Université Paul Sabatier — Premier semestre 2018-2019
Master 1 de mathématiques fondamentales — Probabilités

TD 1 : Tribus et fonctions mesurables

Exercice 1. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et soit $F \subset \Omega$. On pose $\mathcal{T}_F = \{A \cap F, A \in \mathcal{T}\}$. Montrer que $\mathcal{T}_F$ est une tribu sur F.

Exercice 2. Montrer que l'intersection de tribus est encore une tribu. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux tribus montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est une tribu si et seulement si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

Exercice 3.

(1) Soit A un ensemble de Ω. Déterminer la tribu engendrée par A.
(2) Soit $A_1, \ldots, A_n$ une partition de Ω c'est à dire $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Montrer que
$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{j \in J} A_j, J \subset \{1, \ldots, n\} \right\}$$
est la tribu engendrée par les A_i.

Exercice 4.

(1) Modéliser un lancé de dé.
(2) Modéliser un lancé de dé où seule la parité du résultat nous intéresse
(3) Modéliser deux lancés de dé où seule la parité de la somme nous intéresse
(4) Modéliser Alice et Bob qui jouent au dé de la manière suivante. Alice lance le dé la première ensuite bob et ainsi de suite: le premier des deux qui fait 6 a gagné. Le jeu s'arrête t-il? Quelle est la probabilité que Alice gagne? Celle de Bob?

Exercice 5. Montrer en détail que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit Ω un ensemble munie d'une tribu $\mathcal{A}$. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une fonction $\mathcal{A}$ mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Exercice 7. Soit Ω un ensemble et soit X l'ensemble des parties finies de Ω. Déterminer la tribu engendrée par X

Exercice 8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(1) Montrer que l'ensemble $\big\{\omega \in \Omega;\ \big(X_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ne converge pas dans $\mathbb{R}\big\}$ est mesurable.
(2) Montrer que $X(\omega) = \limsup X_n(\omega)$ est une variable aléatoire
(3) Montrer que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(\omega) = \lim_n X_n(\omega)$ si la limite existe et 0 sinon, est une variable aléatoire.

Exercice 9. On note $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$. On le munit de la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les applications
$$\begin{array}{rccc} \varphi_g : & \mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}) & \to & \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big) \\ & \mu & \mapsto & \int g\, d\mu, \end{array}$$
pour toutes les fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées.

(1) Montrer que l'application de $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ dans $\big(\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}), \mathcal{B}\big)$ qui à x associe δ_x est mesurable.
(2) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour $\omega \in \Omega$ on définit la mesure empirique
$$\mu_n^\omega = \frac{1}{n}\big(\delta_{X_1(\omega)} + \cdots + \delta_{X_n(\omega)}\big).$$
Montrer que c'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit X une v. a. réelle, et F sa fonction de répartition. Montrez que F est continue à droite et limitée à gauche. A quoi correspondent les points de discontinuité de F ? Montrez que la fonction de répartition F admet au plus un nombre dénombrable de points de discontinuités.

Exercice 11. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et
$$F_\mu(t) = \mu((-\infty, t]), t \in \mathbb{R}.$$
Soit G la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$G(u) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F_\mu(t) \geq u\}$$
(1) Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, montre $G(X)$ a pour loi μ. On montrera que $\{(x,t), G(x) \leq t\} = \{(x,t), F_\mu(t) \geq x\}$.
(2) En déduire une méthode de simulation de variable aléatoire de loi μ donnée.
(3) Que donne votre méthode pour une loi discrète, pour une loi exponentielle?

Exercice 12. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements sur un espace de probabailité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) \qquad (1)\end{aligned}$$

A la fin d'une réunion mondaine où n invités sont présents, le portier, distrait, donne à chaque participant un chapeau au hasard parmi ceux déposés au vestiaire. Calculez la probabilité qu'aucun n'ait retrouvé son chapeau.

Exercice 13. On choisit au hasard et de facon équitable un entier parmi $\{1, \ldots, n\}$. On note A_p l'événement "cet entier est divisible par p"
(1) Calculer $\mathbb{P}[A_p]$ lorsque p divise n.
(2) Montrer que si $p_1, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts alors les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont indépendants.
(3) Soit ϕ la fonction indicatrice d'Euler c'est à dire $\phi(n)$ donne le nombre d'entiers non nuls inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que
$$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier}, p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit
$$A_n = \{x \in [0,1[, x \quad \text{n'a que des 1 ou 5 dans son développement décimal jusqu'à l'ordre n}\}$$
(1) calculer la mesure de Lebesgue de A_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) calculer la mesure de Lebesgue de $B = \bigcap A_n$.

Exercice 15. Soit μ et ν deux mesures de probabilités sur un espace S fini ou dénombrable. On pose

$$\|\mu - \nu\| = \sup\{A \in \mathcal{P}(S), |\mu(A) - \nu(A)|\}.$$

Montrer que

$$\|\mu - \nu\| = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} |\mu(x) - \nu(x)|.$$