THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

Présentée et soutenue par

Paul FRAUX

Le 9 juin 2023

Etude des varietes d'Einstein asymptotiquement hyperboliques

Ecole doctorale : **EDMITT - Ecole Doctorale Mathématiques, Informatique et Télécommunications de Toulouse**

Spécialité : **Mathématiques et Applications**

Unité de recherche :
IMT : Institut de Mathématiques de Toulouse

Thèse dirigée par
YuXin GE

Jury
M. Romain GICQUAUD, Rapporteur
M. Dong YE, Rapporteur
Mme Pascale ROESCH, Examinatrice
M. Viet DANG, Examinateur
M. Yuxin GE, Directeur de thèse

A mes parents

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.
John Von Neumann

Cette thèse est le résultat de 3 ans de travail, et elle n'aurait pas vu le jour sans l'accompagnement de nombreuses personnes. Même si je ne les cite pas toutes ici, je suis reconnaissant de toutes ces interactions que j'ai pu avoir.

Il y a d'abord mon directeur de thèse, Yuxin Ge. Malgré les difficultés que nous avons pu rencontrer, il a su me guider académiquement pour arriver à produire cette thèse. Je souhaite le remercier pour toutes les fois où il a pris le temps pour m'écouter et me poser des questions pour me rediriger, même dans les moments difficiles.

Pour le soutien moral, j'ai aussi pu compter sur mes collègues. Je ne citerai que leur prénom, ils se reconnaîtront. Merci aux anciens, déjà Docteur : Elena pour les soirées jeux, Jean-Marc pour les contacts et les éclairages sur l'enseignement, Laetitia pour tes directions dans les méandres administratifs, William et Florian pour votre bonne humeur. Merci aux autres aussi, que j'espère bientôt docteur : Paolo pour ta présence et nos discussions cohomologique, Maxence, Hugo et Candice pour nos actions de vulgarisations communes (dont celle où je vous ai traquenardé), Athmane pour nos discussions sur l'Algérie, mais aussi Anthony, Jordi, et tous ceux que je ne cite pas ici, mais qui m'ont apporté tant de choses.

Merci aussi à Houria Lafrance et Arnaud Chéritat pour leur soutien dans l'association les Maths en Scène, cela a été pour moi l'occasion de vulgariser diverses notions mathématiques, tout en pensant à autre chose que ma thèse pour un temps. Merci Houria pour ton énergie et ton organisation. Merci Arnaud pour tes conseils sur les actions de vulgarisation, et ta relecture de mes ateliers.

Je veux remercier pour leurs nombreux conseils de pédagogue et leur patience Antoine Campi, Jérome Fehrenbach, Fanny Delebecque et Emmanuel Paul. Ils m'ont aidé à préciser mon projet pour l'après-thèse, tout en me montrant les diverses voies existantes.

Enfin, il y a ma famille qui a su m'apporter un soutien moral qui m'était indispensable dans ces trois ans. Que ce soit en me proposant un axe de réflexion en chimie, en relisant ma thèse, en m'ouvrant la porte, ou encore plein de petits détails, vous m'avez aidé à aller au bout de cette thèse.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La thèse que vous avez entre les mains porte sur les espaces Einstein asymptotiquement hyperboliques. Deux axes majeurs du domaine seront abordés : l'étude de la régularité de tels objets et l'étude de constantes invariantes pour ces objets.
Cette introduction présente les principaux résultats, tout en cherchant à les contextualiser. Cette thèse est construite de la manière suivante : la première partie présente les résultats déjà connus dans le domaine des variétés d'Einstein asymptotiquement hyperboliques auxquels s'ajoutent des avancées à propos des invariants conformes. Puis dans une deuxième partie, une nouvelle méthode pour assurer la régularité d'une compactification à partir de la régularité de la métrique sur le bord est présentée, avant qu'une troisième partie s'intéresse à une famille de métrique particulière.

À propos des métriques Einstein asymptotiquement hyperboliques

L'application principale des métriques Einstein asymptotiquement hyperboliques, ainsi que leur inspiration, provient d'études de physique théorique, en particulier de théories de la gravitation. Ainsi l'idée de voir l'infini d'une variété comme un bord est issue des travaux de Penrose de 1968. Dans [Pen68], il introduit le concept d'infini conforme pour une métrique pseudo-Riemannienne afin d'étudier l'énergie gravitationnelle à l'infini d'espace-temps asymptotiquement plats. Plus récemment, la mise en lumière par Juan Maldacena en 1998 de la correspondance entre la théorie AdS (anti de Sitter) et CFT (conformal field theory) dans [Mal99], approfondie dans [Mal03] a provoqué un regain d'intérêt mathématique pour les métriques Einstein asymptotiquement hyperboliques.

Ces métriques sont issues de la conjonction de deux concepts : un local sur la variété et extrêmement contraignant, et un second sur le bord permettant d'avoir un problème similaire à un problème de Dirichlet pour l'existence d'une telle métrique.
Le premier concept est celui de métriques Einstein. Il s'agit de métriques qui satisfont la célèbre équation de la relativité générale dans le vide d'Einstein, qui relie la courbure de Ricci à la métrique avec un coefficient de proportionnalité constant sur la variété :

$$Ric = \lambda g$$

Cette équation est, à difféomorphisme près, localement elliptique en la métrique, et donc très contraignante. Ainsi par exemple toute métrique Einstein sera lisse à l'intérieur de son domaine de définition grâce à un argument de bootstrap en coordonnées harmoniques.
Le deuxième concept est celui d'être asymptotiquement hyperbolique (noté AH). Il nécessite d'être conformément compact, c'est-à-dire de pouvoir adjoindre à la variété une hypersurface (on parle de bord ou d'infini conforme de

la variété) afin que la réunion soit une variété compacte sur laquelle on peut étendre la métrique *via* un changement conforme (on parle alors de compactification de la métrique). Ceci permet de définir la classe d'équivalence pour le changement conforme de la métrique à l'infini. Une condition sur la vitesse d'approche de cette classe conforme est ensuite ajoutée. Cette condition revient à demander que la variété de départ soit complète et que sa courbure sectionnelle s'approche uniformément de -1 au voisinage de l'infini. L'adjonction de la condition d'existence d'une compactification et d'une condition de vitesse donne alors la condition d'asymptotique hyperbolicité.

Un des principaux résultats est l'existence d'un remplissage Einstein asymptotiquement hyperbolique pour des métriques perturbations d'une métrique sur l'infini conforme ayant un remplissage vérifiant une hypothèse d'injectivité d'un opérateur elliptique canonique. Ces idées ont fait leur apparition dans le travail de Graham-Lee [GL91], avant d'être développées plus généralement en parallèle dans la monographie de Lee [Lee06] et dans les travaux d'Olivier Biquard dans [Biq00]. Ainsi, sous certaines conditions naturelles, l'on a bien une solution à ce problème de type Dirichlet. Une condition au bord et une version elliptique de l'équation (une fois fixé le problème provenant de l'invariance par difféomorphisme) fournissent au moins localement une solution.

La dimension 4 est particulièrement intéressante dans l'étude des variétés riemanniennes. Ceci pour une simple raison : elle contient une complexité qui n'est pas présente en plus faible dimension avec la courbure de Weyl, tout en ayant une symétrie potentielle qui ne sera pas présente en plus grande dimension, issue de l'action involutive de l'étoile de Hodge sur les deux-formes. Cette action permet en particulier d'écrire l'espace des deux-formes comme une somme directe des espaces propres de l'étoile de Hodge, somme directe qui induit une décomposition sur les opérateurs linéaires sur cet espace, par exemple pour les opérateurs de courbures. On retrouve ainsi la définition des métriques autoduales et anti-autoduales, qui sont des métriques dont certains des termes dans cette décomposition appliqué à la courbure de Weyl s'annulent.

Des invariants conformes

Comme souvent en mathématiques, il est tout aussi important de regarder ce qui ne change pas que de regarder ce qui change. L'étude des invariants est source de nombreux résultats intéressants. On peut ainsi pour les variétés d'Einstein asymptotiquement hyperboliques définir de nombreux invariants dépendant de la métrique. Une portion seulement de ce qui existe sera présenté.

L'invariant le plus simple à visualiser est l'invariant de Yamabe de l'infini conforme Y. Il s'agit de regarder, dans la classe conforme de la restriction de la métrique à l'infini, quelle est la plus petite valeur de l'intégrale de la courbure scalaire sous la contrainte de volume de l'infini valant 1. On obtiendra alors une quantité indépendante du choix de la compactification pour toute métrique conformément compacte. Cet invariant, défini comme un *infimum* d'une fonctionnelle intégrale, est dans la plupart des cas qui nous intéressent un *minimum* comme le prétend (avec une erreur dans la preuve) Yamabe dans [Yam60] et le prouvent Trundinger, Aubin et Schoen dans [Tru68], [Aub11] et [Sch84]. L'intérêt principal de cet invariant réside dans les cas où il s'agit en fait d'un *minimum* . Le minimiseur de la fonctionnelle correspond alors à une métrique de courbure scalaire constante, de même signe de courbure que l'invariant.
La définition donnée ci-dessus ne fonctionne malheureusement que pour des variétés compactes sans bord. Le travail d'Escobar dans [Esc92b] généralise cependant ce résultat en ajoutant à la fonctionnelle un terme de bord. Cette généralisation est notée Y_1 dans cette thèse, mais la notation Q existe également dans la littérature. Cet invariant pourra être calculé pour toute compactification d'une métrique conformément compacte indépendamment du choix de la compactification. Et encore une fois, un minimiseur correspond à une compactification de courbure scalaire

constante telle que la courbure moyenne de l'infini conforme soit nulle.
Un résultat bien connu, présenté dans le travail de Lee [Lee94], de Qing [Qin03], de Han-Gursky [GH17] et de Chen-Lai-Wang [CLW19], annonce que pour une métrique asymptotiquement hyperbolique Einstein, si l'invariant de Yamabe de l'infini conforme est positif, alors il en est de même pour l'invariant de Yamabe-Escobar de la compactification. Ces travaux donnent même une relation d'ordre entre les deux termes.

Un autre invariant naturel apparaît lorsqu'on rajoute la contrainte Einstein sur la métrique en dimension paire : le volume renormalisé. Il s'agit à partir d'un infini conforme de choisir une description (une fonction définissante, voir la partie 2.1) particulière pour l'infini de la variété. Un développement limité du volume du complémentaire d'un voisinage de l'infini (le volume de la variété entière étant infini) peut alors être écrit, et le terme constant de ce développement limité sera appellé volume renormalisé. Cet objet a été développé par Graham dans [Gra99]. Un des résultats importants qui a suivi est celui d'Anderson dans [And01]. Il énonce qu'en dimension 4, le volume renormalisé est bien un invariant conforme de toute la renormalisation (par opposition au résultat antérieur qui donnait une invariance conforme par rapport à l'infini conforme), et le relie grâce à l'équation de Chern-Gauss-Bonnet à l'invariant topologique de Gauss de la variété et à l'intégrale de la norme de la courbure de Weyl.

Dans cette thèse, on donne une réciproque partielle du résultat de Qing [Qin03]. En ajoutant la condition de positivité du volume renormalisé, on obtient qu'en dimension 4 la positivité de l'invariant de Yamabe-Escobar implique la positivité de l'invariant de Yamabe de l'infini conforme :

Théorème 1.0.1. *Soit $(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g})$ une variété asymptotiquement hyperbolique Einstein de dimension 4. En particulier, cette variété aura un bord ombilic, c'est-à-dire que la seconde forme fondamentale du bord est proportionnelle à la métrique $I\!I = \mu(x)\overline{g}$, ce qui revient à demander que le bord soit totalement géodésique* via *un changement conforme.*
Si en plus la constante de premier type de Yamabe-Escobar est positive $Y_1(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g}) > 0$ et le volume renormalisé $V(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g}) > 0$ est aussi positif, alors l'invariant de Yamabe du bord est strictement positif :

$$Y(\partial M, \overline{g}_{|\partial M}) > 0$$

De régularisation *a priori* de métriques

Les résultats présentés dans cette partie sont sans doute les résultats les plus intéressants de la thèse. Ils partent d'un constat simple : la condition d'être une métrique Einstein est une condition très exigeante. Comme on peut s'y attendre, elle impose un caractère lisse sur les points intérieurs de la variété. En revanche, la condition d'asymptotique hyperbolicité n'enjoint rien *a priori* sur la régularité à l'intérieur de la compactification, mais permet de définir une notion de régularité à l'infini. Dans cette partie, on s'intéresse à ce que la conjonction des deux conditions permet de dire, et particulièrement comment améliorer la connaissance de la régularité d'un compactifié si sa restriction au bord est régulière.

L'idée de départ est qu'une régularité du tenseur de courbure de Ricci du compactifié se traduit naturellement en une régularité de la métrique dans un système de coordonnées harmoniques. En effet, l'équation qui donne cette courbure en fonction de la métrique est elliptique. C'est un argument classique permettant d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 1.0.2. *Soit $g \in C^{k+\alpha}(\overline{M})$ avec $k \geqslant 2$ un entier et $0 < \alpha < 1$.*
S'il existe une fonction définissante du bord ρ vérifiant au voisinage du bord $g = d\rho^2 + h + O(\rho^2)$, et que $Ric \in C^{l-2+\delta}(\overline{M})$ pour $(l, \delta) \in \mathbb{N} \times [0,1[$ avec $l + \delta > k + \alpha > 2$ et $h \in C^{l+\delta}(\partial M)$ dans un système de coordonnées harmoniques $C^{l+\delta}$, alors la restriction de la métrique dans ces coordonnées vérifie $g \in C^{l+\delta}(\overline{M})$.

Le problème se réduit alors à prouver une amélioration de la régularité de la courbure de Ricci. Le tenseur de Bach fournit un lien entre les régularités du tenseur de Ricci et du tenseur de Weyl. En effet, deux manières d'écrire ce tenseur permettent de relier le laplacien du tenseur de Ricci avec les dérivées covariantes du tenseur de Weyl, et d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 1.0.3. *Soit $(\overline{M}^{n+1}, \partial M, g)$ une n+1 variété Riemannienne compacte de bord ∂M lisse et d'intérieur M.*
Supposons qu'il existe une solution au problème de Yamabe sur la variété à bord (en particulier si M a un point de ∂M non-ombilic, ou si g est conformément plat sur M, ou encore si la courbure de Weyl n'est pas identiquement nulle sur ∂M).
De plus, soit $0 < \alpha \leqslant \delta < 1$ et $k \in \mathbb{N}$ un entier positif, on suppose que $g \in C^{2+k,\alpha}(\overline{M}) \cap C^4(M)$, que $Ric_{|\partial M} \in C^{k,\delta}(\partial M, T^2\overline{M}_{|\partial M})$ et que la courbure de Weyl vérifie $W \in C^{k,\delta}(\overline{M}, T^4\overline{M})$.
Alors, on obtient que :

$$Ric \in C^{k,\delta}(\overline{M})$$

On vient donc de se ramener à vouloir améliorer la régularité du tenseur de Weyl du compactifié. Or si on le considère comme un (3,1) tenseur, le tenseur de Weyl est invariant par changement conforme. On peut donc se servir de l'équation de Bochner qui régit la courbure de Weyl d'une métrique Einstein, équation démontrée dans [CM20] :

Lemme 1.0.4. *Soit (M, g_+) une variété Riemannienne Einstein de dimension $n+1 \geqslant 4$, avec constante de normalisation λ (i.e. $R_{ij} = \lambda g_{+ij}$), alors :*

$$\nabla^*\nabla W_{ijkl} = -2\lambda W_{ijkl} - 2(W_{ipjq}W^{pq}{}_{kl} - W_{ipql}W_j{}^{pq}{}_k - W_{ipqk}W_j{}^{pq}{}_l)$$

En particulier, pour une variété Einstein asymptotiquement hyperbolique, $\nabla^*_{g+}\nabla_{g+}W - 2nW = W \star W$, où $W \star W$ est un terme quadratique en W.

On se retrouve donc à devoir étudier l'opérateur elliptique $\nabla^*_{g+}\nabla_{g+} - 2n$ sur les sections du fibré des tenseurs (3,1) ayant les symétries algébriques du tenseur de Weyl, que l'on note S_W. Cette étude s'inscrit dans le cadre général des opérateurs elliptiques géométriques sur les fibrés géométriques de poids fixé développé par Lee dans [Lee06]. Il s'agit de ce fait principalement de trouver une estimation asymptotique de l'opérateur, mais aussi de calculer le rayon indiciel (distance à un axe des exposants complexes caractéristiques, définis comme les valeurs de décroissance qui avec l'opérateur induisent une fonction linéaire singulière en au moins un des points de l'infini, voir la définition complète dans 5.3). Pour donner un sens à une estimation asymptotique d'un opérateur, la définition de la relation $\gtrsim$ est utile :

Définition 1.0.5. Soit $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel sur M, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on notera :

$$(u, Pu) \gtrsim \lambda ||u||^2$$

si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ tel que pour tout $u \in C_c^\infty(M \backslash K_\epsilon, E)$ lisse et à support compact dans $M \backslash K_\epsilon$, on a, avec $(\cdot, \cdot)$ le produit scalaire sur L^2 et $|| \cdot ||$ est la norme associée, que :

$$(u, Pu) \geqslant (\lambda - \epsilon)||u||^2$$

On obtient l'estimation suivante, ainsi que le rayon indiciel :

Lemme 1.0.6. *Soit M une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension $(n+1)$ et de régularité $C^{l,\beta}$, avec $l \geqslant 2$ et $0 \leqslant \beta < 1$ et $n > 4$. Alors pour des sections de S_W, on a l'estimation asymptotique du Laplacien :*

$$(w, \nabla^*\nabla w) \gtrsim (\frac{n^2}{4} + 4)||w||^2$$

Lemme 1.0.7. *Soit (M, g_+) une variété asymptotiquement hyperbolique connexe de dimension $(n+1)$ et de régularité $C^{l,\beta}$, avec $n > 4$, $l \geqslant 2$, et $0 \leqslant \beta < 1$,*
L'opérateur de Laplace $\nabla^*\nabla - 2n$ agissant sur le fibré géométrique S_W de poids 2 a un rayon indiciel $R = \frac{1}{2}(n-4)$

Pour le dernier point, il est également nécessaire de travailler avec une nouvelle famille de régularités, qui sont les espaces à poids correspondant aux espaces topologiques images des espaces de Hölder par des cartes de coordonnées particulières (cartes de Möbius) - voir la partie 2.3 pour une définition rigoureuse. Il faut bien distinguer le poids pour les espaces fonctionnels, qui indique une décroissance à l'infini, et le poids d'un fibré géométrique, qui est relié au nombre d'indices covariants et contravariants, et indique la puissance de la fonction définissante nécessaire pour passer de la norme d'un vecteur pour la métrique à sa norme pour la métrique compactifiée. Cette famille de régularités est bien connue, et reliée aux espaces de Hölder à poids sur la variété compactifiée avec la propriété suivante :

Lemme 1.0.8. *Soit E un fibré tensoriel géométrique de poids r sur* $\overline{M}$*, et soient* $0 < \alpha < 1$, $0 < k+\alpha \leqslant l+\beta$, *et* $0 \leqslant s \leqslant k+\alpha$*, alors les inclusions suivantes sont continues :*

$$C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M};E) \hookrightarrow C^{k,\alpha}_{s+r}(M;E),$$

$$C^{k,\alpha}_{k+\alpha+r}(M;E) \hookrightarrow C^{k,\alpha}_{(0)}(\overline{M};E).$$

Avec ces résultats, ainsi qu'avec une approximation suffisamment régulière du tenseur de Weyl et un difféomorphisme $C^{3,\eta}$ laissant l'infini conforme invariant (difféomorphisme de collier), comme donné par les travaux de Chrusciel et al. dans [CDLS05], il est alors possible de démontrer que :

Théorème 1.0.9. *Soit (M,* g_+*) une (n+1)-variété asymptotiquement hyperbolique et Einstein de régularité* $C^{2,\eta}$*, avec* $n > 4$ *et* $0 < \eta < 1$*.*
Soit de plus $W_+ \in S_W$ *la courbure de Weyl de* g_+*, alors pour tout* $\beta \leqslant \delta < 1$ *:*

$$W_+ \in C^{0,\delta}_{(0)}(\overline{M},\overline{S_W}). \tag{1.0.1}$$

D'une famille d'exemples en dimension 4 : les métriques de Pedersen

Les exemples, si possible aussi génériques que possible, permettent d'aider à l'intuition. Ainsi, dans le cadre des espaces d'Einstein asymptotiquement hyperboliques en dimension 4, Pedersen introduit dans [Ped86] une famille à un paramètre de métriques sur la boule de dimension 4 ayant comme infini conforme les sphères de Berger (qui sont des dilatations par un paramètre constant le long de la fibre de Hopf). Cette partie propose de faire une étude la plus exhaustive possible de ces métriques dans le cadre fourni par les parties précédentes.

Sur la boule unité $B_1(\mathbb{R}^4)$, il existe une base naturelle de vecteurs tangents $(\partial_r, \partial_{\theta_1}, \partial_{\theta_2}, \partial_{\theta_3})$ vérifiant $[\partial_{\theta_i}, \partial_{\theta_{i+1}}] = 2\partial_{\theta_{i+2}}$ (où les indices sont pris modulo 3), et $[\partial_{\theta_i}, \partial_r] = 0$. Alors en prenant $(dr, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ la base duale associée et en notant r la distance radiale, on peut pour $m > -1$ définir la métrique de Pedersen de paramètre m comme :

$$g_m = \frac{4}{(1-r^2)^2}\left(\frac{1+mr^2}{1+mr^4}\mathbf{dr}^2 + r^2(1+mr^2)(\sigma_1^2+\sigma_2^2) + \frac{r^2(1+mr^4)}{1+mr^2}\sigma_3^2\right).$$

À partir de cette métrique, il est alors possible de calculer le signe de l'invariant de Yamabe du bord, le signe de celui de Yamabe-Escobar et le signe du volume renormalisé. L'on obtient les résultats suivants :

Proposition 1.0.10. *Soient m>-1 et* g_m *la métrique de Pedersen de paramètre m, son volume normalisé est alors :*

$$V(B_1(\mathbb{R}^4), g_m) = \frac{4\pi^2}{3}\left(1 - \frac{m^2}{(1+m)^2}\right).$$

Proposition 1.0.11. *Soit* $(B_1(\mathbb{R}^4), g_m)$ *la métrique de Pedersen de paramètre* $m > -1$*.*
L'invariant de Yamabe de l'infini conforme est de même signe que $m + \frac{3}{4}$

Proposition 1.0.12. *Soient 0>m>-1, g_m la métrique de Pedersen de paramètre m, et $\overline{g_m} := (\frac{1-r^2}{2})^2 g_m$ la métrique compactifiée issue de la construction.*

Alors $Y_1(M, \partial M, [\overline{g_m}])$ est de même signe que l'évaluation suivante

$$f(m) := 4 - \frac{1}{\sqrt{-m}} \ln \left(\frac{1+\sqrt{-m}}{1-\sqrt{-m}} \right),$$

où la fonction f donnée est une fonction croissante.

Une étude des signes relatifs de ces divers invariants en fonction du paramètre de la métrique a été une importante motivation pour la recherche de la réciproque partielle 1.0.1. L'on remarque en effet que lorsque le volume renormalisé est positif, l'invariant de Yamabe de l'infini et l'invariant de Yamabe-Escobar sont tous les deux positifs. En fait, le but initial était de montrer la conjecture suivante :

Conjecture 1.0.13 (Ge, Fraux)**.** *Soit (M, g_+) une métrique Einstein asymptotiquement hyperbolique telle que le volume renormalisé soit positif. Alors l'invariant de Yamabe de l'infini conforme est positif.*

Cette thèse présente un résultat partiel dans cette direction, qui a été présenté dans le théorème 1.01 dans la partie sur les invariants conformes. L'auteur reste persuadé qu'il est possible de démontrer la conjecture sous des hypothèses plus larges que celles présentées ici.

Notations

Dans cette thèse, sauf mention explicite contraire, les notations suivantes seront utilisées :

Ensembles :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels ;
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ;
- $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes ;
- $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension n, naturellement incluse dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Espaces asymptotiquement hyperboliques :

- M l'intérieur d'une variété asymptotiquement compacte ;
- $\overline{M}$ une compactification de la variété précédente ;
- ∂M le bord de la compactification précédente ;
- g_+ une métrique riemannienne asymptotiquement compacte sur une variété M ;
- $\overline{g}$ une compactification d'une métrique asymptotiquement compacte ;
- ρ une fonction définissante du bord d'une variété compactifiée ;
- $[x]$ la classe d'équivalence pour la relation conforme de l'objet x ;
- δ_i^j le symbole de Kronecker ;
- Rm la courbure de Riemann ;
- Ric la courbure de Ricci ;
- R la courbure scalaire ;
- A_g le tenseur de Schouten de g. En cas d'absence d'ambiguïté, on omettra g de la notation ;
- $\mathring{r}$ la partie sans trace du tenseur de Ricci ;
- $I\!I_{\mathcal{N}}$ la seconde forme fondamentale d'une hypersurface $\mathcal{N}$. En cas d'absence d'ambiguïté, on omettra $\mathcal{N}$ de la notation ;
- $H_g[\mathcal{N}]$ la courbure moyenne d'une hypersurface $\mathcal{N}$. En cas d'absence d'ambiguïté, on omettra $\mathcal{N}$ de la notation ;
- ∇_g la connexion de Levi-Cevita d'une métrique g. En cas d'absence d'ambiguïté, on omettra g de la notation ;
- dV_g la forme volume associée à g. En cas d'absence d'ambiguïté, on omettra g de la notation ;
- dS_g la forme volume associée à la restriction de g à une hypersurface ;
- $\Delta_L(g)$ le Laplacien de Lichnerowicz de la métrique g. En l'absence d'ambiguïté, on omettra g de la notation.

Symboles d'algèbre multilinéaire :

- $\flat_g^i$ l'opérateur musical plan d'abaissement d'indice associé au produit scalaire g appliqué à la position i. En l'absence d'ambiguïté, on omettra la position et/ou le produit scalaire de la notation ;
- $\#_g^i$ l'opérateur musical dièse d'élévation d'indice associé au produit scalaire g appliqué à la position i. En l'absence d'ambiguïté, on omettra la position et/ou le produit scalaire de la notation ;
- $\otimes$ le produit tensoriel de deux tenseurs ;
- $\otimes^s$ le produit tensoriel symétrique de deux tenseurs, il s'agit de l'opération $\otimes$ symétrisée ;
- $\wedge$ le produit tensoriel alterné de deux tenseurs, il s'agit de l'opération $\otimes$ anti-symétrisée ;
- $\lrcorner$ le produit intérieur d'un vecteur sur une somme de formes. La même notation est abusivement utilisée pour l'opération produit scalaire avec un vecteur sur la première coordonné, qui à un vecteur et un (n+1) tenseur associe un n-tenseur ;
- $\owedge$ le produit de Kulkarni-Nomizu. Ce produit envoie deux (0,2)-tenseurs sur un (0,4)-tenseur.

Espaces de fonctions : (voir partie 2.3)

- $L^2(M, X)$ ou L^2 l'espace des fonctions de carré intégrable pour la forme volume dV_g, avec X espace de tenseur ;
- $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M})$ l'espace des fonctions de Hölder décroissantes sur la compactification ;
- $C^{k,\alpha}_{\delta}(M)$ l'espace de Hölder à poids de l'intérieur ;
- $H^{k,p}_{\delta}(M)$ l'espace de Sobolev à poids.

Modèles de variétés :

- $(\mathbb{H}, g_{can})$ un modèle de l'espace hyperbolique ;
- (S^3, h_λ) la sphère de Berger de paramètre λ. $\lambda = 1$ correspond à la sphère canonique ;
- (B^4, g_m) la métrique de Pedersen de paramètre m. $m = 0$ correspond à l'espace hyperbolique canonique.

Invariants :

- $Y(\partial M, [\overline{g}_{|\partial M}])$ l'invariant de Yamabe de l'infini conforme ;
- $Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])$ la constante de Yamabe-Escobar de premier type ;
- $Y_2(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])$ ou $Q(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])$ la constante de Yamabe-Escobar de deuxieme type ;
- $V(M, g_+)$ le volume renormalisé d'une métrique Einstein asymptotiquement hyperbolique. En cas d'absence d'ambiguïté, on omettra (M, g_+) de la notation. À ne pas confondre avec la forme volume, ou le volume d'un compactifié.

Première partie

Cadre théorique

Chapitre 2

Coordonnées spécifiques et espaces fonctionnels

Ce chapitre rappelle les définitions usuelles dans les espaces asymptotiquement hyperboliques, couramment utilisées dans la littérature (particulièrement bien présentées en anglais dans la monographie [Lee06]).

2.1 Définition des espaces asymptotiquement hyperboliques Einstein

Soit $\overline{M}$ une (n+1) variété à bord compacte, lisse et connexe. On notera ∂M son bord, et M son intérieur.
Une *fonction définissante* sera une fonction $\rho : \overline{M} \to \mathbb{R}$, strictement positive sur M et $C^1(\overline{M})$, qui s'annule sur ∂M et telle que la différentielle est non nulle partout sur ∂M.

On considère une métrique Riemannienne g_+ sur M, et on dira par la suite que la métrique (et par abus de notation, la variété Riemannienne correspondante) est *conformément compacte de régularité $C^{l,\beta}$ (et d'infini ∂M)* pour un entier positif $l \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant \beta < 1$, s'il existe une variété compacte à bord $\overline{M}$ d'intérieur M et une fonction définissante lisse ρ telle que la transformation conforme de la métrique d'origine $\rho^2 g_+$ admette une extension $C^{l,\beta}$ en un champ tensoriel défini positif de $\overline{M}$, notée en l'absence d'ambiguïté $\overline{g}$. Pour une métrique riemannienne conformément compacte, la classe conforme de la métrique induite sur le bord $[\overline{g}_{|T\partial M}]$ est bien définie et indépendante du choix de ρ. On appellera *infini conforme* cette classe conforme.

Enfin, on dira qu'une métrique Riemannienne (et la variété correspondante) g_+ sur M est *asymptotiquement hyperbolique de régularité $C^{l,\beta}$* si g_+ est conformément compacte de régularité $C^{l,\beta}$ (et d'infini ∂M) avec $l \geqslant 2$ et qu'il existe une fonction définissante ρ telle que $|d\rho|^2_{\overline{g}} = 1$ sur tout ∂M. Cette terminologie vient des travaux de Mazzeo (dans [Maz86] et [Maz88]), qui prouvent que si g_+ est conformément compact de régularité au moins $C^{2,0}$, alors (M, g_+) est complet et sa courbure sectionnelle s'approche uniformément de $-|d\rho|^2_{\overline{g}}$ au voisinage de ∂M.

Pour le reste de la thèse, on se fixe ($\overline{M}$, g_+, ρ) avec une telle structure de variété connexe asymptotiquement hyperbolique de régularité $C^{l,\beta}$, avec $l \geqslant 2$.
La fonction définissante fixée définie une famille de voisinage particulier de ∂M dans $\overline{M}$ par l'expression :

$$A_\epsilon(\rho) = A_\epsilon := \rho^{-1}(]0, \epsilon[) = \{z \in M, 0 < \rho(z) < \epsilon\}\,.$$

Conventions :

Dans la suite, la convention de sommation d'Einstein sera utilisée sans mention explicite avec des indices Romain allant de 1 à $n+1$. En cas de besoin, on utilisera des indices grecs $(\alpha, \beta...)$ pour signaler des coordonnées du bord de la variété ∂M. En l'absence de spécification particulière, l'indice $n+1$ correspondra à la direction normale au bord. On se servira d'un point-virgule pour indiquer la dérivée covariante d'un champ tensoriel, où les indices correspondants à la dérivation sont situés après le point-virgule.
(e.g. dans $u_{ij;kl}$, la dérivée covariante se fait selon les directions correspondantes aux indices k et l).

On utilisera un chapeau pour exprimer le retrait d'un indice. Par exemple $u_{i_1...\hat{i_s}j...i_r}$ est le champ tensoriel où l'indice i_s a été remplacé par l'indice j.

On utilisera $Rm(g)$, $Ric(g)$ et $R(g)$ pour respectivement la courbure Riemannienne, de Ricci et scalaire d'une métrique Riemannienne C^2, et $R_{ijkl}(g)$, $R_{ij}(g)$ et R(g) leurs coordonnées respectives. En cas d'absence de confusion possible, une omission de la mention à la métrique sera possible.
Les conventions sont choisies de manière à ce que la courbure de Ricci soit donnée par la contraction $R_{ik} = R_{ijk}{}^j$ et que la courbure scalaire soit donnée par $R = R_i{}^i$.

Pour tout calcul en coordonnées, sauf mention du contraire, on utilisera le fait d'avoir fixé une métrique g_+, et les dérivées covariantes ainsi que les isomorphismes musicaux seront ceux de g_+. L'unique exception récurrente sera $\overline{g}^{ij}$, qui doit être compris comme les coefficients de l'inverse de la matrice $(\overline{g}_{ij})$, où $\overline{g} = \rho^2 g_+$.

Enfin, on rappelle que g_+ est dite *Einstein* si elle est solution de l'équation d'Einstein (*i.e.* la courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique) :

$$Ric = \lambda g_+$$

Si g_+ est asymptotiquement hyperbolique, alors le coefficient de proportionnalité peut être fixé à $\lambda = -n$. On fait par la suite ce choix, qui a pour conséquence, voir [Gra99], que la métrique compactifiée est automatiquement ombilic.

2.2 Cartes de Möbius

Les cartes de Möbius sont un ensemble de cartes particulières qui mettent l'accent sur le lien avec l'espace hyperbolique.
Il s'agit d'un ensemble de cartes particulièrement adapté aux calculs pour le cadre dans lequel nous allons nous placer par la suite, et qui permettra de définir une extension des espaces de Hölder sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ aux variétés considérées.

