Université Paul Sabatier — Premier semestre 2017-2018
Master 1 de mathématiques fondamentales — Probabilités

TD 2
Lois de variables aléatoires, rappels sur l'indépendance, transformées de lois

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire Binomiale de paramètre (n, p). Calculer les moments de X.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Calculer les moments de X. Montrer que le moment d'ordre n avec n pair correspond au nombre de partition de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ par des paires.

Exercice 3. Soit X, Y deux variables aléatoires normales centrées réduites et indépendantes. Montrer de deux façons différentes que $Z = X+Y$ et $V = X-Y$ sont deux variables aléatoires normales et indépendantes.

Exercice 4.
Soient (X, Y) deux variables aléatoires indépendantes avec $X \sim \mathcal{E}(\mu)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
(1) Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.
(2) La loi de $E(X) + 1$ où $E(X)$ désigne la partie entière de X
(3) Pour $\mu = 1$ déterminer $\mathbb{P}[X > x^2 + y^2]$ pour $x > 0, y > 0$. En déduire la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ sans passage par des coordonnées polaires.

Exercice 5.
On joue a pile ou face; on note $X_i = 1$ si on obtient pile et $X_i = -1$ si on obtient face. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, S_0 = 0$$

(1) Quel est le nombre de chemins tel que $S_n = x$
(2) Pour $x > 0$, montrer que le nombre de chemins tel que $S_1 = 1$ et $S_n = x$ et $\exists k \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $S_k = 0$ est égal à celui où $S_1 = -1$ et $S_n = x$
(3) En déduire la probabilité

$$\mathbb{P}[S_k > 0, \forall k \in \{1, \ldots, n\} \mid S_n = x]$$

Exercice 6. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes et de même loi.
(1) Exprimer la fonction de répartition de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ en fonction de celle de X_1.
(2) Même question avec $\min(X_1, \ldots, X_n)$.
(3) Calculer explicitement la loi de ces variables lorsque les (X_i) suivent une loi
  (a) uniforme sur $[0, 1]$
  (b) exponentielle
  (c) uniforme sur $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Soit $k \geq 1$. Donner la loi de $\tau_k = \inf\{n \geq 1,\ X_n \geq k\}$, puis celle de X_{τ_k}.

On note maintenant $\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n \geq X_0\}$.
Les évènements $(\{X_n \geq X_0\})_{n\geq 1}$ sont-ils indépendants ? Le démontrer.
Déduire de ce qui précède une formule, que l'on ne cherchera pas à expliciter, pour $P(\tau = n)$.
(La loi de τ_k est la loi conditionnelle de τ sachant $\{X_0 = k\}$...)

Exercice 8. On considère une suite de v.a.r. i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Bernoulli de paramètre p. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\tau_N = \inf\{n \geq 1,\ S_n = N\}$, i.e. l'instant du N-ième succès (si $\{X_n = 1\}$ correspond à un succès à l'instant n).

(1) Déterminer $\mathbb{P}(\tau_N = n)$, $n \geq N$, puis montrer que τ_N est fini p.s. (*on utilisera la fonction* $f(p) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n = \frac{1}{p}$, *dont on calculera la dérivée d'ordre* $N-1$).
(2) Calculer la fonction génératrice de τ_N. En déduire son espérance, puis sa variance.

(*La loi de* τ_N *(ou plutôt celle de* $\tau_N - N$*) est appelée une loi binômiale négative de paramètres* (N,p))

Exercice 9. Soit $p > 0$. On considère une variable aléatoire réelle X de loi $\gamma(p,1)$ c'est-à-dire telle que

$$dP_X(x) = x^{p-1}e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}\frac{dx}{\Gamma(p)}.$$

On rappelle que $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ vaut $(p-1)!$ si $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

(1) Calculer la transformée de Laplace de X.
(2) Soit Y une variable aléatoire de loi $\gamma(q,1)$ et indépendante de X. En utilisant la question précédente démontrer que $X+Y$ suit une loi γ dont on précisera les paramètres.
(3) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi exponentielle
$$dP_{X_i}(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}dx.$$
Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
(4) Pour $t \geq 0$, on introduit la variable aléatoire
$$N(t) = \mathrm{card}\{i;\ X_1 + \cdots + X_i \leq t\}.$$
Calculer $P(N(t) \geq k)$ pour k entier, puis montrer que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre t.

