École Normale Supérieure de Lyon **Année 2023 - 2024**

Département de Mathématiques **M1 - EDP**

TD 1: Sobolev spaces and elliptic equations on the whole space

Exercise 1. Let us consider the function

$$\gamma_0 : \varphi(x', x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto \varphi(x', x_n = 0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Prove that for all $s > 1/2$, the function γ_0 can be uniquely extended as an application mapping $H^s(\mathbb{R}^n)$ to $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.
Hint: For all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, begin by computing the Fourier transform of the function $\gamma_0\phi$.

Exercise 2.

1. Show that $H^1(\mathbb{R}^2)$ is not included in $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.
   Hint: Consider a function of the form $x \mapsto \chi(|x|)\,|\log|x||^{1/3}$.
2. Show that there exists a positive constant $c > 0$ such that for all $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,
$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq c\Big(1 + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}\sqrt{\log(1 + \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^2)})}\Big).$$

Exercise 3. Let $\lambda > 0$. Prove that for any $s > 0$, the differential operator $-\Delta + \lambda$ is an isomorphism from $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ to $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Exercise 4. Let ρ be a compactly supported C^∞ function on $\mathbb{R}^3$. We are looking for a function $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ satisfying

$$-\Delta u = \rho, \tag{1}$$

under the following decreasing conditions at infinity

$$x \mapsto |x|u(x) \text{ is bounded}, \quad x \mapsto |x|^2\nabla u(x) \text{ is bounded}. \tag{2}$$

1. Check that the function $x \mapsto 1/|x|$ is of class C^2 on $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ and compute its Laplacian.
2. Let Ω be a smooth open subset of $\mathbb{R}^3$. We denote by $n(x)$ the unit normal vector exiting at $x \in \partial\Omega$ and $\mathrm{d}\sigma$ the measure surface on $\partial\Omega$. We consider two functions u, v of class C^2 on $\overline{\Omega}$. By using Stokes' formula, prove Green's formula for the Laplacian:
$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma(x).$$
3. For $0 < \alpha < \beta$, we define the following sphere and annulus
$$S_\alpha = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = \alpha\big\} \quad \text{and} \quad A_{\alpha,\beta} = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : \alpha \leq |x| \leq \beta\big\}.$$
   Let $0 < \varepsilon < R$. We consider $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ satisfying (2). For all $x \in \mathbb{R}^3$, prove the following identity
$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{S_\varepsilon} u(x+y)\,\mathrm{d}\sigma(y) = \int_{A_{\varepsilon,R}} \frac{(-\Delta u)(x+y)}{|y|}\,\mathrm{d}y + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

4. Prove that the unique solution of (1) satisfying (2) is given for all $x \in \mathbb{R}^3$ by

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} \,\mathrm{d}y.$$

5. Let $p \in [1,3)$. Check that there exists a constant C_p independent of ρ, such that

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C_p \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{p/3} \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{1-p/3}.$$

   Hint: Consider the domains $\{|x-y| \leq r\}$ and $\{|x-y| > r\}$, and optimize with respect to r.

6. Prove the following formula:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Exercise 5. The purpose of this exercice is to prove with a variational method that given a positive real number $p > 1$ and a function $f \in L^2(\mathbb{R})$, there exists a unique function $u \in H^2(\mathbb{R})$ satisfying

$$-u'' + u + |u|^{p-1}u = f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}). \tag{3}$$

1. In this question, we prove that there exists a unique $u \in H^1(\mathbb{R})$ such that

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}), \quad \int_0^1 \left(u'(x)v'(x) + u(x)v(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)v(x)\right) \mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

   To that end, we introduce the functional $J : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ defined for all $u \in H^1(\mathbb{R})$ by

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{p+1} \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)u(x) \,\mathrm{d}x.$$

   a) Check that the functional J is well-defined, strictly convex and coercive.
   b) Prove that the functional J is differentiable on $H^1(\mathbb{R})$ and give the expression of its derivative.
   c) Deduce from the preliminary question that the variational problem (4) admits a unique solution $u \in H^1(\mathbb{R})$.

2. Prove that the unique function $u \in H^1(\mathbb{R})$ satisfying (4) belongs to $H^2(\mathbb{R})$ and is also the unique function that satisfies (3).

3. When the function f is continuous on $\mathbb{R}$, check that $u \in C^2(\mathbb{R})$ is a strong solution of (3), in the sense that

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -u''(x) + u(x) + |u(x)|^{p-1}u(x) = f(x).$$

TD 2: Sobolev spaces

Exercise 1.

1. Show that $u(x) = |x|$ belongs to $W^{1,2}(-1,1)$ but not to $W^{2,2}(-1,1)$.
2. Check that $v(x) = \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$ belongs to $L^2(\mathbb{R})$ but not to $W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Exercise 2. Let $1 \leq p < d$ and $\alpha \in [1, \infty]$. By using a homogeneity argument, show that if there exists a continuous injection $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\alpha(\mathbb{R}^d)$, then necessarily $p \leq \alpha \leq \frac{dp}{d-p}$.

