Université Paul Sabatier
Master 1 ESR

Premier semestre 2017-2018
Probabilités et Statistique

TD 6 : Maximum de vraisemblance. Test de Neyman-Pearson.

Exercice 1.(Estimation du paramètre d'une loi exponentielle.)
On suppose que la durée de vie d'un matériel est une v.a.r T suivant une loi exponentielle de densité

$$f(t) = \theta e^{-\theta t} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu que l'on veut estimer à l'aide d'observations indépendantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ et calculer son biais, sa variance et son risque quadratique.

Exercice 2. On considère la structure statistique $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{U_{[0,\theta]}, \theta > 0\})^n$ où $U_{[0,\theta]}$ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$. On note $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées.

(1) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ? (On le notera $\hat{\theta}$).
(2) Calculer le biais de $\hat{\theta}$. En déduire un estimateur T sans biais de θ.
(3) On considère comme troisième estimateur de θ, $U = \frac{n+2}{n+1} \max(X_1, ..., X_n)$. Calculer le biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne de U, T et $\hat{\theta}$. Commentaires.

Exercice 3. On considère un n-échantillon d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Dans chaque cas, calculer le biais et étudier la convergence.

(1) On suppose σ connu et m inconnu. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de m ?
(2) On suppose m connu et σ inconnu. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ ?
(3) On suppose σ et m inconnus. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de (m, σ) ?

Exercice 4. On considère la structure statistique $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in (0, 1)\})^n$ où $\mathbb{P}_\theta$ est la loi géomètrique de paramètre θ. On note $X_1, ..., X_n$ les applications coordonnées.

(1) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ? (On le notera $\hat{\theta}$).
(2) Trouver la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$.

Exercice 5. On dispose d'un échantillon de taille n de loi P_θ paramétrée par $\theta > -1$ et de densité $L(x, \theta) = (\theta + 1)x^\theta \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit θ_0 et θ_1 deux valeurs fixées du paramètre, avec $\theta_0 > \theta_1$.

(1) Donner un test UPP (de niveau arbitraire) pour tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta = \theta_1$.
(2) Soit X une v.a.r. de loi P_θ. Quelle est la loi de $Y = -\ln X$. En déduire comment fixer le niveau du test précédent à $\alpha \in]0, 1[$.

Exercice 6. On considère la structure statistique $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \mathbb{R}^2\})$ où $\mathbb{P}_\theta \sim \mathcal{N}_2(\theta = (\gamma, \beta), I_2)$. On considère $\tilde{\theta} = (\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) \in \mathbb{R}^2$ fixé, ainsi que les hypothèses suivantes:

$$\mathcal{H}_0 : \theta = 0$$
$$\mathcal{H}_1 : \theta = \tilde{\theta}$$
$$\mathcal{H}_2 : \theta \in \{a\tilde{\theta}, a > 0\}.$$

(1) Donner un test U.P.P. de niveau α de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$.

(2) Peut-on construire un test U.P.P. de niveau α de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_2$?

Exercice 7. On considère la structure statistique $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \{\mathbb{P}_\lambda, \lambda > 0\})$ où $\mathbb{P}_\lambda$ est une loi de Poisson de paramètre λ. On considère pour $\lambda_0 > 0$ fixé, les hypothèses suivantes

$$\mathcal{H}_0 : \lambda = \lambda_0$$
$$\mathcal{H}_1 : \lambda > \lambda_0.$$

Donner un test U.P.P. de niveau α de $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$.