Université Paul Sabatier — Premier semestre 2017-2018
Master 1 ESR — Probabilités et Statistique

TD 5 : convergences

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^d$.

(1) On suppose que $\lim_n x_n = x$. Montrer que $\delta_{x_n} \overset{\text{étroite}}{\to} \delta_x$.
(2) Réciproquement montrer que si la suite (δ_{x_n}) converge étroitement alors la suite (x_n) converge.

Exercice 2. Soit $(p_n)_n$ une suite de nombre réels de $]0,1[$ telle que $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que la suite de v.a. de loi $\mathcal{B}(n, p_n)$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

Exercice 3. Soit $(p_n)_n$ une suite de nombre réels de $]0,1[$. Soit (X_n) une suite de v.a indépendante telle que $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. A quelle condition (X_n) converge en probabilité? presque sûrement? Qu'en déduisez vous?

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d de Bernoulli de paramètre $1/2$.

(1) Montrer que
$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{2^i}$$
est bien définie et déterminer sa loi
(2) Soit V une v.a qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$, on considère son développement dyadique
$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$
Montrer que les (a_i) sont des v.a.
(3) Montrer que (a_i) forme une suite de v.a.i.i.d de Bernoulli de paramètre $1/2$
(4) En déduire que l'on peut construire une suite de v.a.i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$
(5) En déduire que l'on peut construire une suite de v.a.i.i.d de n'importe quel loi (pensez à l'inverse de la fonction de répartition)

Exercice 5.

(1) Soient $(a_n, b_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $a_n \to a,\ b_n \to b$. Etudier la convergence en loi de $\mathcal{N}(a_n, b_n^2)$.
(2) Soit $X_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$. Montrer que X_n/n et $\frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ convergent en loi et déterminer les lois limites.
(3) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Cauchy de paramètre 1. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Etudier les convergences en loi, puis en probabilité, des suites $S_n/\sqrt{n},\ S_n/n,\ S_n/n^2$.

Exercice 6.

(1) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. i.i.d exponentielle de paramètre 1. Soit $M_n = max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $M_n/\ln n$ converge en loi.
(2) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Soit $M_n = max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $n(1 - M_n)$ converge en loi.

Exercice 7. Soient $(X_n)_n,\ (Y_n)_n$ et X, Y des vecteurs aléatoires, soit c une constante. Montrer les résultats suivants:

(1) Si $X_n \xrightarrow[n]{p.s.} X$ alors $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$.
(2) Si $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ alors $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$.
(3) $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} c$ si et seulement si $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} c$.
(4) Si $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$ et $d(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$ alors $Y_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$.
(5) (Slutsky) Si $X_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} c$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} (X, c)$.

(6) Si $X_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} Y$ alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} (X, Y)$.

Exercice 8. Déterminer la limite quand n tends vers $+\infty$ de

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

Exercice 9. Soit $a >$. on note $x^- = x - \inf(x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$

(1) Soit X une v.a rélle de carré intégrable, montrer que

$$\mathbb{E}[|X - \inf(X, a)|] \leq \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{X \geq a}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \mathbb{P}[X \geq a]}$$

(2) Soit S_n une v.a distribué selon une loi de Poisson de paramètre n, on pose $Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Calculer $\mathbb{E}(Y_n^2)$ et montrer que $\mathbb{P}(Y_n^- \geq a) \leq \frac{1}{a^2}$

(3) Montrer que Y_n converge en loi vers une v.a Y dont on donnera la distribution. En déduire que Y_n^- converge en loi vers Y^- et que $\inf(Y_n^-, a)$ converge en loi vers $\inf(Y^-, a)$.

(4) Montrer que $(\mathbb{E}(Y_n^-))$ converge vers $\mathbb{E}(Y^-)$

(5) Calculer $\mathbb{E}(Y_n^-)$ et $\mathbb{E}(Y^-)$ et en déduire que

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \sim n!$$

Exercice 10.[Principe d'un test d'homogénéité sur les moyennes] On considère deux échantillons $\mathbb{L}^2$ indépendants $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_k)$ de lois respectives P_X et P_Y. On note μ_X (resp. μ_Y) et σ_X^2 (resp. σ_Y^2) les moyennes et variances théoriques qu'on suppose inconnues. On veut *tester*, au vu d'observations, si l'hypothèse $(\mathrm{H}_0) \mu_X = \mu_Y$ est vérifiée.

(1) Quelles sont les limites de $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $(S_n^X)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ quand $n \to +\infty$? En quel sens ?

