Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes

EVNCD — 2017-2020

Topologie dans les espaces métriques

Exercice 1 *Théorème de prolongement des applications uniformément continues*

Donner un contre-exemple au théorème de prolongement des applications uniformément continues lorsque l'espace d'arrivée n'est pas complet.

Exercice 2 *Prolongement des fonctions hölderiennes*

Soit $\alpha \in (0,1)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C^{0,\alpha}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions α-hölderiennes définies sur Ω à valeurs réelles. Montrer que $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, i.e. que les fonctions α-hölderiennes sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ sont les restrictions à Ω des fonctions α-hölderiennes sur l'adhérence de Ω.

Exercice 3 *Contre-exemples au théorème du point fixe*

Trouver des espaces métriques (E, d) et des applications f qui satisfont :

1. f est contractante de E dans lui-même mais n'admet pas de point fixe car E n'est pas complet.

2. E est complet, f est contractante mais n'admet pas de point fixe car n'applique pas E dans lui-même.

3. E est complet, f applique cet espace dans lui-même mais est sans point fixe malgré que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

4. E est complet, $f : E \to E$ est non contractante et admet un unique point fixe.

5. E est complet, f envoie E dans E et admet plusieurs points fixes.

Exercice 4 *Itérée contractante*

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p (f composée p fois) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe dans E et que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées de x_0 par f converge vers a.

Exercice 5 *Théorème de point fixe dans un cadre compact*

Soient (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une fonction qui satisfait

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe $a \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées de x_0 par f converge vers a.

Exercice 6 *Théorème de point fixe dans un cadre convexe compact*

Soit X un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé. Soit $f : X \to X$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe dans X.

Exercice 7 *Détermination de zéros*

Soit f une fonction réelle. On souhaite calculer les zéros de f en se ramenant à un problème de point fixe. Pour cela, on pose la fonction $F = f - \mathrm{id}$ et on utilise une suite récurrente du type

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

1. On souhaite calculer une valeur approchée de la solution positive de $x - \ln(1+x) - 0,2 = 0$ à l'aide des termes de la suite

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \ln(1 + x_n) + 0,2.$$

Montrer qu'il y a convergence globale, i.e. il y a convergence pour tout $x_0 > 0$, et que la convergence est géométrique.

2. On souhaite calculer une valeur approchée des racines du polynôme $X^3 - 4X + 1$ à l'aide des termes de la suite

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}, \\ x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n^3 + 1). \end{cases}$$

Montrer que cette méthode ne permet d'approcher qu'une racine et que la convergence est locale, i.e. x_0 doit être proche de cette racine. Proposer une autre fonction F pour calculer les autres racines.

Exercice 8 *Equations intégrales*

Soient $I = [a, b]$ un intervalle compact, $K : I \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $E = C(I, \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère $\varphi \in E$.

1. Montrer que si $(b - a)\|K\|_\infty < 1$ l'équation intégrale de Fredholm

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s) \, \mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

admet une solution unique $x \in E$.

2. Montrer que l'équation intégrale de Volterra

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s, t)x(s) \, \mathrm{d}s, \quad t \in I,$$

admet toujours une unique solution $x \in E$.

Exercice 9 *Equation fonctionnelle*

Montrer que l'équation fonctionnelle

$$f(t + \sqrt{2})^2 + f(t - \sqrt{2})^2 + 100f(t) = \sin(2\pi t)$$

admet une solution f continue et 1-périodique.

Exercice 10 *Equation fonctionnelle*

En considérant une norme de la forme

$$\|f\|_M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|e^{-Mx},$$

avec $M \geq 0$, montrer que l'équation fonctionnelle

$$f'(x) = af(x^b) \quad \text{et} \quad f(0) = \alpha,$$

où $b > 1$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, admet une unique solution dans $C[0, 1]$.

Exercice 11 *Théorème de Cauchy-Lipschitz*
On considère $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue telle que pout tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$ et $(y, z) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq k\|y - z\|.$$

Soient $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

On pourra commencer par supposer que I compact et montrer que $C(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la norme

$$\|y\|_k = \sup_{t \in I} e^{-\frac{k}{2}|t-t_0|}\|y(t)\|,$$

est complet.

Exercice 12 *Théorème d'Ascoli*
Soient (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet, et A une partie de $C(E, F)$. On suppose que A est relativement compacte dans $(C(E, F), d_\infty)$. Montrer que A est équicontinue et que pour tout x de E, l'ensemble $\{f(x) : f \in A\}$ est relativement compact dans F.

Exercice 13 *Equicontinuité et compacité*
Soit (E, d) un espace métrique compact et A une partie de $C^0(E, \mathbb{R})$. On suppose que A est équicontinue sur E, i.e.

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in E, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Montrer que A est uniformément équicontinue sur E, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in E, \quad d(x, y) < \eta \Rightarrow \forall f \in A, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 14 *Bosse glissante*
Soit $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ non nulle. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = f(x + n),$$

est équicontinue et bornée dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais qu'elle n'admet aucune sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Quelle hypothèse du théorème d'Ascoli est mise en défaut ?

Exercice 15 *Normes L^p uniformément majorées*
Soient $M > 0$ et $p > 1$. Montrer que l'ensemble

$$L_{M,p} = \left\{ f \in C^1[a, b] : \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t + \int_a^b |f'(t)|^p \, \mathrm{d}t \leq M \right\},$$

est relativement compact dans $(C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 16 *Convergence uniforme de fonctions convexes*
Soit (f_n) une suite bornée de fonctions convexes sur $[0, 1]$. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) convergeant uniformément sur tout compact de $(0, 1)$ et ponctuellement sur $[0, 1]$. Vérifier que la limite est convexe. Trouver une suite bornée (f_n) de fonctions convexes sur $[0, 1]$ ne possédant aucune sous-suite convergeant uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 17 *Opérateur à noyau*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques compacts et μ une mesure borélienne de masse finie sur Y. Etant donnée une fonction $K \in C^0(X \times Y)$, on définit un opérateur linéaire $T : C^0(Y) \to C^0(X)$ par

$$\forall f \in C(Y), \forall x \in X, \quad Tf(x) = \int_Y K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Montrer que T est compact, i.e. que l'image par T de la boule unité de $C^0(Y)$ est relativement compacte dans $C^0(X)$.

Exercice 18 *Théorème de Cauchy-Peano par la méthode d'Euler*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. On va montrer que le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{P}$$

admet au moins une solution définie sur un intervalle de la forme $[t_0 - T, t_0 + T] \subset I$, avec $T > 0$.

