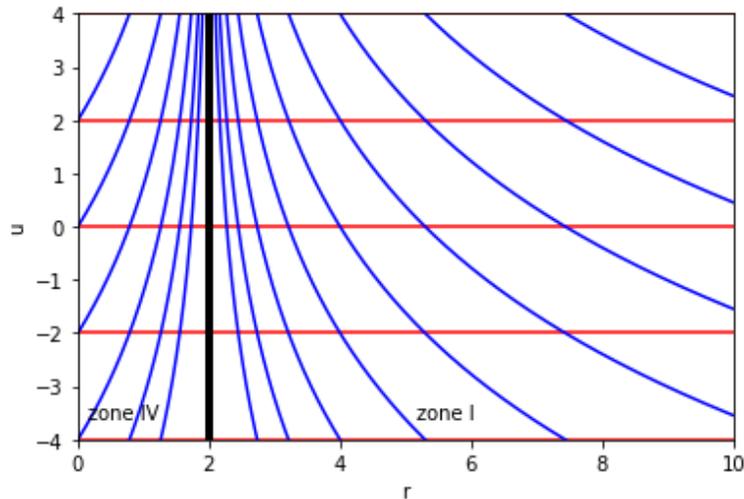
FIGURE 1 – Géodésiques isotrope entrantes (bleu) et sortantes (rouge) dans les coordonnées de Eddington-Finkelstein entrantes. Les axes sont en unité de m . L'horizon $r = 2m$ est repassé en noir



Corollaire 1.1.1. *En coordonnées \tilde{U}, r (dite coordonnées d'Eddington-Finkelstein sortante), la métrique de Schwarzschild s'écrit :*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\tilde{U}^2 + 2d\tilde{U}dr - r^2 dw^2$$

FIGURE 2 – Géodésiques isotrope entrantes (bleu) et sortantes (rouge) dans les coordonnées de Eddington-Finkelstein sortantes. Les axes sont en unité de m . L'horizon $r = 2m$ est repassé en noir



Cette fois, comme on le voit dans la figure 2, on a rendu les géodésiques sortantes complètes, alors que les géodésiques entrantes vont à l'infini en paramètre affine fini.

1.3 Prolongement analytique maximal : coordonnées de Kruskal-Szekeres :

Afin de trouver des coordonnées non singulière on commence à se placer en coordonnées \tilde{V}, \tilde{U} , r étant vu comme une fonction de ces coordonnées. Dans ces coordonnées, la métrique s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d\tilde{V} d\tilde{U} - r^2 dw^2.$$

En effet, $\tilde{V} + \tilde{U} = 2t$ et $\tilde{V} - \tilde{U} = 2r^*$,

D'où $d\tilde{V} + d\tilde{U} = 2dt$ et $d\tilde{V} - d\tilde{U} = 2d(r^*) = \frac{2}{1-\frac{2m}{r}} dr$, ce qui permet de conclure à partir de l'expression de la métrique dans les coordonnées de Schwarzschild.

Reste à trouver une transformation de \tilde{V} et \tilde{U} via un changement d'échelle pour voir que la singularité apparente n'existe pas⁷. Après quelques essais, on trouve le bon changement d'échelle, un changement exponentiel. En effet, si on pose $v = \exp(\frac{\tilde{V}}{4m})$ et $u = \exp(\frac{-\tilde{U}}{4m})$, on trouve

$$ds^2 = \frac{-4(2m)^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2m}\right) dv du - r^2 dw^2$$

Enfin, une dernière manupulation $T = \frac{v+u}{2}$ et $X = \frac{u-v}{2}$ permet d'obtenir des vecteurs de types temps et espace. On a alors

$$ds^2 = \frac{4(2m)^3}{r} \exp\left(\frac{-r}{2m}\right) (dT^2 - dX^2) - r^2 dw^2$$

où r est défini par l'équation implicite $X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2m} - 1\right) e^{\frac{r}{2m}}$.

Le calcul que nous venons de faire n'est à priori valable que pour $r > 2m$, mais on peut faire des calculs similaires pour $r < 2m$ et en fixant le signe de T trouver la même métrique. On peut aussi faire le raisonnement à l'envers et partir de X et T et trouver une transformation permettant de retrouver la métrique de Schwarzschild en coordonnées t, r .

Dans ce graphique 3, la zone I correspond à l'ancien ouvert $r > 2m$ d'où nous sommes partis. Les zones II et IV correspondent à deux manières de recoller analytiquement l'ouvert $r < 2m$ à cette zone vu précédemment avec les coordonnées d'Eddington-Finkelstein. Et on voit apparaître la zone III, isométrique à la zone I avec une orientation temporelle renversée, qui permet de rendre les dernières géodésiques complètes.

Dans cette figure, les courbes $t = cste$ sont les droites passant par l'origine, et les courbes de niveau de r sont les courbes $X^2 - T^2 = cste$.

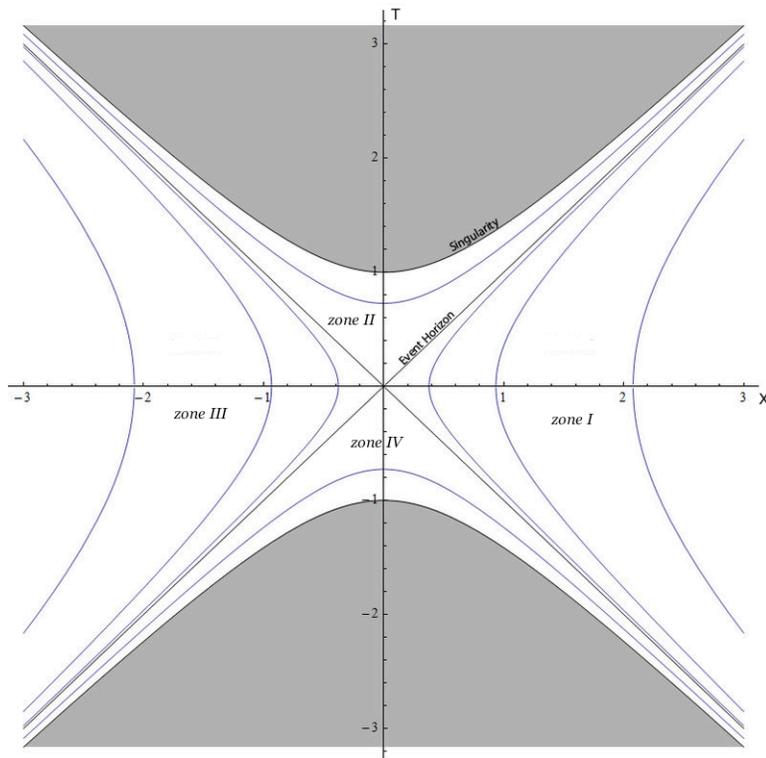
Exercice :

1. Les vecteurs de type lumière et temps sont dans le cône autour de l'axe T d'ouverture de 45° au dessus de chaque points.
2. A partir de là, montrer qu'une particule en zone IV finit toujours par en sortir et qu'une particule en zone II finit toujours par toucher la singularité.

