---

## TD 0 : Théorie des ensembles, dénombrabilité et topologie de la droite réelle

**Exercice** 1. Soient $E$ et $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

a) Montrer que

   i) $f$ est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout sous-ensemble $A$ de $E$.

   ii) $f$ est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour tout sous-ensemble $B$ de $F$.

b) Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles de parties respectivement de $E$ et $F$. Montrer que

   i) $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} B_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$,

   ii) $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} B_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$,

   iii) $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,

   iv) $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

   Montrer que l'inclusion est stricte en générale et qu'il y a égalité lorsque $f$ est injective.

c) Montrer que pour toute partie $B$ de $F$, on a $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $f$ pour avoir

   i) $f(A^c) \subset f(A)^c$ pour tout $A \subset E$.

   ii) $f(A)^c \subset f(A^c)$ pour tout $A \subset E$.

**Exercice** 2. Soient $E$ un ensemble, $(J_i)$ une famille de $\mathcal{P}(E)$ indexée par ensemble quelconque $I$ et $(A_{i,j})$ une autre famille de $\mathcal{P}(E)$ indexée par $I \times \bigcup_{i\in I} J_i$, avec les $J_i$ d'autres ensembles quelconques. Développer $\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} A_{i,j}$. Même question en échangeant $\bigcap$ et $\bigcup$.

**Exercice** 3. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est *algébrique* s'il existe un polynôme à coefficients rationnels qui annule $x$. Dans le cas contraire, on dit que $x$ est *transcendant*.

Montrer par un argument de dénombrabilité l'existence de nombres transcendants.

**Exercice** 4 (Famille sommable). Soit $E$ un ensemble et $(x_\alpha)_{\alpha\in E}$ une famille de réels strictement positifs tels que la somme $\sum_{\alpha\in E} x_\alpha$ converge, ce qui signifie : l'ensemble des sommes sur des sous-parties finies de $E$ admet un majorant, et par défintion

$$\sum_{\alpha\in E} x_\alpha = \sup \left\{ \sum_{\alpha\in F} x_\alpha : F \text{ partie finie de } E \right\}.$$

Montrer que $E$ est dénombrable.

**Exercice** 5. Deux ensembles sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de l'un dans l'autre. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$.

a) Montrer que deux intervalles réels non vides et non réduits à des singletons sont toujours équipotents.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipotents, et en déduire que les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ le sont pour tous entiers $n, m \geq 1$.

**Exercice 6.** a) Démontrer le *théorème de Cantor* : si $E$ est un ensemble, il n'existe pas de surjection de $E$ dans $\mathcal{P}(E)$.
*Indication :* pour $f : E \to \mathcal{P}(E)$, considérer $A = \{x \in E : x \notin f(x)\}$.

b) Montrer que $\mathbb{R}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. *Connaissez-vous d'autres preuves de ce fait ?*

**Exercice 7.** On va démontrer le *théorème de Cantor-Bernstein* : si $E$ et $F$ sont des ensembles tels qu'il existe deux injections $f : E \hookrightarrow F$ et $g : F \hookrightarrow E$, alors ils sont équipotents.

a) Soit $X = \{A \subset E : g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus A\}$. Montrer que $X$ n'est pas vide.
b) Montrer que $X$ a un plus grand élément pour l'inclusion qu'on note $M$.
c) Montrer que $g(F \setminus f(M)) = E \setminus M$ et conclure.
d) Montrer que l'ensemble des suites d'entiers $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

**Exercice 8** (Valeurs d'adhérence). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

a) Soit $l$ est un nombre réel tel que toute sous-suite de $(u_n)$ admet $l$ comme valeur d'adhérence. Montrer qu'alors la suite $(u_n)$ converge vers $l$.
b) Montrer que si $(u_n)$ est bornée et admet une unique valeur d'adhérence, alors $(u_n)$ converge.
*Application :* si la suite $(u_n)$ est bornée, montrer que $(u_n)$ converge vers 0 si et seulement si la suite $(u_{2n} - 2u_n)_n$ converge vers 0.
c) On suppose que la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est un intervalle.
*Application :* soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application continue et $(u_n)$ définie par récurrence par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $(u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers 0.

**Exercice 9** (Suite de Cauchy). Une suite $(u_n)_n$ de nombres réels est dite de Cauchy lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

a) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
b) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
c) Montrer qu'une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.

**Exercice 10.** a) Soit $f$ une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^\star$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $p$ et $q$ premiers entre eux. En quels points est-elle continue ?

b) (**) Est-ce qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont les points de continuité sont exactement les nombres rationnels ?

**Exercice 11.** On rappelle les propriétés suivantes de l'adhérence et de l'intérieur

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}, \qquad \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$$

a) Donner des exemples dans $\mathbb{R}$ justifiant que les inclusions peuvent être strictes.
b) Qu'en serait-il pour des unions ou des intersections infinies ?

**Exercice 12.** Prenons un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{R}$. Combien au maximum d'ensembles différents on peut obtenir à partir de $A$ en utilisant les opérations $\mathring{\cdot}$ et $\overline{\cdot}$ d'intérieur et d'adhérence ? et si on ajoute l'opération $fr \cdot$ de frontière ?

## TD 1 : Topologie des espaces métriques

**Exercice** 1. Lesquelles des fonctions suivantes donnent une métrique sur $\mathbb{R}$ ?

a) $d(x, y) = (x - y)^2$,

b) $d(x, y) = |x - 2y|^2$,

c) $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$,

d) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$.

**Exercice** 2. Montrer que dans tout espace métrique les boules fermées sont fermées.

**Exercice** 3. Montrer que dans le monde des espaces métriques, l'adhérence de $B(x, \rho)$ peut être différente de $BF(x, \rho)$. Qu'en est-il dans le monde des espaces vectoriels normés ?

**Exercice** 4. Soient $(E, d)$ et $(F, \delta)$ des espaces métriques et $f : E \to F$ une application. Montrer que $f$ est continue si et seulement si $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie $A$ de $E$.

**Exercice** 5. Soient $(E, d)$ et $(F, \delta)$ des espaces métriques et $f : E \to F$ une application continue.

a) Soit $A \subset E$. Si $A$ est ouvert, $f(A)$ est-il ouvert ? Si $A$ est fermé, $f(A)$ est-il fermé ? Si $f^{-1}(A)$ est ouvert, $A$ est-il ouvert ?

b) Soit $B \subset F$. Montrer que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\big(\overline{B}\big)$. Que dire de l'inclusion réciproque ?

c) Soit $B \subset F$. Montrer que $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \widehat{f^{-1}(B)}^{\circ}$. Que dire de l'inclusion réciproque ?

**Exercice** 6 (Métrique SNCF). On note $d$ la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$. Pour $x, y$ les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ nous définissons $d'(x, y) = d(x, y)$ si $x, y$ sont colinéaires et $d'(x, y) = d(x, 0) + d(0, y)$ sinon.

a) Montrer que $d'$ définit une métrique

b) Décrire les boules ouvertes de $(\mathbb{R}^2, d')$.

c) Quelles sont l'adhérence du haut demi-plan $H = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\big\}$ et l'intérieur de l'axe des ordonnées $Y$ ?

d) En quels points de $\mathbb{R}^2$ la rotation de centre 0 et les translations sont-elles continues ?