1. Montrer qu'il existe $T > 0$ et $r_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$ et que toute solution x de (P) définie sur un intervalle $I_0 \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ soit à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$.

2. Soient $N \geq 1$ et $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ une subdivision à pas constant $h = T/N$ de l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par la méthode d'Euler explicite, i.e. $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$. On construit alors la fonction $x_{(N)}$ affine par morceaux sur $[t_0, t_0 + T]$ telle que $x_{(N)}(t_n) = x_n$ pour tout $n = 1, \ldots, N$. On prolonge la fonction $x_{(N)}$ sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ de la même façon grâce à la subdivision $t_0 - T = t_{-N} < \ldots < t_{-1} < t_0$.

2a. Montrer que les fonctions $x_{(N)}$ ainsi construites sont à valeurs dans $\overline{B}(x_0, r_0)$ et sont des ε_N-solutions du problème (P), où $\varepsilon_N > 0$ est à préciser.

2b. Vérifier que si la suite $(x_{(N)})_N$ converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers une fonction x, celle-ci est solution du problème (P). Montrer qu'une telle convergence a lieu à extraction près. Conclure.

3. A t-on unicité de la solution obtenue ?

Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Espaces vectoriels normés

Exercice 1 *Théorème de Fréchet - Von Neumann - Jordan*
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.
1. Supposons E euclidien. Montrer que l'identité du parallélogramme est vérifiée :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

2. Réciproquement, montrer que si la norme de E vérifie l'identité du parallélogramme, alors E est euclidien.

Exercice 2 *Théorème de Riesz*
Rappeler et démontrer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité d'un espace vectoriel normé.

Exercice 3 *Séparé d'un espace vectoriel normé muni d'une semi-norme.*
Soit E un espace vectoriel et N une semi-norme sur E. On pose

$$F = \big\{x \in E : N(x) = 0\big\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Pour ξ appartenant au quotient E/F et x un représentant de ξ, on pose $\|\xi\| = N(x)$. Montrer que $\|\cdot\|$ est bien définie et est une norme sur E/F.

Exercice 4 *Non équivalence des normes en dimension infinie*
Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ converge vers Q au sens de cette norme.

Exercice 5 *Non équivalence des normes en dimension finie*
Considérons le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ muni de

$$N_0(a+b\sqrt{2}) = |a+b\sqrt{2}| \quad \text{et} \quad N_\infty(a+b\sqrt{2}) = \max(|a|, |b|).$$

Montrer que N_0 et N_∞ sont des normes non équivalentes sur E. Commenter.

Exercice 6 *Complétude et séries*
Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Application 1 : Soient E un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On introduit sur le quotient E/F

$$N(\xi) = \inf_{\xi = \overline{x}} \|x\|.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme et que $(E/F, N)$ est complet.

Application 2 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Démontrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\mu)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est complet. De plus, si (f_n) est une suite de $L^p(\mu)$ qui converge vers $f \in L^p(\mu)$ dans cet espace, montrer qu'il existe une extractrice (n_k) telle que (f_{n_k}) converge presque partout vers f et qu'il existe $g \in L^p(\mu)$ telle que $|f_{n_k}| \leq g$.

Exercice 7 *Complété d'un espace vectoriel normé*

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(\mathbf{E}, d)$ son complété. Montrer que $\mathbf{E}$ est naturellement muni d'une structure d'espace de Banach.

Exercice 8 *Polynômes*

Sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes, on pose, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{k=0,\dots,n} |a_k|.$$

Montrer que l'on définit ainsi trois normes. Sont-elles équivalentes ? $\mathbb{C}[X]$ est-il complet pour l'une d'entre elles ?

Exercice 9 *Fonctions continues sur* $[0, 1]$

On note E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$.

1. Montrer que l'application

$$f \in E \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t,$$

définit une norme sur E.

2. $(E, \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?

Exercice 10 *Fonctions continues sur un compact*

Soit (X, d) un espace métrique compact. on note $E = C^0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que E est un espace de Banach.

2. On va maintenant montrer que E est séparable.

2a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des points $x_1^n, \dots, x_{N_n}^n$ de X et des fonctions $\varphi_1^n, \dots, \varphi_{N_n}^n$ de E positives vérifiant

$$\sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j^n = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_j^n(x) = 0 \quad \text{si} \quad d(x, x_j^n) \geq \frac{1}{n}.$$

2b. Prouver que la famille (φ_j^n) est totale et conclure.

Exercice 11 *Fonctions de classe* C^1

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) + f'(t)|,$$

définissent deux normes équivalentes sur E qui rendent cet espace complet.

Exercice 12 *Fonctions hölderiennes*

Soit $\alpha \in (0, 1]$. On note Lip_α l'espace des fonctions α-hölderiennes sur $[0, 1]$ à valeurs réelles.

1. Que dire d'une fonction α-hölderienne avec $\alpha > 1$?

2. Montrer que l'application N définie par

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

est une norme sur Lip_α.
3. Montrer que Lip_α muni de N est un espace de Banach.
4. Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
5. Montrer que la boule unité fermée de (Lip_α, N) est une partie compacte de $C^0[0,1]$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 13 *Espaces de suite*
1. Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$. Montrer que $l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$ avec injection continue. Cette inclusion peut-elle être une égalité ?
2. Montrer que les $l^p(\mathbb{N})$ sont complets.
3. Montrer que $c_0(\mathbb{N})$, le sous-espace de $l^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites qui tendent vers 0, est complet lorsqu'il est muni de $\|\cdot\|_\infty$.
4. Quelle est l'adhérence de $l^p(\mathbb{N})$ dans $l^\infty(\mathbb{N})$?
5. Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, $l^p(\mathbb{N})$ est séparable, mais que $l^\infty(\mathbb{N})$ ne l'est pas.

Licence 3 de mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2017-2020

Applications linéaires

Exercice 1 *Un calcul de norme*
Soient E l'espace vectoriel normé des fonctions continues du segment $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, a un réel de $]0,1[$ et $T : E \to E$ définie pour tout f de E par

$$T(f) = \int_0^a x^2 f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Montrer que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 2 *Un autre calcul de norme*
Sur $E = C^0[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on définit la forme linéaire μ_f associée à un élément non nul f de E par

$$\forall g \in E, \quad \mu_f(g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que μ_f est continue et calculer sa norme.