(2) Montrer que, sous (H_0),

$$T_{n,k} = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_k}{\sqrt{\frac{(S_n^X)^2}{n} + \frac{(S_k^Y)^2}{k}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

quand $n \wedge k \to +\infty$. Et que, si $\mu_X \neq \mu_Y$, $|T_{n,k}| \xrightarrow{\text{p.s.}} +\infty$ quand $n \wedge k \to +\infty$. *On pourra utiliser que*

$$\Big(\frac{(S_n^X)^2}{n} + \frac{(S_k^Y)^2}{k}\Big) / \big(\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{k}\big) \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$$

(3) En déduire que, sous (H_0), $\lim_{n \wedge k \to +\infty} \mathbb{P}(|T_{n,k}| \leq 1,96) = 0,95$.

Exercice 11. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On suppose que $X_i \geq 0$ et $EX_i = +\infty$. Montrer que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to +\infty, \text{ p.s.}$$

Indication: considérer $\min(X_i, k)$.

Exercice 12. Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite de v.a indépendantes de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$

(1) Montrer que $\sqrt{2\pi} \mathbb{P}(X_0 > a) \sim a^{-1} \exp(-a^2/2)$ quand $a \to \infty$

(2) Donner la loi de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$

(3) En déduire que si (a_n) est une suite de réels positifs telle que $a_n / \sqrt{n}$ tende vers $+\infty$ alors $\frac{S_n}{a_n}$ converge vers 0 en probabilité. Peut-on conclure pour la convergence *p.s*? Montrer cependant que si $a_n = \sqrt{n} \log n$, alors $\frac{S_n}{a_n}$ converge p.s vers 0.

(4) Montrer que $\limsup_n (2 \log n)^{-\frac{1}{2}} X_n = 1$ *p.s* et $\limsup_n (2 \log n)^{-\frac{1}{2}} |X_n| = 1$ *p.s.*

Exercice 13. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathbb{L}^0$ l'espace vectoriel des (classes modulo égalité p.s. de) variables aléatoires réelles sur cet espace.

(1) Montrer que $d(X, Y) = \mathbb{E}(|X - Y| \wedge 1)$, $X, Y \in \mathbb{L}^0$, définit une distance sur $\mathbb{L}^0$.

(2) Montrer que, pour toute suite $(X_n)_n$ et toute v.a. X dans $\mathbb{L}^0$,

$$(d(X_n, X))_n \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (X_n)_n \overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow} X$$

(on dit que la convergence en probabilité est métrisable).

(3) La convergence p.s. est-elle métrisable ? On pourra considérer, sur $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, la suite $X_k = \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}-1, \frac{k+1}{2^n}-1]}$ pour $k \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1}-1\}$. Converge-t-elle dans $\mathbb{L}^1$? Et p.s. ?

Exercice 14.[Complément sur l'exercice 2] On se propose de montrer un cas particulier de l'inégalité de Le Cam par une méthode dite *de couplage*. Soit $p \in]0,1[$. On considère sur $\mathbb{N}$ les lois $\mu_n = B(n,p)$ et $\nu_n = \mathrm{Pois}(np)$. Alors

$$\sup_{A \subset \mathbb{N}} |\mu_n(A) - \nu_n(A)| \leq np^2. \tag{1}$$

(1) Soient $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ i.i.d. $B(1,p)$ et $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ i.i.d. $\mathrm{Pois}(p)$ définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $W_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

(a) Identifier les lois de S_n et W_n.

(b) Montrer que, quel que soit $A \subset \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(S_n \in A) - \mathbb{P}(W_n \in A)| \leq \mathbb{P}(S_n \neq W_n) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i).$$

(2) On cherche donc ici à construire un couple de v.a. (X,Y) de loi marginales $P_X = \mu_1 = B(1,p)$ et $P_Y = \nu_1 = \mathrm{Pois}(p)$ tel que $\mathbb{P}(X=Y)$ est maximale.

(a) Soient X et Y deux v.a. à valeurs $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X=Y) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \min(\mathbb{P}(X=k), \mathbb{P}(Y=k)). \tag{2}$$

(b) Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \mathrm{Leb}_1)$, on considère $X(u) = F_{\mu_1}^{-1}(u)$ et $Y(u) = F_{\nu_1}^{-1}(u)$ où, si μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, F_μ^{-1} désigne l'inverse généralisé de la fonction de répartition de μ. On rappelle que

$$F^{-1}(u) \equiv \inf\{s \in \mathbb{R} : F(s) \geq u\}, \qquad u \in]0,1[$$

et que

$$\forall u \in]0,1[, \forall s \in \mathbb{R}, \qquad s \geq F^{-1}(u) \Leftrightarrow F(s) \geq u.$$

Montrer que, pour ce couple (X,Y), les lois marginales sont μ_1 et ν_1 et que l'inégalité (2) devient une égalité. Vérifier qu'on a alors $\mathbb{P}(X \neq Y) \leq p^2$.

(c) Conclure.