
Feuille 1

EXERCICE 1. Soit N une norme sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $\alpha \in]0, \infty[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N(x) = \alpha|x|.$$

EXERCICE 2.

1. Soit $E = C^0([0, 1])$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E .

2. Soit $F = C^1([0, 1])$. Pour tout $f \in F$, on pose

$$\|f\|_a := \|f\|_\infty, \quad \|f\|_b := \|f'\|_\infty, \quad \|f\|_c := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Parmi $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ et $\|\cdot\|_c$, lesquelles sont des normes sur F ? Justifiez votre réponse.

EXERCICE 3. Soit $E = C^0([0, 1])$. Pour tout $f \in E$, on note

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| \, dt.$$

On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur E .

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ définit une norme sur E .

2. Montrer que les deux normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes sur E .

EXERCICE 4. Sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes, on pose, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{k=0, \dots, n} |a_k|.$$

Montrer que l'on définit ainsi deux normes. Sont-elles équivalentes?

EXERCICE 5. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

1. Cette suite $(f_n)_n$ est-elle convergente dans $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{C^0})$ où

$$\|f\|_{C^0} := \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \, ?$$

2. Cette suite $(f_n)_n$ est-elle convergente dans $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{C^1})$ où

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} ?$$

EXERCICE 6. Soit $E = C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$. On rappelle que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(t)| dt.$$

Soit la suite $(f_n)_n$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -1/n \\ nx & \text{si } -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

La suite $(f_n)_n$ est-elle convergente dans $(C^0([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$?

EXERCICE 7. On a malencontreusement perdu la fin de l'énoncé du théorème suivant. Heureusement, il nous en reste la preuve, disponible après. Déduisez de la preuve l'énoncé manquant.

Theorem 1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . Si fz e fefahfeaf me af eafj afavbaruga ef hazef.

Démonstration. Comme F est un sous-espace vectoriel de E , on a $0_E \in F$. Comme par hypothèse F est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(0_E, r) \subset F$.

Soit x dans E . Le vecteur $y = \frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|+1}$ est dans $B(0_E, r)$ puisque $\|y\| \leq \frac{r}{2}$, ce qui implique immédiatement $y \in F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E , il vient

$$x = \frac{2(\|x\| + 1)}{r} y \in F,$$

ce qui termine la preuve. □

EXERCICE 8. Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$ un sous-ensemble de E non vide. On appelle *distance à l'ensemble* A la fonction

$$d_A : x \in E \mapsto \inf_{a \in A} N(x - a).$$

1. Montrez que pour tout $x \in E$, $d_A(x) \in [0, \infty[$.
2. Montrez que $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
3. Montrez que la fonction d_A est 1-lipschitzienne (donc continue).

EXERCICE 9. Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés et f, g deux fonctions continues de E dans F .

1. Montrez que l'ensemble $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ est fermé.
2. On suppose qu'il existe un ensemble A dense dans E tel que $f = g$ sur A . Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 10. On rappelle les deux propriétés suivantes de l'adhérence et de l'intérieur

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \widehat{A \cup B} \supset \hat{A} \cup \hat{B}.$$

Donner des exemples dans $\mathbb{R}$ justifiant que les inclusions peuvent être strictes.

Feuille 2

EXERCICE 1. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donnée pour $(A, B) \in M_{n,m}(\mathbb{C}) \times M_{n,m}(\mathbb{C})$ par

$$(\star) \quad \langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB^*),$$

définit un produit scalaire sur l'espace $M_{m,n}(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2. Pour tout $f, g \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$(f, g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt.$$

Vérifier que $(\cdot, \cdot)$ définit un produit scalaire sur $C^1([0, 1])$. Quelle est la norme induite par ce produit scalaire ?

EXERCICE 3. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et u un vecteur unitaire de E . Pour $k \in \mathbb{R}$, on note

$$\Phi : (x, y) \in E \times E \mapsto \langle x, y \rangle + k\langle x, u \rangle \langle y, u \rangle.$$

Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur k pour que Φ soit un produit scalaire sur E .

EXERCICE 4. Soit $(a_n)_n$ une suite de réels de $[0, 1]$. Sur l'espace $E = C^0([0, 1])$, on pose

$$B : (f, g) \in E \times E \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} f(a_n)g(a_n).$$

1. Montrez que B est bien définie.
2. Montrez que B est une forme bilinéaire symétrique positive.
3. Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n)_n$ pour que B soit un produit scalaire sur E .