**Exercice** 7. Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit que la distance $d$ est ultramétrique si pour tous $x, y, z \in E$,

$$d(x, z) \leq \max\left(d(x, y), d(y, z)\right).$$

a) Si $d$ est une distance, montrer qu'elle est ultramétrique si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, la relation $R_\varepsilon$ définie par $xR_\varepsilon y \iff d(x, y) < \varepsilon$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que dans un espace ultramétrique, tout triangle est isocèle.

c) Montrer que dans un espace ultramétrique, tout point dans une boule en est le centre : $\forall a \in B(x, \rho), B(x, \rho) = B(a, \rho)$. De même pour les boules fermées. Que dire de deux boules d'intersection non vide ?

d) Montrer que les boules ouvertes sont fermées et que les boules fermées de rayon strictement positif sont ouvertes. Quelle est la frontière d'une boule ouverte ?

e) Connaissez-vous des exemples de distances ultramétriques ?

**Exercice 8.** Soit $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $C^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$d(f,g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} \min\left(1, \sup_{x\in[0,1]} \left|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\right|\right).$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une distance.

b) Montrer que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$, si et seulement si pour chaque $k \geq 0$, la suite $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers $f^{(k)}$.

**Exercice 9.** On munit $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ de $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|$.

a) Montrer que $d$ est une distance sur $C$.

b) On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $p_{n_0} : (C,d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $p_{n_0}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_{n_0}$ est continue.

c) Soit $(E,d)$ un espace métrique et $f : E \to C$. Montrer que $f$ est continue si et seulement si $p_n \circ f$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) On note $\Omega = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \{0,1\}\}$. Montrer que $\Omega$ est fermé dans $C$.

**Exercice 10.** Montrer que si $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est une application continue entre deux espaces métriques, alors le graphe de $f$ est fermé dans $E \times F$ pour la distance $d_{E\times F}$ donnée par

$$d_{E\times F}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_E(x_1,x_2), d_F(y_1,y_2)), \quad (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times F.$$

Qu'en est-il de la réciproque ?

**Exercice 11.** Soit $(E,d)$ un espace métrique, et $F$ une partie non vide de $E$. Pour $x \in E$, on pose $d_F(x) = \inf_{y\in F} d(x,y)$.

a) Montrer que $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{F}$.

b) Montrer que $d_F$ est une fonction 1-Lipschitzienne de $E$ dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que tout fermé de $E$ est l'ensemble des zéros d'un fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$.

d) Lemme d'Urysohn : soient $A$ et $B$ deux fermés disjoints de $E$. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to [0,1]$ telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.

e) Soit $A \subset E$ un fermé. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in E$ :

— $x \in A \iff f(x) \geq 0$

— $x \in \partial A \iff f(x) = 0$.

**École Normale Supérieure de Lyon** **Année 2020–2021**

**Département de Mathématiques** **Topologie et calcul différentiel**

---

TD 2 : Connexité, complétude

**Exercice 1.** Soit
$$E = \left\{ \left( x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), x \in ]0,1] \right\}.$$
Soit $X$ l'adhérence de $E$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle.

a) Déterminer $X$.

b) Montrer que $X$ n'est pas connexe par arcs.

c) Montrer que $X$ est connexe.

**Exercice 2.** Soit $(X,d)$ un espace métrique.

a) Les boules ouvertes de $(X,d)$ sont-elles nécessairement connexes ? Et si $X$ est connexe ?

On suppose maintenant que toutes les boules ouvertes sont connexes. Soit $A$ une partie connexe.

b) Montrer que l'ensemble $A_\varepsilon = \{x \in X,\, d(x,A) < \varepsilon\}$ est connexe pour tout $\varepsilon > 0$.

On suppose maintenant que $(X,d)$ est non borné et connexe.

c) Montrer que les sphères de $X$ ne sont pas vides.

**Exercice 3.**

a) Soit $(X,d)$ un espace connexe. Montrer que $X^2$ muni du maximum des distances est connexe.
*Indication : utiliser le fait que les fibres $\{x\} \times X$ et $X \times \{x\}$ sont homéomorphes à $X$.*

b) Montrer que le plan $\mathbb{R}^2$ privé d'un point est connexe.

c) Montrer que $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$.

**Exercice 4.** Soient $E$ un espace vectoriel normé réel et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

a) Si $F$ est de codimension au moins 2, montrer que $E \setminus F$ est connexe.

b) Si $F$ est de codimension 1 et fermé, montrer que $E \setminus F$ a deux composantes connexes.

**Exercice 5** (Les groupes linéaires). On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $||(a_{ij})|| := \max\{|a_{ij}|\}$.

a) Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini de points du plan complexe est connexe. Qu'en est-il du cas dénombrable ?

b) Montrer que le groupe $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
*Indication : pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, considérer $z \mapsto \det(zA + (1-z)B)$.*

c) Montrer que $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Décrire ses composantes connexes.
*Indication : trouver des familles "paramétrisables par arcs" qui engendrent $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$.*

d) Montrer que $\mathrm{SO_n}(\mathbb{R})$ est connexe.

**Exercice** 6 (Les ouverts connexes d'un evn sont connexes par lignes brisées). Soit $U$ un ouvert connexe dans un espace vectoriel normé $E$.

a) On définit la relation d'équivalence suivante sur $U$ : on dit que $x \sim y$ quand $x$ et $y$ peuvent être *reliés par lignes brisées*, c'est-à-dire s'il existe une fonction continue et affine par morceaux $f : [0, 1] \to U$ avec $f(0) = x$ et $f(1) = y$. Montrer que les classes d'équivalences sont des ouverts fermés de $U$.

b) En déduire que $U$ est connexe par arcs.

**Exercice** 7. Soient $E$ un espace vectoriel normé de dimension infinie et $K$ une partie compacte de $E$. Montrer que $E \setminus K$ est connexe. Est-ce toujours le cas si $E$ est de dimension finie ?

**Exercice** 8. Montrer qu'un espace métrique est complet si et seulement s'il vérifie la propriété suivante, dite des *fermés emboîtés* : pour toute suite de fermés non vides $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion et dont le diamètre tend vers 0, l'intersection $\bigcap_{n\geq 0} F_n$ est un singleton.

**Exercice** 9 (Espaces fonctionnels). On considère l'espace $E$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ (qui est de Banach pour $\|\cdot\|_\infty$) et $F$ le sous-espace constitué des fonctions lipschitziennes.

a) Est-ce que $E$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$ ?

b) Le sous-espace induit $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est-il complet ? Et la partie formée des fonctions 1-Lipschitziennes ?

c) Montrer que $N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y\in[0,1]} \left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\right)$ définit une norme sur $F$, et que $(F, N)$ est complet.

**Exercice** 10 (Espaces $\ell^p$). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p = [1, \infty[$, on note

$$\ell^p = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty\right\},$$

que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_p$, et $\ell^\infty$ l'ensemble des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

a) Montrer que $\ell^p$ est complet pour tout $p \in [1, \infty]$.

b) Montrer que pour $p < q \in [1, \infty]$, on a toujours $\ell^p \subsetneq \ell^q$ avec injection continue.

c) Montrer que la notation $\ell^\infty$ est justifiée : $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$ pour $u \in \ell^1$.

d) On note $c_0$ l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Vérifier que $c_0$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty$ qui contient tous les $\ell^p$, $p < \infty$.

e) Montrer que $\ell^1$ n'est pas fermé dans $\ell^\infty$. Quelle est sa fermeture ?

f) Vérifier que pour $p < q < \infty$, $\ell^p$ est dense dans $\ell^q$, lui-même dense dans $c_0$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces espaces sont-ils denses dans $\ell^\infty$ ? Est-ce que $\ell^p$ est complet pour $\|\cdot\|_q$ si $p < q$ ?
*Indication :* on pourra considérer les suites nulles à partir d'un certain rang.

g) Vérifier que pour tout $p < \infty$, $\ell^p$ est séparable.

h) Montrer que $\ell^\infty$ n'est pas séparable.
*Indication :* pour deux sous-ensembles différents $A, B \subset \mathbb{N}$, considérer $B(\chi_A, \frac{1}{2}) \cap B(\chi_B, \frac{1}{2})$.