Exercice 3 *Formes linéaires positives*
Soient $E = C^0[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et φ une forme linéaire positive sur E, i.e. pour tout f de E, si $f \geq 0$ alors $\varphi(f) \geq 0$. Montrer que φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 4 *Continuité pour différentes normes*
Sur l'espace de Banach $E = C^0[0,1]$, on considère la forme linéaire $\varphi : f \in E \mapsto f(0)$. Montrer que φ est continue vis-à-vis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, mais n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 5 *Opérateur à noyau*
Soit K une fonction continue sur $[0,1]^2$. On note $E = C[0,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$, on note Tf la fonction donnée par :

$$\forall x \in [0,1], \quad Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Montrer que T est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

Exercice 6 *Continuité et noyau d'une forme linéaire*
Soient E un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

Exercice 7 *Norme et noyau d'une forme linéaire*
Soient E un espace vectoriel normé et H le noyau d'une forme linéaire continue non nulle φ. Montrer que pour tout x dans E,

$$d(x,H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}.$$

Exercice 8 *Complétude de $\mathcal{L}_c(E,F)$*

Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Montrer que si F est complet, alors l'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateur est complet.

Exercice 9 *Opérateurs inversibles*

Soit E un espace de Banach. On note I l'ensemble des inversibles de $\mathcal{L}_c(E)$, i.e. l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_c(E)$ bijectifs (les inverses de tels éléments sont nécessairement continus par le théorème d'isomorphisme de Banach).

1. Soit $T \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $\|T\| < 1$. Montrer que $1 - T \in I$.

2. Montrer que I est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

3. Montrer que l'application $T \mapsto T^{-1}$ de I dans lui-même est continue.

Exercice 10 *Spectre*

Soient E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}_c(E)$. On appelle valeur spectrale de T tout scalaire λ tel que $\lambda I - T$ n'est pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de T est appelé spectre de T et noté $\sigma(T)$.

1a. Montrer que la suite de terme general $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ converge vers $r(T) = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

1b. Donner un exemple pour lequel cette suite n'est pas décroissante.

2. Montrer que $\sigma(T)$ est fermé.

3. Montrer que pour tout λ dans $\sigma(T)$, $|\lambda| \leq r(T)$.

Exercice 11 *Théorème de Hahn-Banach en dimension finie*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Soit f une forme linéaire sur F. On veut montrer qu'on peut prolonger f à E en une forme linéaire de même norme.

1. Montrer le résultat si E est euclidien.

2. On suppose que $\|f\| = 1$. Soit $u \in E$. Montrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall x, y \in F, \quad f(x) - \|x - u\| \leq a \leq f(y) + \|y - u\|.$$

3. Soit $u \notin F$. On pose :

$$g(x + tu) = f(x) + ta.$$

Montrer que g prolonge f à $F \oplus \mathbb{R}u$ et que $\|g\| = 1$.

4. Conclure.

Exercice 12 *Dual de $l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$*

Soit $1 \leq p < +\infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $y \in l^q(\mathbb{N})$, on pose pour tout $x \in l^p(\mathbb{N})$:

$$F_y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

1. Montrer que pour tout $y \in l^q(\mathbb{N})$, on a $F_y \in (l^p(\mathbb{N}))'$.

2. Montrer que $F : y \mapsto F_y$ est linéaire et isométrique de $l^q(\mathbb{N})$ à valeurs dans $(l^p(\mathbb{N}))'$.

Soit $\varphi \in (l^p(\mathbb{N}))'$. On pose $y_n = \varphi(e_n)$, où e_n désigne la suite dont tous les termes sont nuls, sauf le terme de rang n qui vaut 1.

3. Pour $p = 1$, montrer que $(y_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$.

4. Pour $1 < p < +\infty$, on pose pour tous $n, N \geq 0$,

$$x_n^N = \begin{cases} y_n^{-1}|y_n|^q & \text{si } y_n \neq 0 \text{ et } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\varphi(x^N)$ et en déduire que $y \in l^q(\mathbb{N})$.
5. Montrer que F est surjective.

Exercice 13 *Dual de* $c_0(\mathbb{N})$
On rappelle que $c_0(\mathbb{N})$ désigne le sous-espace de $l^\infty(\mathbb{N})$ formé des suites qui tendent vers 0. Montrer que $l^1(\mathbb{N})$ s'identifie au dual de $c_0(\mathbb{N})$.

Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Séries de Fourier

Exercice 1 *Valeurs de la fonction ζ*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 2 *Développement de la cotangente*
Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = \cos(\alpha x).$$

1. Développer f en série de Fourier.
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad \pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Exercice 3 *Une série trigonométrique qui n'est pas une série de Fourier*
Montrer que la série trigonométrique $\sum \frac{\sin(nt)}{\ln n}$ est convergente sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas le développement en série de Fourier d'une fonction localement intégrable et 2π-périodique.

Exercice 4 *Fonctions hölderiennes*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique α-hölderienne. Montrer qu'il existe $\mu \geq 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |c_n(f)| \leq \frac{\mu}{|n|^\alpha}.$$

On pourra exprimer

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t+a) e^{-int} \, \mathrm{d}t,$$

en fonction de $c_n(f)$, où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 *Inégalité de Wirtinger*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1 et de moyenne nulle. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t,$$

et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 6 *Phénomène de Gibbs*

On considère une signal carré 2π-périodique impair φ, égal à 1 sur $(0,\pi)$, et valant 0 sur $\pi\mathbb{Z}$.

1. Calculer la série de Fourier de φ. Montrer qu'elle converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers φ.

2. Montrer que les sommes partielles d'indice impairs S_{2n-1} de la série de Fourier de φ admettent la représentation intégrale

$$\forall t \in [0,\pi], \quad S_{2n-1}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\sin(2ns)}{\sin(s)}\,\mathrm{d}s.$$

3. Calculer les points critiques de S_{2n-1} sur $[0,\pi]$ et montrer que S_{2n-1} admet en le plus petit d'entre eux un maximum local.

4. Montrer que ce maximum converge vers le nombre

$$M = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(s)}{s}\,\mathrm{d}s > 1.$$

5. Commenter.

Exercice 7 *Genèse des séries de Fourier : Equation de la chaleur*

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique. Résoudre

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), & (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $u(t,\cdot)$ est une fonction 2π-périodique pour tout $t \geq 0$, u est continue sur $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ et C^∞ sur $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Montrer l'unicité de la solution.