On commence par choisir arbitrairement un recouvrement fini d'un voisinage $\mathcal{W}$ de ∂M dans $\overline{M}$ par des cartes lisses $(\Omega_i, \Theta_i)_{i\in I}$, qui sont de la forme $\Theta_i = (\theta_\alpha, \rho) = (\theta_i^1, ...\theta_i^n, \rho)$ et peuvent être prolongées en des cartes $\overline{\Omega}$ sur $\overline{M}$. On appelle par la suite ces cartes particulières des *cartes d'arrière-plan* pour $\overline{M}$.

Par compacité, on peut trouver un (petit) nombre strictement positif ϵ tel que $A_\epsilon \subset \mathcal{W}$, ainsi que pour tout $p \in A_\epsilon$, l'existence d'un système de cartes d'arrière-plan (Ω_i, Θ_i) qui contient à la fois p et un ensemble de la forme :

$$\{(\theta_i, \rho) : |\theta_i - \theta_i(p)| < \epsilon,\ 0 \leqslant \rho < \epsilon\}.$$

On fixe alors un tel ϵ et pour chaque p une telle carte, dont l'indice sera donné par $i(p) \in I$.

Choix du modèle pour l'espace hyperbolique :

Le modèle de l'espace hyperbolique sera dans cette thèse celui du demi plan supérieur :

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}^{n+1} = \{(x, y) = (x^1, ...x^n, y) \ \in \mathbb{R}^{n+1}, y > 0\},$$

avec la métrique $\breve{g}$ donnée par $\breve{g} = y^{-2} \sum_k (dx^k)^2$.

Dans ce modèle, on choisit un point spécial $(x_0, y_0) = (\overline{0}, 1)$ et travaillons à son voisinage. Soit $B_r \subset \mathbb{H}$ la boule géodésique (pour l'espace hyperbolique) de rayon r autour de (x_0, y_0). Un calcul donne alors que :

$$B_r \subset \{(x; y) : |x|_2 < sinh(r), e^{-r} < y < e^r\}$$

où $|x|_2$ est la norme euclidienne de x vu comme élément de $\mathbb{R}^n$.

Soit ensuite un point quelconque $p_0 \in A_{\frac{\epsilon}{8}}$, et $(\Omega_i(p), \Theta_i(p))$ la carte d'arrière-plan correspondant à p_0 choisie précédemment, on appelle alors *la carte de Möbius centré en* p_0 *(avec carte d'arrière-plan* $(\Omega_i(p), \Theta_i(p))$*)* la carte :

$$\Phi_{p_0} : \begin{cases} B_2 & \rightarrow \quad \text{M} \\ (x, y) & \mapsto \quad (\theta_{i(p_0)}, \rho) := (\theta_{i(p_0)}(p_0) + \rho(p_0)x, \rho(p_0)y) \end{cases}$$

Comme $\rho(p_0) < \epsilon/8$ et $e^2 < 8$, la fonction Φ_{p_0} est bien définie, et est un difféomorphisme entre B_2 et un voisinage de p_0 qui envoie $(\overline{0}, 1)$ sur p_0.

Pour les autres points, soit (Φ_i) une famille finie de cartes $\Phi_i : B_2 \rightarrow M$ telle que $\{\Phi_i(B_2)\}$ soit un recouvrement d'un voisinage de $M \backslash A_{\frac{\epsilon}{8}}$, et telle que chacune de ces cartes admette une extension lisse à un voisinage de B_2. Par convention, on nomme également ces cartes des *cartes de Möbius*.
Les deux lemmes suivants montrent que dans ces cartes la géométrie de (M,g_+) est uniformément bornée, et qu'il est possible d'extraire une sous-famille plus petite qui reste couvrante. Ces résultats soulignent donc l'intérêt de l'introduction de telles cartes pour les calculs. Le lecteur intéressé pourra trouver la preuve de ces faits dans les lemmes 2.1 et 2.2 de [Lee06].

Lemme 2.2.1 (Lee 06)**.** *Il existe une constante $C > 0$ telle que si $\Phi_{p_0} : B_2 \rightarrow M$ est une carte de Möbius,*

$$|\Phi^*_{p_0}(g_+) - \breve{g}|_{C^{l,\beta}(B_2)} \leqslant C,$$

$$\sup_{B_2} |\Phi^*_{p_0}(g_+)^{-1}\breve{g}| \leqslant C.$$

Lemme 2.2.2 (Lee 06)**.** *Il existe un ensemble au plus dénombrable de points $\{p_i\} \subset M$ et de cartes de Möbius correspondantes $\Phi_i = \Phi_{p_i} : B_2 \rightarrow M$ telle que les ensembles $\{\Phi_{p_i}(B_1)\}$ recouvrent M et que les ensembles $\{\Phi_i(B_2)\}$ soient uniformément localement finis. Dit autrement, il existe un entier N tel que pour tout indice i, $\Phi_i(B_2)$ ait une intersection non triviale avec $\Phi_j(B_2)$ pour au plus N différentes valeurs de j.*

2.3 Espaces fonctionnels usuels

Dans cette section, on présente les principaux espaces fonctionnels utilisés dans l'étude des espaces asymptotiquement hyperboliques ainsi que les liens entre ces espaces fonctionnels. Ce sont des constructions déjà connues, présentées par exemple dans la monographie [Lee06].
On va construire les espaces de Hölder à poids sur M, sur sa compactification $\overline{M}$ et les espaces de Sobolev à poids, soit trois familles de normes fonctionnelles.

Codomaine des fonctions : On dira que E est un *fibré tensoriel géométrique sur* $\overline{M}$ si c'est un sous-fibré d'un fibré tensoriel de la forme $T^{r_1}_{r_2}\overline{M}$ (tenseur de rang covariant r_1 et de rang contravariant r_2) qui est associé à une somme directe (non nécessairement irréductible) de la représentation standard de O(n + 1) (ou SO(n + 1) si M est orienté) sur les tenseurs de même rangs covariants et contravariants sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
On gardera le même nom (E ici) pour la restriction d'un tel fibré à M.
On définit le *poids* d'un sous-fibré de $T^{r_1}_{r_2}\overline{M}$ comme le nombre $r := r_1 - r_2$. Cette définition découle naturellement du comportement de la norme d'un tenseur de ce fibré sous une transformation conforme. Ainsi, un rapide calcul nous donne que si $T \in T^{r_1}_{r_2}\overline{M}$ et que $\overline{g} = \rho^2 g_+$, alors :

$$|T|_{g_+} = \rho^r |T|_{\overline{g}}$$

Espaces de Hölder décroissant sur la compactification :
Commençons par la définition des *espaces de Hölder décroissants (sur la compactification) de fonctions et champs tensoriels*, pour pouvoir parler de continuité jusqu'au bord. Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier positif et $0 \leqslant \alpha < 1$ un réel, et définissons $C^{k,\alpha}_{(0)}(\overline{M})$ comme l'espace (de Banach) des fonctions qui ont k dérivées qui sont α-Hölder continues jusqu'au bord une fois tirées en arrière dans n'importe quelle carte d'arrière-plan (en particulier les cartes de Möbius, voir 2.2), et la norme de cet espace est le supremum des normes $C^{k,\alpha}$ sur ces cartes.
Pour $0 \leqslant s \leqslant k + \alpha$, on définit en tant que sous-espace $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M}) \subset C^{k,\alpha}_{(0)}(\overline{M})$ par :

$$C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M}) := \left\{ u \in C^{k,\alpha}_{(0)}(\overline{M}), u \in \mathcal{O}(\rho^s) \right\}$$

Notons alors que cette définition a un caractère local. Donc pour E un fibré tensoriel géométrique, il est possible d'étendre la définition comme suit : on fixe $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M}, E)$ comme l'espace des fonctions sur le fibré tensoriel géométrique telles que chaque coordonnée de la fonction dans chaque carte d'arrière-plan appartienne à $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M})$.

Le lemme suivant permet alors de comprendre un peu mieux cet espace fonctionnel (voir le lemme 3.1 de [Lee06] pour une preuve) :

Lemme 2.3.1 (Lee 06)**.** *Soient $0 \leqslant \alpha < 1$ et $0 \leqslant s \leqslant k+\alpha$ et soit E un fibré tensoriel géométrique.*

1. $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M},E) = \{u \in C^{k,\alpha}_{(0)}(\overline{M},E) : \frac{\partial^j u}{\partial \rho^j}_{|\partial M} = 0$ *for* $0 \leqslant j < s\}$,
2. $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M},E)$ *est fermé dans* $C^{k,\alpha}_{(0)}(\overline{M},E)$*, donc hérite d'une norme naturelle,*
3. *Si j est un entier positif et si $j-1 < s \leqslant j \leqslant k$, alors* $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M},E) = C^{k,\alpha}_{(j)}(\overline{M},E)$,
4. *Si $k < s \leqslant k+\alpha$, alors* $C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M},E) = C^{k,\alpha}_{(k+\alpha)}(\overline{M},E)$,
5. *Si $u \in C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M},E)$ où $s \geqslant 1$, alors toute dérivée dans une carte d'arrière-plan vérifie* $\partial_i u \in C^{k-1,\alpha}_{(s-1)}(\overline{M},E)$,
6. *Si δest un réel positif vérifiant $s+\delta \leqslant k+\alpha$, alors* $\rho^\delta C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M},E) \subset C^{k,\alpha}_{(s+\delta)}(\overline{M},E)$,
7. *Si j est un entier tel que $0 < j \leqslant s$, alors* $\rho^{-j} C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M},E) \subset C^{k-j,\alpha}_{(s-j)}(\overline{M},E)$.

Espace de Hölder à poids de l'intérieur *via* les cartes de Möbius :
On continue avec la définition des *espaces de Hölder à poids (de l'intérieur) de fonctions et champs tensoriels*. Soit $\alpha \in [0,1[$ et, soit $k \in \mathbb{N}$ un entier tel que $k+\alpha \leqslant l+\beta$. Définissons sur l'espace des fonctions/champs tensoriels localement $C^{k,\alpha}$ la norme suivante :

$$||u||_{k,\alpha} := \sup_{\Phi} \left(||\Phi^* u||_{C^{k,\alpha}(B_2)} \right),$$

Où le *supremum* est pris sur toutes les cartes de Möbius, et la norme $||\cdot||_{C^{k,\alpha}(B_2)}$ est la norme Hölderienne $C^{k,\alpha}$ sur $B_2 \subset \mathbb{H}$. On pose *l'espace de Hölder $C^{k,\alpha}(M,E)$* comme l'espace des champs tensoriels pour lesquels cette norme est finie.
On définit *l'espace de Hölder de poids $\delta \in \mathbb{R}$* comme :

$$C^{k,\alpha}_\delta(M,E) := \rho^\delta C^{k,\alpha}(M,E) = \left\{ \rho^\delta u, u \in C^{k,\alpha}(M,E) \right\}$$

avec norme $||u||_{k,\alpha,\delta} := ||\rho^{-\delta} u||_{k,\alpha}$

Espaces de Sobolev à poids :

Cette famille de norme est la plus facile à construire. Rappelons qu'une métrique Riemannienne définit uniquement une forme volume, qui sera notée dV_{g_+}. Les espaces de fonctions intégrables suivant dans cette section seront tous intégrables par rapport à cette forme volume.

Soient $1 < p < +\infty$ et $0 \leqslant k \leqslant l$, on définit *l'espace de Sobolev* $H^{k,p}(M,E)$ comme l'espace (de Banach) des champs tensoriels localement intégrables u tels que les dérivées covariantes $\nabla^j u$ (dans le sens des distributions) soient des éléments de $L^p(M, E \otimes T^j M)$ pour tous indices $0 \leqslant j \leqslant k$. On peut alors définir la norme naturellement associée à cet espace :

$$||u||_{k,p} = \left(\sum_{j=1}^{k} \int_M |\nabla^j u|^p dV_{g_+} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Et pour $\delta \in \mathbb{R}$, on définit *l'espace de Sobolev de poids* δ comme :

$$H^{k,p}_\delta(M,E) = \rho^\delta H^{k,p}(M,E) = \{\rho^\delta u, u \in H^{k,p}(M,E)\}$$

avec comme norme $||u||_{k,p,\delta} := ||\rho^{-\delta} u||_{k,p}$

Notation : On distinguera les normes de Hölder et de Sobolev dans les notations avec la convention suivante. Un indice en lettre grecque, qui prend ses valeurs dans l'intervalle [0, 1[et est en seconde position comme dans $||u||_{k,\alpha}$, est utilisé pour la norme de Hölder ; un indice en lettre romaine, qui est à valeur dans $]1, +\infty[$ comme dans $||u||_{k,p}$, sert pour la norme de Sobolev. Dans les deux cas, l'indice en première position correspond aux dérivées, et la présence d'un troisième indice indique que l'on travaille avec les espaces à poids correspondants.

Propriété de faisceau des espaces fonctionnels à poids :

Les espaces fonctionnels à poids ont une structure naturelle de faisceau, vu qu'il existe des propriétés locales correspondantes. Pour $U \subset M$ un ouvert de M, on note $||u||_{k,p,\delta;U}$ et $||u||_{k,\alpha,\delta;U}$ la norme restreinte correspondante, et $H^{k,p}_\delta(U,E)$ et $C^{k,\alpha}_\delta(U,E)$ les espaces à poids de Sobolev et de Hölder des champs tensoriels sur U correspondants. S'il y a uniquement des champs scalaires (ie le fibré géométrique est trivial), le fibré sera omis des notations (eg $C^{k,\alpha}_\delta(M)$ est l'ensemble des fonctions Hölderiennes).

Cette propriété de faisceau peut être utile lorsqu'elle est utilisée en parallèle de la caractérisation suivante des espaces fonctionnels à poids (énoncé précédemment dans [Lee06] lemme 3.4) :

Lemme 2.3.2 (Lee 06)**.** *Soit u une section intégrable du fibré tensoriel géométrique E au-dessus d'un ouvert $U \subset M$. On a alors la caractérisation suivante :*

a) Soient $1 < p < +\infty$ et $0 \leqslant k \leqslant l$, alors :

$$u \in H^{k,p}_\delta(U;E) \text{ si et seulement si } \rho^{-\delta}\nabla^j u \in L^p(U; E \otimes T^j M) \text{ pour tout } j \in [\![0,k]\!],$$

et si $u \in H^{k,p}_\delta(U;E)$, alors la norme $H^{k,p}_\delta$ est équivalente à :

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant k} ||\rho^{-\delta}\nabla^j u||_{0,p;U};$$

b) Soient $0 \leqslant \alpha <1$ et $0 < k + \alpha \leqslant l + \beta$,

$$u \in C^{k,\alpha}_{\delta}(U;E) \text{ si et seulement si } \rho^{-\delta}\nabla^j u \in C^{0,\alpha}(U;\otimes T^j M) \text{ pour tout } j \in [\![0,k]\!],$$

et si $u \in C^{k,\alpha}_{\delta}(U;E)$*, alors la norme* $H^{k,p}_{\delta}$ *est équivalente à :*

$$||\rho^{-\delta}\nabla^k u||_{0,\alpha;U} + \sum_{0\leqslant j\leqslant k} \sup_U \left(|\rho^{-\delta}\nabla^j u|\right).$$

<u>Relations entre les divers espaces fonctionnels :</u>

Les deux lemmes qui suivent rappellent diverses relations connues entre ces espaces, qui nous assurent un fonctionnement similaire aux espaces correspondants sur $\mathbb{R}^n$, et nous donnent certaines inclusions. Il s'agit de résultats classiques, démontré dans [GL91] quand M est la boule unité pour le premier lemme et dans [Lee06] lemme 3.6 et 3.7 pour la généralisation. On commence par donner les liens entre des espaces de Sobolev et des espaces de Hölder à poids de l'intérieur.

Lemme 2.3.3 (Lee 06)**.** *Soit U un ouvert de M une (n+1)-variété asymptotiquement hyperbolique, et* E, E_1, E_2 *des fibrés tensoriels géométriques sur M.*

1. *Soient* $1 < p < +\infty$*,* $0 \leqslant \alpha < 1$ *,* $0 \leqslant k+\alpha \leqslant l+\beta$*, et* $(\delta,\delta') \in \mathbb{R}^2$*, alors le produit tensoriel ponctuel induit une fonction continue :*

$$C^{k,\alpha}_{\delta}(U,E_1) \times H^{k,p}_{\delta'}(U,E_2) \to H^{k,p}_{\delta+\delta'}(U,E_1\otimes E_2)$$

$$C^{k,\alpha}_{\delta}(U,E_1) \times C^{k,\alpha}_{\delta'}(U,E_2) \to C^{k,\alpha}_{\delta+\delta'}(U,E_1\otimes E_2)$$

2. *Soient* $1 < p < +\infty$ *et* $1 < p' < +\infty$*,* $0 \leqslant \alpha < 1$*, et* $0 \leqslant k+\alpha \leqslant l+\beta$*, alors il existe des inclusions continues :*

$$H^{k,p}_{\delta}(U,E) \hookrightarrow H^{k,p'}_{\delta'}(U,E), \qquad \text{pour } p \geqslant p' \quad \delta + \frac{n}{p} \geqslant \delta' + \frac{n}{p'}$$

$$C^{k,\alpha}_{\delta}(U,E) \hookrightarrow H^{k,p}_{\delta'}(U,E), \qquad \text{pour } \delta > \delta' + \frac{n}{p}$$

3. *(Inclusions de Sobolev) Soient* $1 < p < +\infty$*,* $0 < \alpha < 1$*,* $1 \leqslant k \leqslant l$*,* $k+\alpha \leqslant l+\beta$*, et* $\delta \in \mathbb{R}$*, les inclusions suivantes sont continues :*

$$H^{k,p}_{\delta}(U,E) \hookrightarrow C^{j,\alpha}_{\delta}(U,E), \qquad \text{pour } k - \frac{n+1}{p} \geqslant j+\alpha$$

$$H^{k,p}_{\delta}(U,E) \hookrightarrow H^{j,p'}_{\delta}(U,E), \qquad \text{pour } k - \frac{n+1}{p} \geqslant j - \frac{n+1}{p'}$$

4. *(Lemme de Rellich) Soient* $1 < p < +\infty$*,* $0 < \alpha < 1$*,* $0 \leqslant k \leqslant l$*,* $0 < j+\alpha \leqslant l+\beta$ *et* $\delta \in \mathbb{R}$ *alors les inclusions suivantes sont des opérateurs compacts :*

$$H^{k,p}_{\delta}(M,E) \hookrightarrow H^{k',p}_{\delta'}(M,E), \qquad \text{pour } k > k', \delta < \delta'$$

$$C^{j,\alpha}_{\delta}(M,E) \hookrightarrow C^{j',\alpha}_{\delta'}(M,E), \qquad \text{pour } j > j', \delta > \delta'$$

Dans un second temps, on donne les liens entre des espaces de Hölder à poids de l'intérieur et des espaces de Hölder décroissants sur la compactification.

Lemme 2.3.4 (Lee 06). *Soit E un fibré tensoriel géométrique de poids r sur $\overline{M}$, et soient $0 < \alpha < 1$, $0 < k + \alpha \leqslant l + \beta$, et $0 \leqslant s \leqslant k + \alpha$, alors les inclusions suivantes sont continues :*

$$C^{k,\alpha}_{(s)}(\overline{M}; E) \hookrightarrow C^{k,\alpha}_{s+r}(M; E),$$

$$C^{k,\alpha}_{k+\alpha+r}(M; E) \hookrightarrow C^{k,\alpha}_{(0)}(\overline{M}; E).$$

On a maintenant tout ce qu'il faut pour parler de "sur quoi est-ce que l'on agit". Il va désormais falloir définir "avec quoi est-ce que l'on agit". C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Opérateurs elliptiques géométriques

Ce chapitre vise à démontrer les propriétés utiles d'une classe particulière d'opérateurs pseudodifférentiels sur une variété asymptotiquement hyperbolique : les opérateurs elliptiques géométriques.

3.1 Opérateurs géométriques

D'abord, on cherche un type d'opérateurs acceptable pour l'étude de la géométrie de la variété.

Soient E et F des fibrés tensoriels géométriques sur M. On dira qu'un opérateur pseudodifférentiel linéaire $P : C^\infty(M; E) \to C^\infty(M; F)$ est un *opérateur géométrique d'ordre m* si les composantes de Pu (pour $u \in C^\infty(M; E)$) pour n'importe quel système de coordonnées sont des combinaisons linéaires des composantes de u et de ses dérivées partielles avec comme coefficients des polynômes universels en les coordonnées de la métrique g_+, leurs dérivées partielles, et de la fonction $(detg_{+ij})^{-1}$ $\left(\text{si M est orienté, on autorise même } (detg_{+ij})^{-\frac{1}{2}}\right)$. De plus, ces polynômes doivent être tels que les coefficients des j^{me} dérivées de u n'impliquent au plus que les premières m − j dérivées de la métrique (en particulier seules les m premières dérivées de u peuvent être impliquées).

Cette définition admet d'après les travaux de P. Stredder [Str75] une reformulation :

Proposition 3.1.1 (Stredder 75). *Pour un opérateur pseudodifférentiel linéaire P, il est équivalent de demander que P soit un opérateur géométrique d'ordre m et que P puisse s'écrire comme la somme de contraction de tenseurs qui peuvent s'écrire, à permutation des indices près, de la forme :*

$$\nabla^j u \otimes \nabla^{k_1} Rm \otimes \cdots \otimes \nabla^{k_l} Rm \otimes \left(\bigotimes^q g_+\right) \otimes \left(\bigotimes^p g_+^{-1}\right) \otimes \left(\bigotimes^s dV_{g_+}\right),$$

avec la condition $0 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant k_i \leqslant m - j - 2$ et s=0 si M n'est pas orienté.

(Rm est la version covariante du tenseur de courbure de Riemann)

Remarque : Cette proposition confirme la justesse du choix de la définition, puisqu'elle montre que les seuls opérateurs que l'on pourra obtenir avec celle-ci ne dépendront que des données géométriques de la variété Riemannienne. De plus, tous les choix raisonnables de coefficients pour les opérateurs sont présents (dérivée naturelle, courbure et ses dérivées, volume et orthogonalité).

Exemple : Parmi ces opérateurs, on retrouve entre autres le laplacien ($\nabla^*\nabla$), qui rentre naturellement dans la caractérisation donnée par P. Stredder.

3.2 Fonction indicielle d'un opérateur elliptique géométrique

Pour un opérateur géométrique dans un contexte d'une variété asymptotiquement hyperbolique, il est naturel de vouloir être en capacité d'extraire des informations sur son comportement proche du bord. C'est à cette fin que l'on va définir la fonction indicielle et le rayon indiciel.

Soient E et F des fibrés tensoriels géométriques sur M, alors un opérateur pseudodifférentiel $P : C^\infty(M;E) \to C^\infty(M;F)$ est appelé *uniformément dégénéré* s'il est possible de l'écrire dans les cartes d'arrière-plan comme une combinaison linéaire de polynômes en la fonction définissante multipliée par une dérivation suivant une coordonnée (i.e. $\rho\frac{\partial}{\partial\theta_i}$), avec coefficients au moins continus jusqu'au bord. Une réécriture utilisant la proposition 3.1.1, suivie de simples calculs, permet de voir que les opérateurs géométriques seront bien de cette forme :

Proposition 3.2.1 (Lee 06)**.** *Soit (M, g_+) une $(n+1)$-variété asymptotiquement hyperbolique de régularité $C^{l,\beta}$, avec $0 \leqslant \beta < 1$. Soit E un fibré tensoriel géométrique sur M, et $P : C^\infty(M;E) \to C^\infty(M;E)$ un opérateur géométrique d'ordre $m \leqslant l$. Alors P est uniformément dégénéré*

Schéma de la preuve. (Voir lemme 4.1 de [Lee06])
On commence par noter que le fait de conserver le type de tenseur impose dans l'expression de 3.1.1 une égalité entre le nombre de chaque terme présent avant contraction, plus précisément (avec les mêmes notations) que $2q = j + 2p + (n+1)s + 4l + \sum k_i$.

Cela permet d'introduire artificiellement des puissances de ρ, tout en démontrant que $\rho^j\nabla^j$ et les produits tensoriels avec $\rho^2 g_+$, $\rho^{-2}g_+^{-1}$ ou encore avec $\rho^{4+k}\nabla^k Rm$ sont bien des opérateurs uniformément dégénérés. □

L'intérêt de voir qu'un opérateur P est uniformément dégénéré réside dans la *fonction indicielle* qui est associée aux opérateurs uniformément dégénérés. Ainsi, pour $s \in \mathbb{C}$, un morphisme de fibré $I_s(P) : E_{|\partial M} \to E_{|\partial M}$ peut être construit.
Pour cela, soit $\overline{u} \in E_{|\partial M}$, et on prend un prolongement arbitraire $\overline{u}$ à une section $u \in C^m$ de E au-dessus d'un voisinage W de ∂M. Alors $\rho^{-s}P(\rho^s u)$, qui est défini sur $W \cap M$, admet un prolongement par continuité à ∂M. On définit donc la fonction indicielle d'indice s évaluée en $\overline{u}$ comme la restriction de ce prolongement à ∂M (et il est facile de voir que le résultat est indépendant du choix du prolongement $\overline{u}$) :

$$I_s(P)(\overline{u}) := \left(\rho^{-s}P(\rho^s u)\right)_{|\partial M}.$$

Afin de mieux comprendre cette définition, il est utile de regarder ce qui se passe en coordonnées locales. Soit un point $\hat{p} \in \partial M$, et soient des coordonnées d'arrière-plan (θ, ρ) définies sur un voisinage de $\hat{p}$ dans $\overline{M}$, alors il existe des sections de $\mathcal{L}(E)$, notées $a^{j_1,\cdots j_k}$ (de telle sorte que $a^{j_1,\cdots j_k}(\theta,\rho)$ est un homéomorphisme de la fibre (θ,ρ)) telle que :

$$P(u)(\theta,\rho) = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant j_1,\ldots,j_k\leqslant n+1}} a^{j_1,\cdots j_k}(\theta,\rho)\left[(\rho\partial_{j_1})\ldots(\rho\partial_{j_k})u(\theta,\rho)\right].$$

Alors la fonction indicielle est donnée par (où $n+1$ est la direction normale au bord) :

$$I_s(P)(\overline{u}) = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant m\\ j_1=\ldots=j_k=n+1}} s^k a^{n+1,\ldots,n+1}(\theta,0)\left[\overline{u}(\theta)\right],$$

On pourra remarquer la similarité de l'expression avec le symbole de l'opérateur pseudodifférentiel, que l'on ne considérerait que dans la direction normale et sur le bord (cette remarque est purement intuitive, puisque le symbole d'un opérateur pseudodifférentiel n'est défini que modulo l'action d'un opérateur régularisant).

Étant donné un tel morphisme de fibré, il est naturel de commencer par s'intéresser à son noyau. Un résultat intéressant de Lee présenté dans le lemme 4.3 de [Lee06] est que la dimension de ce noyau ne dépend pas du point au-dessus duquel on regarde l'action sur la fibre, à condition que le bord soit connexe :

Proposition 3.2.2 (Lee 06). *Soit (M, g_+) une $(n+1)$-variété $C^{l,\beta}$ asymptotiquement hyperbolique connexe et de bord ∂M connexe, et soient $0 \leqslant \beta < 1$ et $P : C^\infty(M;E) \to C^\infty(M;E)$ un opérateur géométrique d'ordre $m \leqslant l$. Alors la fonction :*

$$\begin{cases} \partial M & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \hat{p} & \longmapsto & dim(Ker(I_s(P)_{|\hat{p}})) \end{cases}$$

est constante.
Dit autrement, si le morphisme $I_s(P)$ est singulier en $\hat{p}$, alors il est singulier sur tout ∂M, et la dimension du noyau ne dépend pas du point de ∂M.

De plus, il existe au plus un nombre fini de points $s \in \mathbb{C}$ tel que le noyau du morphisme de fibré soit non trivial.

Il est donc possible de définir les *exposants caractéristiques* de P comme l'ensemble des $s \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un point $\hat{p} \in \partial M$ avec $I_s(P)$ singulier en $\hat{p}$. La *multiplicité* d'un tel s exposant caractéristique est alors la dimension du noyau de la fonction indicielle en l'indice s et en n'importe quel point de ∂M.

3.3 Rayon indiciel d'un opérateur géométrique

Un petit calcul à l'aide de l'adjoint formel démontre ainsi que l'ensemble des exposants d'un opérateur géométrique formellement autoadjoint admet une symétrie :

Proposition 3.3.1 (Lee 06). *Soit P un opérateur géométrique d'ordre $m \leqslant l$ formellement autoadjoint agissant sur les sections d'un fibré tensoriel géométrique E de poids r, alors l'ensemble des exposants caractéristiques de P est symétrique par rapport à la ligne $Re(s) = \frac{n}{2} - r$.*

Schéma de la preuve. Un calcul minutieux en coordonnées de l'adjoint formel des opérateurs $\rho\frac{\partial}{\partial\theta_i}$ sur les sections d'un fibré tensoriel géométrique E de poids r, permet de l'écrire de la forme :

$$(\rho\frac{\partial}{\partial\theta_i})^* = \rho\frac{\partial}{\partial\theta_i} + (n-2r)\delta_i^{n+1} - \rho b_i(\overline{g}, \overline{g}^{-1}),$$

où b_i est un polynôme à coefficient constant.
Cela permet d'écrire l'adjoint formel de P en coordonnées en fonction de l'expression de P dans ces coordonnées, et en passant à la limite, d'en déduire que

$$I_s(P^*) = I_{n-2r-\overline{s}}(P)^*, \quad \forall s \in C$$

Ce qui, avec l'hypothèse de caractère autoadjoint, permet de conclure $\square$

En particulier, il existe un exposant caractéristique de partie réelle plus grande que $\frac{n}{2} - r$. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'exposants caractéristiques, on peut définir le *rayon indiciel* comme la plus petite partie réelle de tels exposants caractéristiques (i.e. le rayon indiciel est le plus petit $R \geqslant 0$ tel qu'il existe un exposant caractéristique de partie réelle $\frac{n}{2} - r + R$).

Le résultat suivant, bien connu de la littérature, permet d'effectivement calculer des rayons indiciels pour une classe particulière d'opérateurs :

Proposition 3.3.2 (Lee 06)**.** *Soit $P = \nabla^*\nabla + \mathcal{K}$ un opérateur pseudodifférentiel tel que $\mathcal{K}$ est un opérateur d'ordre 0 (on dit alors que P est un opérateur de Laplace) agissant sur un fibré tensoriel de poids r. Alors pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$I_s(P) = I_0(P) + s(n - s - 2r).$$

Schéma de la preuve. Il s'agit pour commencer de remarquer que $\forall s, I_s(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_{|\partial\mathcal{M}}$, et donc que l'on peut réduire le problème à l'étude de $\nabla^*\nabla$.
Puis montrer que pour $\overline{u} \in C^2(\overline{M}, \mathbb{R})$, on a $\rho^{-s}\nabla^*\nabla(\rho^s\overline{u}) = s(n-s-2r)\overline{u} + \nabla^*\nabla(\overline{u}) + o(\rho)$ en utilisant les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}
|d\rho|^2_{\overline{g}} &= 1 + o(\rho), \\
|\nabla\rho|^2_{g_+} &= \rho^2 + o(\rho^2), \\
\rho_{;ij} &= \rho^{-1}\left(2\partial_i\rho\partial_j\rho - \overline{g}_{ij}\right) + o(\rho^{-1}), \\
\nabla^*\nabla(\rho^s) &= s(n-s)\rho^s + o(\rho^s), \\
D^k_{ij} &= -\rho^{-1}\left(\delta^k_i\partial_j\rho + \delta^k_j\partial_i\rho - \overline{g}^{kl}\overline{g}_{ij}\partial_l\rho\right),
\end{aligned}$$

où l'on a noté D le tenseur différence entre la connexion de Levi-Cevita de g_+ et de son compactifié $\overline{g}$: $D = \nabla - \overline{\nabla}$. □

3.4 Gain de régularité *via* des opérateurs géométriques elliptiques

On rappelle qu'on dit qu'un opérateur différentiel P : $C^\infty(M;E) \to C^\infty(M;F)$ est elliptique si son symbole principal est inversible (si on voit le symbole principal σ_P comme une fonction de l'espace des tenseurs symétriques sur le tangent $S^k(T^*M) \otimes E \to F$, cela revient à demander que pour $\theta \in T^*M \backslash \{0\}$, la fonction $x \in E \mapsto \sigma_P(\theta \otimes ... \otimes \theta \otimes x)$ soit inversible).

L'exemple typique d'opérateur elliptique sera le laplacien $\Delta_g := \nabla^* \nabla$, puisque son symbole principal vérifie pour $\theta \in T^*M \backslash \{0\}$ et $x \in E$ que $\sigma_{\Delta_g}(\theta \otimes \theta \otimes x) = g(\theta, \theta)x$.