EXERCICE 5. Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Montrer que

1. $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.
2. $\forall A, B \subset E, \quad (A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp)$.
3. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F \cap F^\perp = \{0\}$.

EXERCICE 6. On considère $M_n(\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $(\star)$. Déterminez l'orthogonal des ensembles suivants :

$$\{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = A^T\}, \quad \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A = A^*\}.$$

EXERCICE 7. Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien. On note $\|\cdot\|$ la norme induite par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Pour $x_0 \in E$ fixé, on note

$$\mathcal{B}_0 = \{x \in E : \|x - x_0\| < 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_0 = \{x \in E : \|x - x_0\| = 1\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}_0^\perp \subset \mathcal{B}_0^\perp$.
2. Vérifier que $\mathcal{B}_0^\perp \subset \mathcal{S}_0^\perp$.
3. Justifier que $0_E \in \mathcal{B}_0^\perp$.
4. Soit $y \in \mathcal{B}_0^\perp$. Montrer que $y = 0_E$.

Indication : on pourra montrer que si $y \in \mathcal{B}_0^\perp$, alors $\frac{y - x_0}{\|y - x_0\| + 1} + x_0 \in \mathcal{B}_0$.

5. En déduire $\mathcal{B}_0^\perp$ et $\mathcal{S}_0^\perp$.

EXERCICE 8. Soit $E = C^0([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. En utilisant les fonctions

$$f_1 : t \in [0, 1] \mapsto t \quad \text{et} \quad f_2 : t \in [0, 1] \mapsto 1 - t,$$

montrer que $C^0([0, 1])$ ne peut pas être muni d'un produit scalaire compatible avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Indication : une norme issue d'un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme.

EXERCICE 9. Soit $E = C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in E, \quad (f, g) := \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

On note

$$A = \{f \in E : f(0) = 0\}.$$

1. Montrez que A est un sous-espace vectoriel de E .
2. Déterminez $A^\perp$.
3. En déduire que A n'admet pas de supplémentaire orthogonal dans E .

EXERCICE 10. Soit $E = C^0([-1, 1])$ muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in E, \quad (f, g) := \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt.$$

On pose

$$F := \{f \in E : \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\} \quad \text{et} \quad G := \{g \in E : \forall t \in [0, 1], g(t) = 0\}.$$

Montrer que $F^\perp = G$. Pour cela, on pourra noter que pour toute fonction g de E , la fonction $g\chi$ appartient à l'espace F , avec $\chi(t) = t\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

EXERCICE 11. Soient $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrez que

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

EXERCICE 12. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Déterminez l'infimum suivant

$$\inf_{f \in C^0([a,b];[0,\infty[)} \left(\int_a^b f(t) dt \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \right).$$

Cette borne est-elle atteinte ?

Feuille 3

EXERCICE 1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $L \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit

$$\|L\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

1. Montrer que $\|L\| < \infty$.
2. Montrer que

$$\|L\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E < 1} \|L(x)\|_F.$$

3. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.
4. Montrer que pour tout L_1, L_2 dans $\mathcal{L}(E, E)$, on a

$$\|L_1 \circ L_2\| \leq \|L_1\| \|L_2\|.$$

EXERCICE 2. Soit $E = C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application linéaire continue

$$\gamma : f \in E \mapsto f(0) \in (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

1. Montrer que $\|\gamma\| \leq 1$.
2. Montrer que $\|\gamma\| = 1$.
3. Que se passe-t-il si on remplace la norme $\|\cdot\|_\infty$ par la norme $\|\cdot\|_1$?

EXERCICE 3. Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Considérons

$$L : f \in E \mapsto g \in E \quad \text{où} \quad g : t \in [0, 1] \mapsto \int_0^t f(x) \, dx.$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E)$, et que $\|L\| \leq 1$.
3. Montrer que $\|L\| = 1$.

EXERCICE 4. Soit $E = \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. On considère $(\lambda_n)_n$ une suite croissante de réels positifs, admettant 1 comme limite.

1. Montrer que pour toute suite $(u_n)_n$ dans E , la suite $(\lambda_n u_n)_n$ est dans E .
On définit

$$T : (u_n)_n \in E \mapsto (\lambda_n u_n)_n \in E.$$

2. Montrer que T est linéaire.
3. Montrer que T est continue et que $\|T\| \leq 1$.
4. Montrer que $\|T\| = 1$. *Indication : on pourra considérer les suites u^k définies par $u_n^k = \delta_{k,n}$.*

EXERCICE 5. Soient $E = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, a un réel de $]0, 1[$ et $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout f de E par

$$T(f) = \int_0^a x^2 f(x) \, dx.$$

Montrer que T est linéaire et continue, puis calculer $\|T\|$.