Exercice 8 *Méthode des rectangles*

Soit f une fonction C^∞ et 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit

$$I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout entier naturel non nul N, on note R_N l'approximation de I obtenue par la méthode des rectangles à N pas constants entre 0 et 1. Montrer que pour tout p entier naturel non nul, on a

$$R_N \underset{N\to+\infty}{=} I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

Licence 3 de mathématiques — ENS Rennes
EVNCD — 2017-2020

Espaces de Hilbert

Exercice 1 *Norme et formes linéaires continues*
Soit H un espace de Hilbert. Montrer que pour tout $x \in H$:

$$\|x\| = \max\big\{|f(x)| : f \in H',\ \|f\| \leq 1\big\}.$$

Exercice 2 *Un calcul de projection*
Calculer

$$\lambda = \inf\left\{\int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 \,\mathrm{d}x : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 3 *Distance non atteinte*
Illustrer l'importance des hypothèses du théorème de projection sur les convexes fermés dans les espaces de Hilbert.

Exercice 4 *Théorème de projection et identité du parallélogramme*
1. Montrer que $E = (C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach et que la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme.
2. Montrer que l'ensemble

$$F = \big\{f \in C^0[0,1] : f(0) = 0,\ 0 \leq f \leq 1\big\},$$

est un convexe fermé de E.
3. Montrer que $d(1, F) = 1$ est atteinte en tout point de F.

Exercice 5 *Orthogonal non supplémentaire*
1. Montrer que $E = C^0[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ est un espace préhilbertien qui n'est pas un Hilbert.
2. Montrer que

$$F = \big\{f \in C^0[0,1] : f_{|[0,\frac{1}{2}]} = 0\big\},$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\cdot\|_{L^2})$.
3. Montrer que

$$F^\perp = \big\{g \in C^0[0,1] : g_{|[\frac{1}{2},1]} = 0\big\}.$$

4. Montrer que E n'est pas somme de F et $F^\perp$.

Exercice 6 *Hyperplan fermé d'orthogonal trivial*
Soit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. On munit cet ensemble du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. L'espace $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il un espace de Hilbert ?

2. Soit

$$f : u \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}.$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et que son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

3. Commenter.

Exercice 7 *Critère de densité*

Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont 1-périodiques et de carré intégrable. Formuler une condition nécessaire et suffisante sur $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ pour que $\mathrm{vect}\{\tau_a \varphi : a \in \mathbb{R}\}$ soit dense dans $L^2(\mathbb{T})$.

Exercice 8 *Commutation avec les translations*

Soit $T : L^2(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ un opérateur linéaire continu tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$, où τ_a est l'opérateur de translation $\tau_a(f) = f(\cdot - a)$. Montrer qu'il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $T(f) = f * g$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 9 *Polynômes orthogonaux*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids, i.e. que ρ est mesurable, strictement positive et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer qu'il existe $(P_n)_{n \geq 0}$ une suite orthonormale de polynômes tels que $\deg P_n = n$.

Exercice 10 *Densité des polynômes orthogonaux*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty.$$

On va montrer que l'ensemble des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

1. Soit $f \in L^2(I, \rho)$. Montrer que la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur

$$B_a = \big\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < a/2 \big\}.$$

2. On suppose que $f \in L^2(I, \rho)$ est orthogonale aux monômes. En calculant les dérivées de F en 0, montrer que f est nulle et conclure.

Exercice 11 *Base de Hermite*

A l'aide des exercices précédents appliqués à $I = \mathbb{R}$ et à la fonction $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, exhiber une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Calculer les premiers éléments de cette base.

Exercice 12 *Opérateur adjoint*
Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}_c(H)$.
1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $T^* \in \mathcal{L}(H)$ telle que

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle.$$

2. Démontrer que $T^{**} = T$, que si $S \in \mathcal{L}_c(H)$ est continue, alors $(TS)^* = S^* T^*$, et que si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$.
3. Démontrer que $\|T\| = \|T^*\|$ et que $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$.

Exercice 13 *Opérateurs normaux*
Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit normal si $T^*T = TT^*$.
1. Montrer que T est normal si et seulement si pour tout $x \in H, \|Tx\| = \|T^*x\|$.
2. Montrer que si T est normal, il vérifie :
2a. $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.
2b. $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans H si et seulement si T est injectif.
2c. Si $Tx = \alpha x$ pour $x \in H$ et α un scalaire, alors $T^*x = \overline{\alpha} x$.
2d. Si α et β sont deux valeurs propres distinctes de T, les sous-espaces propres correspondant sont orthogonaux.

Exercice 14 *Opérateurs diagonaux*
Soit H un espace de Hilbert séparable et soit (e_n) une base hilbertienne de H. D'autre part, soit (λ_n) une suite de scalaires. On considère l'opérateur D défini pour tout $x \in H$ par

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

1. Montrer que l'opérateur D est bien défini et continu si et seulement si (λ_n) est bornée.
2. Montrer que D est inversible si et seulement si $\inf_{n \geq 0} |\lambda_n| > 0$. Calculer alors $\|D^{-1}\|$.
3. Exprimer D^* en fonction de la suite (λ_n).
4. Identifier le spectre de D.

Exercice 15 *Théorème de Lax-Milgram*
Soit H un espace de Hilbert. On considère une forme bilinéaire continue a sur H que l'on suppose coercive, i.e. on suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall x \in H, \quad a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2.$$

On va montrer que pour toute forme linéaire continue $L \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{H}, \quad a(u, v) = L(v).$$

1. Montrer que si u existe, il est nécessairement unique.
2a. Montrer qu'il existe une application linéaire et continue $T : H \to H$ telle que, pour tous $u, v \in H$:

$$a(u, v) = \langle Tu, v \rangle.$$

2b. Montrer que :

$$\forall u \in H, \quad \|Tu\| \geq \alpha \|u\|.$$

2c. Montrer que l'image de T est fermée dans H.
2d. Montrer que T est surjective et conclure.

Exercice 16 *Convergence faible*

Soit H un espace de Hilbert.

1. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de la boule unité de H telles que

$$\langle x_n, y_n \rangle \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$

Montrer que la suite $(x_n - y_n)$ converge vers 0.

2. Soit (x_n) une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers $x \in H$ et telle que $\|x_n\| \underset{n\to+\infty}{\to} \|x\|$. Montrer que (x_n) converge fortement vers x.

3. Soit (x_n) une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers $x \in H$. Montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, la suite (Tx_n) converge faiblement vers Tx.

4. Soient (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de H. On suppose que (x_n) converge faiblement vers $x \in H$ et que (y_n) converge fortement vers $y \in H$. Montrer que la suite $(\langle x_n, y_n \rangle)$ converge vers $\langle x, y \rangle$.

Exercice 17 *Adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible*

Soit H un espace de Hilbert, muni d'une base hilbertienne (e_n). On considère l'ensemble

$$F = \big\{ e_m + m e_n : m, n \geq 1 \big\}.$$

Montrer que 0 n'est pas dans l'adhérence séquentielle faible de F, mais qu'il appartient à l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F.