---

## TD3 : Complétude, espaces de Banach, point fixe

**Exercice** 1. Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer que $E$ est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de $E$ est convergente.

**Exercice** 2. Soit $E$ l'ensemble des fonctions de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|,$$

définit une norme sur $E$ qui rend cet espace complet.

**Exercice** 3. Soit $\alpha \in ]0,1]$. On considère $\mathrm{Lip}_\alpha$ l'espace des fonctions $\alpha$-hölderiennes sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Montrer que l'application $N$ définie par

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{0\le x<y\le 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

est une norme sur $\mathrm{Lip}_\alpha$ qui le rend complet. L'espace $\mathrm{Lip}_\alpha$ est-il complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ ?

**Exercice** 4 (Espaces $\ell^p$). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p = [1,\infty[$, on note

$$\ell^p = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < \infty \right\},$$

que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_p$, et $\ell^\infty$ l'ensemble des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $\ell^p$ est complet pour tout $p \in [1,\infty]$.
2. Montrer que pour $p < q \in [1,\infty]$, on a toujours $\ell^p \subsetneq \ell^q$ avec injection continue.
3. Montrer que la notation $\ell^\infty$ est justifiée : $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$ pour $u \in \ell^1$.
4. On note $c_0$ l'ensemble des suites qui convergent vers 0. Vérifier que $c_0$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty$ qui contient tous les $\ell^p$, $p < \infty$.
5. Montrer que $\ell^1$ n'est pas fermé dans $\ell^\infty$. Quelle est sa fermeture ?
6. Vérifier que pour $p < q < \infty$, $\ell^p$ est dense dans $\ell^q$, lui-même dense dans $c_0$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ces espaces sont-ils denses dans $\ell^\infty$ ? Est-ce que $\ell^p$ est complet pour $\|\cdot\|_q$ si $p < q$ ?
   *Indication :* on pourra considérer les suites nulles à partir d'un certain rang.
7. Vérifier que pour tout $p < \infty$, $\ell^p$ est séparable.
8. Montrer que $\ell^\infty$ n'est pas séparable.
   *Indication :* pour deux sous-ensembles différents $A, B \subset \mathbb{N}$, considérer $B(\chi_A, \frac{1}{2}) \cap B(\chi_B, \frac{1}{2})$.

**Exercice 5.**

1. Trouver une application sans point fixe d'un espace complet $(X, d)$ dans lui-même qui réduit strictement les distances (*i.e.* $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x$ et $y$ dans $X$).
2. Trouver une application contractante sans point fixe.

**Exercice 6.**

1. Soit $f : E \to E$ avec $(E, d)$ un espace métrique complet. Montrer que s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^r$ est contractante, alors $f$ admet un unique point fixe $a \in E$ et que pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées de $x_0$ par $f$ converge vers $a$.
2. Soit $X = (\mathcal{C}^0([0,1]), ||\cdot||_\infty)$. On considère l'opérateur
$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\ \mathrm{d}t.$$
Montrer que $T$ est contractant sur $X$ à partir du rang 2.
3. En déduire qu'il existe une unique fonction $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f'(x) = f(x - x^2)$ et $f(0) = 1$.

**Exercice 7.** Soit $C^0_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'équation fonctionnelle
$$f(t + \sqrt{2})^2 + f(t - \sqrt{2})^2 + 100 f(t) = \sin(2\pi t),$$
admet une solution $f \in C^0_{\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Exercice 8.** On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ dérivant d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $g$ une fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ pour laquelle il existe un $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle g(x) - g(y), x - y\rangle \geq \alpha \|x - y\|^2.$$
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution.

**Exercice 9.** On considère l'espace de Banach $E = (C^0([0,1], \mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $F = \{\gamma \in E : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1\}$ est fermé dans $E$.
2. Montrer que l'application $H : F \to E$ définie par
$$H\gamma(t) = \begin{cases} 1/3\gamma(3t) & \text{si } 0 \leq t < 1/3, \\ 1/3 + e^{i\pi/3}/3\gamma(6(t - 1/3)) & \text{si } 1/3 \leq t < 1/2, \\ (1 + e^{i\pi/3})/3 + e^{-i\pi/3}/3\gamma(6(t - 1/2)) & \text{si } 1/2 \leq t < 2/3, \\ 2/3 + 1/3\gamma(3(t - 2/3)) & \text{si } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$
est à image dans $F$ et contractante.
3. Montrer que si $\gamma_0 \in F$ et $\gamma_n = H^n \gamma_0$ pour tout $n \geq 1$, alors la suite $(\gamma_n)_n$ converge. Caractériser sa limite. Dessiner quelques termes de cette suite pour le choix de $\gamma_0$ égale à l'inclusion $[0,1] \to \mathbb{C}$.

**École Normale Supérieure de Lyon** **Année 2020–2021**

**Département de Mathématiques** **Topologie et calcul différentiel**

---

TD 4 : Topologie générale, Compacité

**Exercice 1.** Si $(E, <)$ est un ensemble totalement ordonné, la topologie de l'ordre sur $E$ est la topologie obtenue en prenant pour base d'ouverts les intervalles ouverts. Vérifier que la topologie de l'ordre sur $\mathbb{R}$ coïncide avec la topologie usuelle.

**Exercice 2.** On définit sur $\mathbb{R}$ la *topologie de Zariski* de la manière suivante : les ouverts sont exactement les complémentaires des ensembles finis, et l'ensemble vide.

a) Prouver que la topologie de Zariski est effectivement une topologie.

b) Montrer que les fermés de cette topologie sont les ensembles $\{\text{racines de } P, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

c) Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles $[0, 1]$ et $\mathbb{Z}$ pour cette topologie.

d) Montrer que les polynômes et l'exponentielle sont des fonctions continues dans la topologie de Zariski, contrairement au sinus.

e) La topologie de Zariski est-elle séparée ? (on dit qu'une topologie est *séparée* si pour tout couple de points distincts, il existe un couple d'ouverts disjoints contenant chacun un des points.)

**Exercice 3.** (Topologie Quotient) Soit $X$ un espace topologique. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur $X$. On note $X/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence. On note $\pi : x \in X \mapsto [x] \in X/\mathscr{R}$ l'application qui à un élement de $X$ associe sa classe d'équivalence. On dit que $U \subset X/\mathscr{R}$ est un ouvert de $X/\mathscr{R}$ si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $X$.

a) Montrer qu'on définit ainsi une topologie sur $X/\mathscr{R}$. Montrer que cette topologie est celle avec le plus d'ouverts qui rende $\pi$ continue.

b) Le saturé d'un sous-ensemble $A$ de $X$ est l'ensemble des points de $X$ en relation avec un élément de $A$. Montrer que $\pi$ est une application ouverte si et seulement si le saturé de tout ouvert de $X$ est ouvert.

c) Soit $Z$ un espace topologique. Montrer qu'une application $g : X/\mathscr{R} \longrightarrow Z$ est continue si et seulement si $g \circ \pi : X \longrightarrow Z$ est continue.

d) Soit $f : X \longrightarrow Z$ une application continue telle que $(x\mathscr{R}y \implies f(x) = f(y))$. Montrer qu'il existe une unique application continue $\bar{f} : X/\mathscr{R} \longrightarrow Z$ telle que $\bar{f} \circ \pi = f$.

e) Montrer que la propriété ci-dessus caractérise la topologie quotient.

f) Soit $A \subset X$. On appelle écrasement de $X$ sur $A$ l'espace $X/\mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par $x \,\mathscr{R}\, y$ pour tout couple $(x, y) \in A^2$. Décrire la sphère $S^2$ comme l'écrasement d'un espace sur un sous-espace convenable.

