

---

# Limite de bruits forts dans les processus stochastiques et applications aux systèmes quantiques hors équilibre

---

## Projet interdisciplinaire 80 prime du CNRS

Membres:

### Equipe INSMI:

- Clément PELLEGRINI: Maître de conférence à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (section 26 CNU) Porteur du projet  
<https://www.math.univ-toulouse.fr/pellegrini/>.
- Reda CHHAIBI: Maître de conférence à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (section 26 CNU)
- Joseph NAJNUDEL: Reader at University of Bristol (Angleterre) (section 26 CNU)
- Cédric BERNARDIN: Professeur d'université Nice (section 26 CNU)
- Raphael CHETRITE: Chargé de recherche CNRS (Physicien théoricien dans un laboratoire de mathématiques) Nice (section 02 CNRS)

### Equipe INP:

- Denis BERNARD: Directeur de recherche CNRS ENS Paris (section 02 CNRS) Porteur du projet  
<http://www.phys.ens.fr/dbernard/>.
- Michel BAUER: Directeur de recherche IPHT Saclay et DMA ENS Paris (section 02 CNRS)
- Kirone MALLICK: Directeur de recherche IPHT Saclay (section 02 CNRS)

## Résumé du projet et résultats

Les échardes ou piques quantiques sont des phénomènes observés dans les trajectoires quantiques. Une trajectoire quantique décrit l'évolution d'un système quantique soumis à des mesures indirectes. Visuellement on observe un processus de sauts (chaque saut correspondant à la détection d'un photon par exemple) décoré de piques.

Jusqu'ici ces phénomènes n'étaient pas pris en compte souvent considérés comme des erreurs de mesures. Récemment M. Bauer, D. Bernard et A. Tilloy, dans une série d'articles, ont donné une explication concrète de ces phénomènes [1,2,3,4]. Pour cela ils ont introduit et développé une nouvelle théorie dites de "bruits forts" "strong noise". Celle-ci consiste à considérer des diffusions avec un coefficient  $\gamma$  devant le bruit brownien qui va tendre

vers l'infini. D'un point de vue physique il s'agit de mesure dont l'intensité devient de plus en plus grande. Alors que la théorie des diffusions à bruits faibles est très bien développée avec des résultats concrets et exhaustifs en mathématique et en physique, la théorie des bruits forts n'était pas présente dans la littérature. Dans leur premiers travaux M. Bauer, D. Bernard et A. Tilloy ont posé le cadre de la convergence de diffusions vers des processus de sauts lorsque le paramètre  $\gamma$  tend vers l'infini.

Il est important de noter que ce type de convergence échappe au cadre habituel des convergences de processus car une diffusion est un processus continu et que le processus limite est un processus de saut donc typiquement discontinu. Les topologies habituelles telles que la topologie de Skorohod ne permettent d'appréhender que des convergences de processus continus ou discontinus vers des processus continus mais pas des convergences de processus continus vers des discontinus. Une fois cet obstacle surmonté, il faut pouvoir donner un sens mathématique aux échardes. La tâche est nettement plus délicate et M. Bauer, D. Bernard et A. Tilloy ont apporté une réponse en zoomant sur les échardes [3]. Ainsi en épaississant ces échardes ils ont montré rigoureusement que celles-ci peuvent être décrites à l'aide de mouvements browniens réfléchis. Pour démontrer cela ils ont raffiné des résultats type décomposition de Tanaka faisant intervenir le temps local du mouvement brownien [4].

Récemment C. Bernardin, R. Chetrite, R. Chhaibi, J. Najnudel et C. Pellegrini [5] ont complété ces résultats en décrivant précisément la convergence des diffusions à bruits forts vers les piques à l'aide d'une convergence de graphe de type Hausdorff. En particulier, cette convergence est obtenue sans zoomer sur les échardes. Ils ont également décrit un cadre large de modèle 1D présentant ce phénomène de piques obtenu comme limite de bruits forts. Les outils utilisés sont ceux du calcul stochastique tels que la décomposition de Dubin Schwarz, les temps locaux de diffusion... Ces outils permettent de traiter des diffusions en dimension 1 et il n'est pas possible d'étendre ces outils en dimension supérieure. Ainsi la description des sauts en dimension supérieure reste un challenge pour lequel pour l'instant nous avons que des résultats partiels.

Récemment T. Benoist C. Bernardin, R. Chetrite, R. Chhaibi, J. Najnudel et C. Pellegrini ont obtenus des résultats en dimension quelconque montrant que les diffusions à bruits forts convergent vers des processus de saut [6]. La topologie utilisée est une topologie trop grossière qui ne permet de voir que les sauts macroscopiques mais pas les piques. Décrire les piques en dimension supérieure reste une question ouverte. Le projet 80 prime a permis de réunir une équipe de chercheurs transdisciplinaires, physicien théoriciens, physicien mathématiciens, probabilistes autour de ces phénomènes qui offrent des questions riches et intéressantes d'un point de vue théorique et pratique. Récemment des modèles en dimension infinie ont été explorés par M. Bauer, D. Bernard et T. Jin offrant de nouvelles perspectives de recherche enthousiasmantes faisant intervenir des équations aux dérivées partielles stochastiques [7].

- [1] M. Bauer, D. Bernard, A. Tilloy, “Computing the rates of measurement-induced quantum jumps”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 48 25FT02 (2015), [arXiv :1410.7231]
- [2] M. Bauer, D. Bernard, A. Tilloy, “Spikes in quantum trajectories”, *Phys. Rev. A* 92, 052111 (2015), [arXiv :1510.01232].
- [3] M. Bauer, D. Bernard, A. Tilloy : “Zooming in on quantum trajectories”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 49 10LT01, (2016), [arXiv :1512.02861].
- [4] M. Bauer, D. Bernard, ”Stochastic spikes and strong noise limits of stochastic differential equations”, *Annales Henri Poincaré*, vol. 19, pp 653–693, (2018), [arXiv:1705.08163].
- [5] C. Bernardin, R. Chetrite, R. Chhaibi, J. Najnudel, C. Pellegrini, “Spiking and collapsing in large noise limits of SDE’s” [arXiv:1810.05629]
- [6] T. Benoist, C. Bernardin, R. Chetrite, R. Chhaibi, J. Najnudel, C. Pellegrini, ‘Emergence of jumps in quantum trajectories via non-ergodic homogenisation (en cours de finalisation)
- [7] M. Bauer, D. Bernard, T. Jin “Monitoring continuous spectrum observables: the strong measurement limit”. *SciPost Phys.* 5, 037 (2018)