TD4 : Calcul conditionnel

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire L^1. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$

(1) Soit $A \in \mathcal{A}$, déterminer $\mathbb{E}[X|A] = \mathbb{E}[X|\sigma(A)]$

(2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition finie ou dénombrable de Ω tel que $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in I$, déterminer

$$\mathbb{E}[X|\sigma(A_i, i \in I)]$$

En déduire une formule pour $\mathbb{E}[X|Z]$ où Z est une v.a discrète.

(3) Déterminer $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]$

(4) On suppose X indépendante de la tribu $\mathcal{B}$, déterminer $\mathbb{E}[X|B]$

(5) Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]|\mathcal{F} = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$$

(6) On suppose que $X > 0$ p.s, montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] > 0$ p.s.

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de v.a.r. indépendantes de loi respectives P_X et P_Y. Soit $\Phi\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Montrer que $\mathbb{E}(\Phi(X,Y)|X) = h(X)$ où

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x,y)dP_Y(y).$$

Exercice 3.

(1) Soit X uniforme sur $\{-2,-1,1,2\}$, déterminer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X|Y]$ où $Y = |X|$. Montrer que X et $|X|$ ne sont pas indépendantes. Qu'en déduisez vous?

(2) Soit X et Y deux v.a de Bernoulli de paramètres $1/2$. Déterminer $\mathbb{E}[X|\sigma(X+Y)]$. Qu'en déduisez vous?.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sa *partie fractionnaire.* Soit X une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre 1 : $P_X(dt) = e^{-t}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)dt$.

(1) Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$.

(2) Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(\lfloor X \rfloor|X)$ et $\mathbb{E}(X|\lfloor X \rfloor)$. En déduire $\mathbb{E}(F(X)|\lfloor X \rfloor)$.

(3) Déterminer la loi de X sachant $\lfloor X \rfloor$. En déduire que $F(X)$ et $\lfloor X \rfloor$ sont indépendantes.

Exercice 5. Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$..

- Donner la loi de $S_n = X_1 + ... + X_n$.
- Calculer $\mathbb{P}(X_1 = k_1, ..., X_n = k_n|S_n = k)$ pour tous $k_1, ..., k_n, k$ entiers.
- Donner la loi conditionnelle de $(X_1, ..., X_n)$ sachant $S_n = k$.
- Donner la loi conditionnelle de $(X_1, ..., X_n)$ sachant S_n.

Exercice 6. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de loi uniforme sur le domaine T de $\mathbb{R}^2$ défini par $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y \leq x\}$.

(1) Déterminer la loi de Y.

(2) Calculer $\mathbb{E}(h(X)|Y)$ pour toute fonction h borélienne positive.

(3) Donner la loi conditionnelle de X sachant Y.

(4) Calculer la loi de $X+Y$. (*On pourra effectuer le changement de variable* $u = x$, $v = x+y$).

(5) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y$.

Exercice 7. Soit (X, Y) dont la loi admet pour densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) $f(x,y) = \frac{1}{4}x^{-5/4}y^{-1/4}\mathbb{1}_D(x,y)$ où le domaine D est donné par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1/y\}$. Calculer la densité $f_Y(y)$ de la loi de Y. En déduire la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$, $y \in]0,1[$.

Exercice 8. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi, à support dans $\mathbb{N}^* \times [0,1]$, est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{B}([0,1]), \qquad \mathbb{P}(X = k, Y \in A) = \frac{k}{2^k}\int_0^1 (1-y)^{k-1}\mathbf{1}_A(y)dy.$$

(1) (X, Y) admet une densité par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$ et de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Laquelle ?
(2) Quelles sont les lois de X et de Y ?
(3) En déduire les lois conditionnelles de X sachant $Y = y$ et de Y sachant $X = k$.

Exercice 9. Soient Y_1, Y_2 deux v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.
(1) Pour $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne positive, calculer $E\big(\Psi(Y_1, Y_2) \big| \min(Y_1, Y_2)\big)$.
(2) En déduire la loi conditionnelle de (Y_1, Y_2) sachant $\min(Y_1, Y_2)$. Interpréter le résultat.

Exercice 10. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et tel que la loi conditionnelle de Y sachant X est donnée par

$$\mathcal{L}_{Y|X=x} = x\delta_1 + (1-x)\delta_0.$$

(1) Déterminer $\mathbb{P}\Big((X,Y) \in A\Big)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Dessiner le support de la loi $P_{(X,Y)}$.
(2) Quelle est la loi de Y?
(3) Calculer la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 11. Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace de probabilité. On suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$, et que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est donnée par le noyau de probabilités

$$K(x, \cdot) = B(x, q) = \sum_{k=0}^{x} C_x^k q^k (1-q)^{x-k}\delta_k.$$

(1) Calculer la loi du couple (X, Y).
(2) Montrer que Y suit encore une loi classique.

Exercice 12.

Soit X et Y deux variables aléatoires dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{R}$ respectivement telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}\left[X = n, Y \le t\right] = 2\int_0^t \frac{y^n}{n!}e^{-3y}dy.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \ge 0$, $\int_0^\infty \frac{y^n}{n!}e^{-3y}dy = \frac{1}{3^{n+1}}$.
(2) Quelle est la loi de X et quelle est la densité de Y ?
(3) Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$.
(4) Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{(X+1)}\right]$.
(5) Calculer $\mathbb{P}[X = n|Y] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X=n}|Y]$ et donner la loi conditionnelle de X sachant Y sous forme de noyau de transition.
(6) Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.