**Exercice 4.**

a) Montrer que la topologie quotient sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ correspond à la topologie associée à la distance induite sur le tore. Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact.

b) Montrer que l'espace $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de sa topologie quotient est homéomorphe au cercle $S^1$.

c) Montrer que la topologie quotient pour $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ correspond à la topologie grossière.

**Exercice** 5. Soit $(X,d)$ un espace métrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ L'espace $(X,d)$ est séparable.

$(ii)$ $X$ a une base dénombrable d'ouverts, c'est-à-dire qu'il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n\geq 1}$ de $X$ telle que tout ouvert $U$ de $X$ s'écrive comme la réunion d'ouverts $U_n$.

En déduire que si $A \subset E$, $(A, d_{|A})$ est séparable si $(E,d)$ l'est.

**Exercice** 6. Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique. Montrer que s'il existe une famille non dénombrable $(O_j)_{j\in J}$ d'ouverts de $E$, non vides et deux à deux disjoints, alors $E$ n'est pas séparable. En déduire que l'espace $C_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas séparable.

**Exercice** 7.

a) Soit $X$ un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $X$ n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

b) Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques compacts, et $f : X\times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $g(x) = \inf_{y\in Y} f(x,y)$. Montrer que la fonction $g : X \to \mathbb{R}$ est continue.

**Exercice** 8.

a) Soit $(X,d)$ un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell$. Montrer que l'ensemble $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{\ell\}$ est un compact.

b) On considère l'espace métrique $C = [0,1]^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d(x,y) = \sum 2^{-n}|x_n - y_n|$. Nous avons déja vu que la convergence d'une suite d'éléments de $C$ est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée (on peut même vérifier que cette distance induit la topologie produit). Montrer que $C$ est compact par extraction diagonale.

**Exercice** 9. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Soient $K\subset E$ un compact et $F\subset E$ un fermé. Montrer que $K+F$ est fermé. Est-ce encore vrai si $K$ est seulement supposé fermé ?

b) Soient $K, K' \subset E$ des compacts. Montrer que $K+K'$ est compact.

**Exercice** 10. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Montrer que $f$ est un homéomorphisme.

**Exercice** 11. (Connexité et compacité) On se place dans un espace métrique $E$.

a) Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes non vides est non-vide.

b) Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes et connexes $(K_i)_{i\geq 1}$ est connexe. *Indication : pour $U$ et $V$ deux ouverts disjoints de $E$, supposons que $\bigcap_{i\geq 1} K_i \subset U\cup V$. Considérer alors la suite $K_i \setminus (U\cup V)$.*

c) L'affirmation est-elle vraie si on remplace compact par fermé ?

**Exercice** 12. Soient $E$ un espace vectoriel normé de dimension infinie et $K$ une partie compacte de $E$. Montrer que $E\setminus K$ est connexe. Est-ce toujours le cas si $E$ est de dimension finie ?

# TD 5 : Fonctions différentiables

**Exercice 1.**

1. Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : E \to F$ une fonction différentiable, $a$ et $h$ des éléments de $E$. Quelle est la nature de $\mathrm{d}f$ ? de $\mathrm{d}f_a$ ? de $\mathrm{d}f_a(h)$ ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leq M\|x\|^2$. Montrer que $f$ est différentiable en 0 et que $\mathrm{d}f_0 = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable. Dériver les fonctions $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.
4. Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $x \mapsto \langle x, L(x)\rangle$ est différentiable et calculer sa différentielle.
5. Montrer que les polynômes de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vus comme fonctions sur $\mathbb{R}^n$ sont de classe $C^1$.

**Exercice 2.** Soient $E$, $F_1$ et $F_2$ des espaces vectoriels normés réels de dimension finie. Soit $f : E \to F_1 \times F_2$ une application dont on note $f_1$ et $f_2$ les applications coordonnées. Pour tout $a \in E$, montrer que l'application $f$ est différentiable en $a$ si et seulement si les applications $f_1$ et $f_2$ le sont et que dans ce cas, $\mathrm{d}f_a = (\mathrm{d}(f_1)_a, \mathrm{d}(f_2)_a)$.

**Exercice 3.** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $f : E \to \mathbb{R}$ une application différentiable.

1. Comment se traduit sur $\nabla f$ le fait que $f$ est $C^1$ ?
2. Soient de plus $\phi : E \to E$, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\gamma : \mathbb{R} \to E$ des applications différentiables. Trouver une formule pour le gradient des composées $f \circ \phi$, $u \circ f$ et $f \circ \gamma$ (en admettant l'existence d'adjoints dans $E$).
3. Justifier que le gradient, s'il est non nul, est la direction de la plus grande pente, c'est-à-dire que parmi les chemins $C^1$ $\gamma : [-1, 1] \to E$ tels que $\|\gamma'\| = 1$ et $\gamma(0) = a$, on a $(f \circ \gamma)'(0)$ maximal si et seulement si $\gamma'(0)$ est dans le sens et la direction de $\nabla f(a)$).
4. Soient $a$ et $b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Différentier puis calculer le gradient de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Vect}(a)$ par $f(x) = \log(\|a \wedge x\|^2)e^{-\langle b,x\rangle}$.

**Exercice 4.** Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles :

1. $\theta_M : \begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{MA}^{-1}) \quad \text{pour } \mathrm{M} \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R}). \end{cases}$
2. $\xi_p : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A^p) \quad \text{pour } p \in \mathbb{N}. \end{cases}$
3. $\psi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A). \end{cases}$
4. $\phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (A, X) \mapsto AX. \end{cases}$

**Exercice** 5.

1. Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie. Une norme sur $E$ considérée comme une application de $E$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être différentiable en 0 ?
2. Soit $N_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ la norme $p$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour $p = 1, 2, \infty$, déterminer les points de différentiabilité de $N_p$. *Indication : observer l'allure des boules.*

**Exercice** 6. Soit $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On définit l'application :

$$J : \begin{cases} V \setminus \{0\} & \to \ V \setminus \{0\} \\ x & \mapsto \ \dfrac{x}{\langle x, x \rangle}. \end{cases}$$

1. Montrer que $J$ est bijective et trouver l'ensemble de ses points fixes.
2. Montrer que $J$ est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout $x$ de $V \setminus \{0\}$, l'application $\mathrm{d}J_x$ est un multiple d'une application orthogonale (on dit que $J$ est une application *conforme*.)

**Exercice** 7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ différentiable et homogène de degré $k$, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, \quad f(tx) = t^k f(x).$$

1. Calculer $\mathrm{d}f_x(x)$.
2. Montrer que l'application $\mathrm{d}f : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est homogène de degré $k - 1$.

**Exercice** 8. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $C^1$. Montrer qu'il existe un ouvert $U$ dense dans $\mathbb{R}^n$ tel que le rang de $\mathrm{d}f_x$ soit localement constant sur $U$.