⁷. On aurait déjà pu montrer que cette singularité n'existe pas dans les coordonnées d'Eddington-Finkelstein, les coordonnées de Kruskal-Szekeres apportant la maximalisé de l'extension et rajoutant la sphère de croisement ($T=0, X=0$)

Traçons quelques lieux importants dans les coordonnées T, X :

FIGURE 3 – Coordonnées de Kruskal-Szekeres, avec en bleu quelques courbes de niveau de r . Chaque point de la figure est une deux-sphère de courbure r .



2 Sphère des photons

2.1 Quelques autres solutions exactes

Nous avons étudié la solution de Schwarzschild, et nous allons ici voir d'autres solutions exactes. Les solutions sphériques ne sont pas en contradiction avec le théorème de Birkhoff (cf 1.1) puisqu'il ne s'agit pas de solutions dans le vide ou avec constante cosmologique non nulle.

Solution de Reissner-Nordström

Il s'agit d'une solution à symétrie sphérique statique en présence d'un champ électrique $\vec{E} = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r$ et du tenseur énergie impulsion associé. Elle s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} dr^2 - r^2 d\omega^2.$$

La charge Q qui apparaît est alors celle qu'un observateur pourrait mesurer à l'infini via des intégrales de flux ou la mesure de la force de Coulomb sur des orbites de particules sur lesquelles celle-ci domine. On notera qu'on obtient la solution de Schwarzschild pour $Q=0$.

Solution de De Sitter-Schwarzschild

Il s'agit cette fois d'une solution à symétrie sphérique statique à l'équation d'Einstein dans le vide avec constante cosmologique positive : $G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$ ($\Lambda > 0$). La solution s'écrit alors

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \Lambda r^2\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} - \Lambda r^2} dr^2 - r^2 dw^2.$$

On a de même avec $\Lambda < 0$ l'espace Anti-De Sitter-Schwarzschild. Ces noms sont dûs au fait que ces espaces sont asymptotiquement (anti-)De Sitter, espace modèle remplaçant l'espace de Minkowski, au même titre que la sphère et le disque de Poincaré pour l'espace Euclidien.

Solution de De Sitter-Reissner-Nordström

Il s'agit de la solution à symétrie sphérique statique la plus générale, avec constante cosmologique et charge électrique :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^2\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^2} dr^2 - r^2 dw^2.$$

Solution de Kerr

Il s'agit d'une solution dans le vide à symétrie axiale, qui pourrait correspondre à une masse ponctuelle ayant un moment orbital, ce qui se traduit par une mise en rotation des particules en chute libre. Elle s'écrit en coordonnées (t, r, θ, ϕ) :

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}\right) dt^2 - \frac{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}{r^2 - 2mr + a^2} dr^2 - (r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) d\theta^2 \\ & - \left(r^2 + a^2 + \frac{2rma^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}\right) \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ & + \frac{2rma \sin^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} dt d\phi. \end{aligned}$$

Physiquement, a correspond au rapport du moment cinétique et de la masse. Il n'est donc pas totalement étonnant de retrouver la solution de Schwarzschild si on impose $a=0$.

On peut condenser un peu l'expression en introduisant $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$ et $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$. On trouve alors :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2rma^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}\right) \sin^2(\theta) d\phi^2 + \frac{2rma \sin^2(\theta)}{\rho^2} dt d\phi.$$

Cette solution présente deux horizons dans le cas d'un trou noir de Kerr dit lent ($-m < a < m$), correspondant aux zéros de Δ , notés r_- et r_+ .

2.2 La sphère des photons : cas d'une solution à symétrie sphérique statique

Une propriété géométrique intéressante des trous noirs à symétrie sphérique est l'existence d'une sphère des photons, c'est à dire une sphère spatiale sur laquelle évolue des géodésiques de type lumière circulaires.

On étudie une solution de la forme

$$ds^2 = f(r) dt^2 - \frac{1}{f(r)} dr^2 - r^2 dw^2.$$

Remarque : Pour Schwarzschild, on prend $f(r) = 1 - \frac{2m}{r}$; pour Reissner-Nordstrom $f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$; pour Schwarzschild-De Sitter $f(r) = 1 - \frac{2m}{r} - \Lambda r^2$ et enfin pour De Sitter-Reissner-Nordström on prend $f(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \Lambda r^2$

En calculant, on trouve les symboles de Christoffel (on peut vérifier qu'il correspondent bien à la proposition 1.1.1 page 5)

Proposition 2.0.1. Dans les coordonnées (t, r, θ, ϕ) , en rappelant que $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{rr} &= \frac{-f'}{2f} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -rf & \Gamma^r_{tt} &= \frac{ff'}{2} & \Gamma^r_{\phi\phi} &= -rf \sin^2(\theta) \\ \Gamma^\phi_{\phi r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{\phi\theta} &= \cotan(\theta) \\ \Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin(\theta) \cos(\theta) \\ \Gamma^t_{tr} &= \frac{-f'}{2f}\end{aligned}$$

On a alors la propriété suivante :

Proposition 2.0.2. Une géodésique circulaire de type lumière $X = \begin{pmatrix} t(s) \\ r_0 \\ \theta_0 \\ \phi(s) \end{pmatrix}$ vérifie

$$f(r_0) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{f'(r_0)}{2} = \frac{f(r_0)}{r_0} \text{ et } \cotan(\theta_0) = 0 \right)$$

Pour De Sitter-Reissner-Nordström, si on a une solution issue du deuxième cas alors

$$m > \frac{3}{2\sqrt{2}}Q \quad r_0 = \frac{3m \pm \sqrt{9m^2 - 8Q^2}}{2} \quad \text{et} \quad mr_0^5 - Q^2 r_0 \geq \Lambda$$

Remarque : Assez miraculeusement, le rayon que l'on trouve ne dépend pas de Λ la constante cosmologique autrement que dans une condition d'existence.