Les intérêts principaux des opérateurs elliptiques sont leur caractère régularisant (estimations de Schauder), leur caractère Fredholm et la possibilité (si l'ellipticité est forte) d'utiliser le principe du maximum sur des variétés compactes. La variété que nous considérons est uniquement *asymptotiquement* compacte, des hypothèses et du travail supplémentaire sont alors nécessaires pour généraliser ces principes. Nous aurons besoin en particulier du résultat de régularisation de la monographie de Lee [Lee06], qui s'appelle là-bas lemme 6.4 :

Proposition 3.4.1 (Lee 06). *Soit (M, g_+) une $(n+1)$- variété $C^{l,\beta}$ asymptotiquement hyperbolique et connexe, avec $n \geqslant 1$, $l \geqslant 2$, et $0 \leqslant \beta < 1$, et soit E un fibré tensoriel géométrique sur M. On suppose que P : $C^\infty(M;E) \to C^\infty(M;E)$ est un opérateur pseudodifférentiel géométrique elliptique, formellement autoadjoint, d'ordre m, $0 < m \leqslant l$, et on suppose également qu'il existe un compact $K \subset M$ et une constante C>0 tels que :*

$$\forall u \in C_c^\infty(M \backslash K, E),\ |u|_{L^2} \leqslant C|Pu|_{L^2}$$

Alors, en notant R le rayon indiciel de P, on a les résultats suivants :

a) Soient $1 < p < \infty$, $m \leqslant k \leqslant l$, $|\delta + \frac{n}{p} - \frac{n}{2}| < R$, et $|\delta' + \frac{n}{p} - \frac{n}{2}| < R$. Si $u \in H_\delta^{0,p}(M;E)$ et $Pu \in H_{\delta'}^{k-m,p}(M;E)$, alors $u \in H_{\delta'}^{k,p}(M;E)$.

b) Soient $0 < \alpha < 1$, $m < k + \alpha \leqslant l + \beta$, $|\delta - \frac{n}{2}| < R$, et $|\delta' - \frac{n}{2}| < R$. Si $u \in C_\delta^{0,0}(M;E)$ et $Pu \in C_{\delta'}^{k-m;\alpha}(M;E)$, alors $u \in C_{\delta'}^{k,\alpha}(M;E)$.

Chapitre 4

Invariants conformes

Dans ce chapitre sont définis divers invariants conformes des structures asymptotiquement hyperboliques, ainsi que leurs intérêts historiques.

4.1 Constante de Yamabe

Soit $(\mathcal{N}, g_0)$ une variété C^∞ sans bord, compacte et connexe de dimension $n \geqslant 3$, et on note R_{g_0} sa courbure scalaire.

Une question naturelle qui peut se poser est la suivante : existe-t-il sur la variété $\mathcal{N}$ une métrique $\tilde{g}$, conforme à la métrique de départ g_0 (i.e. il existe u une fonction strictement positive telle que $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$) qui a une courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ constante ?

Dans un article fondateur [Yam60], Yamabe présente un argument pour l'existence d'une telle métrique. Malheureusement, il y a un défaut dans la démonstration, impossible à surpasser directement en général. Mais très rapidement, d'autres mathématiciens se sont interessés à la preuve, et ont trouvé des manières de contourner le défaut, arrivant au résultat général présenté dans cette section. Mais avant cela, introduisons des objets naturels au problème.

On rappelle que la loi de transformation en dimension n de la courbure scalaire sous une action conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g_0$ est connue et de la forme :

$$R_{\tilde{g}} = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(4\frac{n-1}{n-2} \Delta_{g_0}(u) + R_{g_0} u \right),$$

Où $\Delta_{g_0} = \nabla^*_{g_0} \nabla_{g_0}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami positif.

Yamabe a alors l'idée d'introduire un problème intégral correspondant. Il définit alors la fonctionnelle suivante :

$$Y(g) := \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{N}} R_g dV_g}{Vol(\mathcal{N})^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Sous une transformation conforme, *via* une intégration par partie, cette intégrale se transforme comme

$$Y(u^{\frac{4}{n-2}} g) = \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{N}} \left(4\frac{n-1}{n-2} |\nabla u|^2_g + R_g u^2 \right) dV_g}{\left(\int_{\mathcal{N}} u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

ce qui nous donne comme équation d'Euler-Lagrange la loi de transformation de la courbure scalaire. On s'est donc ramené à prouver l'existence d'un *extremum* d'une fonctionnelle, et c'est pourquoi on introduit l'invariant conforme suivant, dit de Yamabe (ou énergie de Yamabe) :

$$Y(\mathcal{N},[g_0]) = \inf_{g_c \in [g_0]} (Y(g_c)).$$

Le résultat final obtenu est le suivant, la construction globale de la preuve est bien exposée dans le livre d'Aubin [Aub11] :

Théorème 4.1.1 (Yamabe, Trundinger, Aubin, Schoen)**.** *Soit* $(\mathcal{N}, g_0)$ *une variété* C^∞ *sans bord, compacte et connexe de dimension* $n \geqslant 3$*.*

Alors soit dans un premier cas $Y(\mathcal{N},[g_0]) < Y(\mathbb{S}^n, g_{cann})$*, et nécessairement, il existe une métrique* $\tilde{g} \in C^\infty$ *conformément équivalente à* g_0 *de courbure scalaire constante,*

soit dans un deuxième cas $Y(\mathcal{N},[g_0]) = Y(\mathbb{S}^n, g_{cann})$*, et nécessairement,* $(\mathcal{N},[g_0])$ *est conformément équivalent à* $(\mathbb{S}^n, g_{cann})$*,*

et ce sont les seuls cas possibles.

Schéma de preuve. Une étude rapide de la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev donne l'inégalité $Y(\mathcal{N},[g_0]) \leqslant Y(\mathbb{S}^n, g_{cann})$.

Pour le premier cas, on étudie une fonctionnelle approchée de la fonctionnelle de Yamabe qui pour $q < \frac{2n}{n-2}$ est de la forme $I_q(u) := \frac{\int c_n \nabla^i u \nabla_i u + R_g u^2 dV_g}{(\int u^q)^{\frac{2}{q}}}$, afin de pouvoir utiliser des injections compactes au lieu de simplement continues. On montre que ces fonctionnelles ont des *minimums*, et que dans le cas $Y(\mathcal{N},[g_0]) < Y(\mathbb{S}^n, g_{cann})$, on peut trouver des fonctions (ϕ_q) uniformément bornées dans C^1 avec ϕ_q réalisant l'*extremum* de I_q et normées dans L^q. Puis avec le théorème d'Ascoli, on trouve par passage à la limite une solution faible de notre équation différentielle, qui devient forte par ellipticité.
Enfin, il reste une longue disjonction de cas pour montrer que si $(\mathcal{N},[g_0])$ n'est pas conformément équivalent à $(\mathbb{S}^n, g_{cann})$, alors $Y(\mathcal{N},[g_0]) < Y(\mathbb{S}^n, g_{cann})$. $\square$

Dans le cas des métriques asymptotiquement hyperboliques, il a été historiquement intéressant et prolifique de regarder la constante de Yamabe du bord $(\partial M, [\overline{g}_{|\partial M}])$, et particulièrement son signe.

4.2 Constantes de Yamabe-Escobar

Pour les variétés à bord, il est alors naturel de se poser le même type de question. Soit $(\overline{M}, \overline{g_0}, \partial M)$ une variété à bord C^∞ compacte et connexe de dimension $d \geqslant 3$, de bord ∂M, et on note $R_{\overline{g_0}}$ sa courbure scalaire.

Existe-t-il sur la variété $\overline{M}$ une métrique $\tilde{g}$, conforme à la métrique de départ $\overline{g_0}$ qui a une courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ constante ? Et si oui, quelles conditions au bord peut-on imposer sur cette métrique ?

4.2.1 Premier type de constante

Escobar a été le premier à s'intéresser à ce genre de questions dans [Esc92b], où il prouve l'existence d'une métrique conforme à courbure scalaire constante et à bord minimal (annulation de la courbure moyenne de g sur le bord) sous certaines conditions précisées ci-dessous. D'autres mathématiciens ont ensuite suivi et étendu ces conditions, on citera en particulier le travail de Brendle et Chen dans [BC09].

Pour ce problème, Escobar définit une nouvelle fonctionnelle, et un invariant conforme associé, qui sera ici appellé invariant de Yamabe-Escobar de premier type. La fonctionnelle est la suivante :

$$Y_1(\overline{M}, \partial M, \overline{g_0}) := \frac{\displaystyle\int_{\overline{M}} R_{\overline{g_0}} dV_{\overline{g_0}} + 2 \oint_{\partial M} H_{\overline{g_0}} dS_{\overline{g_0}}}{Vol(\overline{M})^{\frac{d-2}{d}}},$$

où l'on a noté H_g la courbure moyenne de g et dS_g la forme volume sur ∂M associé à la restriction de g.

Sous un changement conforme $\tilde{g} := u^{\frac{4}{d-2}} \overline{g_0}$, la fonctionnelle devient :

$$Y_1(\overline{M}, \partial M, u^{\frac{4}{d-2}} \overline{g_0}) := \frac{\displaystyle\int_{\overline{M}} 4\frac{d-1}{d-2} |\nabla u|^2_{\overline{g_0}} + R_{\overline{g_0}} u^2 dV_{\overline{g_0}} + 2 \oint_{\partial M} H_{\overline{g_0}} u^2 dS_{\overline{g_0}}}{\left(\displaystyle\int_{\overline{M}} u^{\frac{2d}{d-2}} dV_{\overline{g_0}} \right)^{\frac{d-2}{d}}},$$

dont les points critiques vérifient les équations différentielles suivantes, qui demandent que $\tilde{g}$ ait une courbure scalaire constante et une courbure moyenne nulle :

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{d-2}{4(d-1)} R_{\overline{g_0}} u - C u^{\frac{d+2}{d-2}} = 0 & \text{sur } \overline{M}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{d-2}{2} H_{\overline{g_0}} u = 0 & \text{sur } \partial M, \end{cases}$$

où $\frac{\partial}{\partial \eta}$ est le vecteur tangent unitaire normal au bord et dirigé vers l'extérieur.

Comme dans le travail de Yamabe, il est possible de définir un invariant conforme comme l'*infimum* de la fonctionnelle sur la classe conforme, qui est appelé énergie de Yamabe-Escobar de premier type :

$$Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g_0}]) := \inf_{g \in [\overline{g_0}]} \frac{\displaystyle\int_{\overline{M}} R_g dV_g + 2 \oint_{\partial M} H_g dS_g}{Vol(\overline{M}, g)^{\frac{d-2}{d}}}.$$

Le même type de travail fournit alors une majoration de cette constante par un modèle type, avec existence de solution quand l'inégalité dans cette majoration est une inégalité stricte. Ainsi pour résumer, on a :

Théorème 4.2.1 (Escobar, Brendle-Chen). *Soit $(\overline{M}, \partial M, \overline{g})$ une variété C^∞ à bord, compacte et connexe de dimension $d \geqslant 3$.*

Alors $Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) \leqslant Y_1(\mathbb{S}^d_+, \partial \mathbb{S}^d_+, g_{cann})$ (où $\mathbb{S}^d_+$ est l'hémisphère nord), et si $Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) < Y_1(\mathbb{S}^d_+, , \partial \mathbb{S}^d_+, g_{cann})$, alors il existe une métrique $\tilde{g} \in C^\infty$ conformément équivalente à $\overline{g}$ de courbure scalaire constante, et de bord minimal.

En particulier, à l'exception de l'unique condition obtenue par conjonction de $d \geqslant 6$, du caractère non conformément plat de $(\overline{M}, \overline{g})$, du caractère ombilic de ∂M, de l'annulation du tenseur de Weyl sur ∂M, et du fait que le théorème de la masse positive n'est pas valide dans la variété (en particulier la variété n'est pas spin), il existe une métrique $\tilde{g} \in C^\infty$ conformément équivalente à $\overline{g}$ telle que :

- *La courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ est constante*
- *Le bord est minimal ($H_{\tilde{g}} = 0$)*

Remarque : - Encore une fois, la comparaison de la valeur de l'invariant avec celle pour un modèle critique permet de trouver une solution. Ceci est dû au fait que le schéma des preuves est identique.

- Dans le cas où en plus de vérifier les hypothèses précédentes $\overline{g}$ est la compactification d'une métrique Einstein asymptotiquement hyperbolique, on dira ici que $\tilde{g}$ est la *première compactification de Yamabe.*

4.2.2 Second type

Escobar s'est aussi intéressé dans [Esc92a] à l'existence d'une métrique conforme à courbure scalaire nulle et de courbure moyenne du bord constante. Pour la suite des travaux dans cette direction, on citera en particulier les travaux de Chen dans [Che10] et ceux de Marques dans [Mar07].

Pour ce problème, Escobar définit une deuxième fonctionnelle en prenant comme dénominateur une puissance du volume du bord, et un invariant conforme associé dans cette thèse appellé invariant de Yamabe-Escobar de deuxième type :

$$Y_2(\overline{M}, \partial M, \overline{g_0}) = Q(\overline{M}, \partial M, \overline{g_0}) := \frac{\int_{\overline{M}} R_{\overline{g_0}} dV_{\overline{g_0}} + 2 \oint_{\partial M} H_{\overline{g_0}} dS_{\overline{g_0}}}{Vol(\partial M)^{\frac{d-2}{d-1}}},$$

où l'on a noté H_g la courbure moyenne de g et dS_g la forme volume sur ∂M associé à la restriction de g.

Sous un changement conforme $\tilde{g} := u^{\frac{4}{d-2}} \overline{g_0}$, la fonctionnelle devient :

$$Q(\overline{M}, \partial M, u^{\frac{4}{d-2}} \overline{g_0}) := \frac{\int_{\overline{M}} 4\frac{d-1}{d-2} |\nabla u|^2_{\overline{g_0}} + R_{\overline{g_0}} u^2 dV_{\overline{g_0}} + 2 \oint_{\partial M} H_{\overline{g_0}} u^2 dS_{\overline{g_0}}}{\left(\int_{\partial M} u^{2\frac{d-1}{d-2}} dS_{\overline{g_0}} \right)^{\frac{d-2}{d-1}}}, \tag{4.2.1}$$

dont les points critiques vérifient les équations différentielles suivantes, qui demandent cette fois que $\tilde{g}$ ait une courbure scalaire nulle et une courbure moyenne constante :

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{d-2}{4(d-1)} R_{\overline{g_0}} u = 0 & \text{sur } \overline{M}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{d-2}{2} H_{\overline{g_0}} u = C u^{\frac{d}{d-2}} & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

où $\frac{\partial}{\partial \eta}$ est le vecteur tangent unitaire normal au bord et dirigé vers l'extérieur.

Comme précédemment, il existe un invariant conforme associé à la fonctionnelle, appelé énergie de Yamabe-Escobar de deuxième type :

$$Y_2(\overline{M}, \partial M, [\overline{g_0}]) = Q(\overline{M}, \partial M, [\overline{g_0}]) := \inf_{g \in [\overline{g_0}]} \frac{\int_{\overline{M}} R_g dV_g + \oint_{\partial M} H_g dS_g}{Vol(\partial M, g_{|\partial M})^{\frac{d-2}{d}}}. \tag{4.2.2}$$

Cette fois, nous avons besoin d'ajouter une condition sur le caractère fini de la constante (ce qui dans les deux fonctionnelles précédentes était automatique) pour obtenir des résultats. Ce nouveau cas de figure est lié à la présence d'un noyau non trivial pour l'opérateur de trace de H^1 dans L^p. Il y a encore une majoration de cette constante par un modèle type, et sous la condition de finitude de la constante, existence de solution quand l'inégalité dans cette majoration est une inégalité stricte. Plus formellement, on a :

Théorème 4.2.2 (Escobar, Chen, Marques, Almaraz)**.**
Soit $(\overline{M}, \partial M, g_+)$ *une variété d'Einstein asymptotiquement hyperbolique* C^∞ *à bord, compacte et connexe de dimension* $d \geqslant 3$*, et* $(\overline{M}, \partial M, \overline{g})$ *une compactification.*
Alors $Q(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) \leqslant Q(B^d, \mathbb{S}^{d-1}, g_{\mathbb{R}^d})$*,*
et si $-\infty < Q(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) < Q(B^d, \mathbb{S}^{d-1}, g_{\mathbb{R}^d})$*, alors il existe une métrique* $\tilde{g} \in C^\infty$ *conformément équivalente à* $\overline{g}$ *de courbure scalaire nulle, et de courbure moyenne du bord constante.*

En particulier, si l'un des points suivant est vérifié

- $3 \leqslant d \leqslant 5$*,*
- $d \geqslant 4$ *et* ∂M *n'est pas ombilic,*
- $d \geqslant 6$ *et* ∂M *est ombilic et* $W_g = 0$*,*
- $d \geqslant 8$ *et* M *est spin,*
- $d = 8$ *et* $W_{(g_{|\partial M})} \not\equiv 0$*,*
- $d \geqslant 9$ *et* $(W_g)_{|\partial M} \not\equiv 0$*,*

alors, il existe une métrique $\tilde{g} \in C^\infty$ *conformément équivalente à* $\overline{g}$ *telle que :*

- *La courbure scalaire* $R_{\tilde{g}}$ *est nulle,*
- *La courbure moyenne du bord* $H_{\tilde{g}}$ *est constante.*

4.3 Volume renormalisé

L'étude des variétés Einstein asymptotiquement hyperboliques a largement été motivée par la mise en lumière de la correspondance Ads/CFT (Anti De Sitter/ Conformal Field Theory), d'abord par Maldacena dans [Mal03] et [Mal99], suivie également par Witten dans [Wit98] et de nombreux autres. Dans ce cadre, afin de formuler une action gravitationnelle effective, il est nécessaire de renormaliser le volume de telle métrique. Une des conséquences intéressante de la correspondance AdS/CFT est justement l'existence d'une renormalisation conforme.

Intuitivement, une renormalisation consiste à retirer les termes infinis dans le calcul d'une quantité *via* un choix de développement asymptotique dont on ne gardera que le terme fini. Avec un bon choix de développement asymptotique, on espère obtenir un nombre lié à la quantité de départ bien défini par rapport à nos invariances (par exemple, pour les espaces asymptotiquement hyperboliques Einstein, quitte à choisir des objets dans le compactifié, on souhaite obtenir des nombres indépendants du choix de la fonction définissante/de la compactification). On peut de plus espérer utiliser une méthode similaire où au lieu de garder le terme constant du développement asymptotique, l'on conserverait un terme d'une croissance fixée par une fonction particulière. La suite devrait éclairer par l'exemple ces propos.

Le lecteur intéressé par la démarche utilisée pour obtenir ces renormalisations pourra aller suivre leur présentation dans [Wit98], et leur démonstration rigoureuse dans [Gra99]. On présente ici uniquement ce qui est nécessaire à l'introduction de cette renormalisation, ainsi que quelques propriétés choisies.

Avant de pouvoir décrire ce qui est communément entendu par une renormalisation, il est nécessaire d'introduire le lemme technique suivant :

Lemme 4.3.1 (Witten 98, Graham 99). *Soit $(M, g_+, \partial M, [\overline{g}_{|\partial M}])$ un espace Einstein, asymptotiquement hyperbolique C^∞, donné avec la classe conforme de l'infini.*

Pour chaque choix de représentant de la classe conforme $\overline{g_0} \in [\overline{g}_{|\partial M}]$, il existe un voisinage du bord ∂M et une unique fonction définissante r (sur ce voisinage) tel que l'infini avec cette fonction définissante soit la métrique prescrite (i.e. $\overline{g_0} = (r^2 g_+)_{|\partial M}$) et que r soit de gradient normé (i.e. $|dr|^2_{\overline{g}} = |dr|^2_{r^2 g_+} = 1$ sur tout M).

Schéma de preuve. Il s'agit de prendre un choix arbitraire de fonction définissante ayant le bon infini. On écrit ensuite l'équation différentielle que doit satisfaire le facteur multiplicatif entre ce choix arbitraire et une compactification vérifiant les conclusions du lemme. On démontre ensuite que l'équation aux dérivées partielles du premier ordre obtenu admet bien une solution sur un voisinage de bord. □

On a maintenant les éléments nécessaires pour donner correctement le théorème suivant :

Théorème 4.3.2 (Graham). *Soit $(M, g_+, \partial M, [\overline{g}_{|\partial M}])$ un espace Einstein, asymptotiquement hyperbolique C^∞, de dimension n+1.*
Soit $\overline{g_0} \in [\overline{g}_{|\partial M}]$, et r la fonction définissante donnée par le lemme 4.3.1. On a les développements asymptotiques du volume du complémentaire de voisinage du bord suivant :

- *Si la dimension du bord n est impaire, il existe des constantes c_i et V (dépendantes de M, ∂M, g_+, $\overline{g_0}$) telles que le volume admette le développement asymptotique en ϵ suivant,*

$$\text{Vol}(\{r > \epsilon\}) = c_0\epsilon^{-n} + c_2\epsilon^{-n+2} + (\text{ termes en puissances impaires d'epsilon}) + c_n\epsilon^{-1} + V + o_{\epsilon\to 0}(1)$$

- *Si la dimension du bord n est paire, il existe des constantes c_i, L et V (dépendantes de M, ∂M, g_+, $\overline{g_0}$) telles que le volume admette le développement asymptotique en ϵ suivant,*

$$\text{Vol}(\{r > \epsilon\}) = c_0\epsilon^{-n} + c_2\epsilon^{-n+2} + (\text{ termes en puissances paires d'epsilon}) + c_{n-2}\epsilon^{-2} + L\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + V + o_{\epsilon\to 0}(1)$$

Dans ces expressions, les constantes c_i et L sont des intégrales sur ∂M de termes dépendants de la courbure de la métrique $\overline{g_0}$. On appelle volume renormalisé *la constante V dans ces expressions.*

De plus, lorsque n est impair, alors V ne dépend pas du choix de $\overline{g_0} \in [\overline{g}_{|\partial M}]$; et lorsque n est pair, alors L ne dépend pas du choix de $\overline{g_0} \in [\overline{g}_{|\partial M}]$

Remarque : Ce théorème fournit toujours un invariant de l'infini conforme des variétés d'Einstein asymptotiquement hyperboliques. Pour les variétés de dimension paire (dont le bord a une dimension impaire), il s'agira du volume renormalisé V. Pour les variétés de dimension impaire (dont le bord a une dimension paire), il s'agira de la constante logarithmique dans l'expansion du volume.

4.4 Comparaisons des invariants conformes

On a introduit divers invariants conformes des variétés asymptotiquement hyperboliques dans la section précédente, il est alors intéressant d'essayer de voir quelles sont les dépendances entre ceux-ci. Cette section cherche à présenter certains résultats dans ce sens.

4.4.1 Volume renormalisé et norme L^2 de la courbure de Weyl

Un autre résultat intéressant démontré par Anderson dans [And01] relie ce volume renormalisé avec la formule de Chern-Gauss-Bonnet. Le résultat est le suivant :

Théorème 4.4.1 (Anderson 01)**.** *Soit (M,g_+) une variété de dimension 4, Einstein et asymptotiquement hyperbolique.*

Le terme à l'infini dans la formule de Chern-Gauss-Bonnet est, à multiplication par une constante près, le volume renormalisé de la variété. On a même que :

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_M ||W||^2_{g_+} dV_{g_+} = \chi(M) - \frac{3}{4\pi^2}V(M,g),$$

Où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler, et $V(M,g)$ est le volume renormalisé de g et W la courbure de Weyl de g.

En plus de permettre un calcul efficace de volume normalisé dans des cas pratiques, ce théorème fournit une borne supérieure pour le volume renormalisé d'un 4-variété Einstein asymptotiquement hyperbolique :

$$V \leqslant \frac{4\pi^2}{3}\chi(M)$$

Avec égalité (seulement) dans le cas où la variété est hyperbolique, i.e. $M = \mathbb{H}^4/\Gamma$ avec Γ un sous groupe discret sans torsion des isométries de $\mathbb{H}^4$. Et même dans le cas d'égalité, ce théorème nous apprend que le volume renormalisé doit être un multiple entier de $\frac{4\pi^2}{3}$.

Anderson conjecture même qu'il doit exister un résultat similaire pour tous les espaces d'Einstein asymptotiquement hyperbolique de dimension paire :

Conjecture 4.4.2 (Anderson)**.** *Un résultat analogue au théorème 4.4.1 est vrai pour les espaces Einstein asymptotiquement hyperboliques de dimension $d \geqslant 2$, d pair, qui relie l'intégrande de Chern-Gauss-Bonnet (la densité d'Euler) avec $\chi(M)$ et le volume renormalisé V.*

4.4.2 Contrôle des invariants de Yamabe-Escobar par le Yamabe du bord

Pour un espace Einstein asymptotiquement hyperbolique, il existe une inégalité entre la constante de Yamabe du bord et l'invariant de Yamabe-Escobar de premier type. L'inégalité est présentée par Han-Gursky dans [GH17], et vient compléter un résultat déjà connu de Qing [Qin03]. Le résultat a ensuite été complété par un théorème de rigidité de Chen-Lai-Wang dans [CLW19].

Proposition 4.4.3 (Qing, Han-Gursky, Chen-Lai-Wang)**.** *Soit* $(\overline{M}, \partial M, g_+)$ *un espace asymptotiquement hyperbolique Einstein de dimension d tel que soit* $3 \leqslant d \leqslant 5$ *ou soit* $d \geqslant 6$ *et M est spin.*
Alors $Y(\partial M, [\overline{g}_{|\partial M}]) > 0 \Rightarrow Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) > 0$

Plus précisément, on note $I(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) := \dfrac{Vol(\partial M, \overline{g}_{|\partial M})^d}{Vol(\overline{M}, \overline{g})^{d-1}}$ *le ratio isopérimétrique pour la compactification de Yamabe (i.e. on suppose que* $\overline{g}$ *est un minimum de la fonctionnelle et en particulier est de courbure scalaire constante et de bord minimal).*
Si la dimension vérifie $d \geqslant 4$*, alors :*

$$Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) I(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])^{\frac{2}{d(d-1)}} \geqslant \frac{d}{d-2} Y(\partial M, [\overline{g}_{|\partial M}]),$$

Et si d=3, alors (en utilisant la caractéristique d'Euler) on a :

$$Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) I(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])^{\frac{1}{3}} \geqslant 12\pi\chi(\partial M).$$

De plus, pour un espace asymptotiquement hyperbolique Einstein vérifiant les hypothèses précédentes, le cas d'égalité dans les inégalités précédente est le modèle hyperbolique standard $(\mathbb{H}^d, g_{\mathbb{H}})$*.*

Remarque : Cette inégalité n'est pas conformément invariante à cause de la présence du ratio isopérimétrique de la première compactification de Yamabe. La proposition 4.4.5 dans la suite permet de dépasser ce problème.

Pour un espace Einstein asymptotiquement hyperbolique, il existe encore une fois une inégalité entre constante de Yamabe de l'infini conforme et constante de Yamabe-Escobar du second type. L'inégalité est présentée par Chen et al. dans [CLW19].

Proposition 4.4.4 (Chen-Lai-Wang)**.** *Soit* $(\overline{M}, \partial M, g_+)$ *un espace asymptotiquement hyperbolique Einstein de dimension d tel que soit* $3 \leqslant d \leqslant 7$*, soit* $d \geqslant 8$ *et M est spin, ou soit* $d \geqslant 8$ *et M est localement conformément plat. Soit* $\overline{g} = \rho^2 g_+$ *une compactification conforme quelconque et* $\hat{g}$ *la métrique induite sur le bord.*
Si la dimension vérifie $d \geqslant 4$*, alors :*

$$\frac{d-2}{4(d-1)} Q(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])^2 \geqslant Y(\partial M, [\overline{g}_{|\partial M}]),$$

Et si d=3, alors (en utilisant la caractéristique d'Euler) on a :

$$Q(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])^2 \geqslant 32\pi\chi(\partial M).$$

Il est intéressant de remarquer qu'il est possible de combiner les propositions 4.4.3 et 4.4.4, pour obtenir une inégalité conformément invariante entre la constante de Yamabe du bord et la constante de Yamabe-Escobar de premier type. Cette idée vient des travaux de Yuxin Ge et d'Alice Chang [GC] actuellement en préparation pour un article.

Proposition 4.4.5 (Ge, Chang). *Soit* $(\overline{M}, \partial M, g_+)$ *un espace asymptotiquement hyperbolique Einstein de dimension d tel que soit* $3 \leqslant d \leqslant 5$, *soit* $d \geqslant 6$ *et* M *est spin. Supposons de plus que* $Y(\partial M, [\overline{g}_{|\partial M}]) > 0$.
Si la dimension vérifie $d \geqslant 4$, *alors :*

$$Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}]) \geqslant \left(\frac{d}{d-2}\right)^{\frac{d-2}{d}} \left(4\frac{d-1}{d-2}\right)^{\frac{1}{d}} Y(\partial M, [\overline{g}_{|\partial M}])^{\frac{d-1}{d}}$$

Et si d=3, alors (en utilisant la caractéristique d'Euler) on a

$$Y_1(\overline{M}, \partial M, [\overline{g}])^3 \geqslant 384\pi^2 \chi(\partial M)^2.$$

Remarque : La proposition précédente n'énonce que l'existence d'une comparaison conformément invariante entre constante de Yamabe du bord et constante de Yamabe-Escobar du premier type, et ne prétend pas donner une comparaison optimale, encore moins étudier son possible cas d'égalité.

4.4.3 Contrôle de la constante de Yamabe du bord par le volume renormalisé et la constante de premier type de Yamabe-Escobar

On vient de présenter le résultat selon lequel la positivité de la constante de Yamabe du bord implique la positivité de l'invariant de Yamabe-Escobar de premier type. La question naturelle à se poser est alors celle de la réciproque. Comme le montre le calcul dans un cas explicite dans le chapitre 9 de cette thèse (page 77), sans hypothèse supplémentaire, la réponse à cette question est négative. En revanche, l'exemple en question (métrique de Pedersen) suggère que l'ajout d'une hypothèse sur le signe du volume renormalisé serait suffisant. Et effectivement, on montre dans la présente partie le théorème suivant :

Théorème 4.4.6.
Soit $(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g})$ *une variété asymptotiquement hyperbolique Einstein de dimension 4. Si la constante de premier type de Yamabe-Escobar* $Y_1(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g}) > 0$ *et le volume renormalisé* $V(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g}) > 0$ *sont tous les deux positifs,*
alors l'invariant de Yamabe du bord est strictement positif :

$$Y(\partial M, \overline{g}_{|\partial M}) > 0$$

Pour cette preuve, nous allons utiliser le tenseur de Schouten $A_{\hat{g}}$ d'une métrique $\hat{g}$ sur $\overline{M}^{(4)}$ défini par :

$$A_{\hat{g}} = \frac{1}{2}\left(Ric_{\hat{g}} - \frac{R}{6}\hat{g}\right),$$

et plus particulièrement, l'application de la deuxième fonction symétrique élémentaire à ses valeurs propres $\sigma_2(A_{\hat{g}})$.

Pour une variété compacte à bord $(M, \partial M)$ de dimension 4, si on ajoute un terme de bord, l'intégrale de cette fonction $\sigma_2(A_{\hat{g}})$ est un invariant conforme. Cette propriété d'invariance est évidente dans la formule de Gauss-Bonnet-Chern suivante :

$$32\pi^2\chi(M, \partial M) = \int_M |W|^2 + 16\left(\int_M \sigma_2(A_g) + \frac{1}{2}\oint_{\partial M} B_g\right),$$

où $B_g = \frac{1}{2}RH - R_{00}H - R_{\gamma\alpha\gamma\beta}I\!I^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}H^3 - H|I\!I|^2 + \frac{2}{3}\mathrm{tr}(I\!I^3)$, avec 0 l'indice correspondant au vecteur normal au bord et γ, α, β à des vecteurs tangentiels.
Pour les compactifications d'espaces asymptotiquement hyperboliques Einstein, l'intégrale de $\sigma_2(A_{\hat{g}})$ corrigée par le terme de bord est le volume renormalisé, à une multiplication par une constante strictement positive universelle près.

On se servira du résultat démontré par Sophie Chen dans le théorème 1 de [Che08] qui généralise au cas d'une variété à bord le résultat de Chang, Gursky et Yang [CGY02] et qui dit que :

Théorème 4.4.7 (Sophie Chen 2008)**.** *Soit* $(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g})$ *une variété conformément compacte de dimension 4 où le bord est totalement géodésique.*
Si $Y_1(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g}) > 0$ *et* $\int_M \sigma_2(A_g) + \frac{1}{2}\oint_{\partial M} B_g > 0$*, alors il existe une métrique conforme à la métrique de départ* $\hat{g} \in [\overline{g}]$ *telle que* $\sigma_2(A_{\hat{g}})$ *est une constante strictement positive et* $B_{\hat{g}} = 0$*.*

On aura aussi besoin du lemme suivant, que l'on peut retrouver dans [CGY02], lemme 1.1 et 1.2 :

Lemme 4.4.8 (Chang-Gursky Yang 02)**.** *On a le résultat local suivant sur une variété* C^2 *:*
On note $\overset{\circ}{r} = Ric - \frac{R}{4}g$ *la partie sans trace du tenseur de Ricci.*
On a alors que $R^2 \geqslant 24\sigma_2(A_g)$*, avec égalité que si* $\overset{\circ}{r} = 0$*.En particulier, si* $\sigma_2(A_g) > 0$*, alors R est de signe constant.*
De plus, si R est strictement positive, alors en tant qu'application bilinéaire symétrique, on a :

$$Ric \geqslant \frac{3\sigma_2(A_g)}{R}g, \qquad et \qquad -Ric + \frac{R}{2}g \geqslant \frac{3\sigma_2(A_g)}{R}g.$$

Démonstration du lemme 4.4.8. .
Le premier résultat découle directement du fait que l'on peut réécrire $A_g = \frac{\overset{\circ}{r}}{2} + \frac{R}{24}g$ et donc que

$$\sigma_2(A_g) = -\frac{1}{2}|\overset{\circ}{r}|^2 + \frac{1}{24}R^2 \leqslant \frac{1}{24}R^2$$

La deuxième affirmation se déduit d'une comparaison des normes l^1 et l^2 pour un opérateur bilinéaire sans trace E en dimension 4, plus particulièrement du fait suivant :
Fait : Pour tout vecteur X :

$$|E(X,X)| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}|E|_2|X|^2$$

Commençons par démontrer une version générale de cette affirmation. Soit donc $E \in S_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle de dimension d, que l'on suppose sans trace. On note $\lambda_1, ..., \lambda_d$ ses valeurs propres, et on suppose que $|\lambda_1| = \max_i(|\lambda_i|)$.
Comme E est supposé sans trace $\sum_i \lambda_i = 0$, donc $|\lambda_1|^2 = |-\sum_{i\neq 1}\lambda_i|^2$
Et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\lambda_1|^2 \leqslant (d-1)\sum_{i\neq 1}\lambda_i^2$
En ajoutant alors $(d-1)|\lambda_1|^2$, on obtient que $d|\lambda_1|^2 \leqslant (d-1)\sum_i \lambda_i^2$,
soit donc que $\sup_{|X|^2=1}|\sum \lambda_i x_i^2| \leqslant \sqrt{\frac{d-1}{d}}|E|_2$.
Ce qui revient à dire *via* une diagonalisation en base orthonormée que :

$$\sup_{|X|^2=1}|E(X,X)| \leqslant \sqrt{\frac{d-1}{d}}|E|_2$$

Revenons maintenant à la preuve. On cherche à minorer $-Ric + \frac{R}{2}g$ et Ric, et on peut remarquer pour cela que les opérateurs Ric et $-Ric + \frac{R}{2}g$ s'écrivent $B_\pm = \frac{R}{4}g \pm \overset{\circ}{r}$.
Donc avec le fait démontré ci-dessus, on a automatiquement que

$$\begin{aligned} B_\pm(X,X) &\geqslant \frac{R}{4}|X|^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}|\overset{\circ}{r}||X|^2 \\ &= \frac{R}{4}|X|^2 - 2\left(|\overset{\circ}{r}|\sqrt{\frac{3}{2R}}\right)\left(\sqrt{\frac{R}{8}}\right)|X|^2 \\ &\geqslant \frac{R}{4}|X|^2 - \left(|\overset{\circ}{r}|^2\frac{3}{2R} + \frac{R}{8}\right)|X|^2 \\ &= \frac{3}{R}\left(-\frac{1}{2}|\overset{\circ}{r}|^2 + \frac{R^2}{24}\right)|X|^2 \\ &= \frac{3}{R}\sigma_2(A)|X|^2 \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. □

Démonstration du théorème 4.4.6. .
Comme tout est invariant par changement conforme, on peut grâce au théorème 4.4.7 supposer que $\overline{g}$ est tel que $\sigma_2(A_{\overline{g}}) > 0$ (car une métrique Einstein asymptotiquement hyperbolique est ombilique, et une fois choisie une compactification totalement géodésique, l'hypothèse de volume renormalisé positif est équivalente grâce aux diverses formes de la formule de Gauss-Bonnet à l'hypothèse $\int_M \sigma_2(A_g) > 0$).