Exercice 18 *Lemme de Mazur*

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que toute suite (x_n) d'éléments de H qui converge faiblement est limite forte d'une suite de combinaisons convexes des vecteurs x_n.

Exercice 19 *Propriété de Banach-Saks*

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que l'on peut extraire de toute suite bornée d'éléments de H une sous-suite qui converge fortement au sens de Cesàro.

Théorème de Baire et conséquences

Exercice 1 *Base algébrique et complétude*
Montrer qu'un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable ne peut pas être muni d'une norme qui le rend complet.

Exercice 2 *Nilpotence*
Soit E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout x de E, il existe un entier naturel n_x tel que $T^{n_x}x = 0$. Montrer que T est nilpotente, i.e. qu'il existe un entier naturel n tel que $T^n = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux si E n'est pas complet.

Exercice 3 *Limite simple et continuité*
1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est complet. On considère une suite (f_n) d'applications continues de E dans F convergeant simplement vers une application f de E dans F.
1a. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 0$, on pose

$$F_{n,\varepsilon} = \big\{x \in E : \forall p \geq n, \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon\big\}.$$

Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 0} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense de E et que pour tout x_0 de Ω_ε, il existe V un voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \quad \|f(x_0) - f(x)\|_F \leq 3\varepsilon.$$

1b. En déduire que f est continue sur un sous-ensemble dense de E.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée f' ?

Exercice 4 *Lemme de Croft*
Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \geq 1, \quad f(nx) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 5 *Caractérisation des espaces l^p*
Soit $1 < p, q < +\infty$ des nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit (a_n) une suite de nombres complexes telle que pour toute suite (b_n) de $l^p(\mathbb{N})$, la série $\sum |a_n b_n|$ converge. Montrer que (a_n) est un élément de $l^q(\mathbb{N})$.

Exercice 6 *Séries de Fourier*
On note $C^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions complexes continues 2π-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. Pour tout $n \geq 1$ et $f \in C_{2\pi}$, on pose :

$$T_n(f) = \sum_{p=-n}^{n} c_p(f), \quad \text{où} \quad c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $T_n : C_{2\pi} \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire continue.
2. Calculer une expression synthétique pour T_n.
3. Calculer la norme de T_n.
4. Pour $f \in C^0_{2\pi}$, la série de Fourier de f converge t-elle simplement vers f ?

Exercice 7 *Application injective d'image fermée*
Soient E et F deux espaces de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ continue. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
1. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout x de E, $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$.
2. T est injective et d'image fermée.

Exercice 8 *Supplémentaires topologiques*
Soient E un espace de Banach et F, G deux sous-espaces vectoriels fermés de E. On suppose que F et G sont des supplémentaires algébriques, i.e.

$$F + G = E, \quad F \cap G = \{0\}.$$

Montrer que F et G sont des supplémentaires topologiques, i.e. les projections associées sont continues.

Exercice 9 *Théorème du graphe fermé*
Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Exercice 10 *Critères de continuité*
Soit E un espace de Banach et soit $T : E \to E'$ linéaire.
1. On suppose que pour tout x de E, $\langle Tx, x\rangle_{E',E}$ est positif. Montrer que T est continu.
2. Même question en supposant que pour tout $x, y \in E$, $\langle Tx, y\rangle_{E',E} = \langle Ty, x\rangle_{E',E}$.

Exercice 11 *Sous-espaces fermés de $C^0[0,1]$*
On considère, dans l'espace de Banach $E = C^0[0,1]$ muni de la norme uniforme, un sous-espace vectoriel fermé F tel que tout élément de F est de classe C^1.
1. Montrer que $T : F \to E, f \mapsto f'$ est continue.
2. Montrer que la boule unité de F est équicontinue.
3. En déduire que F est de dimension finie.

Licence 3 de mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2017-2020

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 *Une limite*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$, et soit $L \geq 1$ un entier. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{nL} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big).$$

Montrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 2 *Fonction de Van der Waerden*
Montrer que la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k},$$

où $\{\cdot\}$ désigne la fonction partie fractionnaire, est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Lemme de Borel et applications*
1. Soit (a_n) une suite de réels. On veut montrer le Lemme de Borel qui stipule qu'il existe une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g^{(n)}(0) = a_n.$$

Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact, on pose

$$N_p(f) = \max_{0 \leq q \leq p} \|f^{(q)}\|_\infty.$$

On considère φ une fonction de $C^\infty(\mathbb{R})$, nulle en dehors de $[-1, 1]$ et telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi^{(p)}(0) = 0$ si $p \geq 1$.
1a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} N_n\Big(\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)x^{n+1}\Big) = 0.$$

1b. Construire une suite décroisante de réels strictement positifs (ε_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N_n\Big(\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon_n}\Big)x^{n+1}\Big) \leq \min\Big(1, \frac{1}{|a_{n+1}|}\Big).$$

1c. On pose, pour tout nombre réel x,

$$g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon_{n-1}}\Big)\frac{a_n x^n}{n!}.$$

Montrer que g est de classe C^∞ et vérifie $g^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que toute fonction C^∞ sur un intervalle compact $[a, b]$ avec dérivées de tous ordres à droite en a et à gauche en b peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ paire. Montrer qu'il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout x réel,

$$f(x) = g(x^2).$$

Exercice 4 *Racines des polynômes réels*
Soit P un polynôme à coefficients réels possédant exactement k coefficients non nuls. Montrer que P a au plus $2k-1$ racines réelles distinctes et que cette majoration est optimale.

Exercice 5 *Fonctions à dérivées croissantes*
Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de dérivée croissante. Montrer que f est convexe sur I.

Exercice 6 *Critère de nullité*
Soit f une application dérivable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall t \in]a,b[, \quad \|f'(t)\| \leq k\|f(t)\|.$$

Montrer que si f s'annule en $t_0 \in]a,b[$, alors elle est identiquement nulle sur $]a,b[$.

Exercice 7 *Théorème de Darboux*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. En considérant l'ensemble

$$\Gamma = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : x, y \in I, x < y \right\},$$

montrer que $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 8 *Inversion locale en dimension* 1
Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $f' \geq \alpha$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\mu| \leq C$, il existe $x \in [-1,1]$ tel que $f(x) = \mu$ et $\alpha|x| \leq |\mu|$.