Démonstration. On cherche donc une condition nécessaire pour avoir une géodésique de type lumière de la forme donnée.

On écrit d'abord que X est une géodésique de type lumière, c'est à dire

$$0 = g\left(\frac{dX}{ds}, \frac{dX}{ds}\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 f(r) - \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 r^2 \sin^2(\theta).$$

On a alors que nécessairement $f(r_0) \geq 0$ et quitte à reparamétriser la géodésique pour avoir $\frac{dt}{ds} = 1$, que

$$\frac{d\phi}{ds} = \pm \frac{\sqrt{f(r_0)}}{r \sin(\theta)}.$$

On écrit alors l'équation des géodésiques $\nu = \frac{dX}{ds}$:

$$\begin{aligned}0 = \nabla_\nu(\nu) &= \nu^a (\partial_a \nu^c + \nu^b \Gamma_{ab}^c) \partial_c \\ &= 1(\partial_t \nu^c + \nu^b \Gamma_{tb}^c) \partial_c + \nu^\phi (\partial_\phi \nu^c + \nu^b \Gamma_{\phi b}^c) \partial_c \\ &= \Gamma_{tt}^c \partial_c + (\nu^\phi)^2 \Gamma_{\phi\phi}^c \partial_c \\ &= \Gamma_{tt}^r \partial_r + (\nu^\phi)^2 (\Gamma_{\phi\phi}^r \partial_r + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \partial_\theta) \\ &= \left(\frac{ff'}{2} - \frac{f}{r^2 \sin^2(\theta)} r f \sin^2(\theta) \right) \partial_r + \frac{f}{r^2 \sin^2(\theta)} \sin(\theta) \cos(\theta) \partial_\theta \\ &= f \left(\left(\frac{f'}{2} - \frac{f}{r} \right) \partial_r + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta \right)\end{aligned}$$

Ce qui nous donne le premier résultat.

Ensuite on écrit :

$$\frac{f(r)}{r} - \frac{f'(r)}{2} = \frac{1}{r^3}(r^2 - 3mr + 2Q^2)$$

ce qui permet de conclure, la dernière condition provenant de $f(r_0) \geq 0$.

□

Remarque : Dans le cas de Schwarzschild, on trouve un unique rayon $r_0 = 3m$

Remarque 2 : Par symétrie sphérique, on n'a pas qu'un cercle comme décrit dans la proposition, mais toute une sphère de photons. Ce n'est pas toujours le cas, comme nous allons le voir

2.3 Cercle de photons dans la géométrie de Kerr

Nous allons ici suivre la démonstration présentée dans le livre de O'Neil [2].

On rappelle que la métrique est sous la forme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2rma^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}\right)\sin^2(\theta)d\phi^2 + \frac{2rma \sin^2(\theta)}{\rho^2}dtd\phi.$$

où on a $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$ et $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$.

L'idée est de trouver des intégrales première du mouvement, qui nous permettent ensuite de décrire les géodésiques.

Proposition 2.0.3. *En plus des trois intégrales premières d'une géodésique γ évidentes que sont le type de géodésique, l'énergie et le moment orbital, il existe une quatrième constante du mouvement, découverte par Brandon Carter :*

$$q = g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \quad E = -g(\partial_t, \dot{\gamma}) \quad L = g(\partial_\phi, \dot{\gamma}) \quad K = \rho^4 \theta'^2 + (L - aE \sin^2 \theta)^2 - a^2 q \cos^2(\theta)$$

On peut alors décrire le mouvement grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.0.4. *Une géodésique dans la géométrie de Kerr vérifie :*

$$\rho^2 t' = \frac{(r^2 + a^2)P(r)^2}{\Delta} + aD(\theta) \quad (2.1)$$

$$\rho^2 \phi' = \frac{aP(r)}{\Delta} + \frac{D(\theta)}{\sin^2 \theta} \quad (2.2)$$

$$\rho^4 r'^2 = \Delta(r^2 q - K) + P(r)^2 \quad (2.3)$$

$$\rho^4 \theta'^2 = K + a^2 q \cos^2 \theta - \frac{D(\theta)^2}{\sin^2 \theta} \quad (2.4)$$

où $D(\theta) = L - aE \sin^2 \theta$ et $P(r) = (r^2 + a^2)E - aL$

Dans le cas d'un trou noir de Kerr lent ($-m < a < m$), on a alors :

Proposition 2.0.5. *A part les trajectoires de photons sur les horizons, il y a exactement 3 trajectoires de type lumière circulaires dans le plan équatorial, avec des rapports $\lambda = \frac{L}{E}$ fixées^a. Si on note les rayons et paramètres correspondant $(r_\tau, \lambda_\tau), (r_\rho, \lambda_\rho), (r_\delta, \lambda_\delta)$, on aura :*

$$0 < r_\tau < r_- < r_+ < r_\delta < 3m < r_\rho < 4m$$

et

$$\lambda_\rho < -7a < 0 < a < \lambda_\tau < 2a < \lambda_\delta$$

a. On appelle ce rapport le paramètre d'impact

Démonstration. Je vais ici suivre la preuve tel que présentée dans [2].

En notant $\Psi(r, \lambda) = r^3 + (a^2 - \lambda^2)r - 2m(\lambda - a)^2 = \frac{\rho^4 r'^2}{r}$, les solutions ont lieu pour $\Psi = 0 = \frac{\partial \Psi}{\partial r}$.