Alors grâce au lemme 4.4.8, et la positivité de l'invariant de Yamabe-Escobar qui dicte le signe de la courbure scalaire, on obtient par le deuxième point que :

$$0 < Ric < \frac{R}{2}g.$$

En particulier, si on prend N le vecteur normal au bord vers l'extérieur, on obtient que :

$$Ric(N,N) < \frac{R}{2}.$$

On rappelle que si $(\partial M, h)$ est une hypersurface de $(\overline{M}, \overline{g})$ munie de la restriction de la métrique, on peut grâce à la courbure de Ricci dans la direction normale et la seconde forme fondamentale ($I\!I$) relier la courbure scalaire prise pour la métrique restreinte h à celle de la métrique globale par la formule :

$$R_{(\partial M,h)} = R_{(\overline{M},\overline{g})} - 2Ric_{(\overline{M},\overline{g})}(N,N) + \mathrm{tr}(I\!I_{\overline{g}})^2 - |I\!I_{\overline{g}}|^2.$$

Enfin, on utilise une dernière fois l'hypothèse de bord ombilic : il existe une fonction w telle que $I\!I_{\overline{g}} = \lambda\overline{g}$, et donc en particulier

$$\mathrm{tr}(I\!I_{\overline{g}})^2 - |I\!I_{\overline{g}}|^2 = (3\lambda)^2 - 3\lambda^2 = 6\lambda^2 \geqslant 0$$

Ainsi on peut donc conclure que

$$R_{(\partial M,h)} > 0.$$

Or comme par définition,

$$Y(\partial M,[h]) = \inf_{u\in C^2(M,\mathbb{R}_+)} \frac{\int_{\partial M}\left(4\frac{n-1}{n-2}|\nabla u|_h^2 + R_h u^2\right)dV_h}{\left(\int_{\partial M} u^{\frac{2n}{n-2}}dV_h\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

il est évident que $Y(\partial M, [h]) \geqslant 0$

Supposons maintenant par l'absurde que $Y(\partial M, [h]) = 0$. Comme le problème de Yamabe admet une solution, il existe $u \in C^2(M, \mathbb{R}_+)$ tel que $||u||_{L^{\frac{2n}{n-2}}} = 1$ et $0 = R_{\partial M, u^{\frac{4}{n-2}}h}$, et en intégrant cette dernière relation sur ∂M, on obtient

$$0 = \int_{\partial M} \left(4\frac{n-1}{n-2} |\nabla u|_h^2 + R_h u^2 \right) dV_h > 0$$

Ce qui est absurde.

On peut donc conclure que $Y(\partial M, [h]) > 0$. $\square$

Remarque : On peut alors appliquer le corollaire 3 de Sophie Chen dans [Che08] pour résoudre simultanément le problème de $\sigma_2(A_g) > 0$ et du bord totalement géodésique :

Corollaire 4.4.9. *Soit $(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g})$ une compactification d'une variété de dimension 4 asymptotiquement hyperbolique Einstein où le bord est ombilic*
Si la constante de Yamabe-Escobar et le volume renormalisé sont strictement positifs ($Y_1(\overline{M}^{(4)}, \partial M^{(3)}, \overline{g}) > 0$ et $V > 0$), alors il existe une métrique conforme à la métrique de départ $\hat{g} \in [\overline{g}]$ telle que $\sigma_2(A_{\hat{g}})$ est une constante strictement positive et le bord est totalement géodésique $I\!I = 0$.

Deuxième partie

Gain de régularité

Chapitre 5

Laplacien naturel et fibré géométrique du tenseur de Weyl

Dans ce chapitre, on va chercher à mettre en place le cadre nécessaire à l'utilisation des outils développés dans le chapitre 3. On va donc expliciter un fibré géométrique, ainsi qu'un opérateur elliptique géométrique sur ce fibré qui vérifie de bonnes estimations asymptotiques.

5.1 Fibré géométrique du tenseur de Weyl et symétries algébriques

Cette courte partie sert à rappeler les symétries algébriques élémentaires du tenseur de Weyl d'une métrique Riemannienne g_+ en dimension (n+1), qui sera le point de base de la définition du fibré géométrique que l'on va considérer.

Par définition, le tenseur de Weyl est la partie sans trace du tenseur de courbure de Riemann.

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + \frac{1}{n-1}\left(\mathring{r} \owedge g\right)_{ijkl} + \frac{R}{(n+1)n}\left(g \owedge g\right)_{ijkl},$$

où le produit de Kulkarni-Nomizu est donné en coordonnées pour deux (0,2) tenseurs $(l,k) \in (T^*M^2)^2$ par la formule :

$$(l \owedge k)_{mnop} = l_{mo}k_{np} + l_{np}k_{mo} - l_{mp}k_{no} - l_{no}k_{mp}.$$

Le tenseur de Weyl hérite ainsi les symétries naturelles de la courbure de Riemann :

$$W_{ijkl} = -W_{jikl} = -W_{ijlk} = W_{klij} \text{ ainsi que } W_{ijkl} + W_{iklj} + W_{iljk} = 0,$$

et gagne en plus l'absence de trace $g_+^{il}W_{ijkl} = 0$.

Il est alors naturel de considérer l'ensemble des sections de tenseurs ayant les mêmes symétries *algébriques* (i.e. ne dépendant que de la valeur du tenseur au point considéré).

Définition 5.1.1. On appelle fibré géométrique du tenseur de Weyl, que l'on note $S_W(M, g_+)$ ou S_W s'il n'y a pas de risque de confusion, le fibré suivant :

$$S_W(M, g_+) := \left\{ \begin{matrix} U_{ijk}{}^l \in \#^4_{\overline{g}}(\Lambda^2 T^*M \otimes^s \Lambda^2 T^*M), & U_{ijkl} = -U_{jikl} = -U_{ijlk} = U_{klij} \\ & \text{et } U_{ijkl} + U_{iklj} + U_{iljk} = 0 \text{ et } \ \overline{g}^{il} U_{ijkl} = 0 \end{matrix} \right\}$$

5.2 Estimation asymptotique du Laplacien covariant sur S_W

Afin de prouver une estimation asymptotique du Laplacien ($\Delta_{g_+} = \nabla^* \nabla$), on va avoir besoin d'utiliser un opérateur différentiel "proche", agissant naturellement sur les formes différentielles à valeur tensorielle. L'idée est que l'espace S_W peut être vu comme un ensemble de 2-formes différentielles à valeur dans les 2-tenseurs. Par la suite, il sera possible de transformer le nombre de coordonnées covariantes et contravariantes car le Laplacien, ainsi que les résultats asymptotiques présentés, sont invariant par isomorphismes musicaux.

5.2.1 La dérivée extérieure covariante sur les formes dans un fibré géométrique

Soit E un fibré géométrique sur M quelconque, et définissons $\Lambda^q E := E \otimes \Lambda^q M$ les fibré des q-formes à valeurs dans E sur M.

Soit $D : C^\infty(M; \Lambda^q E) \to C^\infty(M; \Lambda^{q+1} E)$ la dérivée extérieure covariante sur les formes à valeurs dans E, définie pour $\alpha \in C^\infty(M; \Lambda^q M)$ et $\sigma \in C^\infty(M; E)$ par :

$$D(\sigma \otimes \alpha) := \nabla \sigma \wedge \alpha + \sigma \otimes d\alpha,$$

où le produit extérieur ci-dessus est celui entre la partie correspondant à une 1-forme de $\nabla \sigma$ et avec α, afin d'obtenir une section de $\Lambda^{q+1} M$.

On va transférer une estimation de l'asymptotique pour l'opérateur covariant de Laplace-Beltrami sur les formes à valeurs dans E pour obtenir une estimation asymptotique du Laplacien covariant en utilisant une formule "à la Weintzenböck" (inspirée entre-autres par les travaux que l'on trouve dans [Lee06]).

L'opérateur différentiel de Laplace-Beltrami est défini comme $DD^* + D^*D$, où D^* est utilisé pour signifier l'adjoint formel (pour la métrique g_+ et sa forme volume) de D.

Afin de faire le lien entre ces deux opérateurs, le lemme suivant est particulièrement utile.

Lemme 5.2.1 (Wu 17). *Soit ω une q-forme à valeurs dans E. Pour toute base orthonormale e_j de TM et sa base duale e^j, on sait que :*

$$(a) \qquad D\omega = e^j \wedge \nabla_{e_j}\omega,$$

$$(b) \quad D^*\omega = -e^j \vee \nabla_{e_j}\omega.$$

où l'on a noté pour $\alpha \in \Lambda^1 M$ une forme à valeur scalaire $\alpha\vee : \Lambda^{q+1}E \to \Lambda^q E$ l'adjoint ponctuel de $\alpha\wedge : \Lambda^q E \to \Lambda^{q+1}E$ (ie pour $\beta \in \Lambda^q E$ et $\eta \in \Lambda^{q+1}E$, on a que $g_+(\alpha \wedge \beta, \eta) = g_+(\beta, \alpha \vee \eta)$).
Une propriété intéressante de cet adjoint est la suivante : pour $(\alpha, \beta) \in \Lambda^1 M$, et $w \in \Lambda^q E$, on a

$$(c) \quad \alpha \ \wedge (\beta \vee w) + \beta \vee (\alpha \wedge w) = \langle \alpha, \beta \rangle_{g_+} w$$

Référence de preuve. Ce résultat est assez standard, et peut être trouvé dans [Wu17], Ch. 2 et Section 6.1. □

Pour obtenir une estimation, on considère donc S_W comme un sous-fibré de $\Lambda^2 T^2 M = T^2 M \otimes \Lambda^2 M$.
Le lemme suivant donne une formule de Weitzenböck, reliant ainsi le Laplacien sur les tenseurs appartenant à $\Lambda^2 T^q M$ à l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les 2-formes à valeurs dans $T^q M$. Pour écrire cette formule, on commence par définir des opérateurs d'ordre 0 agissant sur les tenseurs $u \in \Lambda^q T^{*m} M$ composantes $\widetilde{Rm}$ et $\widetilde{Ric}$. Ces opérateurs sont définis comme :

$$\widetilde{Rm}(u)_{i_1\ldots i_m l_1\ldots l_q} := \sum_{s=1}^{q} \left(\sum_{r=1}^{m} R^j{}_{l_s i_r}{}^p u_{i_1\ldots \tilde{i_r} p \ldots i_m l_1 \ldots \tilde{l_s} j \ldots l_q} + \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq s}}^{q} R^j{}_{l_s l_t}{}^p v_{i_1\ldots i_m l_1\ldots \tilde{l_s} j \ldots . \tilde{l_t} p \ldots l_q} \right),$$

$$\widetilde{Ric}(u)_{i_1\ldots i_m l_1 \ldots l_q} := \sum_{s=1}^{q} R_{l_s}{}^p u_{i_1\ldots i_m l_1 \ldots \tilde{l_s} p \ldots l_q},$$

où par convention un tilde au-dessus d'un indice signifie que cet indice est omis.

Remarque : Un simple calcul permet de vérifier que si $u \in \Lambda^q T^{*m} M$, alors $\widetilde{Rm}(u) \in \Lambda^q T^{*m} M$ et aussi $\widetilde{Ric}(u) \in \Lambda^q T^{*m} M$

Lemme 5.2.2 (Lee 06, Gicquaud-Ji-Shi 13, Fraux 23). *Pour u une section C^2 de $\Lambda^q T^{*m} M$, l'égalité suivante est vérifié en tout point :*

$$(DD^* + D^*D)u = \nabla^*\nabla u + \widetilde{Rm}(u) + \widetilde{Ric}(u).$$

Preuve. La démonstration se fait en coordonnées, à partir du lemme 5.2.1.
Soit $p \in M$ un point, on choisit alors une base orthonormée $(e_j) \in TM$ telle qu'en p, $\nabla e_j = \nabla e^j = 0$ où l'on note e^j la base duale. Soit aussi $v \in \Lambda^q T^m M$, d'après les points (a) et (b), on obtient qu'en p,

$$(D^*Dv) = -e^j \vee \nabla_{e_j}(e^k \wedge \nabla_{e_k} v),$$

$$(DD^*v) = -e^k \wedge \nabla_{e_k}(e^j \vee \nabla_{e_j} v).$$

Donc grâce aux hypothèses sur notre base e^j,

$$(D^*Dv) = -e^j \vee (e^k \wedge \nabla_{e_j}\nabla_{e_k} v), \quad (DD^*v) = -e^k \wedge (e^j \vee \nabla_{e_k}\nabla_{e_j} v).$$

Ceci se réécrit avec le point (c)

$$(D^*Dv) = e^k \wedge (e^j \vee \nabla_{e_j}\nabla_{e_k} w) - g^{kj}\nabla_{e_j}\nabla_{e_k} v.$$

On a donc besoin de comprendre l'opération $e^j \vee$. Soit donc $w \in T^m M$ et $l_1, ...l_q$ des indices, alors une récurrence immédiate donne avec encore le point (c) de 5.2.1 :

$$\begin{aligned}
e^j \vee \left(w \otimes e^{l_1} \wedge e^{l_2} \wedge ... \wedge e^{l_q}\right) &= e^j \vee \left(e^{l_1} \wedge (w \otimes e^{l_2} \wedge ... \wedge e^{l_q})\right), \\
&= \left(\langle e^j, e^{l_1}\rangle_g w \otimes e^{l_2} \wedge ... \wedge e^{l_q}\right) - e^{l_1} \wedge \left(e^j \vee (w \otimes e^{l_2} \wedge ... \wedge e^{l_q})\right), \\
&... \\
&= \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} \langle e^j, e^{l_s}\rangle_g w \otimes e^{l_1} \wedge ... \wedge \widetilde{e^{l_s}} \wedge ... \wedge e^{l_q},
\end{aligned}$$

où $\widetilde{e^{l_s}}$ signifie l'absence du terme e^{l_s}.
Ce qui donne donc

$$\begin{aligned}
e^k \wedge \left(e^j \vee \left(w \otimes e^{l_1} \wedge e^{l_2} \wedge ... \wedge e^{l_q}\right)\right) &= \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} \langle e^j, e^{l_s}\rangle_g w \otimes e^k \wedge e^{l_1} \wedge ... \wedge \widetilde{e^{l_s}} \wedge ... \wedge e^{l_q}, \\
&= \sum_{s=1}^{q} \langle e^j, e^{l_s}\rangle_g w \otimes e^{l_1} \wedge ... \wedge e^k \wedge ... \wedge e^{l_q}.
\end{aligned}$$

soit en notation usuelle en coordonnée où la q-forme correspond aux dernières coordonnées, on a (en utilisant encore une fois que la base est orthonormale) :

$$(D^*Dv)_{i_1...i_m l_1...l_q} = \sum_{s=1}^{q} v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} j...l_q;l_s}{}^{j} - v_{i_1...i_m l_1...l_q;j}{}^{j},$$

$$(DD^*v)_{i_1...i_m l_1...l_q} = -\sum_{s=1}^{q} v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} j...l_q}{}^{;j}{}_{l_s}.$$

Il ne reste plus qu'à appliquer l'identité de Ricci aux commutateurs $v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} j...l_q;l}{}^{j} - v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} j...l_q}{}^{;j}{}_{l_s}$:

$$\begin{aligned}
v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} j...l_q;l_s j} - v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} j...l_q;j l_s} = &\sum_{r=1}^{m} R_{j l_s i_r}{}^{p} v_{i_1...\tilde{i_r} p...i_m l_1...\tilde{l_s} j...l_q} + \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq s}}^{q} R_{j l_s l_t}{}^{p} v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} j....\tilde{l_t} p...l_q} \\
&+ R_{j l_s j}{}^{p} v_{i_1...i_m l_1...\tilde{l_s} p...l_q}
\end{aligned}$$

Et une sommation sur les différents indices s donne bien les opérateurs annoncés. □

Remarque : Cette preuve généralise celle du lemme 7.11 dans [Lee06] valide pour des éléments de $\Lambda^1 T^m M$. De même, elle généralise la preuve que donnent Gicquaud, Ji et Shi dans le lemme 2.13 de [GJS13] pour des éléments de $\Lambda^2 T^2 M$. On vérifie aisément que le résultat donné (et qui sera celui utilisé prochainement), et celui qu'ils présentent, coïncident.

Ce lemme permet au passage de réécrire l'inégalité de Yamabe pour obtenir une inégalité de type Sobolev pour le fibré des p-formes et la forme différentielle associée, mais sans assurance d'optimalité :

Corollaire 5.2.3. *Pour $w \in H^{1,2}(M, \Lambda^q T^{*m} M)$, si le bord de M est totalement géodésique et que l'on note Y(M) la constante de Yamabe-Escobar de premier type de la variété et g la métrique, on a la reformulation suivante :*

$$\frac{n-1}{4n} Y(M) \left(\int_M |w|^{\frac{2n+2}{2n}} dV_g \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \leqslant \int_M \left(|Dw|^2 + |D^* w|^2 + \frac{n-1}{4n} R_g |w|^2 - \langle \widetilde{Rm}(w), w \rangle - \langle \widetilde{Ric}(w), w \rangle \right) dVol_g$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer l'inégalité de Kato : pour $w \in H^{1,2}(M, \Lambda^q T^{*m} M)$, on a presque partout que $|\nabla |w| | \leqslant |\nabla w|$. Avec l'inégalité de Yamabe appliquée à la fonction scalaire $|w|$ on obtient :

$$\frac{n-1}{4n} Y(M) \left(\int_M |w|^{\frac{2n+2}{2n}} dV_g \right)^{\frac{n-1}{n+1}} \leqslant \int_M \left(|\nabla w|^2 + \frac{n-1}{4n} R_g |w|^2 \right) dVol_g.$$

Enfin, le lemme 5.2.2 fournit la réécriture annoncée. □

5.2.2 Estimation asymptotique des divers opérateurs différentiels

On va maintenant pouvoir définir ce qu'est une estimation asymptotique d'un opérateur différentiel. On prouvera de telles estimations pour le laplacien $D^*D + DD^*$ sur l'espace des tenseurs S_W, puis en utilisant l'expression obtenue ci-dessus on en déduira une estimation pour le laplacien $\nabla^*\nabla$.

Définition/Notation : On utilisera la notation suivante :

Soit $P : C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E)$ un opérateur différentiel sur M, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on notera :

$$(u, Pu) \gtrsim \lambda ||u||^2$$

si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K_ϵ tel que pour tout u lisse et à support compact dans $M \backslash K_\epsilon$ (noté $u \in\in C_c^\infty(M \backslash K_\epsilon, E)$), on a que

$$(u, Pu) \geqslant (\lambda - \epsilon) ||u||^2$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire sur L^2, et $|| \cdot ||$ est la norme associée.

La notation dans cette définition est malheureuse dans le sens où elle fait participer un symbole de fonction u, alors qu'elle énonce un résultat sur une classe complete de fonction, de manière asymptotique. Cette thèse se plie néanmoins à l'usage établie par la monographie de Lee [Lee06].

Le lemme suivant donne l'estimation pour le premier Laplacien, sa preuve est issue de la monographie de Lee [Lee06] (dans le lemme 7.10, utilisant les résultats de la proposition 7.3 et du lemme 7.9) :

Lemme 5.2.4 (Lee 06)**.** *Soit M une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension $(n+1)$ et de régularité $C^{l,\beta}$, avec $l \geqslant 2$ et $0 \leqslant \beta < 1$, et soit $0 \leqslant q < \frac{n}{2}$. Alors l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique* *sur les q-formes à valeur dans E satisfait l'estimation asymptotique suivante :*

$$(w,(DD^*+D^*D)w) \gtrsim \frac{(n-2q)^2}{4}||w||^2$$

Schéma de preuve. On ne donne ici qu'un bref aperçu de la preuve. Il s'agit tout d'abord de prouver une famille de minoration pour toute fonction positive $\phi \in C^2$:

$$(w,(DD^*+D^*D)w) \geqslant \int_M \langle w, \left(\phi^{-1}(DD^*+D^*D)\phi + 2\mathrm{Hess}(\log\phi)\right) w\rangle dVol_{g_+}$$

où Hess(u) est l'extension en une dérivation de $\Lambda^q M$ de l'action comme morphisme de fibré vectoriel de la Hessienne covariante de u.

En prenant alors une fonction définissante ρ, on cherche à appliquer la minoration avec $\phi = \rho^s$ pour un s optimal en utilisant un développement au voisinage du bord de $\langle w, \mathrm{Hess}(\log\rho)w\rangle$. □

On a maintenant tous les ingrédients nécessaires pour démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.2.5 (Fraux 23)**.** *Soit M une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension* $(n+1)$ *et de régularité* $C^{l,\beta}$*, avec* $l \geqslant 2$ *et* $0 \leqslant \beta < 1$ *et* $n > 4$*. Alors pour des sections de* S_W*, on a l'estimation asymptotique du Laplacien :*

$$(w,\nabla^*\nabla w) \gtrsim (\frac{n^2}{4}+4)||w||^2.$$

Preuve. Grace au lemme 5.2.2 reliant les deux opérateurs différentiels, on a pour $w \in C^\infty(M,S_W)$:

$$(w,\nabla^*\nabla w) = (w,(DD^*+D^*D)w) + (w,-\widetilde{Rm}(w)) + (w,-\widetilde{Ric}(w))$$

Un simple calcul de changement conforme (cf. [Maz88] ou [GL91]) montre que les composantes de Rm ont un développement asymptotique :

$$R_{ijkl} = -|d\rho|_{\overline{g}}^{2}\left(g_{+ik}g_{+jl} - g_{+il}g_{+jk}\right) + \rho^{-3}P_1(\overline{g},\overline{g}^{-1},\partial\overline{g}) + \rho^{-2}P_2(\overline{g},\overline{g}^{-1},\partial\overline{g},\partial^2\overline{g}), \tag{5.2.1}$$

avec P_1 et P_2 deux polynômes universels.
En particulier, comme $|d\rho|_{\overline{g}}^{2} = 1+\mathcal{O}(\rho)$, l'estimation ponctuelle suivante est immédiate $w \in C^\infty(M,S_W)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Rm}(w)_{ijkl}w^{ijkl} = \;& (R^s{}_{ki}{}^r w_{rjsl} + R^s{}_{kj}{}^r w_{irsl} + R^s{}_{kl}{}^r w_{ijsr} + R^s{}_{li}{}^r w_{rjks} + R^s{}_{lj}{}^r w_{irks} + R^s{}_{lk}{}^r w_{ijrs})\, w^{ijkl},\\
= \;& -\Big((g_+{}^s{}_i g_{+k}{}^r - g_+{}^{sr}g_{+ik})w_{rjsl} + (g_+{}^s{}_j g_{+k}{}^r - g_+{}^{sr}g_{+jk})w_{irsl} + (g_+{}^s{}_l g_{+k}{}^r - g_+{}^{sr}g_{+lk})w_{ijsr}\Big)\, w^{ijkl}\\
& -\Big((g_+{}^s{}_i g_{+l}{}^r - g_+{}^{sr}g_{+il})w_{rjks} + (g_+{}^s{}_j g_{+l}{}^r - g_+{}^{sr}g_{+jl})w_{irks} + (g_+{}^s{}_k g_{+l}{}^r - g_+{}^{sr}g_{+kl})w_{ijrs}\Big)\, w^{ijkl}\\
& +\mathcal{O}(\rho||w||^2),
\end{aligned}$$

(Donc en utilisant le fait que par hypothèse les éléments de S_W sont sans trace :)

$$\widetilde{Rm}(w)_{ijkl}w^{ijkl} = (w_{kjil} - 0 + w_{ikjl} - 0 + w_{ijlk} - 0)w^{ijkl} + (w_{ljki} + w_{ilkj} + w_{ijlk})w^{ijkl} + \mathcal{O}(\rho||w||^2),$$

(et en utilisant les symétries de base de S_W et l'identité de Bianchi :)

$$\widetilde{Rm}(w)_{ijkl}w^{ijkl} = \mathcal{O}(\rho||w||^2).$$

Avec exactement la même méthode, on obtient :

$$-\widetilde{Ric}(w)_{ijkl}w^{ijkl} = +2nw_{ijkl}w^{ijkl} + \mathcal{O}(\rho||w||^2).$$

En intégrant alors pour $w \in C_c^\infty(M, S_W)$ avec un support suffisamment proche du bord (tel que ρ soit suffisamment petit), et avec le lemme 5.2.4 :

$$\begin{aligned}(w, \nabla^*\nabla w) &= (w, (DD^* + D^*D)w) + (w, -\widetilde{Rm}(w)) + (w, -\widetilde{Ric}(w)),\\ &\gtrsim \frac{(n-4)^2}{4}||w||^2 + 0 + 2n||w||^2,\\ &\gtrsim (\frac{n^2}{4} + 4)||w||^2.\end{aligned}$$

□

5.3 Rayon indiciel du Laplacien sur S_W

Pour faire ces calculs, on appelle fibré géométrique S_W de poids 2 la transformation par les isomorphismes musicaux de S_W qui a trois coordonnées covariantes et une coordonnée contravariante (i.e. l'espace où vit naturellement la courbure de Weyl conformément invariante).

Proposition 5.3.1. *Soit* (M, g_+) *une variété asymptotiquement hyperbolique connexe de dimension* $(n+1)$ *et de régularité* $C^{l,\beta}$, *avec* $n > 4$, $l \geqslant 2$, *et* $0 \leqslant \beta < 1$,
L'opérateur de Laplace $\nabla^*\nabla - 2n$ *agissant sur le fibré géométrique* S_W *de poids 2 a un rayon indiciel* $R = \frac{1}{2}(n-4)$.

Preuve. Le schéma de la preuve est le même que celui du lemme 7.1 de la monographie de Lee [Lee06], qui cherche à calculer le rayon indiciel du Laplacien covariant pour les tenseurs totalement symétriques (le tenseur T correspond dans la monographie au tenseur D).
D'après la proposition 3.3.2, afin de déterminer $I_s(\nabla^*\nabla)$, il suffit de calculer $I_0(\nabla^*\nabla)$.

Soit $T = \nabla - \overline{\nabla}$ le tenseur exprimant la différence entre les connections de Levi-Civita de g_+ et de $\overline{g}$. Un rapide calcul montre que les coordonnées du 3-tenseur T sont :

$$T_{ij}{}^k = -\rho^{-1}(\delta_i{}^k\partial_j\rho + \delta_j{}^k\partial_i\rho - \overline{g}_{ij}\overline{g}^{kl}\partial_l\rho) \tag{5.3.1}$$

Soit $u \in C^2(M, S_W)$. On a :

$$\begin{aligned} u_{i_1i_2i_3}{}^{i_4}{}_{;l} &= \partial_l u_{i_1i_2i_3}{}^{i_4} - \Gamma_{li_1}{}^k u_{ki_2i_3}{}^{i_4} - \Gamma_{li_2}{}^k u_{i_1ki_3}{}^{i_4} - \Gamma_{li_3}{}^k u_{i_1i_2k}{}^{i_4} + \Gamma_{lk}{}^{i_4} u_{i_1i_2i_3}{}^k,\\ &= -T_{li_1}{}^k u_{ki_2i_3}{}^{i_4} - T_{li_2}{}^k u_{i_1ki_3}{}^{i_4} - T_{li_3}{}^k u_{i_1i_2k}{}^{i_4} + T_{lk}{}^{i_4} u_{i_1i_2i_3}{}^k + \mathcal{O}(1).\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Et aussi :

$$\begin{aligned}(\nabla^*\nabla u)_{i_1i_2i_3}{}^{i_4} &= -u_{i_1i_2i_3}{}^{i_4}{}_{;l}{}^l\\ &= -g_+{}^{lm}\Big(\partial_m u_{i_1i_2i_3}{}^{i_4}{}_{;l} - T_{lm}{}^j u_{i_1i_2i_3}{}^{i_4}{}_{;j} - \textstyle\sum_{s=1}^3 T_{mi_s}{}^j u_{i_1\ldots\hat{i_s}ji_3}{}^{i_4}{}_{;l} \quad + T_{mj}{}^{i_4} u_{i_1i_2i_3}{}^j{}_{;l}\Big)\\ &\qquad + o_{\rho\to 0}(1),\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Dans la suite de la démonstration (et l'annexe correspondante), on utilisera la notation $\rho_i := \partial_i\rho$.

À partir de l'équation (5.3.1), et du fait que $\rho_a\rho_b\overline{g}^{ab} = 1 + o_{\rho\to 0}(1)$ (puisque M est asymptotiquement hyperbolique), on obtient que :

$$\begin{aligned}
{g_+}^{lm}\partial_m {T_{li_t}}^k &= {g_+}^{lm}\rho^{-2}\rho_m({\delta_l}^k\rho_{i_t} + {\delta_{i_t}}^k\rho_l - \overline{g}_{li_t}\overline{g}^{kp}\rho_p) + o_{\rho\to 0}(1) = {\delta_{i_t}}^k + o_{\rho\to 0}(1);\\
{g_+}^{lm}{T_{lm}}^j {T_{ji_t}}^k &= -(n-1)\delta^k_{i_t} + o_{\rho\to 0}(1);\\
{g_+}^{lm}{T_{mi_s}}^j {T_{li_t}}^k &= \delta^j_{i_s}\delta^k_{i_t} + \overline{g}^{jk}\rho_{i_s}\rho_{i_t} - \delta^k_{i_s}\rho_{i_t}\rho_p\overline{g}^{jp} - \delta^j_{i_t}\rho_{i_s}\rho_q\overline{g}^{kq} + \overline{g}_{i_s i_t}\overline{g}^{kq}\overline{g}^{jp}\rho_q\rho_p + o_{\rho\to 0}(1);\\
{g_+}^{lm}{T_{mi_s}}^j {T_{lj}}^k &= -(n-1)\rho_{i_s}\rho_q\overline{g}^{kq} + o_{\rho\to 0}(1).
\end{aligned}$$

En insérant les résultats de l'équation (5.3.2) dans l'égalité (5.3.3), et en utilisant les résultats ci-dessus, on obtient après un long calcul (voir l'annexe B) :

$$\nabla^*\nabla u = 2nu + (n-1)Pos(u) + Bianchi(u) + O(u) + \tilde{T}(u) + o(1), \tag{5.3.4}$$

où $Bianchi(u)$ est une somme de termes dépendant multiplicativement de "somme de Bianchi" (i.e. le terme nul dans la première identité de Bianchi), $\tilde{T}(u)$ est une somme de termes dépendant multiplicativement de la trace de u par $\overline{g}$, $O(u)$ est tel que $\langle u, O(u)\rangle_{\overline{g}}$ est une somme de terme dépendant multiplicativement de la trace de u par $\overline{g}$, et $\langle u, Pos(u)\rangle_{\overline{g}}$ est la somme de la norme de vecteurs de la forme $grad(\rho)\lrcorner u$ où $\lrcorner$ est le produit scalaire sur la première coordonnée.

Or u est une section de S_W et donc admet les symétries élémentaires d'un tenseur de courbure, l'identité de Bianchi et n'a pas de trace. Donc $Bianchi(u) = 0$, $\tilde{T}(u) = 0$, et $\langle u, O(u)\rangle_{\overline{g}} = 0$.