Exercice 10. Pour $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$, on rappelle que X suit une loi Gamma $G(\alpha,\lambda)$ si sa loi admet pour densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$)

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Pour $n \geq 2$, soient $X_1, \ldots X_n$ des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $G(\alpha_1,\lambda), \ldots, G(\alpha_n,\lambda)$. On considère $S = X_1 + \cdots + X_n$ et le vecteur aléatoire $Z^{(n-1)} = (Z_1, \ldots, Z_{n-1})$ (à valeurs $\mathbb{R}^{n-1}$) de composantes $Z_i = \frac{X_i}{S}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(S, Z^{(n-1)})$.

On calculera le changement de variables inverse de

$$(s, z_1, \dots, z_{n-1}) = \zeta(\vec{x}) = (x_1 + ... + x_n, \frac{x_1}{x_1 + ... + x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_1 + ... + x_n}),$$

(où $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n$) et on pensera à ajouter à la dernière ligne une combinaison linéaire judicieuse des autres dans le calcul du déterminant de la jacobienne de ζ^{-1}.

Les v.a. S et $Z^{(n-1)}$ sont-elles indépendantes ? Quelle est la loi de Z_1 ?

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire réelle. On note P_X sa loi, Φ_X sa fonction caractéristique et A l'ensemble des atomes de sa loi, $A := \{a \in \mathbb{R};\ P(X = a) > 0\}$.

(1) Soit $b \in \mathbb{R}$ et $T > 0$. Calculer $\int_{-T}^{T} e^{-ibt}\Phi_X(t)\,dt$ en fonction de P_X et en déduire que

$$P_X(\{b\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ibt}\Phi_X(t)\,dt.$$

(2) Soit Y une v.a.r. indépendante de X et de même loi. En utilisant la question précédente, montrer que

$$P(X - Y = 0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\Phi_X(t)|^2 dt.$$

(3) En déduire que

$$\sum_{a\in A} P(X = a)^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\Phi_X(t)|^2 dt.$$

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire réelle. On note P_X sa loi, Φ_X sa fonction caractéristique et F_X sa fonction de répartition.

(1) Montrer que pour tous $a \neq b \in \mathbb{R}$ et $T > 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\Phi_X(t)\,dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin\big(t(x-a)\big)}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin\big(t(x-b)\big)}{t}dt \right) P_X(dx).$$

(2) Montrer que $\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt \in]0,+\infty[$. On admettra pour la suite que cette limite vaut $\frac{\pi}{2}$. En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin(tx)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\text{signe}(x),$$

où $\text{signe}(x) = 1$ si $x > 0$, $\text{signe}(x) = -1$ si $x < 0$ et $\text{signe}(0) = 0$.

(3) Montrer que si $a < b$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\Phi_X(t)\,dt = P_X\big(]a,b[\big) + \frac{P_X(\{a\}) + P_X(\{b\})}{2}.$$

(4) Vérifier que si F_X est continue en a et b, on a

$$F_X(b) - F_X(a) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\Phi_X(t)\,dt.$$

Utiliser ce résultat pour donner une démonstration différente de celle du cours du fait que la donnée de Φ_X caractérise la loi de X.

Additif

Exercice 13. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes avec pour tout i, $EX_i = 0$ et $E(X_i^2) < +\infty$. Pour $1 \le k \le n$, on définit les variables

$$S_k = \sum_{1\le i\le k} X_i \quad \text{et} \quad R_k = \sum_{k<i\le n} X_i,$$

avec $R_n = 0$ par convention.

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, $P\big(|S_n| \ge x\big) \le \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}{x^2}$.

Le but de l'exercice est d'établir le résultat plus fort suivant: pour tout $x > 0$,

$$P\Big(\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge x\Big) \le \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}{x^2}.$$

(2) Pour $k \le n$ et $x > 0$ on définit l'ensemble

$$A_k = \Big\{\max_{j<k}|S_j| < x \text{ et } |S_k| \ge x\Big\}.$$

(a) Vérifier que ces ensembles sont disjoints. Que vaut $\bigcup_{k=1}^n A_k$?
(b) Etablir l'inégalité $x^2 P(A_k) \le E\big(\,1_{A_k}S_k^2\big)$.

(3) Soit $k \le n-1$. Montrer que les variables $1_{A_k}S_k$ et R_k sont indépendantes.

(4) En écrivant $S_n = S_k + R_k$, en déduire que

$$E\big(S_n^2\big) \geq \sum_{k=1}^{n} E\left(\, 1_{A_k}(S_k + R_k)^2\right) \geq \sum_{k=1}^{n} E\big(\, 1_{A_k} S_k^2\big).$$

(5) Démontrer l'inégalité annoncée.