EXERCICE 6. Soit $E = C^0([a, b])$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et soit φ une forme linéaire positive sur E , *i.e.* qui vérifie

$$\forall f \in E, \quad (f \geq 0 \implies \varphi(f) \geq 0).$$

Montrer que φ est continue et calculer sa norme subordonnée.

EXERCICE 7. Soient E un espace vectoriel normé et φ une forme linéaire non nulle sur E . Montrer que φ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

EXERCICE 8. Soient E un espace vectoriel normé et H le noyau d'une forme linéaire continue non nulle φ . Montrer que pour tout x dans E ,

$$d(x, H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}.$$

Feuille 4

EXERCICE 1. Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes équivalentes sur E . Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est complet si et seulement si $(E, \|\cdot\|_2)$ est complet.

EXERCICE 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Montrer que $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ est complet.

EXERCICE 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet. Considérons $(F_n)_n$ une suite de fermés non vides de E vérifiant

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} \subset F_n$,
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$,

le diamètre d'un ensemble $A \subset E$ étant défini par

$$\text{diam}(A) = \sup_{(a,b) \in A \times A} \|a - b\|.$$

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}.$$

EXERCICE 4. Soit $E = C^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Considérons la suite $(f_n)_n$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -1/n, \\ nx & \text{si } -1/n \leq x \leq 1/n, \\ 1 & \text{si } 1/n < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Vérifier que la suite $(f_n)_n$ ne converge pas dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Qu'en conclut-on ?

EXERCICE 5. Soit $E = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On considère $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(f_n(t))_n$ converge vers une limite que l'on notera $f(t)$ dans la suite.

La question précédente justifie l'existence de la fonction $f : t \in [0, 1] \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$.

2. Vérifier que la fonction f est bornée sur $[0, 1]$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
4. Conclure.

EXERCICE 6. Considérons E l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$.

1. Montrer que $E \subset C^0([0, 1])$.

Pour f dans E , on pose

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

2. Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

3. Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

EXERCICE 7. Soit $\ell^1(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réels absolument sommables :

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| < +\infty \right\}.$$

On pose

$$\|\cdot\|_1 : u \in \ell^1(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_\infty : u \in \ell^1(\mathbb{N}) \mapsto \sup_{k \geq 0} |u_k|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\ell^1(\mathbb{N})$.

On définit une suite de suites $(u^n)_n$ de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k^n = \frac{1}{k+1} \quad \text{si } k \leq n, \quad u_k^n = 0 \quad \text{sinon.}$$

2. Vérifier que pour tout entier n , $u^n \in \ell^1(\mathbb{N})$.

3. Montrer que $(u^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$.

4. Montrer (par l'absurde) que $(u^n)_n$ ne converge pas dans $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$. Que conclure ?

On va maintenant démontrer que $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ est complet. Soit $(u^n)_n$ une suite de Cauchy dans cet espace.

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_k^n)_n$ converge vers un réel que l'on notera u_k^∞ .

6. Considérons la suite $u^\infty = (u_k^\infty)_k$. Vérifier que u^∞ est un élément de $\ell^1(\mathbb{N})$.

7. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n - u^\infty\|_1 = 0$. Conclure.

EXERCICE 8. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

2. Vérifier que $\exp(A)$ est inversible et que $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

EXERCICE 9. Calculez les exponentielles des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 10. Calculer $\exp(T)$ et $\|\exp(T)\|$, où T est l'opérateur défini dans l'Exercice 4 de la Feuille 3.

Feuille 5

EXERCICE 1. Les parties suivantes sont-elles compactes dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$? Justifier.

1. $\mathbb{Z}$.
2. $\{0, 1\}$.
3. une union finie de réels.
4. $\{1/n : n \geq 1\}$.

EXERCICE 2. Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite convergente de E , de limite $x_\infty \in E$. On pose

$$A = \{x_n : n \geq 0\} \cup \{x_\infty\}.$$

1. Montrer que A est compact.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ et x_∞ pour que l'ensemble $\{x_n : n \geq 0\}$ soit compact.

EXERCICE 3. Soient (E, N) un espace vectoriel normé, et A, B deux parties non vides de E . Démontrer que :

1. Si A est fermée et B est compacte, alors $A + B$ est fermée.
2. Si A et B sont compactes, alors $A + B$ est aussi compacte.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $N = |\cdot|$, trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ fermées non vides telles que $A + B$ ne soit pas fermée.