Maintenant, soit $s \in \mathbb{C}$ une racine indicielle de $\nabla^*\nabla - 2n$ et $\hat{p}$ un point de ∂M, et soit $\overline{u} \in S_{W\hat{p}}$ un vecteur propre associé à s au point $\hat{p}$. Soit u une extension lisse arbitraire à S_W de $\overline{u}$. Comme annoncé, avec la proposition 3.3.2 sur le fibré géométrique S_W de poids 2, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u, I_s(\nabla^*\nabla - 2n)u\rangle_{\overline{g}}(\hat{p}),\\
&= s(n-s-4)|\overline{u}|^2_{\overline{g}} - 2n|\overline{u}|^2_{\overline{g}} + \langle u, I_0(\nabla^*\nabla)u\rangle_{\overline{g}(\hat{p})},\\
&= s(n-s-4)|\overline{u}|^2_{\overline{g}} + (-2n+2n)|\overline{u}|^2_{\overline{g}} + (n-1)\langle u, Pos(u)\rangle_{\overline{g}(\hat{p})} + 0.
\end{aligned}$$

En particulier, on obtient :

$$\left(s - (\frac{n}{2} - 2)\right)^2 |\overline{u}|^2_{\overline{g}} = \left(\frac{n}{2} - 2\right)^2 |\overline{u}|^2 + (n-1)\langle u, Pos(u)\rangle_{\overline{g}(\hat{p})},$$

ce qui implique que $s \in \mathbb{R}$ et que :

$$\left|s - \left(\frac{n}{2} - 2\right)\right|^2 \geqslant \left|\frac{n}{2} - 2\right|^2$$

On rappelle que le rayon indiciel est l'infimum sur les racines indicielles de la distance dans le plan complexe de la racine indicielle à l'axe d'équation Re((z)=$\frac{1}{2}$ Une conséquence immédiate du calcul précédent est donc que le rayon indiciel est nécessairement plus grand que $\frac{n}{2} - 2$.

Affirmation : Pour montrer qu'il s'agit en fait d'une égalité, il suffit alors de trouver pour un point $\hat{p} \in \partial M$ un vecteur non nul $\overline{u} \in S_{W\hat{p}}$ ayant les bonnes symétries tel que $grad_{\overline{g}}(\rho)\lrcorner\overline{u} = 0$

Commençons par prouver cette affirmation : la condition $grad(\rho)\lrcorner\overline{u} = 0$ revient en coordonné à demander que pour tous indices i_1, i_2, i_3, on ait $\overline{\rho}^k\overline{u}_{ki_1i_2}{}^{i_3} = 0$.
L'inclusion $\flat_g^4(S_W) \subset S^2\Lambda^2T^*M$ impose alors que $0 = \overline{\rho}^k\overline{u}_{i_1ki_2}{}^{i_3} = \overline{\rho}^k\overline{u}_{i_1i_2k}{}^{i_3} = \overline{\rho}^k\overline{u}_{i_1i_2i_3}{}^{k} = 0$
À présent les expressions trouvées dans l'annexe B pour les opérateurs Pos, $Bianchi$, O et T permettent d'affirmer que pour un tel vecteur $\overline{u}$, on a que $Pos(\overline{u}) = Bianchi(\overline{u}) = O(\overline{u}) = 0$.
Comme les éléments de S_W sont sans trace, on obtient $\tilde{T}(\overline{u}) = 0$.
En passant par u une extension lisse arbitraire à S_W de $\overline{u}$, on a alors par la proposition 3.3.2 et le résultat (5.3.4), on en déduit alors que pour un tel $\overline{u}$:

$$I_s(\nabla^*\nabla - 2n)_{\hat{p}}\overline{u} = s(n - s - 4)\overline{u}.$$

En résolvant l'équation $I_s(\nabla^*\nabla - 2n)_{\hat{p}}\overline{u} = 0$ en s, on obtient que $s = \frac{n}{2} - 2 \pm \left(\frac{n}{2} - 2\right)$ sont deux racines indicielles, et donc que $R \leqslant \frac{n}{2} - 2$.

Il ne reste en conséquence plus qu'à montrer que l'on peut trouver un vecteur $\overline{u} \in S_{W\hat{p}}$ tel que $grad_{\overline{g}}(\rho)\lrcorner\overline{u} = 0$. Pour cela, on se fixe un point $\hat{p} \in \partial M$ quelconque. Comme $grad_{\overline{g}}(\rho) \neq 0$, il existe une base orthonormale $(e_0, ..., e_n)$ de $T_{\hat{p}}M$ telle que e_0 soit proportionnel à $grad_{\overline{g}}(\rho)$. On note alors $(e^0, ..., e^n)$ la base duale.
Maintenant, comme $n \geqslant 4$, on peux considérer l'élément :

$$u = \#^4{}_{\overline{g}}\left(\frac{2}{3}e^1 \wedge e^2 \otimes^s e^3 \wedge e^4 - \frac{1}{3}e^1 \wedge e^3 \otimes^s e^4 \wedge e^2 - \frac{1}{3}e^1 \wedge e^4 \otimes^s e^2 \wedge e^3\right)$$

Ce tenseur est bien non nul comme $u_{123}{}^4 = \frac{2}{3}$
Vu comment le tenseur u est écrit, on a que $u \in \#^4{}_{\overline{g}}\left(\Lambda^2T^*M \otimes^s \Lambda^2T^*M\right)$. Comme les e^i forment une base, la trace de u est nulle car les termes diagonaux sont nuls. Un simple calcul permet de vérifier que u vérifie la première identité de Bianchi (b(u)=0 où b est donné dans la définition du fibré S_W 5.1.1).
Enfin, comme $e_0\lrcorner\overline{u} = 0$, on a bien que $grad_{\overline{g}}(\rho)\lrcorner\overline{u} = 0$

□

Chapitre 6

Tenseur de Weyl : Formule de Bochner et régularisation

6.1 La formule de Bochner pour la courbure de Weyl

Dans cette section, on rappele la formule de Bochner valable pour des variétés ayant une courbure de Weyl harmonique (*i.e.* telles que la courbure de Weyl soit dans le noyau de l'adjoint de la connexion), avant de voir ce que cette équation devient dans les variétés d'Einstein. Cette équation (elliptique) est essentielle, puisqu'elle va permettre de prouver la régularité de la courbure de Weyl de la métrique compactifiée (voir 6.2), qui est l'ingrédient manquant pour la preuve de la régularité d'une compactification d'une métrique Einstein (voir le chapitre 7).

Lemme 6.1.1. *Soit (M, g_+) une variété Riemannienne de dimension $n+1 \geqslant 4$, avec courbure de Weyl harmonique (i.e. $W_{mijk}{}^{;m} = 0$). Alors :*

$$\begin{aligned}
\nabla^*\nabla W_{ijkl} = &-R_{ip}W^p{}_{jkl} + R_{jp}W^p{}_{ikl} - 2(W_{ipjq}W^{pq}{}_{kl} - W_{ipql}W_j{}^{pq}{}_k - W_{ipqk}W_j{}^{pq}{}_l) \\
&+ \frac{1}{n-1}\left[R_{jp}W^p{}_{ikl} - R_{ip}W^p{}_{jkl} + R_{lp}(W^p{}_{jki} - W^p{}_{ikj}) - R_{kp}(W^p{}_{jli} - W^p{}_{ilj})\right] \\
&+ \frac{1}{n-1}[R^{pq}(W_{piql}\delta_{kj} - W_{pjql}\delta_{ki} + W_{pikq}\delta_{lj} - W_{pjkq}\delta_{li})].
\end{aligned}$$

Démonstration. On propose de suivre pas à pas la démonstration donnée dans [CM20], le lecteur intéressé pourra également aller voir [Sin92] et [HV96].
Rappellons que le tenseur de Cotton est défini par $C_{ijk} = R_{ij;k} - R_{ik;j} - \frac{1}{2n}(R_{;k}g_{+ij} - R_{;j}g_{+ik})$. Un simple calcul (qui peut être trouvé dans [Bes87], ou dans l'annexe A) montre que $C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-1}W_{mijk}{}^{;m}$.
Or par hypothèse $W_{mijk}{}^{;m} = 0$, donc le tenseur de Cotton est identiquement nul. Ceci permet d'obtenir (à partir de la seconde identité de Bianchi pour la courbure Riemannienne et quelques manipulations) la seconde identité de Bianchi pour la courbure de Weyl :

$$W_{klij;m} + W_{klmi;j} + W_{kljm;i} = 0.$$

On prend alors la dérivée équivariante de cette équation, puis la trace avec l'indice correspondant à m, c'est à dire qu l'on prend la divergence du champ tensoriel. Avec les symétries du tenseur de Weyl, il en résulte :

$$-W_{klij;m}{}^{m} - W_{klmi;j}{}^{m} + W_{klmj;i}{}^{m} = 0.$$

En utilisant encore une fois l'hypothèse de caractère harmonique, il est possible d'artificiellement introduire deux termes nuls ($W_{klmi}{}^{;m}{}_{j}$ et $W_{klmj}{}^{;m}{}_{i}$), afin de reconnaître dans l'expression un commutateur de dérivées covariantes :

$$-W_{klij;m}{}^{m} - (W_{klmi;j}{}^{m} - W_{klmi}{}^{;m}{}_{j}) + (W_{klmj;i}{}^{m} - W_{klmj}{}^{;m}{}_{i}) = 0. \tag{6.1.1}$$

Or, avec la définition même de la courbure de Riemann, on a :

$$W_{klmi;j}{}^{m} - W_{klmi}{}^{;m}{}_{j} = W_{rlmi}R^{r}{}_{kj}{}^{m} + W_{krmi}R^{r}{}_{lj}{}^{m} + W_{klri}R^{r}{}_{mj}{}^{m} + W_{klmr}R^{r}{}_{ij}{}^{m},$$

La décomposition de la courbure de Riemann en courbure de Weyl et courbure de Ricci donne :

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + \frac{1}{n-1}\left(\mathring{r} \owedge g\right)_{ijkl} + \frac{R}{(n+1)n}\,(g \owedge g)_{ijkl}\,,$$

où le produit de Kulkarni-Nomizu est donné en coordonnées pour deux (0,2) tenseurs $(l,k) \in (T^{*}M^{2})^{2}$ par la formule :

$$(l \owedge k)_{mnop} = l_{mo}k_{np} + l_{np}k_{mo} - l_{mp}k_{no} - l_{no}k_{mp}.$$

Ceci avec la première identité de Bianchi permet de réécrire le résultat que nous venons d'obtenir :

$$\begin{aligned} W_{klmi;j}{}^{m} - W_{klmi}{}^{;m}{}_{j} = &-W_{rlmi}W^{r}{}_{k}{}^{m}{}_{j} + W_{rkmi}W^{r}{}_{l}{}^{m}{}_{j} - W_{mirj}W^{mr}{}_{lk} - R_{rj}W_{i}{}^{r}{}_{kl} \\ &+ \frac{1}{n-1}[R_{im}W^{m}{}_{jkl} + R_{lm}W^{m}{}_{ikj} + R_{km}W^{m}{}_{ijl}] \\ &- \frac{1}{n-1}[R_{rm}(W^{m}{}_{i}{}^{r}{}_{l}\delta_{kj} + W^{m}{}_{ik}{}^{r}\delta_{lj} + W^{mr}{}_{kl}\delta_{ij})]. \end{aligned}$$

Il ne reste plus pour conclure qu'à re-indicer et à injecter deux fois dans l'équation (6.1.1). □

Corollaire 6.1.2. *Soit (M, g_{+}) une variété Riemannienne Einstein de dimension $n+1 \geqslant 4$, avec constante de normalisation λ (i.e. $R_{ij} = \lambda g_{+ij}$), alors :*

$$\nabla^{*}\nabla W_{ijkl} = -2\lambda W_{ijkl} - 2(W_{ipjq}W^{pq}{}_{kl} - W_{ipql}W_{j}{}^{pq}{}_{k} - W_{ipqk}W_{j}{}^{pq}{}_{l})$$

En particulier, pour une variété Einstein asymptotiquement hyperbolique, $\nabla^{*}_{g_+}\nabla_{g_+}W - 2nW = W \star W$, où $W \star W$ est un terme quadratique en W.

Preuve. Tout d'abord, il est clair qu'une variété Einstein a une courbure de Weyl harmonique (par exemple en regardant le tenseur de Cotton et sa relation avec le tenseur de Weyl).

On commence par remplacer les courbures de Ricci et scalaire grâce à l'hypothèse Einstein dans l'expression obtenue par le lemme 6.1.1. Il suffit par la suite de se rappeler que la courbure de Weyl vérifie la première formule de Bianchi, et est sans trace et avec les symétries de bases de la courbure de Riemann. □

6.2 Régularité de la courbure de Weyl sous hypothèse d'approximation

Dans la section précédente, nous avons établi l'équation elliptique suivie par la courbure de Weyl d'une métrique Einstein : $(\Delta - 2n)W = W \star W$. Cette équation va permettre de prouver la régularité de la courbure de Weyl de la métrique compactifiée. Pour cela, il va falloir exprimer les termes de bord de la courbure en utilisant les équations de Gauss-Codazzi, ce que nous faisons dans le lemme suivant :

Lemme 6.2.1 (Chang, Ge, Jin, Qing). *Soit $(M, \partial M, g_+)$ une variété asymptotiquement hyperbolique Einstein connexe de dimension $(n+1)$ et de régularité $C^{2,\eta}$, avec $n > 4$ et $0 < \eta < 1$, et on suppose trouvée une compactification telle que le bord soit totalement géodésique par rapport à celle-ci.*
On note (n+1) l'indice correspondant au vecteur normal au bord et κ, μ, ν, et τ des indices correspondants à des directions tangentes au bord.
Enfin, soit h le représentant de la classe conforme à l'infini de g_+ correspondant à la compactification choisie, W_+ le tenseur de Weyl g_+ et W_h le tenseur de Weyl de h (qui a priori *sont des tenseurs sur des espaces différents).*
Alors :

$$(W_+)_{\kappa\mu\nu}{}^{\tau} = (W_h)_{\kappa\mu\nu}{}^{\tau}; \qquad (W_+)_{(n+1)\mu\nu}{}^{\tau} = 0 = (W_+)_{(n+1)\kappa(n+1)}{}^{\tau}$$

Idée de preuve. C'est une preuve classique qui utilise les équations de Gauss-Codazzi ainsi que l'expansion découverte par Graham dans [Gra99] des métriques compactifiées de métriques Einstein. Plus particulièrement, si r est une fonction définissante spéciale, $\overline{g} = dr^2 + h + r^2\hat{A} + o(r^2)$ où $\hat{A}$ est le tenseur de Schouten de la métrique h.
Une preuve complète de ce lemme est présentée en annexe C. □

Nous avons posé toutes les fondations qui sont nécessaires pour prouver la proposition suivante. Cette proposition fonctionne sous l'hypothèse d'existence d'une régularisation de la courbure de Weyl ayant les mêmes symétries et intuitivement les mêmes valeurs sur le bord :

Proposition 6.2.2. *Soit (M, g_+) une (n+1) variété asymptotiquement hyperbolique et Einstein de régularité $C^{2,\eta}$, avec $n > 4$ et $0 < \eta < 1$, avec une fonction définissante ρ telle que $d\rho$ soit normal au bord, et que le bord soit totalement géodésique.*
Soit $W_+ \in S_W$ la courbure de Weyl de g_+ et on suppose qu'il existe $W_2 \in C^{2,\beta}_{(0)}(\overline{M}, \overline{S_W})$ tel que $W_+ - W_2 \in C^{0,\alpha}_{2+\epsilon}(M, S_W)$ avec un certain $0 < \epsilon < 1$.
Alors pour $\gamma = min(\alpha, \beta, \eta)$, et pour tout $\beta \leqslant \delta \ < 1$:

$$W_+ - W_2 \in C^{2,\gamma}_{2+\delta}(M, S_W) \tag{6.2.1}$$

Et en particulier, on peut en déduire que :

$$W_+ \in C^{0,\delta}_{(0)}(\overline{M}, \overline{S_W}). \tag{6.2.2}$$

Preuve. Déduire la deuxième affirmation (6.2.2) de la première (6.2.1) est assez direct, en réduisant la régularité, puis en utilisant le lemme 2.3.4 pour passer d'espace de Hölder à poids de l'intérieur aux espaces de Hölder décroissant sur la compactification.

En effet, un simple retour aux définitions, et comme cette propriété est vraie au-dessus de B_2, on a que :

$$C^{2,\eta}_{2+\delta}(M,S_W) \subset C^{0,\delta}_{2+\delta}(M,S_W).$$

Puis avec le lemme 2.3.4, $C^{0,\delta}_{2+\delta}(M,S_W) \subset C^{0,\delta}_{(0)}(\overline{M},\overline{S_W})$.
Enfin, l'hypothèse $W_2 \in C^{2,\beta}_{(0)}(\overline{M},\overline{S_W}) \subset C^{0,\delta}_{(0)}(\overline{M},\overline{S_W})$ permet d'assurer que (6.2.1) $\Rightarrow$ (6.2.2).

Pour prouver la première affirmation (6.2.1), l'idée est d'utiliser la proposition 3.4.1 pour améliorer la régularité et la vitesse de décroissance de $W - W_2$. On va donc vérifier que toutes les hypothèses sont bien vérifiées :
L'opérateur différentiel : S_W est un fibré vectoriel géométrique, et $P := \nabla^*\nabla - 2n$ est un opérateur pseudodifférentiel géométrique elliptique, formellement autoadjoint, d'ordre 2 sur S_W. Avec le lemme 5.2.5, P satisfait une estimation asymptotique :

$$(w,Pw) \gtrsim \frac{n-4}{4}||w||_{L^2_{g_+}}.$$

La régularité cible est accessible : On a bien $2 < 2+\gamma \leqslant 2+\eta$ et $0 < \gamma < 1$.
Rayon Indiciel : Avec le lemme 5.3.1, on sait que le rayon indiciel R de P est tel que $\frac{n-4}{2} \leqslant R$.
La régularité initiale est dans le bon intervalle :
Par hypothèse, $W_+ - W_2 \in C^{0,\alpha}_{2+\epsilon}(M,S_W) \subset C^{0,0}_{2+\epsilon}(M,S_W)$. De plus, $|2+\epsilon-\frac{n}{2}| < \frac{n-4}{2} \leqslant R$ comme $0<\epsilon<1$.
Régularité de P($W_+ - W_2$) : Avec la linéarité de P, on peut voir P($W_+ - W_2$) comme la somme de deux termes.
Grâce au corollaire 6.1.2 , nous obtenons que :

$$(\nabla^*\nabla - 2n)W_+ = W_+ \star W_+. \tag{6.2.3}$$

où $(W_+ \star W_+)_{ijk}{}^l = -2(W_{+ipj}{}^q W_{+rqk}{}^l g_+{}^{rp} - W_{+ipq}{}^l W_{+jrs}{}^m g_+{}^{rp} g_+{}^{qs} g_{+km} - W_{+ipq}{}^m W_{+jrs}{}^l g_+{}^{rp} g_+{}^{qs} g_{+mk})$.
Or la courbure de Weyl est conformément invariante (en tant que 3-1 tenseur), donc avec la régularité de la courbure de Weyl de $\overline{g}$ et le lemme 2.3.3, on a que :

$$W_+ \in C^{0,\beta}_{(0)}(\overline{M},S_W) \subset C^{0,\beta}_2(M,S_W).$$

Ce qui permet de déduire que $W_+ \star W_+ \in C^{0,\beta}_4(M,S_W) \subset C^{0,\gamma}_{2+\delta}(M,S_W)$.

Maintenant, en regardant les calculs dans la preuve du corollaire 5.3.1, on a que :

$$(\Delta - 2n)W_2 = (n-1)Pos(W_2) + Bianchi(W_2) + O(W_2) + T(W_2) + \rho C^{0,\beta}_{(0)}(\overline{M},S_W)$$

Prouvons maintenant que :

$$(n-1)Pos(W_2) + Bianchi(W_2) + O(W_2) + T(W_2) \in C^{2,\beta}_{(\delta)}(\overline{M},S_W)$$

En effet, comme $W_+ - W_2 \in C^{0,\alpha}_{2+\epsilon}(M,S_W) \subset C^{0,\alpha}_{(\epsilon)}(M,S_W)$ on a avec le premier point du lemme 2.3.1 que $W_{+|\partial M} = W_{2|\partial M}$. En prenant les termes un par un comme ils apparaissent dans l'annexe B, avec les symétries et le fait que $d\rho$ est normal au bord, et en utilisant la même notation que dans le lemme 6.2.1, on se rend

compte que $(\Delta - 2n)W_{2|\partial M}$ ne dépend que de termes de la forme $(W_+)_{1\alpha\beta\delta}$ et $(W_+)_{1\alpha 1\delta}$, qui sont nuls d'après ce même lemme 6.2.1.
Ce qui nous donne que :

$$(\Delta - 2n)W_2 \in C^{2,\beta}_{(\delta)}(\overline{M}, S_W) + \rho C^{0,\beta}_{(0)}(\overline{M}, S_W).$$

et donc d'après le lemme 2.3.4, on obtient, quitte à utiliser l'inclusion $C^{0,\beta}_{2+\delta}(M, S_W) \subset C^{0,\gamma}_{2+\delta}(M, S_W)$ discutée au début de la présente preuve, que :

$$(\Delta - 2n)W_2 \in C^{2,\beta}_{(\delta)}(\overline{M}, \overline{S_W}) + \rho C^{0,\beta}_{(0)}(\overline{M}, \overline{S_W}) \subset C^{0,\beta}_{2+\delta}(M, S_W) + \rho C^{0,\beta}_{2}(M, S_W) \subset C^{0,\gamma}_{2+\delta}(M, S_W)$$

Et donc que :

$$P(W_+ - W_2) \in C^{0,\gamma}_{2+\delta}(M, S_W).$$

Ainsi toutes les hypothèses du lemme 3.4.1 sont vérifiées, ce qui permet de conclure que

$$W_+ - W_2 \in C^{2,\gamma}_{2+\delta}(M, S_W).$$

□

Avec cette preuve, on utilise l'approximation W_2 pour assurer une décroissance à l'infini. Il est donc intéressant de noter que si la courbure de Weyl au bord est nulle, et donc que la courbure de Weyl est déjà dans le bon espace à poids, on peut se passer de l'approximation.

Corollaire 6.2.3. *Soit (M, g_+) une (n+1) variété asymptotiquement hyperbolique et Einstein de régularité $C^{2,\eta}$, avec $n > 4$ et $0 < \eta < 1$, avec une fonction définissante ρ telle que $d\rho$ soit normal au bord, et que le bord soit totalement géodésique.*
On suppose que $W[g_{|\partial M}]$ la courbure de Weyl de la restriction d'une compactification $\overline{g}$ au bord soit nulle en tant que tenseur : $W[g_{|\partial M}] = 0$.
Alors pour tout $0 \leqslant \delta \; < 1$:

$$W_+ \in C^{0,\delta}_{(0)}(\overline{M}, \overline{S_W}). \tag{6.2.4}$$

Démonstration. On reprend la preuve précédente avec $W_2 = 0$. Les points qui sont modifiés sont les suivants :
La régularité initiale est dans le bon intervalle : Comme W_+ est nul au bord et $C^{0,\eta}$, d'après le lemme 2.3.1, on a $W_+ \in C^{0,\eta}_{(\eta)}(\overline{M}, S_W)$, et l'inclusion $C^{0,\eta}_{(\eta)}(\overline{M}, S_W) \hookrightarrow C^{0,\eta}_{2+\eta}(\overline{M}, S_W)$ donnée par le lemme 2.3.4 permet de conclure sur la régularité initiale.
Régularité de $\mathbf{P}(W_+)$: Cette partie n'a besoin que de la première moitié de la preuve précédente, vu que l'on a besoin de maîtriser uniquement la régularité de $P(W_+)$. □

6.3 Hypothèse d'approximation

Dans la section précédente, nous avons dû faire l'hypothèse d'existence d'une bonne approximation pour pouvoir améliorer la régularité de la courbure de Weyl. Une question naturelle est donc à quel point cette condition est restrictive. On va montrer que si la métrique du bord est suffisamment régulière et que l'on accepte de travailler à difféomorphismes suffisamment réguliers près, alors cette hypothèse n'est pas un problème.

Théorème 6.3.1. *Soit $(M, g_+, \partial M, h)$ une $(n+1)$- variété connexe Einstein asymptotiquement hyperbolique de régularité $C^{2,\eta}$, avec la métrique au bord $h \in C^{4,\epsilon}_{(0)}(\partial M, S^2\partial M)$ et $n > 4$ et $0 < \eta, \epsilon < 1$, .*
Il existe une carte continue ψ d'un voisinage $\overline{M}_R$ du bord ∂M de $\overline{M}$, carte dont la restriction au bord ∂M est la carte identité et qui est un $C^{3,\eta}$ difféomorphisme sur son image tel que $\rho^2\psi^*g = d\rho^2 + h + O(\rho^2)$ (on parle de difféomorphisme en collier).

En particulier, ∂M est totalement géodésique dans $(M, \rho^2\psi^*g)$, avec $d\rho$ qui y est un champ normal au bord. Si on note alors W_+ le tenseur de Weyl avec les trois premiers indices covariants et le quatrième contravariant de $\rho^2\psi^*g$, il en résulte que pour tout $\delta < 1$:

$$W_+ \in C^{0,\delta}_{(0)}(\overline{M}, \overline{S_W})$$

Preuve. Il s'agit en fait de deux affirmations : la première est l'existence d'un difféomorphisme en collier. La preuve consiste en une légère adaptation du lemme 3.1 de [CDLS05], pour obtenir un difféomorphisme $C^{3,\eta}$ si la métrique est $C^{2,\eta}$ au lieu de seulement C^2. Ceci fonctionne puisque la preuve de Chrushiel s'appuie sur le lemme 3.3.2 de [APT96], qui permet non seulement de trouver des prolongements de fonctions continûment dérivables comme utilisés dans la preuve, mais également de fonctions Hölderiennes avec contrôle Hölderien dans le cas qui nous intéresse. Il s'agit donc de reproduire la preuve en ajoutant dans tous les objets construits une régularité Hölderienne de paramètre η, ce qui donne donc immédiatement le résultat.
Pour la deuxième affirmation, on suppose donc, quitte à transformer l'espace avec un $C^{3,\eta}$ difféomorphisme en collier, que $\overline{g} := \rho^2 g_+ = d\rho^2 + h + O(\rho^2)$.

Il suffit donc de montrer, grâce à la proposition 6.2.2, qu'il existe un tenseur $W_2 \in C^{2,\min(\epsilon,\eta)}_{(0)}(\overline{M}, S_W)$ tel que $W_+ - W_2 \in C^{0,\min(\epsilon,\eta)}_{2+\min(\epsilon,\eta)}(M, S_W)$, ou de manière équivalente grâce à la proposition 2.3.4, tel que $W_{+|\partial M} = W_{2|\partial M}$.

Ainsi soit (θ^α) un système de coordonnées d'arrière-plan de ∂M. Comme $h \in C^{4,\epsilon}_{(0)}(\partial M, S^2\partial M)$, pour tout ensemble d'indice $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de vecteurs tangents au bord que la coordonnée correspondante de la courbure de Weyl de h vérifie $(W_h)_{\alpha,\beta,\gamma}{}^{\delta} \in C^{2,\epsilon}_{(0)}(\partial M)$.

Un résultat classique (développé par exemple dans le chapitre 3, corollaire 3.2. dans [APT96]) permet d'affirmer qu'il existe une continuation régulière $(\tilde{W}_2)_{\kappa,\mu,\nu}{}^{\tau} \in C^{2,\eta}_{(0)}(\overline{M})$ telle que :

$$(\tilde{W}_2)_{\kappa,\mu,\nu}{}^{\tau}{}_{|\partial M} = (W_h)_{\kappa\mu\nu}{}^{\tau}.$$

À partir de ces fonctions coordonnées, on souhaite construire le tenseur, mais il faut être un peu prudent puisque on souhaite avoir les symétries tensorielles de S_W. Pour cela, soit $\iota = min(\epsilon, \eta)$ et utilisons simplement le projecteur suivant, issu de la décomposition de Ricci, (où $\owedge$ est une notation pour le produit de Kulkarni–Nomizu) :

$$F : \left| \begin{array}{rcl} C^{2,\iota}(\overline{M}, S^2\lambda^2\overline{M}) & \longrightarrow & C^{2,\iota}(\overline{M}, S^2\lambda^2\overline{M}) \\ R & \longmapsto & R - \frac{1}{\dim(M)-2}\overline{g} \owedge \left(\mathrm{Tr}_{\overline{g}}(R) - \frac{\mathrm{Tr}_{\overline{g}}(\mathrm{Tr}_{\overline{g}}(R))}{\dim(M)(\dim(M)-1)}\overline{g}\right) \end{array} \right. ,$$

On peut alors définir l'approximation régulière comme :

$$W_2 = F\left((\tilde{W}_2)_{\kappa,\mu,\nu}{}^{\tau}\overline{g}_{\tau m}\left[\frac{2}{3}(d\theta^\kappa \wedge d\theta^\mu) \otimes (d\theta^\nu \wedge d\theta^m) - \frac{1}{3}(d\theta^\mu \wedge d\theta^\nu) \otimes (d\theta^\kappa \wedge d\theta^m) - \frac{1}{3}(d\theta^\nu \wedge d\theta^\kappa) \otimes (d\theta^\mu \wedge d\theta^m)\right]\right),$$

Cette définition donne immédiatement que $W_2 \in C^{2,\min(\epsilon,\eta)}_{(0)}(\overline{M}, S_W)$, et un simple calcul avec le résultat du lemme 6.2.1 donne bien que $W_{+|\partial M} = W_{2|\partial M}$, ce qui permet de conclure que la deuxième affirmation est également valide. $\square$

Chapitre 7

Gain de régularité pour une compactification d'une métrique

7.1 Tenseur de Bach, et équation elliptique du tenseur de Ricci

Dans cette section on rappelle la définition du tenseur d'ordre 4 de Bach sur une n+1 variété, $(M^{n+1}, \overline{g})$, car il relie naturellement avec une équation elliptique la régularité du tenseur de Weyl et celle du tenseur de Ricci. Soient R_{ikjl}, W_{ikjl}, R_{ij}, R et ∇ respectivement les coordonnées des tenseurs de Riemann, Weyl, Ricci, la courbure scalaire et la connexion de Levi-Cevita, et *Riem* le tenseur de Riemann, et on pose :

$$B_{ij} = -\frac{n-2}{n-1}\nabla^k\nabla^l W_{lijk} + \frac{1}{n-1}W_{ikjl}R^{kl}.$$

Il y a une relation entre la divergence du tenseur de Weyl et le tenseur de Cotton (voir l'annexe A), précisément :

$$\nabla^l W_{ijkl} = \frac{n-1}{n-2}C_{ijk}.$$

Cette relation permet de réécrire le tenseur de Bach, et d'obtenir :

$$(n-1)B_{ij} = \Delta(R_{ij}) - \frac{\Delta(R)}{2n}g_{ij} - \nabla^c\nabla_i R_{jc} + \frac{\nabla_j\nabla_i(R)}{2n} + R^{kl}W_{kijl}.$$

Puis avec l'identité de Ricci, ainsi que la deuxième identité de Bianchi deux fois contracté, la relation devient :

$$(n-1)B_{ij} = \Delta(R_{ij}) - \frac{\Delta(R)}{2n}g_{ij} - \frac{\nabla_i\nabla_j(R)}{2} + \frac{\nabla_j\nabla_i(R)}{2n} + Q(Rm), \tag{7.1.1}$$

où $Q(Rm)$ est un terme quadratique en la courbure de Riemann :

$$Q(Rm) = R^{kl}W_{kijl} - R^c{}_{ij}{}^p R_{pc} - R^c{}_{ic}{}^p R_{jp}.$$

C'est cette relation 7.1.1, qui est une équation elliptique en la courbure de Ricci, que l'on va utiliser pour améliorer sa régularité :

Théorème 7.1.1. *Soit* $(\overline{M}^{n+1}, \partial M, g)$ *une n+1 variété Riemannienne compacte à bord* ∂M *lisse et d'intérieur* M.

Supposons soit que M *ait un point de* ∂M *non-ombilic, soit que* g *est conformément plat, ou soit que la courbure de Weyl n'est pas identiquement nulle sur* ∂M *(Hypothèses A).*

De plus, soit $0 < \alpha \leqslant \delta < 1$ *et* $m \in \mathbb{N}$ *un entier positif, et supposons que* $g \in C^{2+m,\alpha}(\overline{M}) \cap C^4(M)$*, que* $Ric_{|\partial M} \in C^{m,\delta}(\partial M, T^2\overline{M}_{|\partial M})$ *et que la courbure de Weyl vérifie* $W \in C^{m,\delta}(\overline{M}, T^4\overline{M})$ *(Hypothèses B).*

Alors on a que :

$$Ric \in C^{m,\delta}(\overline{M}).$$

Pour démontrer ceci, on va avoir besoin d'une estimation dite "à la Schauder". On va utiliser le théorème d'équations elliptiques issu du théorème 5.1 de [GH80], en prenant dans leurs notations $\gamma = b = a$. Dans l'énoncé de ce résultat, on utilise la notation abusive $C^a(\Omega)$ pour l'espace Hölderien $C^{E(a),\{a\}}(\Omega)$ si a est un réel positif non entier, et $|\cdot|_{C^a(\Omega)}$ la norme correspondante.