Exercice 14. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Par ailleurs soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes entre elles, et de même loi telle que $E\xi_i = 0$ et $E\big(\xi_i^2\big) = \sigma^2$. On suppose que les tribus $\sigma(X_i,\, i \geq 1)$ et $\sigma(\xi_i,\, i \in \mathbb{Z})$ sont indépendantes. On considère la suite de variables $(Z_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_{S_i}.$$

On peut interpréter Z_n comme la cueillette effectuée par un marcheur aléatoire qui se déplace suivant (S_n) et qui au site j ramasse une quantité aléatoire ξ_j. On définit les variables aléatoires N_j^n par

$$N_j^n := \operatorname{card}\big\{i \in \{1, \ldots, n\};\ S_i = j\big\}.$$

Elles correspondent au temps passé par le marcheur au site j avant l'instant n.

(1) Montrer que N_j^n est indépendante des $(\xi_i)_{i\geq 1}$, et que $N_j^n = 0$ si $|j| > n$.

(2) Montrer que pour $n \geq 1$ on peut écrire

$$Z_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \xi_j N_j^n,$$

et noter que la somme porte en fait sur un nombre fini d'indices.

(3) En déduire que $EZ_n = 0$.

(4) Montrer par la même méthode que

$$\operatorname{var}(Z_n) = \sigma^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} E\big((N_j^n)^2\big).$$

(5) En écrivant $N_j^n = \sum_{i=1}^{n} 1_{S_i = j}$ et en développant le carré, montrer que

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} E\big((N_j^n)^2\big) = n + 2\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) P(S_k = 0).$$

(6) Montrer que $P(S_k = 0)$ vaut 0 si k est impair et $2^{-k} C_k^{k/2}$ si k est pair. En utilisant la formule de Stirling $n! \sim_\infty \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, conclure qu'il existe des constantes $a, b > 0$ telles que pour $k \geq 2$ entier pair

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \leq P(S_k = 0) \leq \frac{b}{\sqrt{k}}.$$

(7) En déduire l'existence de constantes $c, d > 0$ telles que pour $n \geq 2$,
$$c\, n^{3/2} \leq \mathrm{var}(Z_n) \leq d\, n^{3/2}.$$
Comparer avec S_n.

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, avec $E|X| < \infty$.

(1) On dit que $m \in \mathbb{R}$ est une médiane de X si $P(X \geq t) \geq \dfrac{1}{2}$ et $P(X \leq t) \geq \dfrac{1}{2}\cdot$ On note M l'ensemble des médianes de X. On définit
$$m_1 = \inf\Big\{t \in \mathbb{R};\ P(X \leq t) \geq \frac{1}{2}\Big\} \quad \text{et} \quad m_2 = \sup\Big\{t \in \mathbb{R};\ P(X \geq t) \geq \frac{1}{2}\Big\}\cdot$$
Montrer que m_1 et m_2 sont des médianes de X. En déduire que $M = [m_1, m_2]$ et que $P_X(]m_1, m_2[) = 0$.

(2) Décrire l'ensemble des médianes dans les cas suivants: (a) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$,
(b) $X \sim p\delta_0 + q\delta_1$ où $p, q \geq 0$ et $p + q = 1$.

(3) Soit $f(t) = E|X - t|$, pour $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que f est bien définie et convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = +\infty$. En déduire que f atteint son minimum en un point que l'on notera m_0, et que $f'_d(m_0) \geq 0$ et $f'_g(m_0) \leq 0$.

(4) Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $f'_d(t)$ et $f'_g(t)$. Pour ce faire, on reviendra à la définition par taux d'accroissement et on appliquera le théorème de convergence dominée.

(5) Déduire des questions précédentes que $m \in M$ si et seulement si $E|X - m| = \inf\limits_{a\in\mathbb{R}} E|X - a|$.

(6) Montrer que si m est une médiane de X on a $E|X - m| \leq E|X - EX| \leq 2E|X - m|$.

(7) On suppose que $E(X^2) < +\infty$. Montrer que si $m \in M$ alors
$$E\Big((X - EX)^2\Big) \leq E\Big((X - m)^2\Big) \leq 4E\Big((X - EX)^2\Big).$$

Exercice 16. Soit X une variable aléatoire réelle. On suppose que sa fonction de répartition F_X est continue et de classe C^1 par morceaux (i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $a_1 < \cdots < a_n$ tels que la restriction de F_X à chacun des intervalles $]-\infty, a_1]$, $[a_n, +\infty[$ et $[a_i, a_{i+1}]$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ soit de classe C^1). Démontrer que
$$P_X(dt) = F'_X(t)\, dt.$$