EXERCICE 4. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soit $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite de fermés non vides de E vérifiant pour tout $n \geq 0$,

$$F_{n+1} \subset F_n \quad \text{et} \quad F_n \subset K,$$

où K est un compact de E . Montrer que l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ n'est pas vide.

EXERCICE 5. Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $A \subset E$ un sous-ensemble non vide compact de E . Montrer que

1. Pour tout x de E , il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = N(x - a)$.
2. Il existe $(a_1, a_2) \in A \times A$ tels que $\text{diam}(A) = N(a_1 - a_2)$.

EXERCICE 6. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{B}_1 = \{u \in \ell^1(\mathbb{N}) : \|u\|_1 \leq 1\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est fermé et borné dans $\ell^1(\mathbb{N})$.
Soit $(u^n)_{n \geq 0}$ une suite de suites définies par $u_k^n = \delta_{k,n}$. Autrement dit, u_k^n vaut 1 si $k = n$ et 0 sinon.
2. Vérifier que $u^n \in \ell^1(\mathbb{N})$ pour tout n .
3. Montrer que u^n est dans $\mathcal{B}_1$ pour tout n .

4. Montrer qu'aucune suite extraite de $(u^n)_{n \geq 0}$ n'est convergente. Conclure.

EXERCICE 7. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, *i.e.*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |x| > N \implies f(x) \geq M.$$

On veut montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer qu'il existe $R_0 > 0$ tel que $|x| > R_0$ implique $f(x) \geq f(0) + 1$.

2. Justifier que f admet un minimum dans $\{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq R_0\}$.

3. Conclure.

Feuille 6

EXERCICE 1. On note

$$C = \{u \in \ell^2(\mathbb{N}) : \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0\}.$$

1. Montrer que C est un convexe complet non vide de $\ell^2(\mathbb{N})$.
2. On note P_C la projection sur C . Déterminer $P_C(u)$ pour tout u dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

EXERCICE 2. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et soit V un sous espace vectoriel complet de E .

1. Pour tout $x \in E$, on note $P_V(x)$ la projection de x sur V . Rappeler la définition et la caractérisation variationnelle de $P_V(x)$.
2. Montrer que $x - P_V(x) \perp V$, *i.e.*

$$\forall z \in V, \quad \langle x - P_V(x), z \rangle = 0.$$

3. Inversement, soit $y \in V$ tel que

$$\forall z \in V, \quad \langle x - y, z \rangle = 0.$$

Montrer que $y = P_V(x)$.

EXERCICE 3. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Soient $v_1, \dots, v_n \in E$ des vecteurs linéairement indépendants et $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right\|^2 = \inf_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n} \left\| x - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \right\|^2.$$

2. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, v_k \rangle = \langle x, v_k \rangle.$$

3. On souhaite calculer

$$J := \inf \left\{ \int_0^1 |1 - at - bt^3|^2 dt : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Montrer que l'infimum est atteint en un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer ce couple et en déduire la valeur de J .

EXERCICE 4. Soient H un espace de Hilbert et $A, B \in \mathcal{L}(H)$.

1. Montrer que $(A^*)^* = A$.
2. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.

3. Montrer que $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.

EXERCICE 5. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ inversible telle que A^{-1} soit aussi continue. Montrer que A^* est aussi inversible et que $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

EXERCICE 6.

1. Soient H un espace de Hilbert et S un sous-espace vectoriel de H . Montrer que $(S^\perp)^\perp = \overline{S}$.

Indication : on pourra remarquer que $S^\perp = (\overline{S})^\perp$ et que $\overline{S}$ est un sous-espace fermé de H .

2. Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

a. Montrer que $\overline{\text{Im } A} = \text{Ker}(A^*)^\perp$.

b. En déduire que $\text{Im } A$ est dense dans H_2 si et seulement si pour tout $y \in H_2$,

$$(\forall x \in H_1, \quad \langle Ax, y \rangle_{H_2} = 0) \implies y = 0.$$

c. Application : considérons l'application $A : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ définie par

$$A(u) = \left(\frac{u_n}{n+1} \right)_n, \quad u \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Montrer que $\text{Im } A$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$ mais que $\text{Im } A \subsetneq \ell^2(\mathbb{N})$.

EXERCICE 7. Soient $n \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $v_0 \in \mathbb{R}^n$.

1. On pose

$$T : u \in \mathbb{R}^n \mapsto Au \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et déterminer T^* .

2. On pose

$$T : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, et déterminer T^* .