Théorème 7.1.2 (Gilbarg-Hörmander 80)**.**

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné avec frontière au moins* C^1*. Soit* $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ *un réel non entier tel que* $2 < a$ *, et supposons que pour tout point du bord* p*, il existe un voisinage* $U_p \subset \mathbb{R}^n$ *et une fonction* $f \in C^a(U_p)$ *tels que* $\Omega \cap U_p = \{x, x_n > f(x)\}$ *(condition bord* H_γ *du papier).*

Soit P *un opérateur différentiel d'ordre 2 de partie principale réelle et elliptique sur* $\overline{\Omega}$*, et dont les coefficients* $P = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} p_\alpha D^\alpha$ *vérifient :*

$$\begin{aligned} &Si\ |\alpha| \leqslant 2, \qquad p_\alpha \in C^{a-2}(\Omega), \\ &\big(Si\ |\alpha| = 2\ , \qquad p_\alpha \in C^0(\Omega)\big)\ . \end{aligned}$$

Alors il existe une constante C *telle que :*

$$\forall u \in C^{+\infty}(\Omega), \qquad C^{-1}|u|_{C^a(\Omega)} \leqslant |u|_{C^a(\partial\Omega)} + |Pu|_{C^{a-2}(\Omega)} + |u|_{C^0(\Omega)} \leqslant C|u|_{C^a(\Omega)}.$$

Remarque : Pour reformuler le théorème plus général de Gilbarg-Hörmander dans ce cadre particulier, on a utilisé en particulier l'égalité pour les espaces de Hölder classiques sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$: $\sup_{\delta>0} |u|_{C^a(\Omega_\delta)} = |u|_{C^a(\Omega)}$, ou dans les notations du texte de Gilbarg-Hörmander, que $H_a^{(-a)}(\Omega) = H_a(\Omega)$.
La preuve se trouve intégralement dans le papier [GH80].

Pour la preuve, nous utiliserons également les résultats présents dans le papier de Gilbarg et Trundinger dans [GT01]

Preuve du théorème 7.1.1. L'hypothèse A sert à assurer l'existence d'une métrique conforme de courbure scalaire constante, *via* la résolution du problème de Yamabe (discutée rapidement dans la section 4.2, voir également [AB02] par exemple). Comme un changement conforme ne modifie pas l'hypothèse B et permet de récupérer la conclusion, on peut supposer sans perte de généralité que g est de courbure scalaire constante.

Dans ce qui suit, on va travailler en coordonnées locales, et calculer le résultat de l'application de l'opérateur de Laplace-Beltrami à la courbure de Ricci. Soit donc $(\alpha_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité localement finie plus fine qu'une couverture de $\overline{M}$ par des cartes $(\Omega_i)_{i\in J}$ simplement connexes à bord lisse (C^∞ par exemple) telle que $(\overset{\circ}{\Omega}_i)_{i\in J}$ recouvre $\overline{M}$. Soit α un choix quelconque parmi les α_i pour un i dans I.

Pour obtenir la conclusion, comme αRic est à support compact dans Ω_i et que la partition de l'unité est localement fini, il suffit donc de montrer le fait suivant :

Fait : $\alpha Ric \in C^{m,\delta}(\Omega_i)$

On ne démontre ici que le cas le plus délicat où m=0, comme les cas plus réguliers demandent moins d'astuce dans l'application de la théorie d'opérateurs elliptiques (pour ladite théorie, le lecteur intéressé pourra voir [GT01]).

En s'inspirant du fait que pour tout opérateur L d'ordre 2 et P d'ordre 0, le commutateur $[P, L]$ est un opérateur d'ordre plus petit que 1, on écrit en coordonnées associées à Ω_i que (où t.o.i. signifie termes d'ordre inférieur) :

$$\begin{aligned} g^{jl}\partial_j\partial_l(\alpha R_{ab}) &= \alpha g^{jl}\partial_j\partial_l(R_{ab}) + 2g^{jl}(\partial_j\alpha)(\partial_l R_{ab}) + R_{ab}g^{jl}\partial_j\partial_l(\alpha), \\ &= \alpha g^{jl}(\partial_j+\Gamma)(\partial_l+\Gamma)(Ric)_{ab} - \big(\alpha g^{jl}(\Gamma)(\partial_l+\Gamma)(Ric)_{ab} + \alpha g^{jl}(\partial_j)(\Gamma)(Ric)_{ab}\big) + t.o.i., \\ &= \alpha\Delta(Ric)_{ab} + t.o.i.. \end{aligned}$$

Donc avec l'équation 7.1.1 on peut écrire que :

$$g^{jl}\partial_j\partial_l(\alpha R_{ab}) = \partial_j\partial_l(f_{abjl}) + \partial_j(g_{abj}) + h_{ab},$$

où $f_{abjl} \in C_c^{0,\delta}(\Omega_i)\bigcap C^2(M\cap\Omega_i)$, $g_{abj} \in C_c^{0,\alpha}(\Omega_i)\bigcap C^2(M\cap\Omega_i)$ et $h_{ab} \in C_c^{0,\alpha}(\Omega_i)\bigcap C^2(M\cap\Omega_i)$.

À partir de maintenant jusqu'à la fin de cette démonstration, on note L l'opérateur différentiel donné en coordonnées par $g^{jl}\partial_j\partial_l$.

D'après les arguments à propos de dérivé faible développés dans le théorème 8.34 de Gilbarg-Trundinger dans [GT01], il existe une solution faible $u_{ab,reg} \in C^{1,\alpha}(\Omega_i)$ du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} L(u) &= \partial_j(g_{abj}) + h_{ab} \text{ sur } \Omega_i, \\ u_{|\partial\Omega_i} &= 0. \end{cases}$$

Pour la même raison, il existe une solution faible $v_{abk,primitive} \in C^{1,\delta}(\Omega_i)\bigcap C^3(M\cap\Omega_i)$ de :

$$\begin{cases} L(v) &= \partial_l(f_{abkl}) \text{ sur } \Omega_i, \\ v_{|\partial\Omega_i} &= 0. \end{cases}$$

Comme il est possible d'écrire $(L\partial_k - \partial_k L)(v_{abk})$ comme une somme $\partial_i P_{abi} + Q_{ab}$ avec $P_{abi} \in C^{0,\delta}(\Omega_i)$ et $Q_{ab} \in C^{0,\alpha}(\Omega_i)$, il existe une solution faible $t_{ab,crochet}$ du problème suivant :

$$\begin{cases} L(t) &= (L\partial_k - \partial_k L)(v_{abk}) \text{ sur } \Omega_i, \\ t &= 0 \text{ on } \partial\Omega_i. \end{cases}$$

Donc $\alpha R_{ab} - u_{ab,reg} - \partial_k v_{abk,primitive} - t_{ab,crochet}$ est une solution faible du problème final suivant :

$$\begin{cases} L(U) &= 0 \text{ sur } \Omega_i, \\ U_{|\partial\Omega_i} &= \alpha R_{ab} - \partial_k v_{abk,primitive}. \end{cases}$$

Maintenant, on va utiliser une estimation de Schauder, telle que donné par le théorème 7.1.2. Ainsi, il existe une constante C>0 telle que pour $\psi \in C^{1,\alpha}(\Omega_i)$ et U une solution faible $C^{1,\alpha}$ de LU=0 sur Ω_i et $U = \psi$ sur $\partial\Omega_i$, on ai :

$$||U||_{C^{0,\delta}(\Omega_i)} \leqslant C\left(||\psi||_{C^{0,\delta}(\partial\Omega_i)} + ||U||_{C^0(\Omega_i)}\right) \tag{7.1.2}$$

Soit une suite approximante $\phi_k \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega_i)$ telle que $||\phi_k - \phi||_{C^{0,\delta}} \to 0$ et u_k la suite de solution correspondante à $Lu_k = 0$ sur $\Omega_i \backslash \partial\Omega_i$ et $u_k = \phi_k$ sur $\partial\Omega_i$.
D'après les arguments développés dans la preuve du théorème 8.30 de [GT01], on sait que u_k converge uniformément vers $u \in C^0(\Omega_i) \bigcap H^{1,2}_{loc}(\Omega_i \backslash \partial\Omega_i)$ solution de $Lu = 0$ et $u_{|\partial\Omega_i} = \phi$. Donc par complétude de $C^{0,\delta}$, il est possible de déduire de l'équation 7.1.2 que $u \in C^{0,\delta}(\Omega_i)$.
Par unicité de la solution faible, on en déduit alors que $\alpha R_{ab} - u_{ab,reg} - \partial_k v_{abk,primitive} - t_{ab,crochet} \in C^{0,\delta}$, ce qui permet finalement de conclure que $\alpha R_{ab} \in C^{0,\delta}$, ce qui prouve le fait avancé précédemment, et donc le théorème. □

7.2 Coordonnés harmoniques : régularité de métriques *via* la courbure de Ricci

Une méthode bien connue de la littérature pour étudier la régularité du tenseur de la métrique est celle de la construction de coordonnées harmoniques. Cette méthode fut initiée par De Turck and Kazdan [DK81] pour un voisinage intérieur (loin du bord), avant d'être étendu à la catégorie des variétés à bord par Anderson & al [AKK+04]. Dans cette section, on rappelle les définitions de ces coordonnées, et montrer comment cela peut servir à améliorer la régularité du tenseur de métrique.

Commençons par redéfinir les coordonnées harmoniques, en suivant les travaux de Anderson & al.
Soit $(\overline{M}^{n+1}, \partial M, g, h)$ une variété Riemannienne à bord compacte avec h la métrique induite sur le bord.
Pour une carte loin du bord, on appelle coordonnées harmoniques un système arbitraire de coordonnées $(u_1, ..., u_{n+1})$ vérifiant l'équation $\Delta u_i = 0$.
Pour une carte centrée en un point z du bord, on appelle coordonnées harmoniques un système de coordonnées $(u_1, ..., u_{n+1})$ sur un voisinage de z dans $\overline{M}$, qui vérifie $\Delta u_i = 0$, ainsi que la restriction des n premières fonctions coordonnées au bord $v_j = u_{j\,|\partial M}$ est un système de coordonnées harmoniques classique du bord $(\partial M, h)$ (i.e. v_j est annulée par l'opérateur de Laplace-Beltrami de h sur ∂M), que u_{n+1} s'annule sur ∂M, et tel qu'il existe un voisinage de z dans $\overline{M}$ où $(u_1, ..., u_{n+1})$ est un difféomorphisme sur son image dans $\overline{M}$.

Proposition 7.2.1. *Soit $g \in C^{k+\alpha}(\overline{M})$ avec $k \geqslant 2$, alors il existe des coordonnées harmoniques $C^{k+1+\alpha}(\overline{\Omega})$ au voisinage de n'importe quel point. Si on suppose de plus qu'il existe une fonction définissante du bord ρ vérifiant au voisinage du bord $g = d\rho^2 + h + O(\rho^2)$, et aussi que $Ric \in C^{l-2+\delta}(M)$ pour $l + \delta > k + \alpha > 2$ et $h \in C^{l+\delta}(\partial M)$ dans un système de coordonnées harmoniques $C^{l+\delta}$, alors la restriction du tenseur de métrique dans ces coordonnées vérifie $g \in C^{l+\delta}(\overline{M})$.*

Preuve. La construction d'un tel système de coordonnées centrées autour de z est trivial loin du bord, et assez simple pour un point du bord. Comme $h := g_{|\partial M} \in C^{k,\alpha}(\partial M, S^2\partial M)$, il existe des coordonnées harmoniques $v_1, ...v_n$ dans un voisinage $\mathcal{O}$ de z dans ∂M. Maintenant, quitte à commencer par choisir un autre système de coordonnées, on peut trouver un système de coordonnées harmoniques $u_1, ..., u_n$ sur un voisinage $\overline{\Omega}$ de z dans $\overline{M}$ cette fois, tel que la restriction au bord soit le système trouvé précédemment ($u_i = v_i$ sur $\mathcal{O}$), et trouver

u_{n+1} harmonique sur $\overline{\Omega}$ avec $u_{n+1|\partial M} = 0$ et $\partial_{x_{n+1}} u_{n+1}(z) \neq 0$.
À partir de cette construction, on obtient bien que

$$(u_1, ..., u_{n+1}) \in C^{k+1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Maintenant, pour la deuxième affirmation de la proposition, il s'agit de remarquer qu'en coordonnées harmoniques, le tenseur de la métrique satisfait l'équation aux dérivés partielles :

$$\Delta g^{lm} = F^{lm},$$

où Δ agit sur les fonctions g^{lm} comme :

$$\Delta u = g^{\frac{-1}{2}} \partial_i (g^{\frac{-1}{2}} g^{ij} \partial_j u) \qquad g = det(g_{ij}),$$

et où :

$$F^{lm} = B^{lm}(g, \nabla g) - 2Ric^{lm}(g),$$

avec B^{lm} une forme quadratique en ∇g avec coefficients qui sont des fonctions rationnelles en les fonctions g_{jk}.

En suivant la démonstration de Anderson & al dans [AKK+04], on retrouve suivant les indices considérés 3 cas pour les conditions au bord pour cette équation aux dérivées partielles, suivant les directions considérées :

$$\begin{cases} \text{Condition de Dirichlet } 1 \leqslant l, m \leqslant n & g^{lm} &= h^{lm} \in C^{l+\delta}(\partial M) \\ \text{Condition de Neuman} & Ng^{(n+1)(n+1)} &= -2nHg^{(n+1)(n+1)} \\ \text{Condition de Neuman } 1 \leqslant l \leqslant n & Ng^{l(n+1)} &= -nHg^{l(n+1)} + \frac{1}{\sqrt{g^{(n+1)(n+1)}}} \partial_k g^{(n+1)(n+1)} \end{cases},$$

où N est le champ unitaire normal à ∂M, dirigé vers l'intérieur de M, et H est la courbure moyenne de ∂M.

Par hypothèse sur la métrique, les coefficients de Δ ont suffisament de régularité pour utiliser des résultats standards de type Schauder (par exemple une utilisation locale du théorème 6.8 dans [GT01]) et ainsi obtenir dans la première condition au bord que :

$$\forall\ 1 \leqslant l, m \leqslant n, \qquad g^{lm} \in C^{\min(l+\delta, k+1+\alpha)}(\overline{M}).$$

Pour les conditions de type Neumann, comme par hypothèse H=0 et $N \in C^{\min(k+\alpha, l-1+\delta)}(\partial M)$, un argument classique d'équations elliptiques montre que l'on peut gagner un ordre de dérivation (voir par exemple dans le chapitre 6.7 du livre de Gilbarg & Trudinger [GT01], et particulièrement le théorème 6.30) :

$$g^{(n+1)(n+1)} \in C^{\min(l+\delta, k+1+\alpha)}(\overline{M}).$$

Or ce résultat peut être réinjecté dans le troisième cas, vu qu'alors :

$$\forall\ 1 \leqslant l \leqslant n, Ng^{l(n+1)} \in C^{\min(l-1+\delta, k+\alpha)}(\overline{M}).$$

Ceci permet de conclure que :

$$\forall\ 1 \leqslant l \leqslant n, g^{l(n+1)} \in C^{\min(l+\delta, k+1+\alpha)}(\overline{M}).$$

Ainsi, avec les résultats dans les trois cas, on obtient que $g^{-1} \in C^{\min(l+\delta, k+1+\alpha)}(\overline{M})$, et par caractère lisse de l'inversion d'opérateurs linéaires, on obtient aussi que $g \in C^{\min(l+\delta, k+1+\alpha)}(\overline{M})$.
Une simple récurrence finie permet donc de prouver que $g \in C^{l+\delta}(\overline{M})$. $\square$

Troisième partie

Exemple d'étude : Les métriques de Pedersen

Chapitre 8

Définition des métriques

Dans ce chapitre, on cherche à donner une description utile pour les calculs d'une famille à un paramètre de métriques Einstein asymptotiquement hyperboliques non localement isométriques.

8.1 Sphères de Berger

Il existe sur $S^3(\mathbb{R})$ une famille continue de structures de variété Riemannienne non localement isométrique entre elles, que l'on appelle sphères de Berger. Ces métriques sont intéressantes, car elles forment un ensemble de représentants d'infini conforme d'une famille de métriques Einstein asymptotiquement hyperboliques sur la boule $B^4(\mathbb{R})$, les métriques de Pedersen, développées dans la section 8.2. On donne dans cette section deux définitions équivalentes de ces sphères de Berger, l'une plus pratique pour les calculs directs, et l'autre plus abstraite et conceptuelle.
On pourra également aller voir le livre de Petersen sur la géométrie Riemannienne [Pet98], qui étudie les sphères de Berger.

Première définition : Une première manière de définir les sphères de Berger est de considérer $S^3(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$, munie des coordonnées cartésiennes (x, y, z, t).
On a alors trois champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} &= -z\frac{\partial}{\partial x} - t\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} &= -t\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta_3} &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + t\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

On considère ensuite la base duale $(\sigma_i)_{i\in[\![1,3]\!]}$, et pour tout paramètre $\lambda > 0$, on peut définir une métrique de Berger h_λ par :

$$h_\lambda = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \lambda\sigma_3^2.$$

Deuxième définition : Une autre manière, équivalente, mais plus conceptuelle, de définir les sphères de Berger est de se souvenir de l'isomorphisme entre $S^3(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}^2$ et le groupe de Lie $SU(2)$ *via*

$$(z,w) \mapsto \begin{pmatrix} z & -w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

Son algèbre de Lie $su(2)$ est alors engendrée par $\tilde{X_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{X_2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, et $\tilde{X_3} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On peut s'intéresser aux uniques champs de vecteurs invariants à gauches associés (par abus de notation, on gardera les mêmes noms). Si on déclare que ces champs sont orthonormés, on obtient la métrique de la sphère usuelle. Mais si on déclare qu'ils sont orthogonaux, avec $\tilde{X_1}$ et $\tilde{X_2}$ normés et $\tilde{X_3}$ de norme $\sqrt{\lambda}$, on retrouve la métrique de Berger h_λ.

Cette deuxième formulation permet de voir, comme X_3 est tangent à l'orbite de l'action circulaire de Hopf, que la sphère de Berger est obtenue à partir de la métrique canonique en multipliant la métrique sur les fibres de Hopf par $\sqrt{\lambda}$.

Pour les calculs, il sera important de connaître les crochets de Lie entre les champs de vecteurs qui permettent de définir la métrique. Un simple calcul donne le lemme suivant :

Lemme 8.1.1. *On a* $[\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2}] = 2\frac{\partial}{\partial\theta_3}$, $[\frac{\partial}{\partial\theta_2}, \frac{\partial}{\partial\theta_3}] = 2\frac{\partial}{\partial\theta_1}$ *et* $[\frac{\partial}{\partial\theta_3}, \frac{\partial}{\partial\theta_1}] = 2\frac{\partial}{\partial\theta_2}$.
De même, $[\tilde{X_1}, \tilde{X_2}] = 2\tilde{X_3}$, $[\tilde{X_2}, \tilde{X_3}] = 2\tilde{X_1}$, *et* $[\tilde{X_3}, \tilde{X_1}] = 2\tilde{X_2}$,

Définition 8.1.2. On appelle sphère de Berger de paramètre λ la variété Riemannienne $(S^3(\mathbb{R}), h_\lambda)$, issue de l'une ou l'autre construction. Une sphère de Berger est donc donnée avec une base orthogonale de l'espace tangent, dont on connaît les normes respectives et les crochets de Lie.

Remarque : $\lambda = 1$ correspond à la sphère canonique.

8.2 Métriques de Pedersen

Pedersen introduit dans [Ped86] une famille de métriques d'Einstein asymptotiquement hyperboliques d'infini conforme la famille des sphères de Berger.

Soit la famille de champs de vecteurs libres en tout point sur la boule unité $B_1(\mathbb{R}^4) \subset \mathbb{R}^4$ composée des champs suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial t}, \\
\frac{\partial}{\partial\theta_1} &= -z\frac{\partial}{\partial x} - t\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial t}, \\
\frac{\partial}{\partial\theta_2} &= -t\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial t}, \\
\frac{\partial}{\partial\theta_3} &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + t\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Et soit $(dr, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ la base duale associée. Alors, Pedersen prouve dans [Ped86] le fait suivant :

Théorème 8.2.1. *(Pedersen) Soit $m > -1$, la métrique :*

$$g_m = \frac{4}{(1-r^2)^2}\left(\frac{1+mr^2}{1+mr^4}\mathbf{dr}^2 + r^2(1+mr^2)(\sigma_1^2+\sigma_2^2) + \frac{r^2(1+mr^4)}{1+mr^2}\sigma_3^2\right)$$

vérifie $Ric(g_m) = -3g_m$, et est asymptotiquement hyperbolique et d'infini la classe conforme de la sphère de Berger $h_{\frac{1}{1+m}}$ (définie en 8.1.2).
De plus cette métrique est l'unique métrique asymptotiquement hyperbolique et d'infini la classe conforme de la sphère de Berger $h_{\frac{1}{1+m}}$ vérifiant $Ric(g_m) = -3g_m$ et la structure conforme est autoduale.

Remarque : Ici, m prend ses valeurs dans $]-1,+\infty[$, et m>0 correspond à m^2 dans le papier de Pederson. Ce choix de modification de la notation s'explique par des raisons de compréhension intuitive de la plage des paramètres.

Remarque 2 : m=0 correspond à la métrique hyperbolique en coordonnée sphérique.

Remarque/Définition 3 : (structure conforme autoduale)

La notion de structure conforme auto duale est bien étudiée dans la littérature. En effet, la résolution de l'équation d'Einstein à laquelle on rajoute une condition de structure conforme auto duale peut être transformée en un problème de géométrie holomorphe, voir par exemple les travaux de Atiyah et al [AHS78], Penrose [Pen76], et Ward [War80]
Comme ici l'existence et les propriétés de la métrique de Pedersen suffisent à notre propos, l'on ne fera que rappeler l'idée de la définition d'une structure conforme autoduale : en dimension 4, la décomposition de l'espace en les espaces propres de l'étoile de Hodge $\star$, donne une décomposition du tenseur de Weyl en $W = W^{(-)} + W^{(+)}$. On dit alors que *la structure conforme est autoduale* si $W^{(-)} = 0$.

Définition 8.2.2. On appellera par la suite métrique de Pedersen de paramètre m la métrique Riemannienne g_m définie sur la boule unité $B_1(\mathbb{R}^4)$ dont l'expression est donnée dans 8.2.1 . On fixe pour les métriques de Pedersen la fonction définissante suivante $\rho : r \mapsto \frac{1-r^2}{2}$.
On aura également (abusivement puisqu'il ne s'agit que d'un représentant de la classe conforme) le compactifié de la métrique de Pedersen de paramètre m, noté $\overline{g_m}$, et défini comme $\overline{g_m} = \rho^2 g_m$.

Chapitre 9

Calculs d'invariants des métriques

Dans ce chapitre, on cherche à calculer de manière la plus explicite possible diverses quantités définies dans la première partie. À partir de maintenant, on se fixe donc un paramètre $m > -1$, et on cherche à calculer pour la boule de Pedersen g_m les divers invariants introduits précédemment.

9.1 Courbure de Riemann des boules de Pedersen

On commence par regarder la courbure de Riemann dans une base particulière, élément indispensable pour ce qui suivra.

Il existe une section naturelle $(X_i)_{i\in[\![0,4]\!]}$ du fibré en repères orthonormés pour la métrique de Pedersen g_m de paramètre m :

$$X_0 = \frac{1-r^2}{2}\sqrt{\frac{1+mr^4}{1+mr^2}}\partial_r \qquad X_1 = \frac{1-r^2}{2r\sqrt{1+mr^2}}\tilde{X}_1 \qquad X_2 = \frac{1-r^2}{2r\sqrt{1+mr^2}}\tilde{X}_2 \qquad X_3 = \frac{1-r^2}{2r}\sqrt{\frac{1+mr^2}{1+mr^4}}\tilde{X}_3$$

Pour tout ce qui est calcul de courbure, nous utiliserons ces champs vectoriels naturels.

Un calcul à partir de la formule de Koszul permet alors de trouver les coefficients de la connexion de Levi-Cevita dans cette base, et en particulier d'en déduire directement le tenseur de Riemann. On obtiendra :

Proposition 9.1.1. *Soient m>-1,et g_m la métrique de Pedersen de paramètre m, et soit Rm le tenseur de courbure Riemannienne de g_m.*
Dans la base (X_i), on a :

$$R_{0101} = R_{0202} = R_{1313} = R_{2323} = -1 + \frac{m}{2}\left(\frac{1-r^2}{1+mr^2}\right)^3,$$

$$R_{0303} = R_{1212} = -1 - m\left(\frac{1-r^2}{1+mr^2}\right)^3,$$

$$R_{0123} = -\frac{1}{2}R_{0312} = \frac{m}{2}\left(\frac{1-r^2}{1+mr^2}\right)^3.$$

Et n'importe quel terme que l'on ne peut pas calculer à partir des symétries élémentaires du tenseur de courbure et des valeurs précédentes est nul.

Remarque : À partir de là, un simple calcul matriciel permet de calculer les vecteurs propres de l'action du tenseur de Riemann sur les 2-formes ainsi que les valeurs propres, et en particulier, on retrouve le résultat de Cortes et Saha dans [CS18] qui décrit l'ensemble des paramètres pour lesquelles la métrique a une courbure sectionnelle négative partout ($m \leqslant 1$).

9.2 Volume renormalisé

Corollaire 9.2.1. *Soient m>-1, g_m la métrique de Pedersen de paramètre m, et W la courbure de Weyl de g_m. On note dV_{g_m} la forme volume associée à g_m. On a alors :*

$$\int_M ||W||^2_{g_m} dV_{g_m} = 8\pi^2 \frac{m^2}{(1+m)^2}.$$

Démonstration. Tout d'abord, puisque g_m est Einstein et en notant $\owedge$ le produit de Kulkarni–Nomizu, l'égalité $W = Rm(g_m) + g_m \owedge g_m$ sera vérifiée. La norme de la courbure de Weyl dans $S^2\Lambda^2 M$ est alors particulièrement facile à calculer dans la base orthonormale (X_i) grâce à la connaissance de la courbure de Riemann (donnée par 9.1.1) :

$$\begin{aligned} ||W||^2_{g_m} &= W^2_{0101} + 2W^2_{0123} + W^2_{0202} + 2W^2_{0213} + W^2_{0303} + 2W^2_{0312} + W^2_{1212} + W^2_{1313} + W^2_{2323}, \\ &= 4\left(\frac{m(1-r^2)^3}{2(1+mr^2)^3}\right)^2 + 2\left(\frac{m(1-r^2)^3}{(1+mr^2)^3}\right)^2 + 12\left(\frac{m(1-r)^3}{2(1+mr^2)^3}\right)^2, \\ &= \frac{6m^2(1-r^2)^6}{(1+mr^2)^6}. \end{aligned}$$

En travaillant en coordonnées sphériques sur la boule de dimension 4, on a :

$$dV_{g_m} = \left(\frac{2}{1-r^2}\right)^4 (1+mr^2) r^3 \sin^2(\psi)\sin(\theta) dr \wedge d\psi \wedge d\theta \wedge d\phi.$$

Cela permet d'écrire l'égalité :

$$\int_M ||W||^2_{g_m} dV_{g_m} = 8\pi^2 \int_0^1 24m^2 \frac{r^3(1-r^2)^2}{(1+mr^2)^5} dr.$$

Et comme :

$$m^2 r^3(1-r^2) = \frac{r}{m}(1+mr^2)^3 - \frac{(2m+3)r}{m}(1+mr^2)^2 + \frac{(m^2+4m+3)r}{m}(1+mr^2) - \frac{m^2+2m+1}{m} r,$$

une décomposition en élément simple permet d'aboutir après simplification à :

$$\int_M ||W||^2_{g_m} dV_{g_m} = 8\pi^2 \frac{m^2}{(1+m)^2}.$$

□

On rappelle que dans le théorème 4.4.1, issu du papier [And01], Anderson démontre que si (M,g) est une variété asymptotiquement hyperbolique complète et Einstein de dimension 4, alors :

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_M ||W||^2_{g_m} dV_{g_m} = \chi(M) - \frac{3}{4\pi^2} V(M,g),$$

Où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler, $V(M,g)$ le volume renormalisé de g, et W la courbure de Weyl de g.

Comme les métriques de Pedersen sont des variétés asymptotiquement hyperboliques, complètes et Einstein sur la boule de dimension 4, il en découle immédiatement que :

Théorème 9.2.2. *Soient m>-1 et g_m la métrique de Pedersen de paramètre m, son volume normalisé est alors :*

$$V(B_1(\mathbb{R}^4), g_m) = \frac{4\pi^2}{3}\left(1 - \frac{m^2}{(1+m)^2}\right).$$

Remarque : Le résultat en préprint [Chen09] donne une (longue) formule pour calculer le volume renormalisé pour une classe plus générale de métriques obtenues à l'aide de fibrations de Hopf. Le résultat obtenu avec cette formule lorsqu'elle est appliquée aux métriques de Pedersen coïncide avec celui que nous obtenons.

9.3 Signe de l'énergie de Yamabe de l'infini conforme

Dans cette section, on s'intéresse au signe de l'énergie de Yamabe des infinis conformes des métriques de Pedersen en fonction du paramètre m.

On rappelle que l'énergie de Yamabe de l'infini conforme est définie comme suit : soit $\tilde{g}$ un infini conforme (restriction de la métrique compactifiée à ∂M), et $g \in [\tilde{g}]$, alors :

$$Y([\tilde{g}]) := \inf_{g \in [\tilde{g}]} J(g), \qquad \text{où} \qquad J(g) := \frac{\int_{\partial M} R_g dV_g}{(Vol(\partial M, g))^{\frac{n-2}{n}}}.$$

On peut remarquer que si $\tilde{g}$ a une courbure scalaire de signe constant, alors l'énergie de Yamabe est de même signe. En effet, dans le cas où la courbure scalaire est négative $R_{\tilde{g}}$, alors le résultat est immédiat au vu de la définition de Y comme infimum de l'intégrale de la courbure scalaire sur les métriques de volume 1. Dans le cas positif $R_{\tilde{g}} \geqslant 0$, il s'agit cette fois de se rappeler la loi de transformation conforme de la fonctionnelle (avec $c_n = \frac{4(n-1)}{n-2}$) :

$$J(u^{\frac{4}{n-2}}\tilde{g}) = \frac{\int_{\partial M} c_n |\nabla u|^2_{\tilde{g}} + u^2 R_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_{\partial M} u^{\frac{2n}{n-2}} dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

qui est clairement positive si $R_{\tilde{g}} \geqslant 0$

Ainsi pour connaitre le signe de l'énergie de Yamabe, il suffit de trouver une métrique dans la classe conforme ayant une courbure scalaire de signe constant. Ici l'infini conforme de la métrique de Pedersen g_m est la classe conforme de la métrique de Berger $h_{\frac{1}{1+m}}$ (voir 8.1.2 pour un rappel de la définition). Les sphères de Berger sont une classe d'exemples déjà bien étudiée dans la littérature, voir par exemple dans la partie 3.4.2 du livre de Petersen [Pet98].

Retraçons rapidement les arguments, avec les notations déjà posées. Sur $\mathbb{S}^3 = SU(2)$, on a la métrique h_λ invariante à gauche, telle qu'il existe un repère orthonormal $\left\{X_1, X_2, \frac{1}{\sqrt{\lambda}}X_3\right\}$, avec les crochets $[X_i, X_{i+1}] = X_{i+2}$. La formule de Koszul donne alors :

$$\begin{array}{llll} \nabla_{X_1}X_2 = X_3 & \nabla_{X_1}X_3 = -\lambda X_2 & \nabla_{X_2}X_3 = \lambda X_1 & \\ \nabla_{X_1}X_2 = -X_3 & \nabla_{X_3}X_1 = (2-\lambda)X_2 & \nabla_{X_3}X_2 = (\lambda-2)X_1 & \nabla_{X_i}X_i = 0, \end{array}$$

Ce qui permet de calculer la courbure de Riemann. Ainsi :

$$R(X_1, X_2)X_3 = 0,$$

et de même pour tout terme de courbure faisant intervenir 3 directions distinctes. Enfin, on a aussi que :

$$R(X_1 \wedge X_2) = (4-3\lambda)X_1 \wedge X_2,$$
$$R(X_2 \wedge \tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}X_3) = \lambda X_2 \wedge \tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}X_3,$$
$$R(\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}X_3 \wedge X_1) = \lambda \tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}X_3 \wedge X_1.$$

En prenant la trace de l'opérateur de courbure, il est facile d'obtenir que la courbure scalaire est de $8-2\lambda$. On s'intéresse à la métrique de Pedersen de paramètre m, dont un infini conforme est $h_{\frac{1}{1+m}}$ qui a donc pour courbure scalaire $\frac{6+8m}{1+m}$ (en prenant $\lambda = \frac{1}{1+m}$). On trouve donc que pour $m \geqslant -\frac{3}{4}$, la courbure scalaire de la sphère de Berger $h_{\frac{1}{1+m}}$ est positive, et que cette courbure scalaire est autrement négative.

Une conséquence immédiate est alors que le signe de l'énergie conforme de Yamabe suit la même distinction. Pour résumer, on vient de montrer :

Proposition 9.3.1. *Soit $(B_1(\mathbb{R}^4), g_m)$ la métrique de Pedersen de paramètre m.*
L'énergie de Yamabe de l'infini conforme est de même signe que $m + \frac{3}{4}$.

9.4 Signe de l'énergie de Yamabe-Escobar de premier type

Dans cette section, on va maintenant s'intéresser au signe de l'énergie de Yamabe-Escobar (sur tout l'espace) des métriques de Pedersen en fonction du paramètre m.

Rappelons que grâce à la proposition 4.4.3, lorsque l'énergie de Yamabe de l'infini conforme est positive, il en est de même pour l'énergie de Yamabe-Escobar de premier type. Le but ici est donc d'obtenir une plus grande plage de paramètres ayant une énergie de Yamabe-Escobar positive que la connaissance fournit par cette propriété (i.e. $m \geqslant -\frac{3}{4}$).

