Université Paul Sabatier
L3 Enseignements

Premier semestre 2018-2019

Partiel 26 Octobre 2018
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation. Calculatrice autorisée.
Durée 2 heures

Exercice 1.
On considère un dé pipé, tel que la probabilité de sortie d'une face lors d'un lancer est proportionnelle à la valeur de la face. Autrement dit il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$ on ait

$$\mathbb{P}[\text{obtenir } i] = \lambda \cdot i.$$

(1) Calculer λ, et décrire proprement le modèle probabiliste décrivant le jet d'un dé.
(2) On considère des lancers successifs du dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évenement : "on a obtenu 6 la première fois à l'instant n". Calculer $\mathbb{P}[A_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(3) On note A l'évènement

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Que représente l'évènement A ? Calculer sa probabilité.
(4) Deux joueurs, que l'on nommera Alice et Bob, jouent avec chacun un dé. Bob joue avec le dé pipé alors qu'Alice joue avec un dé équilibré. Chaque partie se déroule de la manière suivante : Alice joue en premier et Bob ensuite. Les deux joueurs recommencent ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des deux obtienne 6 avec son dé. Il gagne alors le jeu.
(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement : "personne n'a gagné lors des n premières parties". Montrer que l'on a $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}[B_n] = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(\frac{15}{21}\right)^n$$

(c) En déduire la probabilité de l'évènement

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

et en déduire que le jeu a presque sûrement une fin.
(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note C_n l'évènement : "Alice gagne à la n-ième partie". Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\mathbb{P}[C_n] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{15}{21}\right)^{n-1} \frac{1}{6}.$$

(e) En déduire la probabilité qu'Alice gagne le jeu. Quelle est la probabilité que Bob gagne (justifiez précisément).

Exercice 2. Une roue de loterie comprend 10 quartiers identiques numérotés de 0 à 9 de telle sorte que lorsqu'on lance la roue, la probabilité qu'elle s'arrête sur le numéro i est $\frac{1}{10}$, pour $i = 0, \dots, 9$. On effectue une succession de lancers indépendants, et on introduit, pour $k \geq 1$ les variables aléatoires :

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{si la roue s'arrête sur 0 au } k^{\text{e}} \text{ lancer} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit N la variable aléatoire égale au nombre de fois où la roue tombe sur le numéro 0 en 15 lancers.

(1) Quelle est la loi de N ? Justifiez votre réponse.

(2) Calculer l'espérance et la variance de N.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire T_r égale au nombre minimum de lancers nécessaires pour obtenir r fois le numéro 0, pour $r \geq 1$.

(3) Quels sont les valeurs prises par T_r ?

(4) Montrer que T_1 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{10}$.

(5) Montrer que T_r suit une loi binomiale négative :

$$\mathbb{P}(T_r = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(\frac{1}{10}\right)^r \left(\frac{9}{10}\right)^{k-r}, \quad \text{pour } k \geq r.$$

(6) Soient $k, l \in \mathbb{N}^*$. Écrire l'événement $\{T_1 = k, T_2 - T_1 = l\}$ comme intersection d'évènements de la forme $\{X_i = 0\}$ ou $\{X_i = 1\}$. En déduire que les variables aléatoires T_1 et $T_2 - T_1$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

(7) Soit n fixé. Calculer la loi conditionnelle de T_2 sachant $\{T_1 = n\}$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(T_2 = k \,|\, T_1 = n), \quad \text{pour } k > n.$$

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire réelle dont la densité est donnée par

$$f(x) = 2xe^{-x^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

(1) Justifiez que f est bien une densité de probabilité.

(2) Calculer la fonction de répartition de X.

(3) Calculer l'espérance de X.

(4) On pose $Y = X^2$. Calculer la fonction de répartition de Y et en déduire sa loi.