**Exercice** 9. Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie supérieure ou égale à 2.

1. Soit $f$ une fonction de classe $C^1$ définie sur l'ensemble $K := \{x \in E : 0 < ||x|| < R\}$ (à valeurs dans n'importe quel evn $F$ de dimension finie), et vérifiant

   $$\exists k > 0, \forall x \in K, \quad \|\mathrm{d}f_x\| \leq k.$$

   Montrer que la fonction $f$ est $k$-lipschitzienne.
2. Montrer que si $f$ est une application de classe $C^1$ définie sur un voisinage épointé de 0, et dont la limite de la différentielle en 0 existe dans $\mathcal{L}_c(E, F)$ et vaut $L$, alors la fonction $f$ se prolonge en une application $\tilde{f}$ différentiable en 0 et telle que $\mathrm{d}\tilde{f}_0 = L$.

**Exercice** 10. Soit $g$ une application différentiable de $E \to E$, où $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, telle que pour tout $x \in E$, $\|\mathrm{d}g_x\| \leq k$ avec $0 < k < 1$. Montrer que $f = \mathrm{Id} + g$ est injective, puis que l'image inverse $f^{-1}(B)$ d'une partie bornée $B$ est bornée.

---

# TD 6 : Différentiation et dérivées partielles

**Exercice 1.**

a) Soient $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, $g(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$ et $h(x,y) = \frac{xy^3}{x^4+y^2}$. Ces fonctions se prolongent-elles en $(0,0)$ par continuité ? Y admettent-elles des dérivées directionnelles ? Sont-elles différentiables ? de classe $C^1$ ?

b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées directionnelles en 0 mais qui n'est même pas continue en 0.

**Exercice 2.** Donner l'expression de la différentielle de l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ en utilisant la notion de dérivée partielle.

**Exercice 3.** Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de $\alpha$, la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+3y^2}}.$$

**Exercice 4.**

a) Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie. Une norme sur $E$ considérée comme une application de $E$ dans $\mathbb{R}$ peut-elle être différentiable en 0 ?

b) Soit $E$ un espace euclidien et $N$ la norme euclidienne sur $E$. Montrer que $N$ est différentiable sur $E$ privé de l'origine et donner sa dérivée.

c) Soit $N_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ la norme $p$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour $p = 1, 2, \infty$, déterminer les points de différentiabilité de $N_p$. Déterminer les dérivées directionnelles de $N_p$ là où elles sont définies. *Indication : observer l'allure des boules.*

**Exercice 5.** Soient $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, avec $I$ ouvert et $J$ compact, et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle en la première variable continue sur $I \times J$. On considère $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables et $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que $F$ est dérivable sur $I$ et donner l'expression de sa dérivée.

**Exercice 6.** Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $ab \neq 1$, exprimer la quantité $\arctan a + \arctan b$ en fonction de $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

**Exercice** 7. On pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2},$$

avec $f(0,0) = 0$.

a) Étudier la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) On fixe $\theta$ et on pose $g_\theta(r) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que $g_\theta$ admet un minimum local strict en $r = 0$.

c) Le point $(0,0)$ est il un minimum local ?

**Exercice** 8. Déterminer les applications $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = a,$$

avec $a \in \mathbb{R}$. On utilisera le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

**Exercice** 9. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$, où $U$ est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) La fonction $f$ est convexe.

b) Pour tout $(x,y) \in U^2$, $f(y) \geq \langle \nabla f(x), y - x\rangle + f(x)$.

c) La fonction $f$ peut s'écrire comme supremum d'une famille de fonctions affines.

Si $f$ est convexe, montrer que ses points critiques dans $U$ sont des minima globaux, et que l'ensemble de ces points critiques est convexe.

**Exercice** 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$.

a) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y, \\ f'(x) \text{ sinon,} \end{cases}$ est continue.

b) Montrer que si $f$ est de classe $C^2$, alors $F$ est de classe $C^1$.

**Exercice** 11. Montrer que le système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y), \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.

**Exercice** 12. En utilisant le théorème de différentiabilité des suites de fonctions, montrer que l'application exponentielle $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est de classe $C^1$.

---

# TD 7 : Dérivées d'ordre supérieur, difféomorphismes

**Exercice** 1. Soient $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \to \mathbb{R}$ et $\phi : E \to E$ deux applications de classe $C^2$. Exprimer $\mathrm{d}^2(f \circ \phi)$ à l'aide des différentielles première et seconde de $f$ et $\phi$.

**Exercice** 2. Montrer que si $f : E \to F$ est une fonction $n$ fois différentiable et que $(e_1, \ldots, e_d)$ est une base de $E$, alors $\mathrm{d}^n f_a(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \ldots \partial x_{i_1}}(a)$.

**Exercice** 3. Après avoir justifié leur existence, donner l'expression de la différentielle seconde des applications $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Inv} : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$.

**Exercice** 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = 0$ si $xy = 0$ et sinon

$$f(x, y) = x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}.$$

Montrer que la fonction $f$ n'est pas de classe $C^2$.

**Exercice** 5 (Inégalité de Glaeser). Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe $C^2$ et positive. On suppose qu'il existe une constante $M$ telle que $\|\mathrm{d}^2 f_x\| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathrm{d}f_x\|^2 \leq 2Mf(x).$$

Que dire si l'on ne suppose plus que la fonction $f$ à valeurs positives mais qu'elle est bornée ?

**Exercice** 6 (Formule de Taylor-Young). Soient $E, F$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application. En admettant que l'inégalité des accroissements finis vue en cours reste vraie pour des applications différentiables, montrer que pour tout $n \geq 1$ et $a \in U$, si $f$ est $n$ fois différentiable en $a$, alors

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \mathrm{d}^j f_a(\underbrace{h, \ldots, h}_{j \text{ termes}}) + o(\|h\|^n).$$

Dans le cas $n = 2$, écrire cette égalité à l'aide du gradient et de la hessienne.
*Application* : calculer la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x - (1 + x)\cos(y)}{(x^2 + y^2)\cos(y)},$$

en considérant la fonction $f(x, y) = e^x / \cos(y)$.

**Exercice** 7. Discuter la nature des extrema des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = 3x^3 + xy^2 - xy, \quad g_\lambda(x, y) = y(x^2 + y^2 - \lambda y) \text{ en fonction de } \lambda.$$

**Exercice** 8. On considère la fonction $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Montrer que c'est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $U$ mais que ce n'est pas un difféomorphisme global. Donner des ouverts $V$ et $W$ maximaux tels que $f : V \to W$ soit un difféomorphisme global.

**Exercice** 9. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts. Montrer que s'il existe un difféomorphisme entre $U$ et $V$, alors $n = m$.

**Exercice** 10. Soient $k > 0$ une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1$ supposée $k$-dilatante, i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

On veut montrer que $f$ est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

a) Montrer que $f$ est injective et d'image fermée.
b) Montrer que $\mathrm{d}f_x$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
c) Montrer par inversion locale que l'image de $f$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et conclure.

**Exercice** 11. Soit $A_0$ une matrice symétrique inversible. On considère $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ par $\phi(A) = A^T A_0 A$.

a) Montrer que $\mathrm{d}\phi_{I_n}$ est surjective et préciser son noyau.
b) Montrer qu'il existe un voisinage $V$ de $A_0$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi \in C^1(V, GL_n(\mathbb{R}))$ telle que
$$\forall A \in V, \quad A = \psi(A)^T A_0 \psi(A).$$
c) En déduire que l'ensemble des matrices symétriques de signature $(p,q)$, avec $p+q=n$, est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$.
d) En particulier, en déduire que si $Q : U \to L^2(E,\mathbb{R})$ est une famille continue de formes quadratiques, et si $Q(x)$ est définie positive pour un certain $x$ dans $U$, alors $Q$ est définie positive sur un voisinage de $x$.