Cette dernière équation donne :

$$\lambda^2 = 3r^2 + a^2, \quad (2.5)$$

Ce qui, en substituant $r^2 = \frac{1}{3}(\lambda^2 - a^2)$ dans Ψ donne $(a^2 - \lambda^2)r - 3m(\lambda - a)^2 = 0$, soit :

$$r = \frac{3m(\lambda - a)}{\lambda + a} \quad (2.6)$$

Finalement, on trouve avec 2.5 que λ vérifie

$$27m^2 \left(\frac{(\lambda - a)^2}{(\lambda + a)^2} + a^2 - \lambda^2 \right) = 0$$

En omettant la racine évidente $\lambda = a$, on obtient :

$$(\lambda + a)^3 + 27m^2(\lambda - a) = 0 \quad (2.7)$$

Si on inverse 2.6, on trouve $\lambda = \frac{-a(r+3m)}{r-3m}$, ce qui en substituant donne

$$0 = r(r - 3m)^2 - 4ma^2 = p(r)$$

Le placement des racines de ce polynôme provient du fait que $p(0) < 0$, $p(3m) < 0$, $p(4m) = 4m^3 - 4ma^2 > 0$ et $p(r_\pm) = p(m \pm \sqrt{m^2 - a^2}) = (m^2 - a^2)r_\pm > 0$.

Ceci donne les trois racines et leur ordre, la croissance de $\lambda(r) = \frac{-a(r+3m)}{r-3m}$ sur $\{r < 3m\}$ et $\{r > 3m\}$ donne les inégalités sur le paramètre d'impact. \square

Remarque : Contrairement à Schwarzschild où il n'y a qu'un rayon $r = 3m$ pour la rotation quelque soit le signe du paramètre d'impact ($\lambda = \pm 3\sqrt{3}m$), ici on a des rayons différents selon le sens dans lequel on tourne. On a également ajouté un rayon à l'intérieur du deuxième horizon $r = r_-$.

3 Compactification conforme

Le but, dans cette section est de construire une notion formelle d'infini, vu comme un bord de notre variété afin de donner un bon cadre à l'étude de certaines de ses caractéristiques.

La question de la compactification conforme est traitée dans [3] et dans [4]. Pour aller plus loin sur les questions d'analyse fonctionnelle, on pourra aller voir [5].

3.1 Définition de la compactification conforme

Définition 3.1. *On dit qu'une métrique g sur une variété différentielle \mathcal{M} est conformément équivalente à \tilde{g} s'il existe une fonction lisse Ω (disons de la même régularité que la métrique) partout non nulle telle que $g = \Omega^2 \tilde{g}$. C'est une relation d'équivalence. On appelle ses classes d'équivalences les classes conformes et on les note entre crochet : $[g]$*

L'idée des classes conformes est que l'on conserve les ratios locaux des distances infinitésimales ainsi que les cônes de lumières. Ainsi il s'agit d'un bon cadre pour étudier le comportement asymptotique des trajectoires de types lumière.

L'idée de la compactification conforme est de multiplier g par notre facteur conforme Ω qui tend vers zéro dans la zone d'infini qu'on veut étudier, de manière à "rapprocher" l'infini à distance finie.

Sa définition est introduite par Penrose dans les années 60, voir par exemple dans [3] les parties 8 et 9.

Définition 3.2. *On dit que $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ est une compactification conforme de \mathcal{M} si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\tilde{\mathcal{M}}$ est une variété à bord lisse (disons au moins C^4), avec \tilde{g} lisse (au moins C^3). On appelle le bord \mathcal{I}
2. (\mathcal{M}, g) est une variété pseudo-riemannienne connectée et orientable de dimension 4 de même régularité que \mathcal{M} et g (disons au moins C^4), avec la métrique \tilde{g} qui est Lorentzienne (id est de signature $(3,1)$ ou $(1,3)$ suivant la convention), de laquelle les cônes passé et futur sont distinguables et qui ne contient aucune lacet lisse de type temps.
3. $\tilde{\mathcal{M}}$ est la réunion de \mathcal{M} et de \mathcal{I} , et g et \tilde{g} sont conformément équivalents sur \mathcal{M} : $g = \Omega^2 \tilde{g}$
4. Si on prolonge Ω à $\tilde{\mathcal{M}}$ en posant $\Omega = 0$ sur \mathcal{I} , alors Ω est une fonction au moins C^3 , et $d\Omega$ restreint au bord ne s'annule pas.
5. Chaque géodésique de type lumière de \mathcal{M} a exactement deux points d'intersection avec \mathcal{I}

Remarques : Le point 2 correspond aux conditions physiques (comme l'interdiction de voyager dans le temps), le point 4 demande que le bord soit une variété différentielle de dimension 3 qui est en plus une hypersurface régulière de $\tilde{\mathcal{M}}$. Il arrive qu'on demande en plus de ces conditions, que \mathcal{M} soit difféomorphe à \mathbb{R}^4 pour simplifier l'étude.

Remarque : Contrairement à son nom, on ne demande pas que la compactification conforme soit compacte, ce qui en pratique peut ne pas arriver.

3.2 Construction dans Minkowski

Cette définition nous dit quoi chercher, mais pas forcément comment le chercher. Nous allons donc à titre d'exemple construire une compactification conforme de l'espace de référence plat : l'espace de Minkowski.

En coordonnées sphériques, la métrique s'écrit

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 dw^2, \quad (3.1)$$

On se place en coordonnées avancées et retardées (qui correspondent à prendre des géodésiques entrantes ou sortantes comme coordonnées)

$$u = t - r, v = t + r$$

Dans ces coordonnées, la métrique (3.1) prend la forme :

$$ds^2 = dudv - \frac{(v-u)^2}{4} dw^2$$

On change alors les coordonnées de manière à rapprocher l'infini. On pose

$$p = \arctan u, q = \arctan v \quad (3.2)$$

On a alors

$$ds^2 = (1+u^2)(1+v^2)dpdq - \frac{(v-u)^2}{4} dw^2$$

Finalement, on fait un dernier changement pour avoir des coordonnées de types temps et espace orthogonales :

$$\tau = p + q = \arctan(t-r) + \arctan(t+r) \quad (3.3)$$

$$\xi = p - q = \arctan(t-r) - \arctan(t+r)$$

qui nous donne

$$ds^2 = \frac{(1+u^2)(1+v^2)}{4} (d\tau^2 - d\xi^2) - \frac{(v-u)^2}{4} dw^2 \quad (3.4)$$