On a la propriété suivante :

Proposition 9.4.1. *Soit 0>m>-1, g_m la métrique de Pedersen de paramètre m, et $\overline{g_m} := (\frac{1-r^2}{2})^2 g_m$ la métrique compactifié issue de la construction.*
Alors $Y_1(M, \partial M, [\overline{g_m}])$ est de même signe que l'évaluation suivante :

$$f(m) := 4 - \frac{1}{\sqrt{-m}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{-m}}{1-\sqrt{-m}}\right).$$

Preuve. Rappelons que l'énergie de Yamabe-Escobar d'une variété à bord $(M, \partial M, [\overline{g}])$ de dimension n+1 est défini comme :

$$Y_1([\tilde{g}]) := \inf_{g \in [\tilde{g}]} Y_1(g), \qquad \text{où} \qquad Y_1(g) := \frac{\int_M R_g dV_g + 2\oint_{\partial M} H_g dS_g}{\left(\int_M dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$

avec comme loi de transformation sous changement conforme :

$$Q(u^{\frac{4}{n-1}}\tilde{g}) = \frac{\int_{\overline{M}} \frac{4n}{n-1}|\nabla u|^2_{\tilde{g}} + u^2 R_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}} + 2\oint_{\partial M} H_{\tilde{g}} u^2 dV_{\tilde{g}|\partial M} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M u^{\frac{2n+2}{n-1}} dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}}$$

Suivant le même argument que dans la section 9.3, si $g \in [\tilde{g}]$ vérifie que $R_g = 0$ et a une courbure moyenne de signe constant, alors l'énergie de Yamabe-Escobar de premier type est du signe de cette courbure moyenne. L'idée de la démonstration est de trouver une telle métrique.

Calculs des quantités d'intérêt pour une compactification particulière

Rappelons également les lois de transformations de la courbure scalaire et de la courbure moyenne : si h est une métrique riemannienne sur une variété à bord de dimension d (ici le cas d=4 est celui qui nous intéresse), avec ν le vecteur normal au bord dirigé vers l'intérieur, alors pour u une fonction strictement positive et $\tilde{h} := u^{\frac{4}{d-2}} h$ le changement conforme de métrique associé, on a :

$$\Delta_h u + \frac{d-2}{4(d-1)} R_h u = \frac{d-2}{4(d-1)} u^{\frac{d+2}{d-2}} R_{\tilde{h}}, \tag{9.4.1}$$

$$H_{\tilde{h}} := u^{-\frac{d}{d-2}} \left(-2\frac{d-1}{d-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} + H_h u \right). \tag{9.4.2}$$

En appliquant l'équation 9.4.1 à $\overline{g_m} := (\frac{1-r^2}{2})^2 g_m$ et en utilisant le fait que g_m est Einstein ($R_{g_m} = -12$), on obtient que $R_{\overline{g_m}} = -\frac{48mr^2}{1+mr^2}$.

Pour calculer la courbure moyenne du bord pour $\overline{g_m}$, on va utiliser que :

$$\overline{g_m} = \frac{1+mr^2}{1+mr^4}\mathrm{dr}^2 + r^2(1+mr^2)(\sigma_1^2+\sigma_2^2) + \frac{r^2(1+mr^4)}{1+mr^2}\sigma_3^2$$

admet une base orthonormale naturelle :

$$\begin{aligned} X_0 &= -\sqrt{\tfrac{1+mr^4}{1+mr^2}}\partial_r := f_0\partial_r, \qquad & X_1 &= \tfrac{1}{r\sqrt{1+mr^2}}\tilde{X}_1 := f_1\tilde{X}_1, \\ X_2 &= \tfrac{1}{r\sqrt{1+mr^2}}\tilde{X}_2 := f_2\tilde{X}_2, \qquad & X_3 &= \tfrac{1}{r}\sqrt{\tfrac{1+mr^2}{1+mr^4}}\tilde{X}_3 := f_3\tilde{X}_3, \end{aligned}$$

où, grâce encore une fois à la formule de Koszul, il est possible de calculer la seconde forme fondamentale de l'infini :

$$\Pi(X_i, X_j) := \delta_{ij}\delta_{i\neq 0} f_0 \frac{\partial_r f_i}{f_i} X_0,$$

et donc d'en déduire qu'en particulier,

$$H_{\overline{g_m}} = 3\frac{1+2m}{1+m}.$$

Recherche d'un candidat conforme

On va chercher une fonction radiale développable en série entière $u := \sum a_k r^k$ telle que $\widetilde{g_m} := u^{\frac{2}{n-2}}\overline{g_m}$ est de courbure scalaire $R_{\widetilde{g_m}}$ nulle. Ainsi u doit être solution de l'équation :

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_{\overline{g_m}}(u) + \frac{1}{6}R_{\overline{g_m}}u, \\ &= -\frac{1}{r^3(1+mr^2)}\partial_r\left(r^3(1+mr^2)\frac{1+mr^4}{1+mr^2}\partial_r u\right) - \frac{8mr^2}{1+mr^2}u, \end{aligned}$$

ce qui nous apprend que nécessairement, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et pour $k \geqslant 0$, $a_{k+4}(k+4)(k+6) = (-m) \times (k(k+6)+8)\, a_k$, et donc nécessairement :

$$u(r) := a_0 \sum_{k\geqslant 0} \frac{(-m)^k}{2k+1} r^{4k}.$$

Pour $a_0 = 1$ cette fonction est bien définie, positive sur [0,1] pour $-1 < m < 0$, et est solution de 9.4.1. Dans la suite, on appellera donc $u_m(r) := \sum \frac{(-m)^k}{2k+1} r^{4k}$.

Calcul du signe de la courbure moyenne pour le candidat :

Pour conclure, comme énoncé en début de preuve, il est suffisant de connaitre le signe de la courbure moyenne de $\tilde{g}_m := u_m^{\frac{2}{n-2}} \overline{g_m}$. Or, il découle de l'équation 9.4.2 qu'il est équivalent (comme m>-1) de regarder le signe de :

$$(1+2m)u_m(1) + (1+m)u_m'(1).$$

Comme :

$$\begin{aligned}(1+2m)u_m(1) + (1+m)u_m'(1) &= (1+2m)\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-m)^k}{2k+1} + (1+m)\sum_{k\geqslant 0} \frac{4k(-m)^k}{2k+1}, \\ &= 1 + \sum_{k\geqslant 1} (\frac{1}{2k+1} - 2\frac{1}{2k-1} + \frac{4k}{2k+1} - \frac{4k-4}{2k-1})(-m)^k, \\ &= 1 - \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-m)^k}{2k+1}, \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{-m}} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2k+1} (\sqrt{-m})^{2k+1}.\end{aligned}$$

On reconnait alors dans la somme la composition de la racine carré de la valeur absolue avec la primitive nulle en zéro de la fonction $\sum_{k\geqslant 1} X^{2k} = \frac{X^2}{1-X^2}$. Comme celle-ci est de la forme $x \mapsto -x + \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) + c$ et que l'annulation en zéro donne c=0, on obtient :

$$(1+2m)u_m(1) + (1+m)u_m'(1) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{-m}} \log(\frac{1+\sqrt{-m}}{1-\sqrt{-m}}).$$

On vérifie facilement que f est une fonction croissante, qui vérifie $f(-0.92) < -0.03 < 0$ et $f(-0.91) > 0.07 > 0$

$\square$

Chapitre 10

Unicité locale d'espaces asymptotiquement hyperboliques Einstein au voisinage des sphères de Berger

10.1 Existence et unicité locale de continuation pour les bords proches de g_m pour $m < 1$

L'idée dans cette partie est d'appliquer un théorème issu de la monographie [Lee06] d'existence locale de solution [1], obtenu par une linéarisation de l'équation d'Einstein qui prend en compte l'action des difféomorphismes. Pour énoncer ce théorème, nous allons d'abord rappeler la définition de l'action naturelle des tenseurs de courbure sur les 2-tenseurs.

Définition 10.1.1. Soit h une métrique Riemannienne, de tenseur de courbure de Riemann *Rm* et de Ricci *Ric*. Il y a une action naturelle des tenseurs de courbure sur les 2-tenseurs qui donne en coordonnées avec convention d'Einstein : $\overset{\circ}{Rm}(u)_{ij} = Rm_{ikjl}u^{kl}$ $\overset{\circ}{Ric}(u)_{ij} = \frac{1}{2}\left(R_{ik}{u_j}^k + R_{jk}{u_i}^k\right)$
Ces actions permettent de définir le Laplacien de Lichnerowicz sur les 2-tenseurs symétriques par

$$\Delta_L = \nabla^*\nabla + 2\overset{\circ}{Ric} - 2\overset{\circ}{Rm}.$$

Théorème 10.1.2 (Lee 06-Biquard 00)**.** *Soit M l'intérieur d'une variété à bord lisse et compacte appelé $\overline{M}$, de dimension (n+1).*
Soit h une métrique Einstein sur M, conformément compact $C^{l,\beta}$ avec $2 \leqslant l \leqslant n-1$ et $0 < \beta < 1$.
Soit ρ une fonction définissante de ∂M et soit $\hat{h} := \rho^2 h_{|\partial M}$. Supposons enfin que l'opérateur $\Delta_L + 2n$ associé à h a un noyau L^2 trivial au dessus de l'espace des 2-tenseurs symétriques sans trace.

1. aussi présent dans [Biq00]

Sous ces conditions, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour toute métrique $\hat{g}$ Riemannienne $C^{l,\beta}$ sur ∂M, si $||\hat{g} - \hat{h}||_{C^{l,\beta}(\partial M)} < \epsilon$, alors il existe une métrique g Einstein sur M conformément compacte de classe $C^{l,\beta}$ et d'infini conforme $[\hat{g}]$, et ce g est localement unique.

De plus, $\Delta_L + 2n$ associé à h a un noyau L^2 trivial au dessus de l'espace des 2-tenseurs symétriques sans trace dans n'importe lequel des deux cas suivants :

(a) h a une courbure sectionnelle positive

(b) L'invariant de Yamabe de $[\hat{h}]$ est positif et h a sa courbure sectionnelle majorée par $\frac{n^2-8n}{8n-8}$

Corollaire 10.1.3. *On appelle h_s la sphère de Berger de paramètre s.*
Pour tout $-1 < m < 1$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour toute métrique $\hat{k}$ Riemannienne $C^{l,\beta}$ sur $\mathbb{S}^3$, si $||\hat{k} - h_{\frac{1}{1+m}}||_{C^{l,\beta}(\mathbb{S}^3)} < \epsilon$, alors il existe une métrique Einstein k sur $\mathbb{B}^4$ conformément compact de classe $C^{l,\beta}$ et d'infini conforme $[\hat{k}]$, et ce k est localement unique.

Démonstration. D'après la discussion dans la section 9.1, pour $m < 1$, nous sommes totalement dans le cas (a) d'application du théorème. □

10.2 Existence et unicité locale : améliorer la plage de paramètres

Biquard et Rollin ont démontré dans [BR06] qu'en fait, ce résultat d'existence et d'unicité locale s'étend à toute la famille des métriques de Pedersen comme métrique ayant une structure autoduale en dimension 4, avec comme résultat principal le théorème suivant :

Théorème 10.2.1 (Biquard-Rollin 07).
Soit (M,g) une variété Einstein asymptotiquement hyperbolique complexe, telle que l'un des points suivants soit vérifié :

- *g a une courbure sectionnelle négative,*
- *M est orienté, de dimension réelle 4 et g est une métrique Einstein autoduale,*
- *M est une variété complexe, g est Kähler-Einstein et le groupe de cohomologie à support compact $H^1_c(M, TM)$ est trivial,*
- *M est la réunion disjointe d'espace Einstein asymptotiquement hyperbolique complexe (M_i, g_i) tels que $ker_{L^2}(\Delta_L(g_i) - 2n) = 0$.*

Alors $ker_{L^2}(\Delta_L(g) - 2n) = 0$, et en particulier, on peut appliquer le théorème 10.1.2.

Mais il est intéressant de présenter ici une technique qui pourrait permettre dans d'autres cas d'étendre un tel résultat obtenu en étudiant la courbure sectionnelle. L'argument est le suivant :

Dans la preuve du point (a) du théorème 10.1.2, Lee utilise une relation entre deux Laplaciens obtenue par un travail similaire à celui présenté dans le lemme 5.2.2. L'idée dans cette thèse est d'utiliser la proposition 10.2.2 (7.9 dans la monographie de Lee) suivante pour avoir une minoration non triviale de $||Du||^2_{L^2} + ||D^*u||^2_{L^2} =$

$\langle u, (DD^* + D^*D)u \rangle$ pour modifier la preuve dans [Lee06]. Il s'agit donc d'améliorer l'estimation du terme différentiel de notre opérateur, en utilisant une fonction poids.

Proposition 10.2.2 (Lee 06)**.** *Soit w une section lisse à support compact de $\bigwedge^k E$, et $\phi \in C^2(M, \mathbb{R}_+^*)$, alors on a l'estimation suivante :*

$$(w, (DD^* + D^*D)w)_{L^2} \geqslant \int_M \langle w, (\phi^{-1}\Delta\phi + 2H(log(\phi)))w \rangle dV_g$$

où $H(u)$ est l'extension comme dérivation de l'endomorphisme associé à la Hessienne de u.

Commençons par remarquer la proposition suivante :

Proposition 10.2.3. *Soit ψ une fonction radiale C^2 sur la boule unité, et soit les champs de vecteurs orthogonaux $(\partial r, \partial\theta_1, \partial\theta_2, \partial\theta_3)$ définis dans la section 8.2. On note (X_0, X_1, X_2, X_3) les champs de vecteurs orthonormés correspondants et f_i les facteurs de renormalisation correspondants ($X_0 = f_0 \partial r$, $X_i = f_i \partial\theta_i$). Alors en notant avec un prime la dérivation suivant r, on a :*

$$(Hess(\psi)(X_i, X_j)) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{X_0}(\mathcal{L}_{X_0}(\psi)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{f_0 f_1'}{f_1}\mathcal{L}_{X_0}(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_0 f_1'}{f_1}\mathcal{L}_{X_0}(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{f_0 f_3'}{f_3}\mathcal{L}_{X_0}(\psi) \end{pmatrix}$$

En particulier, on a pour Φ une fonction C^2 radiale que dans cette base,

$$\Phi^{-1}\Delta\Phi Id + 2Hess(log(\Phi)) = diag(\lambda_0(\Phi, r), \lambda_1(\Phi, r), \lambda_1(\phi, r), \lambda_3(\phi, r))$$

avec :

$$\begin{array}{rcllll} \lambda_0(\Phi, r) & := & -2(\frac{f_0\Phi'}{\Phi})^2 & +\frac{f_0(f_0\Phi')'}{\Phi} & +2\frac{f_0^2 f_1'\Phi'}{f_1\Phi} & +\frac{f_0^2 f_3'}{f_3}\frac{\Phi'}{\Phi} \\ \lambda_1(\Phi, r) & := & & -\frac{f_0(f_0\Phi')'}{\Phi} & & +\frac{f_0^2 f_3'}{f_3}\frac{\Phi'}{\Phi} \\ \lambda_3(\Phi, r) & := & & -\frac{f_0(f_0\Phi')'}{\Phi} & +2\frac{f_0^2 f_1'\Phi'}{f_1\Phi} & -\frac{f_0^2 f_3'}{f_3}\frac{\Phi'}{\Phi} \end{array}$$

Preuve. Il s'agit de dire que par définition, pour $\psi \in C^2$, on a $Hess(\psi)(X_i, X_j) = \mathcal{L}_{X_i}(\mathcal{L}_{X_j}(\psi)) - \mathcal{L}_{\nabla_{X_i}X_j}(\psi)$. En utilisant les valeurs de la connexion de Levi-Cevita dans cette base (calculées précédemment pour la section 9.1), et que pour une fonction radiale ϕ, pour $i \in \{1, 2, 3\}, \mathcal{L}_{X_i}(\phi) = 0$, on peut effectuer les calculs aboutissants au résultat.
Pour la deuxième partie de la preuve, il s'agit juste de se rappeler que par définition, $\Delta\psi = -tr(Hess(\psi))$ □

Une série de lemmes techniques (de simples études de fonctions polynomiales en fait) permet d'aboutir aux deux résultats suivants, les calculs sont tous reportés à l'annexe D (où l'on défini m_0 comme l'unique zéro plus grand que 2 d'une certaine fonction avec l'encadrement $2.3 > m_0 > 2.2$).

Lemme 10.2.4. *Pour $\Phi : r \mapsto 1 - r$, pour $1 \leqslant m < m_0$, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $i \in \{0, 1, 3\}$, et tout $r \in]0, 1[$, on ait que :*

$$\lambda_i(\Phi, r, m) - 2\beta(r, m) \geqslant \epsilon_1.$$

où $\beta(r,m) = -1 + m(\frac{1-r^2}{1+mr^2})^3$ *est une fonction qui apparaît naturellement dans la majoration des valeurs propres de* $\overset{\circ}{Rm}$*.*

Lemme 10.2.5. *Pour* $\Phi : r \mapsto 1-r$*, pour* $1 \leqslant m < m_0$*, il existe* $\epsilon_2 > 0$ *tel que pour tout* $i \in \{0,1,3\}$*, et* $r \in]0,1[$*, on ait :*

$$\lambda_i(\Phi, r, m) \geqslant (1-r^2)\epsilon_2.$$

On a maintenant tout ce qu'il nous faut pour montrer l'extension du corollaire 10.1.3 suivante :

Théorème 10.2.6. *On appelle* h_s *la sphère de Berger de paramètre* s*.*
Il existe $2.3 > m_0 > 2.2$ *tel que pour tout* $m < m_0$*, il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour toute métrique* $\hat{k}$ *Riemannienne* $C^{l,\beta}$ *sur* ∂M *, si* $||\hat{k} - h_{\frac{1}{1+m}}||_{C^{l,\beta}(\partial M)} < \epsilon$*, alors il existe* k *métrique Einstein sur* M *conformément compact de classe* $C^{l,\beta}$ *et d'infini conforme* $[\hat{k}]$*, et ce* k *est localement unique.*

Démonstration. Le cas $m < 1$ est traité dans le corollaire 10.1.3. Soit un $m \in [1, m_0[$, et ϵ_1, ϵ_2 issus respectivement des lemmes 10.2.4 et 10.2.5.
On va suivre le même schéma de preuve que dans le point (a) du théorème 10.1.2 de la monographie [Lee06] en améliorant les estimations. On doit donc montrer que $\Delta_L + 2 \times 3$, associé à g_m, a un noyau L^2 nul sur les sections de 2-tenseurs symétriques sans trace.

Comme g_m est Einstein, on obtient que $\overset{\circ}{Ric} = -3Id$, et un travail similaire au lemme 5.2.2 (le lemme 7.11 de [Lee06]) donne l'égalité suivante sur les sections de 2-tenseurs symétriques vu comme élément de $\Lambda^1 TM$:

$$\Delta_L + 2 \times 3 = DD^* + D^*D + 3 - \overset{\circ}{Rm}$$

Or pour tout $w \in C_c^\infty(M, \Sigma_0^2 M)$, on a par la proposition 10.2.2 pour toute fonction positive $\Phi \in C^2$:

$$(w, (DD^* + D^*D)w)_{L^2} \geqslant \int_M \langle w, (\phi^{-1}\Delta\phi + 2H(\log(\phi)))w\rangle dV_g.$$

En utilisant cette estimation avec $\Phi : r \mapsto 1-r$, puis en calculant les valeurs propres de $\overset{\circ}{Rm}$ à partir des valeurs de Rm issues de la proposition 9.1, et enfin les résultats des propositions 10.2.4 et 10.2.5, on obtient :

$$
\begin{aligned}
(w, [\Delta_L + 2\times 3]w) &= (w, (DD^* + D^*D)w)_{L^2} + 3||w||^2_{L^2} - (w, \overset{\circ}{Rm}\,(w)),\\
&\geqslant \int_M \langle w, (\phi^{-1}\Delta\phi + 2H(log(\phi)))w\rangle dV_g + \int_M \langle w, (3Id - \overset{\circ}{Rm})w\rangle dV_g,\\
&\geqslant \int_M \min_{i\in\{0,1,3\}} (\lambda_i(\Phi, r))\langle w, w\rangle dV_g + \int_M \left(3 - \max_{\mu\in Sp(\overset{\circ}{Rm})} (\mu(r))\right)\langle w, w\rangle dV_g,\\
&\geqslant \int_M \min_{i\in\{0,1,3\}} (\lambda_i(\Phi, r))\langle w, w\rangle dV_g + \int_M min\left[2 + m\left(\frac{1-r^2}{1+mr^2}\right)^3,\ 2\left(1 - m\left(\frac{1-r^2}{1+mr^2}\right)^3\right)\right]\langle w, w\rangle dV_g,\\
&\geqslant \int_M \min_{i\in\{0,1,3\}} (\lambda_i(\Phi, r) + 0, \lambda_i(\Phi, r) - 2\beta)\langle w, w\rangle dV_g\\
&\geqslant \int_M min\left(\epsilon_2(1-r^2), \epsilon_1\right)\langle w, w\rangle dV_g,\\
&\geqslant min(\epsilon_1, \epsilon_2)||\sqrt{1-r^2}u||^2_{L^2}.
\end{aligned}
\tag{10.2.1}
$$

(où $(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire associé à la norme L^2 issue de g_m), Cette série d'inégalités restant vraie dans $H^2_2(M, \Sigma^2_0 M)$ par densité de $C^\infty_c(M, \Sigma^2_0 M)$ dedans.
La multiplication par la fonction $r \mapsto \sqrt{1-r^2}$ étant injective dans L^2, il est alors clair que le noyau L^2 de $\Delta_L + 6$ est nul.
On peut alors conclure que $\Delta_L + 2\times 3$ a un noyau L^2 trivial, et donc que le théorème est vérifié grâce au théorème 10.1.2. □

Chapitre 11

Annexes

A Relations entre le tenseur de Cotton et la divergence de la courbure de Weyl

On donne ici la démonstration de l'égalité reliant le tenseur de Cotton et la divergence de la courbure de Weyl pour une métrique g suffisamment régulière :

$$C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-1} W_{mijk}{}^{,m}$$

Par définition, le tenseur de Shouten est le tenseur symétrique $A_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2n} g_{ij}$,
la courbure de Weyl $W_{lijk} = R_{lijk} - \frac{1}{n-1}\left(g_{lj}A_{ik} - g_{lk}A_{ij} - g_{ij}A_{lk} + g_{ik}A_{lj}\right)$,
et le tenseur de Cotton $C_{ijk} = A_{ij;k} - A_{ik;j}$.

Grâce à la seconde identité de Bianchi deux fois contractée ($2R_{ij}{}^{;j} = R_{;i}$), on a :

$$A_{ij}{}^{;j} = R_{ij}{}^{;j} - \frac{R^{;j}}{2n} g_{ij} = \frac{1}{2} R_{;i} - \frac{R_{;i}}{2n} = \frac{n-1}{2n} R_{;i}.$$

et grâce à la seconde identité de Bianchi contractée une seule fois :

$$R_{lijk}{}^{;l} = R_{ik;j} - R_{ij;k}$$

En calculant à partir de ces relations directement la divergence de la courbure de Weyl, on obtient :

$$\begin{aligned}
W_{lijk}{}^{;l} &= R_{lijk}{}^{;l} - \frac{1}{n-1}\left(g_{lj}A_{ik}{}^{;l} - g_{lk}A_{ij}{}^{;l} - g_{ij}A_{lk}{}^{;l} + g_{ik}A_{lj}{}^{;l}\right) \\
&= R_{ik;j} - R_{ij;k} - \frac{1}{n-1}\left(A_{ik;j} - A_{ij;k} - g_{ij}\frac{n-1}{2n}R_{;k} + g_{ik}\frac{n-1}{2n}R_{;j}\right) \\
&= A_{ik;j} - A_{ij;k} - \frac{1}{n-1}\left(A_{ik;j} - A_{ij;k}\right) \\
&= \frac{n-2}{n-1}\left(A_{ik;j} - A_{ij;k}\right) \\
&= -\frac{n-2}{n-1} C_{ijk}.
\end{aligned}$$

B Calculs pour le rayon indiciel

Rappellons que pour $u \in S_W$, avec D le tenseur de la différence des connexions $\nabla - \overline{\nabla}$, on a :

$$u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4}{}_{;l} = -T_{li_1}{}^{k} u_{ki_2 i_3}{}^{i_4} - T_{li_2}{}^{k} u_{i_1 k i_3}{}^{i_4} - T_{li_3}{}^{k} u_{i_1 i_2 k}{}^{i_4} + T_{lk}{}^{i_4} u_{i_1 i_2 i_3}{}^{k} + \mathcal{O}(1). \tag{B.1}$$

Et qu'avec une simple estimation, on a aussi :

$$\begin{aligned}(\nabla^* \nabla u)_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} &= -g_+{}^{lm} \Big(\partial_m u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4}{}_{;l} - T_{lm}{}^{j} u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4}{}_{;j} - \textstyle\sum_{s=1}^{3} T_{mi_s}{}^{j} u_{i_1 \ldots \hat{i_s} j i_3}{}^{i_4}{}_{;l} \quad + T_{mj}{}^{i_4} u_{i_1 i_2 i_3}{}^{j}{}_{;l} \Big) \\ &\qquad + o_{\rho \to 0}(1),\end{aligned} \tag{B.2}$$

Et aussi qu'en notant $\rho_i := \partial_i \rho$ et $\overline{\rho}^j := \overline{g}^{ij} \rho_i$ (exceptionnellement pour cette annexe, les isomorphismes musicaux sont ceux de $\overline{g}$) :

$$g_+{}^{lm} \partial_m T_{li_t}{}^{k} = g_+{}^{lm} \rho^{-2} \rho_m (\delta_l{}^{k} \rho_{i_t} + \delta_{i_t}{}^{k} \rho_l - \overline{g}_{li_t} \overline{g}^{kp} \rho_p) + o_{\rho \to 0}(1) = \delta_{i_t}{}^{k} + o_{\rho \to 0}(1); \tag{B.3}$$

$$g_+{}^{lm} T_{lm}{}^{j} T_{ji_t}{}^{k} = -(n-1) \delta_{i_t}^{k} + o_{\rho \to 0}(1); \tag{B.4}$$

$$g_+{}^{lm} T_{mi_s}{}^{j} T_{li_t}{}^{k} = \delta_{i_s}^{j} \delta_{i_t}^{k} + \overline{g}^{jk} \rho_{i_s} \rho_{i_t} - \delta_{i_s}^{k} \rho_{i_t} \overline{\rho}^{j} - \delta_{i_t}^{j} \rho_{i_s} \overline{\rho}^{k} + \overline{g}_{i_s i_t} \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{j} + o_{\rho \to 0}(1); \tag{B.5}$$

$$g^{lm} T_{mi_s}{}^{j} T_{lj}{}^{k} = -(n-1) \rho_{i_s} \overline{\rho}^{k} + o_{\rho \to 0}(1). \tag{B.6}$$

En mettant alors ces résultats ensemble, l'on obtient :

$$\begin{aligned}
(\nabla^* \nabla u)_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} = \; & - \Big[-u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} - u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} - u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} \Big] \\
& + \Big[(n-1) u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + (n-1) u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + (n-1) u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} - u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} \Big] \\
& + \Big[(n-1) \rho_{i_1} \overline{\rho}^{k} u_{k i_2 i_3}{}^{i_4} \\
& \quad - \Big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_1} \rho_{i_2} u_{j}{}^{j}{}_{i_3}{}^{i_4} - \rho_{i_2} \overline{\rho}^{j} u_{j i_1 i_3}{}^{i_4} - \rho_{i_1} \overline{\rho}^{k} u_{i_2 k i_3}{}^{i_4} + \overline{g}_{i_1 i_2} \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{j} u_{j k i_3}{}^{i_4} \Big) \\
& \quad - \big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_1} \rho_{i_3} u_{j i_2}{}^{j i_4} - \rho_{i_3} \overline{\rho}^{j} u_{j i_2 i_1}{}^{i_4} - \rho_{i_1} \overline{\rho}^{k} u_{i_3 i_2 k}{}^{i_4} + \overline{g}_{i_1 i_3} \overline{\rho}^{i_3} \overline{\rho}^{j} u_{j i_2 k}{}^{i_4} \big) \\
& \quad + \Big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_1} \rho_{k} u^{i_4}{}_{i_2 i_3}{}^{k} - \delta_{i_1}^{i_4} \rho_{k} \overline{\rho}^{j} u_{j i_2 i_3}{}^{k} - \rho_{i_1} \overline{\rho}^{i_4} u_{j i_2 i_3}{}^{j} + \overline{\rho}^{i_4} \overline{\rho}^{j} u_{j i_2 i_3 i_1} \Big) \Big] \\
& + \Big[- \Big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_2} \rho_{i_1} u_{j}{}^{j}{}_{i_3}{}^{i_4} - \rho_{i_1} \overline{\rho}^{j} u_{i_2 j i_3}{}^{i_4} - \rho_{i_2} \overline{\rho}^{k} u_{k i_1 i_3}{}^{i_4} + \overline{g}_{i_2 i_1} \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{j} u_{k j i_3}{}^{i_4} \Big) \\
& \quad + (n-1) \rho_{i_2} \overline{\rho}^{k} u_{i_1 k i_3}{}^{i_4} \\
& \quad - \big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_2} \rho_{i_3} u_{i_1 j}{}^{j i_4} - \rho_{i_3} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 j i_2}{}^{i_4} - \rho_{i_2} \overline{\rho}^{k} u_{i_1 i_3 k}{}^{i_4} + \overline{g}_{i_2 i_3} \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 j k}{}^{i_4} \big) \\
& \quad + \Big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_2} \rho_{k} u_{i_1}{}^{i_4}{}_{i_3}{}^{k} - \delta_{i_2}^{i_4} \rho_{k} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 j i_3}{}^{k} - \rho_{i_2} \overline{\rho}^{i_4} u_{i_1 j i_3}{}^{j} + \overline{\rho}^{i_4} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 j i_3 i_2} \Big) \Big] \\
& + \Big[- \big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_1} \rho_{i_3} u_{j i_2}{}^{j i_4} - \rho_{i_1} \overline{\rho}^{j} u_{i_3 i_2 j}{}^{i_4} + \rho_{i_3} \overline{\rho}^{k} u_{k i_2 i_1}{}^{i_4} + \overline{g}_{i_3 i_1} \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{j} u_{k i_2 j}{}^{i_4} \big) \\
& \quad - \big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_2} \rho_{i_3} u_{i_1 j}{}^{j i_4} - \rho_{i_2} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 i_3 j}{}^{i_4} + \rho_{i_3} \overline{\rho}^{k} u_{i_1 k i_2}{}^{i_4} + \overline{g}_{i_3 i_2} \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 k j}{}^{i_4} \big) \\
& \quad + (n-1) \overline{\rho}^{i_3} \rho_{k} u_{i_1 i_2}{}^{k i_4} \\
& \quad + \big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_3} \rho_{k} u_{i_1 i_2}{}^{i_4 k} - \delta_{i_3}^{i_4} \rho_{k} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 i_2 j}{}^{k} - \rho_{i_3} \overline{\rho}^{i_4} u_{i_1 i_2 j}{}^{j} + \overline{\rho}^{i_4} \overline{\rho}^{j} u_{i_1 i_2 j i_3} \big) \Big] \\
& - \Big[- \Big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{j} \rho_{i_1} u^{i_4}{}_{i_2 i_3}{}^{j} - \rho_{i_1} \overline{\rho}^{i_4} u_{j i_2 i_3}{}^{j} - \delta_{i_1}{}^{i_4} \rho_{j} \overline{\rho}^{k} u_{k i_2 i_3}{}^{j} + \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{i_4} u_{k i_2 i_3 i_1} \Big) \\
& \quad - \Big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{j} \rho_{i_2} u_{i_1}{}^{i_4}{}_{i_3}{}^{j} - \rho_{i_2} \overline{\rho}^{i_4} u_{i_1 j i_3}{}^{j} - \delta_{i_2}{}^{i_4} \rho_{j} \overline{\rho}^{k} u_{i_1 k i_3}{}^{j} + \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{i_4} u_{i_1 k i_3 i_2} \Big) \\
& \quad - \big(u_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{j} \rho_{i_3} u_{i_1 i_2}{}^{i_4 j} - \rho_{i_3} \overline{\rho}^{i_4} u_{i_1 i_2 j}{}^{j} - \delta_{i_3}{}^{i_4} \rho_{j} \overline{\rho}^{k} u_{i_1 i_2 k}{}^{j} + \overline{\rho}^{k} \overline{\rho}^{i_4} u_{i_1 i_2 k i_3} \big) \\
& \quad - (n-1) \overline{\rho}^{i_4} \rho_{k} u_{i_1 i_2 i_3}{}^{k} \Big] \\
& + o(1)
\end{aligned}$$

Donc en définissant :

$$Pos(u)_{i_1 i_2 i_3}{}^{i_4} := \rho_{i_1} \overline{\rho}^{k} u_{k i_2 i_3}{}^{i_4} + \rho_{i_2} \overline{\rho}^{k} u_{i_1 k i_3}{}^{i_4} + \overline{\rho}^{k} \rho_{i_3} u_{i_1 i_2 k}{}^{i_4} + \overline{\rho}^{i_4} \rho_{k} u_{i_1 i_2 i_3}{}^{k},$$

$$-\tilde{T}(u)_{i_1i_2i_3}{}^{i_4} := 2\rho_{i_1}\rho_{i_2}w^j{}_{ji_3}{}^{i_4} + 2\rho_{i_1}\rho_{i_3}u_{ji_2}{}^{ji_4} + 2\rho_{i_2}\rho_{i_3}u_{i_1j}{}^{ji_4} + 2\rho_{i_1}\overline{\rho}^{i_4}u_{ji_2i_3}{}^{j} + 2\rho_{i_2}\overline{\rho}^{i_4}u_{i_1j}{}^{i_3j} + 2\rho_{i_3}\overline{\rho}^{i_4}u_{i_1i_2}{}^{j}{}_{j},$$

$$\begin{aligned}-O(u)_{i_1i_2i_3}{}^{i_4} \quad = \quad & 2\overline{g}_{i_1i_2}\overline{\rho}^k\overline{\rho}^j u_{kji_3}{}^{i_4} + 2g_{+i_1i_3}\overline{\rho}^k\overline{\rho}^j u_{ji_2k}{}^{i_4} + 2\delta_{i_1}^{i_4}\rho_k\overline{\rho}^j u_{ji_2i_3}{}^{k} \\ & +2g_{+i_2i_3}\overline{\rho}^k\overline{\rho}^j u_{i_1jk}{}^{i_4} + 2\delta_{i_2}^{i_4}\rho_k\overline{\rho}^j u_{i_1ji_3}{}^{k} + 2\delta_{i_3}{}^{i_4}\overline{\rho}^j\rho_k u_{i_1i_2j}{}^{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Bianchi(u) = \quad & 2\rho_{i_1}\overline{\rho}^k\left(u_{i_2ki_3}{}^{i_4} + u_{i_3i_2k}{}^{i_4} + u^{i_4}{}_{i_2i_3k}\right) \quad +2\rho_{i_2}\overline{\rho}^k\left(u_{ki_1i_3}{}^{i_4} + u_{i_1i_3k}{}^{i_4} + u_{i_1}{}^{i_4}{}_{i_3k}\right) \\ & +2\rho_{i_3}\overline{\rho}^k\left(u_{ki_2i_1}{}^{i_4} + u_{i_1ki_2}{}^{i_4} + u_{i_1i_2}{}^{i_4}{}_{k}\right) \quad +2\overline{\rho}^{i_4}\overline{\rho}^k\left(u_{ki_2i_3i_1} + u_{i_1ki_3i_2} + u_{i_1i_2ki_3}\right),\end{aligned}$$

On obtient bien le résultat :

$$\nabla^*\nabla u = 2nu + (n-1)Pos(u) + Bianchi(u) + O(u) + \tilde{T}(u) + o(1).$$

Où $Bianchi(u)$ est une somme de termes dépendant multiplicativement de somme de Bianchi, $\tilde{T}(u)$ est une somme de termes dépendant multiplicativement de la trace de u calculée avec $\overline{g}$, $O(u)$ est tel que $\langle u, O(u)\rangle_{\overline{g}}$ est une somme de termes dépendant multiplicativement de la trace de u calculé avec $\overline{g}$, et $\langle u, Pos(u)\rangle_{\overline{g}}$ est la somme de la norme de vecteurs (vecteurs dépendants de la valeur de u quand une des composantes est suivant $d\rho$).