**Exercice** 12 (Lemme de Hadamard). Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^k$ et $a \in U$. Montrer qu'il existe des fonctions $f_1, \cdots, f_n : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^{k-1}$ telles que pour tout $x$ dans $U$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) f_i(x).$$

**Exercice** 13 (Lemme de Morse). Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant l'origine et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^3$. On suppose que $0$ est un point critique quadratique non dégénéré de $f$, i.e. $\mathrm{d}f_0 = 0$ et la différentielle seconde en ce point $\mathrm{d}^2 f_0$ est une forme quadratique non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Montrer qu'il existe un $C^1$-difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$f(x) - f(0) = \sum_{j=1}^{p} u_j^2 - \sum_{j=p+1}^{n} u_j^2.$$

*Indications* : on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et l'exercice 11.

# TD 8 : Compacité relative, espace $\mathcal{C}^0$

**Exercice 1.** (Généralités sur la relative compacité.) Une partie d'un espace métrique est dite *relativement compacte* si son adhérence est compacte.

a) Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension finie, le fait d'être relativement compact est équivalent au fait d'être borné.

b) Montrer que dans un espace métrique $E$, une partie $A$ est relativement compacte si et seulement si toute suite de $A$ admet une sous-suite convergente dans $E$.

c) Soient $E$ et $F$ des espaces métriques et $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$. Vérifier que si $A$ est une partie relativement compacte de $E$, alors $f(A)$ est relativement compacte.

d) Démontrer le théorème d'Ascoli en termes de compacité relative : si $K$ est compact, une partie de $(\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est relativement compacte si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

**Exercice 2.** Lesquels de ces ensembles sont relativement compacts dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ ?

a) $M_1 = \{t \mapsto t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

b) $M_2 = \{t \mapsto \sin(t+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$,

c) $M_3 = \left\{x \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) : x(t) = \int_0^t y(s)\ \mathrm{d}s,\ y \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}),\ ||y||_\infty \le 1\right\}$,

d) $M_4 = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) : |p_n(f)| \le \frac{1}{n}\ \ \forall n \ge 1\right\}$, où $p_n(f) := \int_0^1 f(t)t^n dt$ (*"moment n-ième"*).

**Exercice 3.** On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme sup. On considère une fonction continue $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$. On définit l'opérateur $T : E \to E$ par $Tf(x) = \int_0^1 k(t,x)f(t)\ \mathrm{d}t$.

a) Montrer que $T$ est bien défini et continu.

b) Montrer que $\overline{T(B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1))}$ est une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
*Indication* : utiliser l'uniforme continuité de $k$.

c) Soit $\lambda \neq 0$. Montrer que l'espace propre $E_\lambda = \ker(T - \lambda Id_E)$ est de dimension finie.

**Exercice 4.** (Relative compacité dans $\mathcal{C}^n([0,1], \mathbb{R})$.) On fixe $n$ dans $\mathbb{N}$, on munit $E_n = \mathcal{C}^n([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\infty$ et on va établir un critère pour être d'adhérence compacte dans cet espace. On définit $\varphi = \frac{d^n}{dx^n} : E_n \to \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

a) Montrer que $\varphi$ est continue surjective, n'est pas un isomorphisme, et trouver son noyau $\operatorname{Ker}\varphi$.

b) Prouver qu'une partie bornée de $\operatorname{Ker}\varphi$ est d'adhérence compacte.

c) Prouver que $M$ est d'adhérence compacte dans $E_n$ si et seulement si $M$ est borné et l'ensemble $M_n = \{x^{(n)} : x \in M\}$ est équicontinu.

d) Est-il vrai que $M$ est d'adhérence compacte dans $E_n$ si et seulement si $M_n$ est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ ?

e) Donner un exemple d'un ensemble $M$ dans $E_1$, qui est d'adhérence compacte dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ mais pas dans $E_1$.

**Exercice** 5. (Isométries.) Soit $K$ une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Soit $Isom(K)$ l'ensemble des applications de $K$ dans $K$ qui préservent la distance usuelle de $\mathbb{R}^n$. Montrer que c'est un espace compact lorsqu'on le munit de la distance $d(f,g) = \sup\{\|f(x) - g(x)\| : x \in K\}$.

**Exercice** 6. On munit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ de la distance habituelle

$$d(f,g) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2^k} \min\left(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty\right).$$

a) En utilisant un résultat de calcul différentiel, montrer que $E$ est complet.

b) On dit qu'une partie $B$ de $E$ est *bornée* si pour tout voisinage $V$ de 0, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset V$. Montrer que tout fermé borné est compact.

c) La topologie de $E$ peut-elle être définie par une norme ?

**Exercice** 7.

a) Soient $E$ un espace de Banach et $X$ une partie de $E$. Montrer que $X$ est compacte si et seulement si $X$ est fermée, bornée et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $F_\varepsilon$ de $E$ de dimension finie tel que $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.

   *Rappel* : un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.

b) Une partie $A$ de $l^1(\mathbb{N})$ est dite équisommable si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall x \in A, \quad \sum_{n\geq N} |x_n| < \varepsilon.$$

   Montrer qu'une partie $A$ de $l^1(\mathbb{N})$ est compacte si et seulement si elle est fermée, bornée et équisommable. Donner un exemple.

**Exercice** 8. (Théorème de Cauchy-Peano.) Soit $F : [-r,r] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $M = \sup|F|$ et $T = r/M$. On veut montrer qu'il existe une fonction dérivable $y : [0,T] \to [-r,r]$ qui vérifie l'équation différentielle $y' = F(y)$ avec condition initiale $y(0) = 0$.

a) On fixe $n > 0$. Soit $(a_i^n)_{0\leq i\leq n}$ la solution du schéma d'Euler explicite associé à l'équation, pour le pas $h_n = T/n$ :

$$\begin{cases} a_0^n = 0, \\ a_{i+1}^n = a_i^n + h_n F(a_i^n), \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

   Vérifier qu'elle est bien définie (montrer par récurrence sur $i$ l'inégalité $|a_i^n| \leq ri/n$).

b) Soit $y^n : [0,T] \to [-r,r]$ la fonction affine par morceaux sur les $[h_n i, h_n(i+1)]$ telle que $y^n(h_n i) = a_i^n$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Montrer que $y^n$ est $M$-Lipschitzienne.

c) Montrer que la suite $(y^n)_{n\geq 0}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R})$.

Soit $\omega$ le module d'uniforme continuité de $F$, *i.e.* $\omega(\varepsilon) = \sup_{|x-y|<\varepsilon} |F(x) - F(y)|$ pour $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuité de $F$ équivaut à $\lim_{\varepsilon\to 0} \omega(\varepsilon) = 0$.

d) Montrer que pour $0 \leq i \leq n$, on a

$$|y^n(h_n(i+1)) - y^n(h_n i) - \int_{h_n i}^{h_n(i+1)} F(y^n(s))\, \mathrm{d}s| \leq h_n \omega(h_n M).$$

   En déduire que pour tout $0 \leq i \leq n$, on a $|y^n(h_n i) - \int_0^{h_n i} F(y^n(s))\, \mathrm{d}s| \leq T\omega(h_n M)$.

e) Conclure.