En prenant alors comme facteur conforme l'inverse du terme qui peut exploser

$$\Omega^2 = \frac{4}{(1+u^2)(1+v^2)} = \frac{4}{(1+\tan(p)^2)(1+\tan(q)^2)} = (2 \cos p \cos q)^2,$$

on a finalement la métrique conforme

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= \Omega^2 ds^2 = d\tau^2 - d\xi^2 - \frac{(v-u)^2}{(1+u^2)(1-v^2)} dw^2 \\ &= d\tau^2 - d\xi^2 - ((\tan q - \tan p) \cos p \cos q)^2 dw^2 \\ &= d\tau^2 - d\xi^2 - (\sin(q) \cos(p) - \sin(p) \cos(q))^2 dw^2 \\ &= d\tau^2 - d\xi^2 - \sin(q-p)^2 dw^2 \\ &= d\tau^2 - d\xi^2 - \sin(\xi)^2 dw^2 \\ &= d\tau^2 - \sigma_{S^3}^2 \end{aligned}$$

où $\sigma_{S^3}^2$ est la métrique de la 3-sphère usuelle.

L'espace de Minkowski est maintenant conformément décrit dans notre nouveau système de coordonnées comme l'espace

$$\mathbb{M} = \{|\tau| + \xi < \pi, \xi \geq 0, w \in S^2\}$$

On peut alors rajouter le bord

$$\partial\mathbb{M} = \{|\tau| + \xi = \pi, \xi \geq 0, w \in S^2\}$$

et la métrique s'étend naturellement (en fait elle s'étend même au cylindre d'Einstein complet $\mathbb{E} = \mathbb{R}_\tau \times S_{\xi, \theta, \phi}^3$ de manière analytique).

Remarque : La courbure scalaire n'est pas un invariant conforme, mais on peut la calculer à partir de Ω , en sachant que la courbure scalaire est nulle dans l'espace de départ.

Le bord obtenu se découpe naturellement en 2 hypersurfaces et 3 points :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^+ &= \{\tau + \xi = \pi, \xi \in]0, \pi[, w \in S^2\} \\ \mathcal{I}^- &= \{\xi - \tau = \pi, \xi \in]0, \pi[, w \in S^2\} \\ i^\pm &= \{\tau = \pm\pi, \xi = 0, w \in S^2\} \\ i^0 &= \{\tau = 0, \xi = \pi, w \in S^2\}\end{aligned}$$

Chacune de ces parties est une hypersurface (un point) lisse de notre espace. \mathcal{I}^\pm sont de plus des hypersurfaces de type lumière.

On appelle i^\pm infini temporel passé/futur, et i^0 infini spatial.

On voit donc ici une méthode, qui consiste à trouver un système de coordonnées bornées décrivant tout l'espace, avec une croissance de la métrique au bord bien définie, puis on prend l'inverse de cette croissance comme facteur conforme au carré.

3.3 Construction dans Schwarzschild

Malheureusement, nous ne sommes pas toujours aussi chanceux, et il n'y a pas toujours une telle possibilité. Dans l'espace de Minkowski, nous avons eu de la chance que la partie qui n'explosait pas se simplifie avec le facteur conforme en une métrique analytique. Nous allons maintenant voir une alternative, qui consiste à ne construire qu'une partie de l'infini (si on applique cette méthode au cas de Minkowski, on ne trouve qu'une seule des deux hypersurfaces à la fois).

De manière générale, on s'attend à ce que la présence d'énergie couplée à une propriété de stationnarité soit un obstacle à la régularité des infinis temporels et de l'infini spatial.

Prenons comme temps avancé la variable $t - r_*$ qui correspond à une paramétrisation des géodésiques sortantes et inversons la variable r (de sorte que l'infini spatial se retrouve en zéro). En variables $u = t - r_*, R = \frac{1}{r}, \theta, \phi$, la métrique s'écrit ⁸ :

$$ds^2 = (1 - 2mR)du^2 - \frac{2}{R}dudR - \frac{1}{R^2}dw^2 \quad (3.5)$$

Par un changement d'échelle avec le facteur conforme $\Omega = R = \frac{1}{r}$, on a

$$d\bar{s}^2 = R^2 ds^2 = R^2(1 - 2mR)du^2 - 2RdudR - dw^2,$$

a priori définie sur l'espace $\mathbb{R}_u \times]0, \frac{1}{2m}[_R \times S^2$, mais qui s'étend analytiquement si on ajoute le bord $\mathbb{R}_u \times \{0\}_R \times S^2$.

Un point $(u_0, 0, \theta_0, \phi_0)$ est alors atteint par la géodésique de type lumière radiale et sortante :

$$\gamma_{u_0, \theta_0, \phi_0}(r) = \langle t = r + u_0, r, \theta_0, \phi_0 \rangle \quad (3.6)$$

quand $r \rightarrow +\infty$, et il y a une bijection entre de telles géodésiques et les points du bord. Par analogie ⁹ avec l'espace de Minkowski, on appelle ce bord \mathcal{I}^+ .

La même construction avec $t + r_*$ et les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes permet de construire \mathcal{I}^- .

8. voir en 1.1.2, suivie d'une inversion de r

9. Si on suit la même construction dans Minkowski, on trouvera l'hypersurface \mathcal{I}^+

3.4 Interlude d'analyse fonctionnelle

Pour étudier la structure quantique des particules présentes dans notre variété, leurs caractéristiques et leur déplacement, on a besoin de trouver leur fonction d'ondes Φ , qui vérifie une équation hamiltonienne de la forme :

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = iA\Phi$$

où A est un opérateur ayant de bonnes propriétés de notre espace.

Nous allons ici voir quelques outils utiles à notre étude. Pour le cadre, nous prenons \mathcal{H} un espace hilbertien complexe (notre espace fonctionnel), et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire.

Définition 3.3. *Un opérateur sur \mathcal{H} est une application linéaire A d'un sous espace vectoriel de \mathcal{H} (appelé domaine de A et noté $D(A)$) dans \mathcal{H} . On supposera quitte à réduire \mathcal{H} que le domaine de A est dense dans \mathcal{H} .*

Définition 3.4. *Soit A un opérateur sur \mathcal{H} . On définit $D(A^*)$ comme l'ensemble des $\phi \in \mathcal{H}$ tel qu'il existe $\eta \in \mathcal{H}$ vérifiant :*

$$\forall \psi \in D(A), \langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle$$

et pour chaque tel ϕ , on pose $A^*\phi = \eta$ (qui est bien défini par densité du domaine de A).

