Université Paul Sabatier | Premier semestre 2017-2018
Master 1 de mathématiques fondamentales | Probabilités

TD 3 : lemme de Borel-Cantelli et loi du 0-1.

Exercice 1.
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
(1) On pose $Z = e^X$. Calculer la densité f de Z (la loi de Z s'appelle loi log-normale).
(2) Pour $a \in [-1,1]$, soit $f_a(z) = f(z)(1+a\sin(2\pi \log z))$. Montrer que f_a est une densité de probabilité et que, si Z_a est une v.a.r. de densité f_a, alors les lois P_Z et P_{Z_a} sont distinctes (si $a \neq 0$).
(3) Montrer que Z et Z_a admettent des moments de tous ordres, puis que $\mathbb{E}(Z_a^n) = \mathbb{E}(Z^n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclusion ?

Exercice 2. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes. Montrer que la série $\sum_n X_n$ converge p.s. ou diverge p.s. (*penser au critère de Cauchy*).

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes et soit $Y = \limsup_n X_n$. On veut montrer que Y est constante p.s.
(1) Montrer que Y est mesurable pour la tribu asymptotique associée à une suite $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 1}$ de sous-tribus à préciser.
(2) Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que $\mathbb{P}(Y \leq t) \in \{0;1\}$.
(3) Conclure. On pourra considérer les sous-ensembles
$\mathbb{R}_0 = \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y \leq t) = 0\}$ et $\mathbb{R}_1 = \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y \leq t) = 1\}$.

Exercice 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. à valeurs $\{-1,+1\}$. On suppose que les $(X_n)_n$ sont indépendantes de même loi $\mathbb{P}(X_n = +1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1) = p \in [0,1]\backslash\{1/2\}$ (notez bien que $p \neq \frac{1}{2}$). On définit $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.
(1) Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$. *(Indication: on pourra soit faire un calcul direct, soit déterminer au préalable la loi de $Y_n = (X_n+1)/2$. La loi de $Y_1 + \cdots + Y_n$ est alors bien connue.)*
(2) Quelle est la probabilité de l'évènement $\{S_n = 0 \text{ infiniment souvent}\}$? On pourra utiliser (sans démonstration) la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de v.a.i. Montrer que (X_n) converge p.s vers 0 si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon)$$

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de v.a.r indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de densité $\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$. Le but de cet exercice est de calculer $\limsup_n \frac{X_n}{\log n}$.
(1) Déterminer l'ensemble des nombres réels c tels que $\sum_n \mathbb{P}(X_n > c\log n) < +\infty$.
(2) Montrer que, pour tout $c > \lambda^{-1}$, $\limsup_n \frac{X_n}{\log n} \leq c$ presque sûrement.
(3) Montrer que, pour tout $c \leq \lambda^{-1}$, $\limsup_n \frac{X_n}{\log n} \geq c$ presque sûrement.

(4) Conclure

Exercice 7.(**Exercice supplémentaire**) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left\{ \limsup_n X_n > a \right\} \subset \limsup_n \left\{ X_n > a \right\} \subset \limsup_n \left\{ X_n \geq a \right\} \subset \left\{ \limsup_n X_n \geq a \right\}.$$

Montrer par des contre-exemples que ces inclusions peuvent être strictes.

Exercice 8.

Soit X une variable $\mathcal{N}(0,1)$.

(1) Montrer que

$$P(X > a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} a}$$

(2) On considère une suite X_n de v.a.i.i.d $N(0,1)$. On considère

$$U_{a,n} = \{X_n \geq a\sqrt{\ln(n)}\}$$

A l'aide de Borel Cantelli, étudier $P(\limsup U_{a,n})$ suivant les valeurs de a

(3) Montrer que

$$\limsup_n \frac{X_n}{\sqrt{\ln(n)}} = \sqrt{2}$$

presque sûrement.