# TD 9 : Théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus

**Exercice** 1. Montrer qu'un espace vectoriel admettant une base algébrique dénombrable ne peut pas être muni d'une norme qui le rend complet.

**Exercice** 2. Soit $E$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E)$. On suppose que pour tout $x$ de $E$, il existe un entier naturel $n_x \geq 0$ tel que $T^{n_x}x = 0$. Montrer que $T$ est nilpotente, *i.e.* qu'il existe un entier naturel $n$ tel que $T^n = 0$. Montrer que ce résultat peut être faux si $E$ n'est pas complet.

**Exercice** 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On appelle *oscillation* de $f$ en $x \in I$ le nombre

$$\omega(f,x) = \lim_{h\to 0} \sup \big\{|f(u) - f(v)| : |u - x| < h,\ |v - x| < h\big\}.$$

a) Montrer que $\omega(f,x)$ est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour tout $x \in I$.

b) Monter que $f$ est continue en $x \in I$ si et seulement si $\omega(f,x) = 0$.

c) Notons $C$ l'ensemble des points de continuité de la fonction $f$. Pour tout $a > 0$, on définit $C_a = \{x \in I : \omega(f,x) < a\}$. Montrer que les $C_a$ sont ouverts et que $C = \bigcap_{n>0} C_{1/n}$.

d) Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ne peut pas être écrit comme intersection dénombrable d'ouverts.

e) En déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que ses points de continuité soient les nombres rationnels.

**Exercice** 4.

a) Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que $E$ est complet. On considère une suite $(f_n)$ d'applications continues de $E$ dans $F$ convergeant simplement vers une application $f$ de $E$ dans $F$.

   $(i)$ Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 0$, on pose

   $$F_{n,\varepsilon} = \big\{x \in E : \forall p \geq n,\ \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon\big\}.$$

   Montrer que $\Omega_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 0} \overset{\circ}{F}_{n,\varepsilon}$ est un ouvert dense de $E$ et que pour tout $x_0$ de $\Omega_\varepsilon$, il existe $V$ un voisinage de $x_0$ tel que

   $$\forall x \in V, \quad \|f(x_0) - f(x)\|_F \leq 3\varepsilon.$$

   $(ii)$ En déduire que $f$ est continue sur un sous-ensemble dense de $E$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de l'ensemble des points de continuité de la fonction dérivée $f'$ ?

**Exercice** 5 (Lemme de Croft). Soit $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \geq 1, \quad f(nx) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Montrer que $f$ converge vers 0 en $+\infty$.

**Exercice** 6. Soit $1 < p, q < +\infty$ des nombres réels tels que $1/p + 1/q = 1$. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que pour toute suite $(b_n)_n$ de $\ell^p(\mathbb{N})$, la série $\sum |a_n b_n|$ converge. Montrer que $(a_n)$ est un élément de $\ell^q(\mathbb{N})$.

**Exercice** 7. On note $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions complexes continues $2\pi$-périodiques définies sur $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme uniforme. On fixe $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$, on définit

$$\begin{array}{rccc} S_n : & \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & \left( t \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt} \right), \end{array}$$

où $c_k(f)$ désigne le $k$-ième coefficient de Fourier de $f$ : $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que
$$\sup_{f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})} \frac{|S_n(f)(t_0)|}{\|f\|_\infty} \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)|\, \mathrm{d}t,$$
où pour tout $n \geq 0$ et $t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.

b) En déduire qu'il existe un sous-ensemble dense $\Sigma$ de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in \Sigma$, la série de Fourier de $f$ ne converge pas vers $f(t_0)$ en $t_0$.

**Exercice** 8. (Théorème de Sunyer y Balaguer.) Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $C^\infty$ telle que
$$\forall x \in I, \exists n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = 0.$$
On se propose de montrer que
$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) = 0,$$
*i.e.* $f$ est une fonction polynomiale. On dit que $x \in I$ est *polynomial* s'il existe un voisinage de $x$ dans $I$ sur lequel $f$ coïncide avec un polynôme.

a) Soit $J \subset I$ un intervalle tel que tout $x \in J$ est polynomial. Montrer que $f$ coïncide avec un polynôme sur $J$.

b) Soit $F_n$ l'ensemble des points $x$ de $I$ tels que $f^{(n)}(x) = 0$. Montrer que $F_n$ est fermé dans $I$.

c) Soit $Z$ l'ensemble des points de $I$ qui ne sont pas polynomiaux. Montrer que $Z$ est un fermé de $I$ sans point isolé.

d) Soit $Z_n = Z \cap F_n$. On suppose que $Z$ est non vide. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $U$ de $I$ et un entier $n_0$ tels que $Z \cap U \neq \emptyset$ et $Z \cap U \subset Z_{n_0}$.

e) Montrer que pour tout $x \in Z \cap U$, pour tout $n \geq n_0$, on a $f^{(n)}(x) = 0$.

f) Soit $x \in (I \setminus Z) \cap U$. Montrer qu'il existe $a$ et $b$ tels que $]a, b[$ est un voisinage de $x$ contenu dans $(I \setminus Z) \cap U$ et que $a$ ou $b$ est dans $Z \cap U$. En déduire que $f$ coïncide sur $]a, b[$ avec un polynôme de degré inférieur ou égal à $n_0$.

g) En déduire que $f$ coïncide avec un polynôme de degré au plus $n_0$ sur $U$, puis que $Z$ est vide. Conclure.

## TD 10 : Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé, dualité

**Exercice** 1.

a) Trouver une application linéaire continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

b) Trouver une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

c) Soit $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'espace des suites $(x_n)_n$ presque nulles muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Vérifier que cet espace vectoriel normé n'est pas complet et trouver $T \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})$ bijectif et continu dont l'inverse n'est pas continu.

**Exercice** 2. Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$. On considère une norme $N$ sur l'espace $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ qui le rend complet et qui vérifie que toute suite de fonctions $(f_n)$ de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ qui converge pour la norme $N$ converge aussi simplement vers la même limite. Montrer que la norme $N$ est alors équivalente à la norme infinie, *i.e.*

$$\exists c_1, c_2 > 0, \forall f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}), \quad c_1 N(f) \leq \|f\|_\infty \leq c_2 N(f).$$

**Exercice** 3. Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$(i)$ Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x$ de $E$, $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$.

$(ii)$ $T$ est injective et d'image fermée.

**Exercice** 4. Soient $E$ un espace de Banach et $F, G$ deux sous-espaces vectoriels fermés de $E$. On suppose que $F$ et $G$ sont des supplémentaires algébriques, *i.e.*

$$F + G = E, \quad F \cap G = \{0\}.$$

Montrer que $F$ et $G$ sont des supplémentaires topologiques, *i.e.* les projections associées sont continues.

**Exercice** 5. Pour $f \in L^1([0, 2\pi])$, on définit la suite de ses coefficients de Fourier par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On considère l'application $\mathscr{F} : f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ sur $L^1([0, 2\pi])$.

a) Montrer que $\mathscr{F}$ prend ses valeurs dans l'espace $c_0(\mathbb{Z})$ des suites qui convergent vers 0 à l'infini. *Indication* : On pourra admettre la densité des fonctions $C^1([0, 1])$ dans $L^1([0, 1])$ et faire une intégration par parties.

b) Montrer que l'application $\mathscr{F}$ est injective.

c) Montrer par l'absurde que $\mathscr{F}$ n'est pas surjective.

**Exercice** 6. Soit $T : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'opérateur de dérivation défini par $T(f) = f'$. Montrer que si $\mathcal{C}^1([0,1])$ et $\mathcal{C}([0,1])$ sont munis de la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors le graphe de $T$ est fermé mais $T$ n'est pas continu.