3. On pose

$$T : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto Mv_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ et déterminer T^* .

EXERCICE 8. Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $\varphi \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$. Il existe donc un unique $a \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$ pour tout $x \in H$. Déterminer φ^* .

EXERCICE 9. Déterminer l'adjoint des opérateurs $S, T : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ définis respectivement pour tout $u = (u_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ par

$$S(u) = (u_1, u_2, \dots) \quad \text{et} \quad T(u) = (0, u_0, u_1, \dots).$$

EXERCICE 10. Soit H un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H . D'autre part, soit $(\lambda_n)_n$ une suite de scalaires. On considère l'opérateur D défini pour tout $n \geq 0$ par

$$D(e_n) = \lambda_n e_n.$$

1. Montrer que l'opérateur D est bien défini et continu si et seulement si $(\lambda_n)_n$ est bornée.

2. Montrer que D est inversible si et seulement si $\inf_{n \geq 0} |\lambda_n| > 0$. Calculer alors $\|D^{-1}\|$.

3. Exprimer D^* en fonction de la suite $(\lambda_n)_n$.

Feuille 7

EXERCICE 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T et intégrable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

EXERCICE 2. Montrer que $L_{2\pi}^2 \subset L_{2\pi}^1$ et que pour tout $f \in L_{2\pi}^2$, on a

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

EXERCICE 3. Soient $f \in L_{2\pi}^1$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pose $\check{f}(x) = f(-x)$ et $(\tau_a f)(x) = f(x - a)$. Montrer les propriétés suivantes

1. $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$.
2. $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
3. $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$.
4. $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)$.
5. Si f est à valeurs réelles, alors $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$.
6. Si f est impaire, alors $c_{-n}(f) = -c_n(f)$. Si de plus f est réelle, alors $c_n(f) \in i\mathbb{R}$.
7. Si f est une fonction paire, alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$. Si de plus f est réelle, alors $c_n(f) \in \mathbb{R}$.
8. Si f est continue et de classe C^1 par morceaux, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

EXERCICE 4. Tracer rapidement le graphe des fonctions 2π -périodiques suivantes, puis calculer leurs coefficients de Fourier.

1. $f(x) = x$ pour $x \in [0, \pi[$ et f est impaire.
2. $f(x) = x$ pour $x \in [0, \pi[$ et f est paire.
3. $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, 2\pi[$.
4. $f(x) = \sin x$ pour $x \in [0, \pi[$ et f est paire.
5. $f(x) = 1$ pour $x \in [0, \pi[$, $f(x) = 0$ pour $x \in [\pi, 2\pi[$.

EXERCICE 5. Soit f la fonction 2π -périodique donnée par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi[$.

1. Tracer rapidement la courbe représentative de cette fonction et de ses dérivées première et seconde. Discuter sa régularité.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f .
3. La série de Fourier de f converge-t-elle simplement ? normalement ? Quelle est sa somme ?
4. Utiliser la question précédente pour montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique et paire, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f .
3. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

4. En déduire la valeur de la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

EXERCICE 7.

1. Justifier que pour $0 \leq x \leq \pi$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}.$$

2. En utilisant l'identité de Parseval, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

EXERCICE 8. Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$. On définit la convolution de f et g par

$$(f * g)(t) = \int_0^{2\pi} f(t-s)g(s) \, ds.$$

1. Justifier que $f * g = g * f$.
2. Montrer que $f * g \in L^1_{2\pi}$ et que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
3. Montrer que si $f, g \in L^2_{2\pi}$, alors la fonction $f * g$ est bornée et

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

4. Justifier que si $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in L^2_{2\pi}$ alors $f * g \in L^2_{2\pi}$ et $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$.
5. Montrer que $f * e_n = 2\pi c_n(f) e_n$.
6. Montrer que $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f) c_n(g)$.

EXERCICE 9. Soit $F \in C^0([-1, 1])$. L'objectif de cet exercice est de montrer le théorème de Weierstrass, qui stipule qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément vers F . On suppose que F est à valeurs réelles.

1. On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = F(\cos x)$. Montrer que f est 2π -périodique, paire et que $c_{-n}(f) = c_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $\sigma_n(f)$ la somme de Fejér d'ordre n associée à f . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_n(f)(x) = c_0(f) + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) c_k(f) \cos(kx).$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\cos(nx) = T_n(\cos x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On appelle T_n le polynôme de Tchebycheff d'ordre n .
4. Montrer que $\sigma_n(f)(x) = P_n(\cos x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où P_n est un polynôme.
5. Conclure.