Exercice 9 *Inégalité de Kolmogorov*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.
1. Montrer que si f et f'' sont bornées, alors f' aussi et que l'on a l'estimation globale

$$\|f'\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

2. On suppose à présent que la fonction f prend des valeurs positives et que sa dérivée seconde f'' est bornée. Montrer que l'on a alors l'estimation ponctuelle suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)|^2 \leq 2f(x)\|f''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Exercice 10 *Lemme d'Hadamard*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et soit $n \geq 1$. Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :
1. $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$,
2. $\exists g \in C^\infty(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n g(x)$.

Différentiabilité

Exercice 1 *Pour se faire la main*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| \leq M\|x\|^2$. Montrer que f est différentiable en 0 et que $\mathrm{d}f(0) = 0$.

Exercice 2 *Contre-exemples*
1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que les applications partielles en ce point le sont. De plus, montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ mais qu'elle n'admet pas de dérivée suivant tous les vecteurs en $(0,0)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0,y) = 0.$$

Montrer que f admet une dérivée suivant tous les vecteurs en $(0,0)$, mais que f n'est pas continue en $(0,0)$.
3. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ suivant tous les vecteurs mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 *Continuité et différentiabilité en fonction d'un paramètre*
Soit $\alpha > 0$. Etudier, en fonction de α, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Exercice 4 *Calcul de jacobiennes*
On considère les fonctions

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto 3x^2y + e^{xz^2} + 4z^3,$$

et

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (\ln(1+x^2+y^2), x^2+y^2-z^2, \cos(xz)).$$

Déterminer la matrice jacobienne de f au point $(0,-1,1)$ et celles de g et $h = f \circ g$ au point $(0,0,1)$.

Exercice 5 *Calculs de différentielles*

Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle :

1. $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - P^2$.

2. $\det : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(M)$.

3. $\mathrm{Inv} : A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1}$.

4. $f : M \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto M^k$, où $k \geq 1$ est un entier non nul.

5. $\varphi : f \in E \mapsto \int_0^1 \det(f(t), f'(t))\,\mathrm{d}t$, avec $E = C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ muni de la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

6. $\phi : f \in E \mapsto \int_0^1 \varphi \circ f(x)\,\mathrm{d}x$, avec $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.

7. $F : (x_n)_n \in l^1(\mathbb{N}) \mapsto (f(x_n))_n \in l^1(\mathbb{N})$, avec $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f(0) = 0$ (vérifier au préalable que la fonction F est bien définie).

Exercice 6 *Différentiabilité de la distance à un convexe fermé.*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in U$. On suppose qu'il existe deux applications h_1 et h_2 de U dans $\mathbb{R}$, différentiables en x_0 telles que $h_1 \leq f \leq h_2$ et $h_1(x_0) = h_2(x_0)$. Montrer que f est différentiable en x_0.

2. On suppose maintenant que f est 1-lipschitzienne et qu'il existe un segment $[a, b] \subset U$ tel que $f(b) - f(a) = \|b - a\|$. Montrer que f est différentiable en tout point de $]a, b[$.

3. Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, C)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Exercice 7 *Différentielle de l'exponentielle*

1. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $H \in E$ et $A \in \mathcal{L}_c(E)$. Résoudre les équations différentielles

$$f'(t) = Af(t),\ f(0) = H, \quad g'(t) = e^{tA}H,\ g(0) = 0.$$

où les inconnues f et g sont deux applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans E.

2. Désormais, E sera l'espace $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous $X, H \in E$,

$$e^X H e^{-X} = e^{\mathrm{ad}_X} H,$$

où ad_X est définie par $\mathrm{ad}_X(M) = XM - MX$ pour tout élément M de E.

3. Soient t et u deux variables réelles et

$$g(t) = \partial_u\big(e^{-tX}e^{t(X+uH)}\big)\big|_{u=0}.$$

Vérifier que $g(0) = 0$ et que $g'(t) = e^{-t\,\mathrm{ad}_X}H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Déduire des questions précédentes que pour tous $X, H \in E$,

$$\mathrm{d}\exp(X) \cdot H = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\,\mathrm{ad}_X)^k}{(k+1)!} H.$$

5. A-t-on $(e^{X(t)})' = e^{X(t)}X'(t)$ pour toute fonction dérivable X à valeurs dans E ?

Exercice 8 *Différentielle et vecteur propre*

Soient E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme symétrique continu de E.

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.

2. On considère l'application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle u(x), x \rangle / \|x\|^2$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. Etablir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E, $\mathrm{d}\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

Exercice 9 *L'ouvert des matrices cycliques*

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = (\mathrm{Tr}(M), \ldots, \mathrm{Tr}(M^n))$.

1. Montrer que f est différentiable pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ et préciser $\mathrm{d}f(M)$.

2. Montrer que le rang de $\mathrm{d}f(M)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.

3. Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 *Rang localement constant*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}^n$ tel que le rang de $\mathrm{d}f(x)$ soit localement constant sur U.

Exercice 11 *Une égalité*

Calculer, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq 1$, $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Exercice 12 *Un calcul de dérivées partielles secondes*

On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y} \quad \text{si} \quad xy \neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad xy = 0.$$

Montrer que f n'est pas de classe C^2.

Exercice 13 *Un calcul de différentielle seconde*

Soit $E = l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application $f : E \times E \to E$ définie par

$$f : (x,y) \mapsto (\sin(x_n y_n))_n.$$

Montrer que f est de classe C^∞ et calculer $\mathrm{d}^2 f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E \times E$.

Exercice 14 *Dérivation des fonctions composées*

Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage du cercle $\mathbb{S}^1$. On pose $a = \partial_x f(1,0)$ et $b = \partial_y^2 f(1,0)$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculer $F''(0)$ en fonction de a et b.

Exercice 15 *Une EDP*

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante en utilisant le changement de variables indiqué :

$$\frac{1}{x^2}\partial_x^2 f(x,y) - \frac{1}{x^3}\partial_x f(x,y) + \frac{1}{y^3}\partial_y f(x,y) - \frac{1}{y^2}\partial_y^2 f(x,y) = 0,$$

où f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, $u = x^2$, $v = y^2$.

Exercice 16 *Une limite*

A l'aide du développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = \frac{e^x}{\cos y}$ au point $(0,0)$, calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x - (1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}.$$

Exercice 17 *Lemme d'Hadamard*

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\mathrm{d}f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j g_{i,j}(x).$$

Licence 3 de mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2017-2020

Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 1 *Un difféomorphisme local*
On considère la fonction $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que c'est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais que ce n'est pas un difféomorphisme global. Donner des ouverts V et W maximaux tels que $f : V \to W$ soit un difféomorphisme global.