**Exercice** 7. Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de $E$ qui converge vers 0 et pour toute forme linéaire continue $\varphi \in F'$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(Tx_n) = 0.$$

Montrer que $T$ est continue.
*Indication* : Montrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach que $\|x\| = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in F',\ \|\varphi\| \leq 1\}$.

**Exercice** 8. Soient $E$ un espace de Banach et $T : E \to E'$ linéaire, où $E'$ désigne le dual topologique de $E$.

a) On suppose que $\langle Tx, x\rangle_{E',E} \geq 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $T$ est continue.

b) Même question en supposant que pour tout $x, y \in E$, $\langle Tx, y\rangle_{E',E} = \langle Ty, x\rangle_{E',E}$.

**Exercice** 9. On considère, dans l'espace de Banach $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme uniforme, un sous-espace vectoriel fermé $F$ tel que tout élément de $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que $T : F \to E,\ f \to f'$ est continue.

b) Montrer que la boule unité de $F$ est équicontinue.

c) En déduire que $F$ est de dimension finie.

**Exercice** 10. Exhiber une forme linéaire continue de norme 1 sur un sous-espace vectoriel strict de $\ell^1(\mathbb{N})$ qui admet une infinité de prolongements linéaires continus de norme 1 sur tout l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$.

**Exercice** 11. Soit $(a_n)_n$ une suite de $]1, +\infty[$ qui diverge vers $+\infty$. Montrer que l'ensemble

$$W = \mathrm{Vect}\Big\{x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{x - a_n} : n \geq 0\Big\},$$

est dense dans l'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

# TD 11 : Espaces de Hilbert

**Exercice** 1. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert, et en donner une base hilbertienne dénombrable. Cette base hilbertienne est-elle une base d'espace vectoriel ?

**Exercice** 2. Soit $E$ un ev de dimension finie muni d'un produit scalaire, et $F$ un sev non réduit à $\{0\}$. Montrer qu'une projection de $E$ sur $F$ est de norme 1 si et seulement si elle est orthogonale.

**Exercice** 3. Soit $H$ un espace de Hilbert et $C$ un convexe fermé de $H$. On note $p_C$ la projection orthogonale sur $C$, $u$ et $v$ des éléments de $H$.

a) Montrer que $v = p_C(u)$ si et seulement si $v \in C$ et $\langle u - v, c - v\rangle \leq 0$ pour tout $c$ dans $C$.

b) Montrer que $p_C$ est 1-lipschitzienne.

c) Montrer que $\langle p_C(u) - p_C(v), u - v\rangle \geq 0$ quels que soient $u$ et $v$ dans $H$.

**Exercice** 4. Soit $H$ un espace de Hilbert et $T$ un opérateur continu sur $H$.

a) Montrer qu'il existe une unique fonction $T^\star \in \mathcal{L}_c(H)$ telle que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle$ pour tous $x$ et $y$ dans $H$. On l'appelle *adjoint* de $T$.

b) Montrer que $\ker(T^\star) = \mathrm{Im}(T)^\perp$ et $\mathrm{Im}(T^\star) \subset \ker(T)^\perp$.

c) Soit $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ et $T$ défini sur $H$ par $Tf(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que $T$ est continu et déterminer son adjoint.

**Exercice** 5. Soient $E$ un espace vectoriel normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists J$ finie, $J \subset I$, telle que pour toute partie $K$ finie satisfaisant $J \subset K \subset I$, on a :

$$\left\| S - \sum_{k\in K} x_k \right\| < \varepsilon.$$

a) Montrer que si $E$ est complet, cela équivaut à : "$\forall \varepsilon > 0$, $\exists J$ finie, $J \subset I$, telle que pour toute partie $L$ finie satisfaisant $L \subset I$ et $J \cap L = \emptyset$ on a : $\| \sum_{k\in L} x_k \| < \varepsilon$".

b) Montrer qu'une famille sommable est à support dénombrable.

c) Soit $I = \mathbb{N}$, et $E$ complet. Montrer que la famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si elle est commutativement convergente, c'est-à-dire : pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum x_{\varphi(i)}$ est convergente.

d) Soient $H$ un espace de Hilbert, et $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ une famille orthonormale. Montrer que, pour tout $x$, la famille $\{\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha : \alpha \in A\}$ est sommable, et que sa somme est la projection hilbertienne de $x$ sur $\overline{\mathrm{Vect}\{u_\alpha : \alpha \in A\}}$.

**Exercice** 6.

a) Rappeler pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est réduit à $\{0\}$.

b) Soit $c_{00}$ l'espace préhilbertien des suites nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire
$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$
Soit $f$ la forme linéaire sur $c_{00}$ donnée par $f(u) = \sum_n \frac{u_n}{n+1}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan fermé, et que $(\mathrm{Ker}(f))^\perp = \{0\}$.

c) (Bonus **) Plus généralement, montrer que dans tout espace pré-hilbertien non complet, il existe un hyperplan fermé dont l'orthogonal est réduit à $\{0\}$.

**Exercice** 7. Soit $H$ un espace de Hilbert et $(x_n)$ une suite de $H$. On dit que $x_n$ *converge faiblement* vers $x \in H$ si pour tout $y$ dans $H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, et on le note $x_n \rightharpoonup x$.

a) Soient $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites de $H$. Que dire de $\langle x_n, y_n\rangle$ dans les cas suivants ?

(a) $\begin{cases} x_n \to x, \\ y_n \to y. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_n \to x, \\ y_n \rightharpoonup y. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x_n \rightharpoonup x, \\ y_n \rightharpoonup y. \end{cases}$

b) Soit $K$ un compact de $H$. Montrer qu'une suite de $K$ converge si et seulement si elle converge faiblement.

c) Montrer que toute suite faiblement convergente est bornée.

d) Soit $x_n$ une suite de $H$ faiblement convergente. Montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, la suite $(Tx_n)$ est faiblement convergente.

**Exercice** 8. Le but de cet exercice est de démontrer que toute suite bornée d'un Hilbert converge faiblement à extraction près. Soit $H$ un espace de Hilbert séparable (pour commencer), et $(x_n)$ une suite bornée de $H$.

a) Supposons $H$ séparable et $D$ une partie dénombrable dense de $H$. Montrer qu'on peut extraire de $(x_n)_n$ une suite $(\tilde{x}_n)_n$ telle que pour chaque $y$ de $D$, $\langle \tilde{x}_n, y\rangle$ converge quand $n \to \infty$ vers une limite qu'on notera $\ell(y)$.

b) Montrer que $\langle \tilde{x}_n, y\rangle$ converge pour tout $y$ de $H$.

c) Montrer que la fonction $\ell$ ainsi définie est une forme linéaire continue sur $H$. Conclure.

d) Comment faire sans hypothèse de séparabilité sur $H$ ?

*Remarque :* ce résultat est la traduction du *théorème de Banach-Alaoglu* dans un espace de Hilbert.

**Exercice** 9. Soit $H$ un espace de Hilbert, et $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de vecteurs de $H$ linéairement indépendants.

a) Construire un ensemble orthonormé $\{u_n\}$ où $u_n$ est une combinaison linéaire de $\nu_1, \dots, \nu_n$.

b) En déduire que tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne (sans utiliser l'axiome du choix).

c) Montrer que $H$ est séparable si et seulement si il possède une base hilbertienne finie ou dénombrable.