C Asymptote de la courbure de Weyl

On redonne ici la démonstration du lemme classique suivant, tiré du lemme 2.6 de l'article de Chang, Ge, Jin, et Qing [CGJQ21] :

Lemme C.1 (Chang, Ge, Jin, Qing)**.** *Soit $(M, \partial M, g_+)$ une variété asymptotiquement hyperbolique Einstein connexe de dimension $d = n+1$ et de régularité $C^{2,\eta}$, avec $n > 4$ et $0 < \eta < 1$, et on suppose trouvée une compactification telle que le bord soit totalement géodésique par rapport à celle-ci.*
On note (n+1) l'indice correspondant au vecteur normal au bord, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des indices correspondants à des directions tangentes au bord.
Enfin, soit h le représentant de la classe conforme à l'infini de g_+ correspondant à la compactification choisie, W_+ le tenseur de Weyl g_+ et W_h le tenseur de Weyl de h (qui a priori *sont des tenseurs sur des espaces différents).*
Alors :

$$(W_+)_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = (W_h)_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}; \qquad (W_+)_{(n+1)\beta\gamma}{}^{\delta} = 0 = (W_+)_{(n+1)\beta(n+1)}{}^{\delta}.$$

Preuve. Avec les équations de Gauss-Codazzi, il est immédiat que :

$$(\overline{R})_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = (R_h)_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} \quad \text{et} \quad (\overline{R})_{\alpha\beta\gamma}{}^{(n+1)} = 0. \tag{C.1}$$

De plus, avec les résultats de Graham dans [Gra99], il existe r une fonction définissante géodésique telle qu'avec $\hat{A}$ le tenseur de Schouten de la métrique du bord associé h :

$$\overline{g} := r^2 g_+ = dr^2 + h - r^2\hat{A} + o(r^2).$$

On fixe un point P du bord de M, et un système de coordonnées normales (pour $\overline{g}$) au point P $(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$, tel que ∂x_{n+1} soit orthogonal au bord. En P, les symboles de Christoffel vérifient $(\Gamma_{\overline{g}})^i{}_{jk} = 0$. En particulier, on peut donc écrire en P le tenseur de courbure de Riemann comme :

$$(\overline{R})_{ijkm} = \frac{1}{2}(\overline{g}_{im,kj} + \overline{g}_{jk,mi} - \overline{g}_{ik,mj} - \overline{g}_{jm,ki})$$

Or comme $\overline{g}_{(n+1)(n+1)} = 1$, $\overline{g}_{(n+1)\alpha} = 0$ et $\overline{g}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - r^2\hat{A}_{\alpha\beta} + o(r^2)$, on a que :

$$(\overline{R})_{\alpha(n+1)\beta(n+1)} = -\frac{1}{2}\overline{g}_{\alpha\beta,(n+1)(n+1)} = \hat{A}_{\alpha\beta} \tag{C.2}$$

Donc en P les égalités $\overline{R}_{(n+1)\alpha} = 0$, $\overline{R}_{\alpha\beta} = (R_h)_{\alpha\beta} + \overline{R}_{(n+1)(n+1)}$ et $\overline{R} = R_h + 2\overline{R}_{(n+1)(n+1)}$ sont vérifiées. En prenant la trace de l'équation (C.1), on obtient de la définition du tenseur de Schouten (on rappelle que sur (N, g) une variété Riemannienne, $A_{ij} := \frac{1}{dim(N)-2}(R_{ij} - \frac{R}{dim(N)-1}g_{ij})$) que :

$$\overline{R}_{(n+1)(n+1)} = \frac{R_h}{2(n-1)} \qquad \overline{R} = \frac{n}{n-1}R_h$$

En notant $\overline{A}$ le tenseur de Schouten de $\overline{g}$, on peut alors déduire de ce qui a été dit précédemment que :

$$\overline{A}_{(n+1)(n+1)} = 0 \qquad \overline{A}_{(n+1)\alpha} = 0$$

$$\overline{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{n-1}(R_{h\alpha\beta} + \overline{R}_{\alpha(n+1)\beta(n+1)} + \frac{\overline{R}}{2n}\overline{g}_{\alpha\beta}) = \frac{1}{n-1}(R_{h\alpha\beta} + \hat{A}_{\alpha\beta} + \frac{R_h}{2(n-1)}\overline{g}_{\alpha\beta}) = \hat{A}_{\alpha\beta}$$

Or comme une définition équivalente du tenseur de Weyl est $W = Riem - A \owedge g$, il est immédiat que $W(\overline{g})_{\alpha\beta\gamma\delta} = W(h)_{\alpha\beta\gamma\delta}$.
Enfin, comme $R(\overline{g})_{(n+1)\alpha\beta\gamma} = 0$ et $(A \owedge \overline{g})_{(n+1)\alpha\beta\gamma} = 0$, il est également immédiat que : $W(\overline{g})_{(n+1)\alpha\beta\gamma} = 0$.
La dernière égalité nécessaire demande à peine plus de précaution :

$$W(\overline{g})_{(n+1)\alpha(n+1)\beta} = \overline{R}_{(n+1)\alpha(n+1)\beta} - (A \owedge \overline{g})_{(n+1)\alpha(n+1)\beta} = \overline{R}_{(n+1)\alpha(n+1)\beta} - A_{\alpha\beta} = 0$$

Ce qui permet de conclure en rappelant que le tenseur de Weyl est un invariant conforme. □

D Lemmes techniques pour l'existence et l'unicité locale de métriques AHE au voisinage des métriques de Pedersen

Dans cette annexe, par un souci de complétude plus que pour l'intérêt des méthodes utilisées, on démontre les lemmes techniques 10.2.4 et 10.2.5 utilisés dans la section 10.2. Pour cela, on introduit trois lemmes intermédiaires.

Lemme D.1. *Pour $\Phi = 1-r$, on a, avec les définitions des λ_i données dans la proposition 10.2.2, que :*

$$\begin{aligned}
\lambda_0(\Phi,r) &= \frac{(1+r)(1+mr^4)(3-2r+(5m+3)r^2-2mr^3+8mr^4)}{4r(1+mr^2)^2},\\
\lambda_1(\Phi,r) &= \frac{(1+r)(1-r^2)(1-mr^2+5mr^4+3mr^6)}{4r(1+mr^2)^2},\\
\lambda_3(\Phi,r) &= \frac{(1+r)(1-r^2)(1+mr^4)(1+3mr^2)}{4r(1+mr^2)^2}.
\end{aligned}$$

Preuve. Rappellons que $f_0(r) = \frac{(1-r^2)\sqrt{1+mr^4}}{2\sqrt{1+mr^2}}$, $f_1(r) = \frac{(1-r^2)}{2r\sqrt{1+mr^2}}$ et $f_3(r) = \frac{(1-r^2)\sqrt{1+mr^2}}{2r\sqrt{1+mr^4}}$.
On remarque alors que :

$$\begin{aligned}
\frac{f_0'}{f_0} + 2\frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_3'}{f_3} &= 4\frac{-2r}{1-r^2} - 3\frac{1}{r} - 2\frac{mr}{1+mr^2} + 0\frac{4mr^3}{1+mr^4} &&= -\frac{3+(5m+5)r^2+10mr^4}{r(1-r^2)(1+mr^2)},\\
-\frac{f_0'}{f_0} + \frac{f_3'}{f_3} &= 0\frac{-2r}{1-r^2} - 1\frac{1}{r} + 2\frac{mr}{1+mr^2} - 2\frac{2mr^3}{1+mr^4} &&= -\frac{1-mr^2+5mr^4+3m^2r^6}{r(1+mr^2)(1+mr^4)},\\
-\frac{f_0'}{f_0} + 2\frac{f_1'}{f_1} - \frac{f_3'}{f_3} &= 0\frac{-2r}{1-r^2} - 1\frac{1}{r} - 2\frac{mr}{1+mr^2} - 0\frac{2mr^3}{1+mr^4} &&= -\frac{1+3mr^2}{r(1+mr^2)}.
\end{aligned}$$

On a donc par la proposition 10.2.3 que pour toute fonction Φ :

$$\begin{aligned}
\lambda_0(\Phi,r) &= -2f_0^2\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^2 + f_0^2\frac{\Phi''}{\Phi} - f_0^2\frac{3+(5m+5)r^2+10mr^4}{r(1-r^2)(1+mr^2)}\frac{\Phi'}{\Phi},\\
\lambda_1(\Phi,r) &= -f_0^2\frac{\Phi''}{\Phi} - f_0^2\frac{1-mr^2+5mr^4+3m^2r^6}{r(1+mr^2)(1+mr^4)}\frac{\Phi'}{\Phi},\\
\lambda_3(\Phi,r) &= -f_0^2\frac{\Phi''}{\Phi} - f_0^2\frac{1+3mr^2}{r(1+mr^2)}\frac{\Phi'}{\Phi}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\Phi = 1-r$, on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_0(\Phi,r) &= -2\frac{(1-r^2)^2(1+mr^4)}{4(1+mr^2)}\left(\frac{-1}{1-r}\right)^2 + 0 - \frac{(1-r^2)^2(1+mr^4)}{4(1+mr^2)}\frac{(3+(5m+5)r^2+10mr^4)}{r(1-r^2)(1+mr^2)}\frac{-1}{1-r},\\
\lambda_1(\Phi,r) &= 0 - \frac{(1-r^2)^2(1+mr^4)}{4(1+mr^2)}\frac{(1-mr^2+5mr^4+3m^2r^6)}{r(1+mr^2)(1+mr^4)}\frac{-1}{1-r},\\
\lambda_3(\Phi,r) &= 0 - \frac{(1-r^2)^2(1+mr^4)}{4(1+mr^2)}\frac{(1+3mr^2)}{r(1+mr^2)}\frac{-1}{1-r}.
\end{aligned}$$

Et donc pour $\Phi = 1-r$,

$$\begin{aligned}
\lambda_0(\Phi,r) &= \frac{(1+r)(1+mr^4)(3-2r+(5m+3)r^2-2mr^3+8mr^4)}{4r(1+mr^2)^2},\\
\lambda_1(\Phi,r) &= \frac{(1+r)(1-r^2)(1-mr^2+5mr^4+3mr^6)}{4r(1+mr^2)^2},\\
\lambda_3(\Phi,r) &= \frac{(1+r)(1-r^2)(1+mr^4)(1+3mr^2)}{4r(1+mr^2)^2}.
\end{aligned}$$

□

Remarque/Notation : On note $\beta(r,m) = Rm_{1212}(g_m)(r) = -1 + m\left(\frac{1-r^2}{1+mr^2}\right)^3$. Lorsqu'on cherche à majorer les valeurs propres de $\overset{\circ}{Rm}$, cette fonction apparaît naturellement.

Pour vérifier les minorations que forment les lemmes 10.2.4 et 10.2.5, on peut remarquer que celles-ci ne mettent en jeu que des fractions polynomiales. On trouve donc quelles sont exactement ces fonctions dans le lemme suivant.

Lemme D.2. *Pour $\Phi : r \mapsto 1-r$, en notant $q_i = 4r(1+mr^2)^3\left(\lambda_i(\Phi, r) - 2\beta(r)\right)$ pour $i \in \{0,1,3\}$, on a que :*

$$\begin{aligned}
q_0 = \quad & 3 + (9-8m)r + (8m+1)r^2 + (52m+3)r^3 + 5(m+2)mr^4 + (27m^2-12m)r^5 + (14m^2+m)r^6 \\
& +(8m^3+12m^2+11m)r^7 + (5m^3+7m^2)r^8 + (3m^3+11m^2)r^9 + 6m^3r^{10} + 8m^3r^{11}, \\
q_1 = \quad & 1 + (9-8m)r - r^2 + (48m-1)r^3 + (5m-m^2)r^4 + (23m^2-19m)r^5 + (6m^2-2m)r^6 \\
& +(8m^3+6m^2+6m)r^7 + (-2m^2-3m)r^8 + (-2m^2-3m)r^9 - m^2r^{10} - m^2r^{11}, \\
q_3 = \quad & 1 + (9-8m)r + (4m-1)r^2 + (52m-1)r^3 + 3(m-1)mr^4 + 27m(m-1)r^5 + m(m-1)r^6 \\
& +(8m^3+m^2+7m)r^7 + (3m^3-4m^2)r^8 + (3m^3-4m^2)r^9 - 3m^3r^{10} - 3m^3r^{11}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Il s'agit de calculer à partir du résultat du lemme D.1 et de l'expression :
$\beta = -\frac{1-m+6mr^2+3m(m-1)r^4+m(m^2+1)r^6}{(1+mr^2)^3}$ □

Dans la forme présenté, les trois polynômes sont (pour la plage de paramètre m>0) tous minorés par le troisième sur [0,1]. Il ne reste donc plus qu'à minorer ce polynôme, ce que nous allons faire dans le lemme suivant.

Lemme D.3. *Il existe $m_0 > 2.2$ [a] tel que pour tout $m \in [1, m_0[$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $r \in [0,1]$, on ait la minoration suivante :*

$$1 + (9-8m)r - r^2 + (48m-1)r^3 \geqslant \epsilon$$

a. Plus précisément m_0 est l'unique zéro plus grand que 2 de
$(-2304X^2 + 2640X - 56)\sqrt{1+3(8X-9)(48X-1)} + 58752X^2 + 1368X - 56$

Démonstration. Soit $m \geqslant 1$, on va faire une disjonction de cas, suivant la position de m par rapport à $\frac{3}{2}$.

<u>Cas 1 :</u> $1 \leqslant m \leqslant \frac{3}{2}$,
Pour $r \in [0,1]$, on a $1 + (9-8m)r - r^2 + (48m-1)r^3 \geqslant 1 + (9 - 8\frac{3}{2})r - r^2 + (48-1)r^3 = 1 - 3r - r^2 + 47r^3$.
On définit alors $P_1(r) := 1 - 3r - r^2 + 47r^3$, fonction dérivable de $r \in \mathbb{R}$, et on vérifie que sa dérivée vérifie $P_1'(r) = -3 - 2r + 141r^2$.
Cette dérivée est un polynôme de degré 2 qui s'annule en $r_{1,\pm} = \frac{2 \pm 2\sqrt{424}}{282}$. On vérifie alors numériquement que $P_1(r_{1,+}) \approx 0.68592$.
On a de ce fait le tableau de variations suivant, qui nous permet de conclure quant à la positivité de P_1 sur [0,1], et donc de conclure le premier cas.

r	$-\infty$		$r_{1,-}$		0		$r_{1,+}$		1
$P_1'(r)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$P_1(r)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\searrow$	≈ 0.6	$\nearrow$	

<u>Cas 2 :</u> $\frac{3}{2} \leqslant m$
On définit la fonction polynomiale $P_m(r) = 1 + (9-8m)r - r^2 + (48m-1)r^3$, et on remarque qu'au vu de la

plage de paramètres, $8m - 9 > 0$ et $48m - 1 > 1$.

On vérifie que sa dérivée est un polynôme de degré 2 $P'_m(r) = (9 - 8m) - 2r + 3(48m-1)r^2$, dont les zéros sont $x_{m,\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3(8m-9)(48m-1)}}{3(48m-1)}$, ce qui nous donne un tableau de variations de la forme :

r	$-\infty$		$x_{m,-}$		0		$x_{m,+}$		1
$P'_1(r)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$P_1(r)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	1	$\searrow$	$P_m(x_{m,+})$	$\nearrow$	

Pour conclure la preuve de ce lemme, il suffit donc de montrer que $P_m(x_{m,+}) > 0$.

On commence par remarquer que l'on peut simplifier l'expression en utilisant le fait que :

$$x_{m,+}^2 = \frac{1}{3(48m-1)} \left(8m - 9 + 2x_{m,+}\right).$$

D'où on tire :

$$\begin{aligned}
P_m(x_{m,+}) &= 1 - (8m-9)x_{m,+} - x_{m,+}^2 + (48m-1)x_{m,+}^3, \\
&= 1 - (8m-9)x_{m,+} - x_{m,+}^2 + \frac{1}{3}x_{m,+}\left(8m - 9 + 2x_{m,+}\right), \\
&= 1 - \frac{2(8m-9)}{3}x_{m,+} - \frac{1}{3}x_{m,+}^2, \\
&= 1 - \frac{2(8m-9)}{3}x_{m,+} - \frac{1}{9(48m-1)}(8m - 9 + 2x_{m,+}),
\end{aligned}$$

Et en injectant l'expression de $x_{m,+} = \frac{1+\sqrt{1+3(8m-9)(48m-1)}}{3(48m-1)}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P_m(x_{m,+}) &= 1 - \frac{2(8m-9)}{3}\frac{1}{3(48m-1)} - \frac{8m-9}{9(48m-1)} - \frac{2}{9(48m-1)}\frac{1}{3(48m-1)} \\
&\quad + \left(-\frac{2(8m-9)}{3}\frac{1}{3(48m-1)} - \frac{2}{9(48m-1)}\frac{1}{3(48m-1)}\right)\sqrt{1+3(8m-9)(48m-1)}
\end{aligned}$$

Et en multipliant par la quantité positive $27(48m-1)^2$, on trouve :

$$\begin{aligned}
27(48m-1)^2 P_m(x_{m,+}) &= 27(48m-1)^2 - 2(8m-9) \times 3(48m-1) - (8m-9) \times 3(48m-1) - 2 \\
&\quad + \left(-2(8m-9) \times 3(48m-1) - 2\right)\sqrt{1+3(8m-9)(48m-1)} \\
&= \left(58752m^2 + 1368m - 56\right) + \left(-2304m^2 + 2640m - 56\right)\sqrt{1+3(8m-9)(48m-1)}
\end{aligned}$$

Une étude de la fonction $g : x \mapsto \frac{58752x^2+1368x-56}{2304x^2-2640x+56}$ sur $[1,5,+\infty[$ permet de montrer qu'elle est bien définie et strictement décroissante.

On peut alors en conclure, comme sur cet intervalle $2304x^2 - 2640x + 56 > 1168 \geqslant 0$, qu'en tant que fonction de m, $\frac{(48m-1)^2}{2304m^2-2640m+56}P_m(x_{m,+})$ est strictement décroissante.

En particulier, si on définit m_0 comme l'unique zéro plus grand que $\frac{3}{2}$ de $H : m \mapsto \left(58752m^2 + 1368m - 56\right) +$

$\left(-2304m^2+2640m-56\right)\sqrt{1+3(8m-9)(48m-1)}$, alors pour $\frac{3}{2}\leqslant m<m_0$, on a que :

$$P_m(x_{m,+}) > \frac{(2304m^2-2640m+56)(48m_0-1)^2}{(2304m_0^2-2640m_0+56)(48m-1)^2}P_{m_0}(x_{m_0,+}) = 0,$$

ce qui permet de conclure.

Il ne reste plus qu'à montrer que $2.3 > m_0 > 2.2$, mais pour cela il suffit de remarquer que :
$H(2.2) = 287313,28 - 5399,36\sqrt{2699,68} \geqslant 287313,28 - 5399,36 \times 52 = 6546,56 > 0$,
$H(2.3) = 313888.48 - 6172.16\sqrt{3086.08} \leqslant 313888.48 - 6172.16 \times 55 = -25580.32 < 0$,
(numériquement, on a que $2.22045 > m_0 > 2.22044$). □

En mettant alors ensemble les résultats des lemmes D.2 et D.3, on obtient bien le lemme 10.2.4,

Corollaire D.4. *Pour $\Phi : r \mapsto 1-r$, pour $1 \leqslant m < m_0$, il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que pour tout $i \in \{0,1,3\}$, et tout $r \in]0,1[$, on a que :*

$$\lambda_i(\Phi,r) - 2\beta(r) \geqslant \epsilon_1.$$

Démonstration. Il s'agit de remarquer que pour les paramètres comme dans l'énoncé, on a $m-1 \geqslant 0$ et $r \leqslant 1$ pour montrer que pour tout i, on a en fait que $\lambda_i(\Phi,r) - 2\beta(r) \geqslant \frac{1+(9-8m)r-r^2+(48m-1)r^3}{4r(1+mr^2)^3}$
Puis en notant que $0 \leqslant r \leqslant 1$ et $0 \leqslant m \leqslant 3$, on obtient : $\lambda_i(\Phi,r) - 2\beta(r) \geqslant \frac{1+(9-8m)r-r^2+(48m-1)r^3}{(4)^4}$, ce qui nous permet de conclure avec le lemme D.3. □

Le résultat du lemme 10.2.5 est un peu plus direct, et ne nécessite que le lemme D.1.

Proposition D.5. *Pour $\Phi : r \mapsto 1-r$, pour $1 \leqslant m < m_0$, il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que pour tout $i \in \{0,1,3\}$, et $r \in]0,1[$, on ait :*

$$\lambda_i(\Phi,r) \geqslant (1-r^2)\epsilon_2.$$

Démonstration. Rappelons que le lemme D.1 nous dit que :

$$\begin{array}{rcl}\lambda_0(\Phi,r) &=& \frac{(1+r)(1+mr^4)(3-2r+(5m+3)r^2-2mr^3+8mr^4)}{4r(1+mr^2)^2},\\ \lambda_1(\Phi,r) &=& \frac{(1+r)(1-r^2)(1-mr^2+5mr^4+3mr^6)}{4r(1+mr^2)^2},\\ \lambda_3(\Phi,r) &=& \frac{(1+r)(1-r^2)(1+mr^4)(1+3mr^2)}{4r(1+mr^2)^2}.\end{array}$$

Comme il est immédiat que $1+r \geqslant 1$, $1+m_0 \geqslant 1+mr^2 \geqslant 1$, $1+mr^4 \geqslant 1$, $1 \geqslant r > 0$ et $1+3mr^2 \geqslant 1$, il nous suffit de montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $1-mr^2+5mr^4+3mr^6 > c$ et que $3-2r+(5m+3)r^2-2mr^3+8mr^4 \geqslant (1-r^2)$ pour pouvoir conclure.

Montrons que $3-2r+(5m+3)r^2-2mr^3+8mr^4 \geqslant 1-r^2$

Comme $0 \leqslant r \leqslant 1$ et $m \geqslant 1$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{array}{rcl} 3-2r+(5m+3)r^2-2mr^3+8mr^4 & \geqslant & 1+mr^2-2mr^3+mr^4 \\ & = & 1+mr^2(1-2r+r^2) \\ & = & 1+mr^2(1-r)^2 \\ & \geqslant & 1 \\ & \geqslant & 1-r^2 \end{array}$$

Montrons que $1-mr^2+5mr^4+3mr^6 \geqslant c > 0$

Si on considère $f : r \mapsto 1-mr^2+5mr^4+3mr^6$ comme une fonction réelle, alors une étude de sa dérivée f' : $r \mapsto mr(-2+20r^2+18r^4)$ montre que f est décroissante sur $\left]0, \sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{9}}\right[$, puis croissante sur $\left[\sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{9}}, 1\right[$. En particulier, f sur]0,1[est minimale en $x_0 = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{34}}{9}}$. Comme $x_0^2 < \frac{1}{9}$ et $\frac{-18}{27} \leqslant -1+5x_0^2+3x_0^4 = \frac{-43+5\sqrt{34}}{27} \leqslant \frac{-13}{27}$, on a par la deuxième inégalité triangulaire que :

$$\forall r \in]0,1[, f(r) \geqslant 1 - m * \frac{1*18}{9*27} \geqslant \frac{7}{9} =: c > 0,$$

En utilisant $m < m_0 \leqslant 3$. $\square$

Bibliographie

[AB02] Kazuo Akutagawa et Boris Botvinnik : Relative Yamabe Invariant. *Communications In Analysis And Geometry*, 10 :935–969, 2002.

[AHS78] Michael Francis Atiyah, Nigel James Hitchin et I. M. Singer : Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 362(1711) :425–461, 1978.

[AKK$^+$04] Michael T. Anderson, Atsushi Katsuda, Yaroslav Kurylev, Matti Lassas et Michael E. Taylor : Boundary regularity for the Ricci equation, geometric convergence, and Gel'fand's inverse boundary problem. *Inventiones mathematicae*, 158 :261–321, 2004.

[And01] Michael T. Anderson : L^2 Curvature and Volume Renormalization of AHE Metrics on 4-manifolds. *Mathematical Research Letters*, 8(2) :171–188, 2001.

[APT96] Lars Andersson et Chruściel Piotr T. : *Solutions of the Constraint Equations in General Relativity Satisfying "Hyperboloidal Boundary Conditions"*, volume 355. Dissertationes Mathematicae, 1996.

[Aub11] Thierry Aubin : *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.* Springer, 2011.

[BC09] Simon Brendle et Sophie Chen : An existence theorem for the Yamabe problem on manifolds with boundary. *J. Eur. Math. Soc.*, 16 :991–1016, 2009.

[Bes87] Arthur L. Besse : *Einstein Manifolds.* Springer Berlin Heidelberg, 1987.

[Biq00] Olivier Biquard : *Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques.* Numéro 265 de Astérisque. Société Mathématique de France, 2000.

[BR06] Olivier Biquard et Yann Rollin : Wormholes in ACH Einstein manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 361 :2021–2046, 2006.

[CDLS05] Piotr T. Chrusciel, Erwann Delay, John M. Lee et Dale N. Skinner : Boundary regularity of conformally compact Einstein metrics. *journal of differential geometry*, 69 :111–136, 2005.

[CGJQ21] Sun-Yung A. Chang, Yuxin Ge, Xiaoshang Jin et Jie Qing : On compactness conformally compact Einstein manifolds and uniqueness of Graham-Lee metrics, III. *arXiv, Differential Geometry*, arXiv:2107.03075, 2021.

[CGY02] Sun-Yung A. Chang, Matthew J. Gursky et Paul C. Yang : An Equation of Monge-Ampere Type in Conformal Geometry, and Four-Manifolds of Positive Ricci Curvature. *The Annals of Mathematics*, 155(3) :709, 2002.

[Che08] Szu-yu Sophie Chen : Conformal Deformation on Manifolds With Boundary. *Geometric and Functional Analysis*, 19(4) :1029–1064, 2008.

[Che10] Szu-yu Sophie Chen : Conformal Deformation to Scalar Flat Metrics with Constant Mean Curvature on the Boundary in Higher Dimensions. *arXiv, Differential Geometry*, arXiv:0912.1302, 2010.

[Chen09] Dezhong Chen : Construction of Conformally Compact Einstein Manifolds. *arXiv : Differential geometry*, arXiv:0908.1430, 2009.

[CLW19] Xuezhang Chen, Mijia Lai et Fang Wang : Escobar-Yamabe compactifications for Poincare-Einstein manifolds and rigidity theorems. *Advances in Mathematics*, 343 :16–35, 2019.

[CM20] Giovanni Catino et Paolo Mastrolia : Bochner type formulas for the Weyl tensor on four dimensional Einstein manifolds. *International Mathematics Research Notices*, 2020, Issue 12 :3794–3823, 2020.

[CS18] Vicente Cortés et Arpan Saha : Quarter-pinched Einstein metrics interpolating between real and complex hyperbolic metrics. *Math. Z.*, 290 :155–166, 2018.

[DK81] Dennis M. DeTurck et Jerry L. Kazdan : Some regularity theorems in riemannian geometry. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 14(3) :249–260, 1981.

[Esc92a] Jose F. Escobar : Conformal Deformation of a Riemannian Metric to a Scalar Flat Metric with Constant mean Curvature on the Boundary. *The Annals of Mathematics*, 136(1) :1–50, 1992.

[Esc92b] José F. Escobar : The Yamabe problem on manifolds with boundary. *Journal of Differential Geometry*, 35(1), 1992.

[GC] Ge Yuxin et Chang Alice : Travail en préparation. *(-)*, (-).

[GH80] David Gilbarg et Lars Hörmander : Intermediate Schauder estimates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 74(4) :297–318, 1980.

[GH17] Matthew J. Gursky et Qing Han : Poincaré-Einstein metrics and Yamabe invariants. *Geometric and Functional Analysis*, 27 :863–879, 2017.

[GJS13] Romain Gicquaud, Dandan Ji et Yuguang Shi : On the asymptotic behavior of Einstein manifolds with an integral bound on the Weyl curvature. *communications in analysis and geometry*, 21, Numéro 5 :1081–1113, 2013.

[GL91] Charles Robin Graham et John M Lee : Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball. *Advances in Mathematics*, 87(2) :186–225, 1991.

[Gra99] Charles Robin Graham : Volume and Area Renormalizations for Conformally Compact Einstein Metrics. *Circolo Matematico di Palermo*, pages 31–42, 1999.

[GT01] David Gilbarg et Neil S. Trudinger : *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer, 3rd ed. édition, 2001.

[HV96] Emmanuel Hebey et Michel Vaugon : Effective L^p pinching for the concircular curvature. *Journal of Geometric Analysis*, 6(4) :531–553, 1996.

[Lee94] John M. Lee : The spectrum of an asymptotically hyperbolic Einstein manifold. *Communications In Analysis And Geometry*, Volume 3, Numéro 2 :253–271, 1994.

[Lee06] John M. Lee : *Fredholm Operators and Einstein Metrics on Conformally Compact Manifolds*. Numéro no. 864 de Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society, 2006.

[Mal99] Juan M. Maldacena : The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38 :1113–1133, 1999.

[Mal03] Juan M. Maldacena : TASI 2003 Lectures on AdS/CFT. *Princeton, New Jersey*, 2003.

[Mar07] Fernando C. Marques : Conformal deformations to scalar-flat metrics with constant mean curvature on the boundary. *Communications in Analysis and Geometry*, 15(2) :381–405, 2007.

[Maz86] Rafe Mazzeo : *Hodge Cohomology of Negatively Curved Manifolds*. Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1986.

[Maz88] Rafe Mazzeo : The Hodge cohomology of a conformally compact metric. *Journal of Differential Geometry*, 28(2), 1988.

[Ped86] Henrik Pedersen : Einstein metrics, spinning top motions and monopoles. *Mathematische Annalen*, 274(1) :35–59, 1986.

[Pen68] Roger Penrose : Structure Of Space–Time. *Battelle Rencontres. New York W. A. Benjamin, Inc.*, pages 121–235, 1968.

[Pen76] Roger Penrose : Nonlinear gravitons and curved twistor theory. *General Relativity and Gravitation*, 7(1) :31–52, 1976.

[Pet98] Peter Petersen : *Riemannian Geometry*. Springer, 1998.

[Qin03] Jie Qing : On the rigidity for conformally compact Einstein manifolds. *International Mathematics Research Notices*, 21 :1141–1153, 2003.

[Sch84] Richard Schoen : Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *Journal of Differential Geometry*, 20(2) :479–495, 1984.

[Sin92] Michael A. Singer : Positive Einstein metrics with small $L^{\frac{n}{2}}$-norm of the Weyl tensor. *Differential Geometry and its Applications*, 2(3) :269–274, 1992.

[Str75] Peter Stredder : Natural differential operators on Riemannian manifolds and representations of the orthogonal and special orthogonal groups. *Journal of Differential Geometry*, 10(4) :647–660, 1975.

[Tru68] Neil S. Trudinger : Remarks concerning the conformal deformation of riemannian structures on compact manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, pages 265–274, 1968.

[War80] Ward, Richard S. : Self-dual space-times with cosmological constant. *Communications in Mathematical Physics*, 78(1) :1–17, 1980.

[Wit98] Edward Witten : Anti De Sitter Space And Holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2 :253–291, 1998.

[Wu17] Hung-Hsi Wu : *The Bochner Technique in Differential Geometry*. Numéro 6 de Classical Topics in Mathematics. Higher Education Press, 2017.

[Yam60] Hidehiko Yamabe : On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Mathematical Journal*, 12(1) :21–37, 1960.