Exercice 2 *Inversion globale*
Soient $k > 0$ une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 supposée k-dilatante, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

On veut montrer que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.
1. Montrer que f est injective et d'image fermée.
2. Montrer que $\mathrm{d}f(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Montrer par inversion locale que l'image de f est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et conclure.

Exercice 3 *Perturbation de l'identité*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $|f'(x)| \leq k < 1$ pour tout x réel. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Montrer que g est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 *Fonctions strictement monotone*
Soit E un espace euclidien de dimension finie. Une application $f : E \to E$ est dite strictement monotone s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq k\|x - y\|^2.$$

1. Soit $f : E \to E$ de classe C^1. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si

$$\exists k > 0, \forall x \in E, \forall h \in E, \quad \langle \mathrm{d}f(x) \cdot h, h\rangle \geq k\|h\|^2.$$

2. Montrer que si $f : E \to E$ est C^1 et strictement monotone, alors c'est un C^1-difféomorphisme global sur E.

Exercice 5 *Rétraction de la boule sur la sphère*
Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne. On veut démontrer qu'il n'existe pas de rétraction C^1 de B sur ∂B. Par l'absurde, on suppose donc qu'il existe $f \in C^1(B, \partial B)$ tel que $f(x) = x$ pour tout $x \in \partial B$.
1. Pour tout $0 \leq t \leq 1$ et $x \in B$, on considère $\phi_t(x) = (1 - t)x + tf(x) \in B$. On considère $\alpha > 0$ tel que pour tout $0 \leq t \leq \alpha$,

$$0 \leq \|\mathrm{d}f\|_\infty \frac{t}{1 - t} < 1.$$

On se donne $0 \leq t \leq \alpha$. Montrer que :
1a. ϕ_t est un difféomorphisme local sur $\mathring{B}$,
1b. $\phi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}$ par un argument de connexité.
A présent, on pose pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$P(t) = \int_{\mathring{B}} \det \phi_t(x) \, \mathrm{d}x.$$

2a. Montrer que P est un polynôme, puis, par un changement de variable, qu'il est constant.
2b. Montrer que $f(x) \in (\operatorname{Im} \mathrm{d}f(x))^{\perp}$ pour tout $x \in \mathring{B}$.
2c. En déduire que $P(1) = 0$ et conclure.

Exercice 6 *Réduction des formes quadratiques*
Soit A_0 une matrice symétrique inversible. On considère $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(M) = M^T A_0 M.$$

1. Montrer que $\mathrm{d}\varphi(I)$ est surjective et préciser son noyau.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi \in C^1(V, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ telle que

$$\forall A \in V, \quad A = \psi(A)^T A_0 \psi(A).$$

3. En déduire que l'ensemble des matrices symétriques de signature (p, q), avec $p + q = n$, est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 *Equation matricielle*
Démontrer que I_n est une solution isolée de l'équation

$$X^2 = I_n, \quad X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 8 *Sous-groupes du groupe linéaire*
1. Montrer que $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.
2. En déduire qu'il existe un voisinage W de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenu dans W, alors G est trivial.

Exercice 9 *Une équation différentielle non linéaire*
Soit $E = \{y \in C^1[0, T] : y(0) = 0\}$ muni de la norme

$$\|y\| = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty.$$

On considère également $F = C^0[0, T]$ muni de la norme uniforme.
1. Soit $\varphi : y \in E \mapsto y' + y^2$. Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $\mathrm{d}\varphi(0)$ est un isomorphisme de E vers F.
3. En déduire qu'il existe deux réels $r_1, r_2 > 0$ tel que pour tout $g \in F$ vérifiant $\|g\|_\infty \leq r_1$, il existe une unique fonction $y \in E$ telle que $\|y\| \leq r_2$ et satisfaisant $y' + y^2 = g$.

Exercice 10 *Développement limité*
Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin y + xy^4 + x^2$.
1. Montrer qu'il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que pour tout $x \in U$, $\varphi(x)$ est l'unique solution $y \in V$ de l'équation $f(x, y) = 0$.

2. Donner un développement limité à l'ordre 10 de φ au voisinage de 0.

Exercice 11 *Polynômes scindés à racines simples*

Soit $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme admettant n racines réelles distinctes.

1. Montrer qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbb{R}_n[X]$ de P_0 et des applications $\lambda_1, \ldots, \lambda_n : V \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que tout polynôme $P \in V$ a n racines distinctes $\lambda_1(P), \ldots, \lambda_n(P)$.

2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $P \in V$, calculer $\mathrm{d}\lambda_i(P)$ en fonction de $\lambda_1(P), \ldots, \lambda_n(P)$.

Exercice 12 *Asymptotique d'une équation du troisième degré*

Soit la fonction

$$f(x, \varepsilon) = (x - a)(x - b) + \varepsilon x^3,$$

où a et b sont fixés avec $a < b$, et $\varepsilon > 0$ est un paramètre. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'équation $f(x, \varepsilon) = 0$ a trois racines distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$. Donner un développement asymptotique à l'ordre 1 de ces racines lorsque ε tend vers 0.

Licence 3 de mathématiques ENS Rennes
EVNCD 2017-2020

Problèmes d'extrema

Exercice 1 *Recherche d'extrema*
Déterminer les points critiques des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$, et préciser leur nature :
1. $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$,
2. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 2 *Extrema en fonction d'un paramètre*
Discuter, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, la nature des extrema de la fonction

$$f(x,y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 3 *Triangle*
Soit ABC un triangle du plan. Trouver le point qui réalise le minimum de $MA^2 + MB^2 + MC^2$, où M varie dans le plan du triangle.

Exercice 4 *Extrema sur un fermé*
Etudier les extrema de la fonction $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$ définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$.

Exercice 5 *Infimum du gradient*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1. Déterminer $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|$.

Exercice 6 *Recherche d'extrema liés*
Soit $a > 0$ un réel strictement positif. On considère la fonction

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{axy}.$$

Etudier les extrema relatifs de la fonction f sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 + x + y = 4\big\}.$$

Exercice 7 *Distance d'un hyperplan à une sphère*
Soient $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = a\}$, où $v \in \mathbb{R}^n$ et $a \geq 0$ sont fixés. Déterminer la distance de l'hyperplan H à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.

Exercice 8 *Inégalité arithmético-géométrique*
1. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. On considère

$$K = \Big\{x \in (\mathbb{R}_+)^n : \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 1\Big\},$$

et pour tout $x \in K$, on pose $f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Calculer le maximum de f sur K et en déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j.$$

Caractériser le cas d'égalité.
2. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume V donné, quel est celui dont la surface est minimale ?