A^* est appelé adjoint de A

Remarque : On a envie de travailler avec des applications non-bornées (i.e. sans avoir nécessairement $\|A\psi\|_2 \leq C\|\psi\|_2$ ¹⁰) ayant un caractère auto-adjoint. Mais par le Théorème de Hellinger-Toeplitz, toute application linéaire A partout défini vérifiant $\langle A\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle$ est nécessairement bornée. C'est pour cela que l'on cherche à se placer dans un cadre un peu plus général.

Définition 3.5. *Un opérateur A sur un espace \mathcal{H} est dit symétrique si $D(A) \subset D(A^*)$ et pour tout $\phi \in D(A)$, $A\phi = A^*\phi$.*

De manière équivalente, A est symétrique si $\forall \phi, \psi \in D(A)$, $\langle A\phi, \psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle$.

On dit que A est auto-adjoint si $A = A^*$, c'est à dire que A est symétrique et $D(A) = D(A^*)$.

Souvent la symétrie est relativement facile à démontrer, mais il ne faut pas oublier que ça ne suffit pas à montrer l'auto-adjonction. Un critère utile pour la montrer est le suivant :

Proposition 3.5.1. *Soit A un opérateur symétrique sur \mathcal{H} . Alors les trois points suivants sont équivalents :*

1. A est auto-adjoint
2. A est fermé^a et $\text{Ker}(A^* \pm i\text{Id}) = \{0\}$
3. $\text{Im}(A \pm i\text{Id}) = \mathcal{H}$

a. pour rappel, cela signifie que son graphe est un sous espace fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

Voir en annexe A pour une preuve de ce critère.

^{10.} de manière équivalente, une application non bornée est une application non continue pour la topologie associée à la norme du produit scalaire

L'auto-adjonction est une bonne propriété pour trouver des solutions d'un problème hamiltonien. En effet, c'est dans ce cadre que l'on peut définir l'exponentielle, sans avoir besoin des séries formelles (cela tombe bien puisque on travaille avec des opérateurs non bornées dont les séries formelles ne convergent pas nécessairement en norme). En effet, on a le théorème, issu d'un théorème spectral appliqué à l'exponentielle, suivant :

Théorème 3.6. *Soit A un opérateur auto-adjoint. Alors il existe une famille continue à un paramètre d'opérateurs unitaires $U(t)$ ^a vérifiant les conditions suivantes :*

1. $U(0)=Id$
2. Pour chaque t , $U(t)$ et A commutent, et $U(t)$ est unitaire
3. Pour chaque (t,s) , $U(t+s) = U(t)U(s)$
4. Pour $\phi \in \mathcal{H}$, $\lim_{t \rightarrow t_0} U(t)\phi = U(t_0)\phi$
5. Pour $\psi \in D(A)$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t} = iA\psi$
6. Réciproquement, si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}$ existe, alors $\psi \in D(A)$

a. issu des fonctions $x \mapsto e^{tx}$ dans le théorème spectral de calcul fonctionnels

Voir par exemple [5] pour une ébauche de preuve.

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 3.6.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint et $\psi_0 \in D(A)$.*

Le problème Hamiltonien suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\tau} & = iA\psi \\ \psi(\tau = 0) & = \psi_0 \end{cases}$$

avec

$$\psi \in C^0(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$$

Démonstration. On pose $\psi(\tau) = U(\tau)\psi_0$ et alors

$$iA\psi(t) = iAU(t)\psi_0 \tag{3.7}$$

$$= U(t)(iA\psi_0) \tag{3.8}$$

$$= U(t) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(s)\psi - \psi}{s} \tag{3.9}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(t)U(s)\psi - U(t)\psi}{s} \tag{3.10}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(t+s)\psi - U(t)\psi}{(t+s) - t} \tag{3.11}$$

$$= \frac{d\psi}{d\tau}(t) \tag{3.12}$$

Ce qui montre l'existence d'une solution (et nous en donne même la forme).

L'unicité découle du fait que l'équation différentielle étudiée préserve la norme. □

3.5 Une application de la compactification : décroissance à l'infini dans l'équation des ondes

On va se placer dans l'espace de Minkowski et regarder l'équation, conformément invariante¹¹, d'onde suivante :

$$\square_g \psi + \frac{1}{6} \text{Scal}_g \psi = 0$$

On rappelle que le d'Alembertien est défini à partir de la connexion de Levi-Cevita de g par $\square_g = \nabla_a \nabla^a$, ou encore en coordonnées locales (x^a) : $\square_g = \frac{1}{\sqrt{|\det(g)|}} \partial_a \left(\sqrt{|\det(g)|} g^{ab} \partial_b \right)$.

On cherche des solutions pour g la métrique de Minkowski, l'équation s'écrit donc

$$0 = \square_g \psi + 0 = \left(\partial_t^2 - \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r - \frac{1}{r} \Delta_{S^2} \right) \psi. \quad (3.13)$$

Ou encore, si on regarde $\phi = \Omega^{-1} \psi$, et \tilde{g} sa compactification :

$$0 = \square_{\tilde{g}} \phi + \frac{1}{6} \text{Scal}_{\tilde{g}} \phi = (\partial_\tau^2 - \Delta_{S^3}) \phi + \phi. \quad (3.14)$$

C'est cette dernière équation que nous allons résoudre. Pour cela, nous allons mettre en oeuvre la technique développée au point précédent.

Sous forme Hamiltonnienne, l'équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} \phi \\ \partial_\tau \phi \end{pmatrix} = iH \begin{pmatrix} \phi \\ \partial_\tau \phi \end{pmatrix} \quad \text{où } H = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta_{S^3} - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

On cherche alors des solutions dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1(S^3) \times L^2(S^3),$$

muni du produit scalaire usuel :

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{S^3} \nabla_{S^3} f_1 \nabla_{S^3} \bar{g}_1 + f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2$$

On a alors la proposition suivante, qui nous permet de conclure quand à l'existence de solution :

Proposition 3.6.1. *H avec son domaine naturel $H^2(S^3) \times H^1(S^3)$ est un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H}*

Démonstration. Pour montrer cela, on va commencer par montrer la symétrie de H , puis on utilisera le critère d'auto-adjonction pour conclure.