Exercice 9 *Caractérisation de* $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 *Inégalité d'Hadamard*
A l'aide du théorème des extremas liés, démontrer l'inégalité suivante,

$$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n, \quad |\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|v_j\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, et caractériser les cas d'égalité.

Exercice 11 *Une partie de billard*
Montrer qu'il existe une trajectoire fermée à trois rebonds sur tout billard elliptique.

Exercice 12 *Descente de gradient*
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe et coercive, i.e. telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

1. Montrer que f admet son minimum sur $\mathbb{R}^n$ et que ce minimum est atteint en un point unique x^*.
On suppose maintenant que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ et on définit ensuite récursivement la suite $(x_p)_{p \geq 0}$ par

$$\forall p \geq 0, \quad x_{p+1} = x_p - \alpha \nabla f(x_p).$$

2. On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne pour un certain $L > 0$.
2a. Montrer que pour tout $p \geq 0$,

$$f(x_{p+1}) \leq f(x_p) - \alpha\Big(1 - \frac{L\alpha}{2}\Big)\|\nabla f(x_p)\|^2.$$

2b. On suppose maintenant que $\alpha \leq 1/L$. Déduire de l'inégalité précédente que pour tout $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} f(x_{p+1}) &\leq f(x_p) + \langle \nabla f(x_p), x_p - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x_p)\|^2 \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha}\left(\|x_p - x^*\|^2 - \|x_{p+1} - x^*\|^2\right). \end{aligned}$$

2c. Montrer que pour tout $p \geq 1$,

$$f(x_p) - f(x^*) \leq \frac{1}{2p\alpha}\|x_0 - x^*\|^2.$$

3. On suppose toujours que ∇f est L-lipschitzienne mais on suppose de plus que f est m-fortement convexe, i.e. que la fonction $x \mapsto f(x) - \frac{m}{2}\|x\|^2$ est convexe.

3a. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{m}{2}\|x - y\|^2.$$

3b. Montrer que si α est plus petit qu'une certaine constante ne dépendant que de m et L, alors il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$\forall p \geq 0, \quad \|x_p - x^*\| \leq c^p \|x_0 - x^*\|.$$

Licence 3 de mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2017-2020

Sous-variétés

Exercice 1 *Echauffement*
L'ensemble
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 + xz + y = 0\},$$
est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 *Groupes de matrices*
1. Montrer que le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n^2 - 1$ de $\mathbb{R}^{n^2}$ et déterminer son espace tangent en tout point.
2. Montrer que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $n(n-1)/2$ de $\mathbb{R}^{n^2}$ et de même qu'en question précédente, déterminer son espace tangent en tout point.
3. Mêmes questions avec le groupe des matrices symplectiques réelles
$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R}) : M^T J M = J\} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *Matrices de rang donné*
Soit $0 < r < n$ fixé. On considère l'ensemble $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de rang r. L'objectif est de montrer que V_r est une sous-variété de dimension $n^2 - (n-r)^2$ de $\mathbb{R}^{n^2}$. Pour cela, on introduit l'ensemble $U_r \subset M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont le premier mineur $r \times r$ (en haut à gauche) est non nul.
1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ que l'on écrit par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, avec $A \in M_r(\mathbb{R})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in V_r \cap U_r$ si et seulement si $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ et $D = CA^{-1}B$.
2. Montrer que $V_r \cap U_r$, puis V_r, sont des sous-variétés de dimension $n^2 - (n-r)^2$ de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Exercice 4 *Contre-exemples*
Montrer que les ensembles suivants ne sont pas des sous-variétés de $\mathbb{R}^2$:
1. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 = x^4\}$ (point double),
2. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^4\}$ (point double),
3. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$ (cusp).

Exercice 5 *Ensemble dépendant d'un paramètre*
Pour $r > 0$, on considère l'ensemble
$$V_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1,\ x^4 + y^4 + z^4 = r\}.$$
1. Pour quelles valeurs de $r > 0$ l'ensemble V_r est-il non vide ?
2. Dans ce cas, est-ce une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Licence 3 de mathématiques | ENS Rennes
EVNCD | 2017-2020

Séparabilité

Exercice 1 *Fonctions continues sur un compact*
Soit (X,d) un espace métrique compact. On note $E = C^0(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. L'objectif est de montrer que E est séparable.
1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe des points $x_1^n, \dots, x_{N_n}^n$ de X et des fonctions positives $\varphi_1^n, \dots, \varphi_{N_n}^n$ de E vérifiant

$$\sum_{j=1}^{N_n} \varphi_j^n = 1 \quad \text{et} \quad \varphi_j^n(x) = 0 \quad \text{si} \quad d(x, x_j^n) \geq \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que la famille $(\varphi_j^n)_{n,j}$ est totale et conclure.

Exercice 2 *Espaces de suites*
Montrer que pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $l^p(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est séparable.

Exercice 3 *Espaces de fonctions intégrables*
L'objectif est de démontrer que pour tout $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ muni de $\|\cdot\|_{L^p}$ est séparable.
1. Pour tout $j \geq 1$ et $m \in \mathbb{Z}^n$, on considère les cubes

$$\Gamma_{j,m} = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1,\dots,n\},\ 2^{-j} m_i < x_j \leq 2^{-j}(m_i+1)\big\}.$$

Montrer que pour tout $j \geq 1$, $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \Gamma_{j,m} = \mathbb{R}^n$.
2. Pour tout $j \geq 1$, on considère $\mathscr{F}_j$ l'ensemble des fonctions φ de la forme

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{j,m} \mathbb{1}_{\Gamma_{j,m}},$$

où les constantes $c_{j,m} \in \mathbb{Q}$ sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} = \bigcup_{j \geq 1} \mathscr{F}_j$ est dénombrable.
3. Montrer que toute fonction continue à support compact peut-être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$ pour tout $\varepsilon > 0$.
4. Conclure.

Exercice 4 *Exemples d'espaces non séparables*
1. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. Montrer que s'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j \in J}$ d'ouverts de E, non vides et deux à deux disjoints, alors E n'est pas séparable.
2. En déduire que les espaces $l^\infty(\mathbb{N})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, $L^\infty(0,1)$ muni de $\|\cdot\|_{L^\infty}$ et $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas séparables.

Exercice 5 *Un espace de Hilbert non séparable*
Soit I un ensemble non dénombrable et $l^2(I)$ l'espace des suites de carré sommable. Montrer que $l^2(I)$ est un espace de Hilbert non séparable.