Soit donc $\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right) \in (H^2(S^3) \times H^1(S^3))^2$,

Alors,

11. C'est à dire que ψ est solution de l'équation pour la métrique g si et seulement si $\Omega^{-1} \psi$ est solution de l'équation pour $\tilde{g} = \Omega^2 g$

$$\left\langle H \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{S^3} \nabla_{S^3}(-if_2)\nabla_{S^3}\bar{g}_1 + (-if_2)\bar{g}_1 + (-i\Delta_{S^3}f_1 + if_1)\bar{g}_2 \quad (3.16)$$

$$= \int_{S^3} \nabla_{S^3}(-if_2)\nabla_{S^3}\bar{g}_1 + (-i\Delta_{S^3}f_1)\bar{g}_2 + \int_{S^3} (-if_2)\bar{g}_1 - (-if_1)\bar{g}_2 \quad (3.17)$$

$$= - \int_{S^3} (-if_2)\Delta_{S^3}\bar{g}_1 + (-i\nabla_{S^3}f_1)\nabla_{S^3}\bar{g}_2 + \int_{S^3} (-if_2)\bar{g}_1 - (-if_1)\bar{g}_2 \quad (3.18)$$

$$= \overline{\int_{S^3} (-i\bar{f}_2)\Delta_{S^3}g_1 + (-i\nabla_{S^3}\bar{f}_1)\nabla_{S^3}g_2 + \int_{S^3} -(-i\bar{f}_2)g_1 + (-i\bar{f}_1)g_2} \quad (3.19)$$

$$= \left\langle H \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (3.20)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (3.21)$$

Où on a successivement coupé la somme, intégré par partie, sorti le conjugué, reconnu le produit scalaire et utilisé la caractère hermitien de ce dernier.

On a donc montré la symétrie de l'opérateur sur son domaine.

Par le critère d'auto-adjonction, il suffit alors de montrer que $Im(H \pm iId) = \mathcal{H}$ pour conclure.

Soit $\epsilon \in \{\pm 1\}$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{H}$

Posons alors g_2 la solution^a appartenant à $H^2(S^3)$ de $\Delta_{S^3}g_2 = i(f_2 + \epsilon f_1)$ et posons $g_1 = \epsilon g_2 - i\epsilon f_1$ qui appartient alors à $H^1(S^3)$.

Alors

$$\begin{aligned} (H + \epsilon iId) \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -ig_2 + \epsilon ig_1 \\ -i\Delta_{S^3}g_1 - ig_1 + \epsilon ig_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \\ -i\Delta_{S^3}g_1 - \epsilon f_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat. □

^a. qui existe toujours en utilisant le Théorème de LAX-Milgram

Corollaire 3.6.2. *Pour chaque donnée initiale ϕ_0, ϕ_1 dans $D(H)$, il existe une unique solution $\phi \in C^0(\mathbb{R}_\tau, H^2(S^3)) \cap C^1(\mathbb{R}_\tau, H^1(S^3)) \cap C^0(\mathbb{R}_\tau, L^2(S^3))$ du problème de Cauchy :*

$$\square_{\bar{g}}\phi + \frac{1}{6}\text{Scal}_{\bar{g}}\phi = 0, \quad \phi|_{\tau=0} = \phi_0 \quad \partial_\tau\phi|_{\tau=0} = \phi_1$$

On admettra par la suite (voir le théorème de Leray en [7]) le caractère lisse de la solution si les données initiales sont lisses. De même, on obtient un résultat similaire pour Schwarzschild en se restreignant aux données initiales lisses à support compact :

Proposition 3.6.2. *Soit $\psi_0, \psi_1 \in C_c^\infty(]2m, +\infty[_r \times S^2)$, alors le problème de Cauchy*

$$\square_{\bar{g}}\psi = 0, \quad \psi|_{t=0} = \psi_0 \quad \partial_\tau \psi|_{t=0} = \psi_1$$

a une unique solution

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}_t, D'([2m, +\infty[_r \times S^2)).$$

De plus cette solution est lisse sur $\mathbb{R}_t \times]2m, +\infty[_r \times S^2$ et la solution redimensionnée $\tilde{\phi} = r\phi$ a une trace lisse sur \mathcal{I}^+ et \mathcal{I}^- , c'est à dire il existe deux fonctions lisses $\phi_\infty^\pm \in C^\infty(\mathbb{R} \times S^2)$ telles que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_* \phi(t, r_* = t - u, w) = \phi_\infty^+(u, w)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r_* \phi(t, r_* = -t + v, w) = \phi_\infty^-(v, w)$$

Remarque : Ceci montre en particulier que les solutions de l'équation des ondes décroissent comme $\frac{1}{r}$ le long des géodésiques de type lumière radiales.

4 Conclusion et vision d'ensemble

Dans ce dossier et au cours de ce stage, j'ai pu étudier différents types de trous noirs dans le formalisme de la relativité générale donnée par Einstein. Plus particulièrement, je me suis focalisé sur trois grand axes que sont l'horizon des événements dans Schwarzschild et la construction d'un prolongement analytique, les sphères et cercles de photons dans diverses solutions et la construction et utilisation d'un infini à partir de géodésiques isotropes.

Pour aller plus loin sur les prolongement analytiques, je pourrais regarder la construction du prolongement de Kerr, où on n'a plus un nombre fini de blocs contrairement à Schwarzschild.

Au niveau des cercles de photons, il serait intéressant de voir ce qui reste du résultat dans un espace Kerr-De Sitter (correspondant de l'espace Kerr avec une constante cosmologique). J'ai eu l'occasion d'essayer de trouver une solution, sans parvenir à conclure.

Enfin pour creuser la compactification conforme et l'utilisation de l'analyse fonctionnelle, il serait intéressant de travailler à démontrer le théorème spectral ou encore de regarder la compactification conforme des espaces de Kerr.

Globalement, ce fut un stage enrichissant, véritable initiation à la recherche dans un domaine qui m'intéresse. Ce fut l'occasion pour moi de découvrir ou approfondir de nouvelles méthodes de travail, ainsi que de changer d'environnement, ayant fait ce stage à Brest. Je remercie tout particulièrement Jean-Philippe Nicolas mon tuteur et Jack Borthwick son doctorant pour leur accompagnement et conseil tout au long de ce stage, ils ont contribué à sa réussite.

A Un critère d'auto-adjonction

On va démontrer ici la propriété suivante :

Proposition A.0.1. *Soit A un opérateur symétrique sur \mathcal{H} . Alors les trois point suivants sont équivalents :*

1. A est auto-adjoint
2. A est fermé et $\text{Ker}(A^* \pm i\text{Id}) = \{0\}$
3. $\text{Im}(A \pm i \text{Id}) = \mathcal{H}$

1 \Rightarrow 2

Supposons que A soit auto-adjoint. Soit $\phi \in \mathcal{H}$

Si $i\phi = A^*\phi (= A\phi)$, alors

$$i \langle \phi, \phi \rangle = \langle i\phi, \phi \rangle = \langle A\phi, \phi \rangle = \langle \phi, A^*\phi \rangle = \langle \phi, i\phi \rangle = -i \langle \phi, \phi \rangle$$

et donc $\phi = 0$.

De la même manière, on montre que $\text{Ker}(A^* + i\text{Id}) = \{0\}$.

Le caractère fermé de A vient du fait (général) que A^* est toujours fermé :

Notons $\Gamma(A)$ le graphe de A . Pour vérifier que A^* est fermé, considérons V unitaire sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ définie par $V(\phi, \psi) = (-\psi, \phi)$. Comme V est unitaire, pour tout sous espace linéaire E , on a $V(E^\perp) = V(E)^\perp$

Alors

$$(\phi, \eta) \in V(\Gamma(A))^\perp \quad \text{si et seulement si} \quad \forall \psi \in D(A), \langle (\phi, \eta), (-A\psi, \psi) \rangle = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\text{ssi} \quad \forall \psi \in D(A), \langle \phi, A\psi \rangle = \langle \eta, \psi \rangle \quad (\text{A.2})$$

$$\text{ssi} \quad (\psi, \eta) \in \Gamma(A^*) \quad (\text{A.3})$$

Donc $\Gamma(A^*) = V(\Gamma(A))^\perp$ est une partie fermée de \mathcal{H} .

2 \Rightarrow 3

Supposons que A est fermé et $\text{Ker}(A^* \pm i\text{Id}) = \{0\}$.

Premièrement, on a alors que $\text{Im}(A + i\text{Id})$ est dense. Sinon, il existe $\psi \in \text{Im}(A + i\text{Id})^\perp \setminus \{0\}$, et alors pour tout $\phi \in D(A)$, on aurait $\langle (A + i\text{Id})\phi, \psi \rangle = 0$ et donc $\psi \in D(A^*)$ avec $(T^* - i\text{Id})\psi = (T + i\text{Id})^*\psi = 0$ ce qui est absurde.

(Réciproquement, en renversant l'argument, si $\text{Im}(A + i \text{Id})$ est dense, alors le noyau de $T^* - i\text{Id}$ est réduit à zéro.)

Et ensuite $\text{Im}(A + i \text{Id})$ est alors fermé. En effet, comme

$$\|A\phi + i\phi\|^2 = \|A\phi\|^2 + \|\phi\|^2,$$

si on prend $\phi_n \in D(A)$ tel que $A\phi_n + i\phi_n \rightarrow \psi_\infty$, alors ϕ_n et $A\phi_n$ converge.

Notons ϕ_∞ la limite des ϕ_n , on a alors comme A est fermé que $\phi_\infty \in D(A)$ et $(A + i)\phi_\infty = \psi_\infty$. Donc $\text{Im}(A + i)$ est fermé.

Donc $\text{Im}(A + i)$ étant dense et fermé, $\text{Im}(A + i\text{Id}) = \mathcal{H}$. Similairement, on prouve que $\text{Im}(A - i\text{Id}) = \mathcal{H}$

3 \Rightarrow 1 Soit $\phi \in D(A^*)$, montrons que $\phi \in D(A)$, ce qui nous montrera que A est auto-adjoint.

Par hypothèse $\text{Im}(A - i) = \mathcal{H}$, d'où il existe $\eta \in D(A)$ tel que $(A - i)\eta = (A^* - i)\phi$.

Comme A est symétrique, $D(A) \subset D(A^*)$, donc $\phi - \eta \in D(A^*)$ et $(A^* - i)(\phi - \eta) = 0$.

Enfin, comme $\text{Im}(A + i) = \mathcal{H}$, on a que $\text{Ker}(A^* - i) = \{0\}$ et donc $\phi = \eta \in D(A)$.

Références

- [1] Misner Charles, Thorne Kip, Wheeler John, *Gravitation* edition W.H. FREEMAN AND COMPANY, chap 31 p 819-841
- [2] Barrett O'Neil, *The geometry of Kerr Black Holes*, A.K. Peters, Wellesley 1995, chap 4
- [3] Penrose, *Zero Rest-Mass Fields Including Gravitation : Asymptotic Behavior*, Published by : The Royal Society, Sciences, Vol. 284, No. 1397 (Feb. 23, 1965), pp. 159-203
- [4] Jean-Philippe Nicolas, *Conformal Asymptotic Analysis*, lecture notes <http://pageperso.univ-brest.fr/~jnicolas/Cours/ConformalAA.pdf>
- [5] Michel Reed, Barry Simmon, *Method of modern mathematical physics* edition Academic press, 1980, chap VIII p256-265
- [6] Hawking, Penrose *black holes*, MSc in Quantum Fields and Fundamental Forces, Academic Year 2014/15 [imperial college](#)
- [7] J. Leray *Hyperbolic differential equations* Princeton Institute for Advanced Studies, 1952
- [8] Mokdad Mokdad, *Reissner–Nordström–de Sitter manifold : photon sphere and maximal analytic extension*, Classical and Quantum Gravity, 2017, vol.34 num.17 p.175014
- [9] Townsend Paul, *Black Holes*, Lecture notes for a 'Part III' course 'Black Holes' given in DAMTP, Cambridge, <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012>