Exercise 3. Let $\Omega = (0,1)$.

1. Prove that the following continuous embeddings hold
$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \quad \text{and} \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-1/p}(\bar{\Omega}) \quad \text{when } p \in (1, \infty],$$
with the convention $1/\infty = 0$.
2. Prove that for all $1 \leq p < \infty$, the space $W_0^{1,p}(\Omega)$ is given by
$$W_0^{1,p}(\Omega) = \big\{u \in W^{1,p}(\Omega) : u(0) = u(1) = 0\big\}.$$

Exercise 4. Let $\Omega = (0,1)$. Prove Poincaré's inequality
$$\forall f \in H_0^1(\Omega), \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\pi}\|f'\|_{L^2(\Omega)},$$
and check that the constant $1/\pi$ is optimal.
Hint: Use Fourier series.

Exercise 5. The aim of this exercise is to give a characterization of the space $H^1(0,1)$.

1. (a) Prove that if $u \in C^1[0,1]$, then we have for any $\alpha \in (0,1/2)$, $x \in (\alpha, 1-\alpha)$ and $h \in \mathbb{R}$ such that $|h| < \alpha$,
$$|u(x+h) - u(x)|^2 \leq h^2 \int_0^1 |u'(x+sh)|^2 \, \mathrm{d}s.$$
   (b) Deduce that for any $u \in H^1(0,1)$, any $\alpha \in (0,1/2)$ and $h \in \mathbb{R}$ such that $|h| < \alpha$, we have
$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\alpha,1-\alpha)} \leq |h|\|u'\|_{L^2(0,1)}.$$
2. Conversely, we assume that $u \in L^2(0,1)$ is such that there exists a constant $C > 0$ such that for any $\alpha \in (0,1/2)$ and for any $h \in \mathbb{R}$ such that $|h| < \alpha$, we have
$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\alpha,1-\alpha)} \leq C|h|.$$

(a) Let $\phi \in C_0^1(0,1)$ and $\alpha > 0$ such that ϕ is supported in $(\alpha, 1-\alpha)$. Prove that for any $|h| < \alpha$, we have

$$\int_\alpha^{1-\alpha} (u(x+h) - u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x)(\phi(x-h) - \phi(x))\,\mathrm{d}x.$$

Deduce that

$$\left| \int_0^1 u(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq C\|\phi\|_{L^2(0,1)}.$$

(b) Conclude that $u \in H^1(0,1)$.

Exercise 6. Let $p \in [1, +\infty)$ and let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^d$.

1. Assume that Ω is bounded in one direction, meaning that Ω is contained in the region between two parallel hyperplanes. Prove Poincaré's inequality: there exists $c > 0$ such that for every $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$,
$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}.$$
Hint: Consider first the case $\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1} \times [-M, M]$.
2. Assume that Ω is bounded. Prove Poincaré-Wirtinger's inequality: there exists a constant $c > 0$ such that for any $f \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfying $\int_\Omega f = 0$,
$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Exercise 7. Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^d$ and let $p \in (1, +\infty)$. Prove that for all $F \in W_0^{1,p}(\Omega)'$, there exist $f_0, f_1, \ldots, f_d \in L^q(\Omega)$ (with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) such that for all $g \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\langle F, g\rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)', W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f_0 g\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^d \int_\Omega f_i \partial_i g\,\mathrm{d}x.$$

Assuming that Ω is bounded, prove that we may take $f_0 = 0$.

Exercise 8. Let Ω and Ω' be two open subset of $\mathbb{R}^d$.

1. Let $H : \Omega' \to \Omega$ be a C^1-diffeomorphism such that the Jacobian $\mathrm{Jac}(H)$ and $\mathrm{Jac}(H^{-1})$ belong to L^∞. Prove that for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, we have $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega')$ and that for all $1 \leq i \leq d$,
$$\partial_{y_i}(u \circ H) = \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j} u \circ H)\partial_{y_i} H_j.$$
2. Let us now consider a function $G \in C_b^1(\mathbb{R})$ satisfying $G(0) = 0$. Show that for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, we have $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ and that for all $1 \leq j \leq n$,
$$\partial_{x_j}(G \circ u) = (G' \circ u)\partial_{x_j} u.$$
3. Do we need to assume that G' is bounded when $d = 1$?

École Normale Supérieure de Lyon **Année 2023 - 2024**

Département de Mathématiques **M1 - EDP**

TD 3: Weak formulation of elliptic equations

Exercise 1 (Ellipticity). For each of the following linear differential operator L, give the symbol, the principal symbol of L, and discuss the ellipticity and uniform ellipticity.

1. $Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d,$
2. $Lf(x,v) = v \cdot \nabla_x f + F(x) \cdot \nabla_v f, \quad x, v \in \mathbb{R}^d,\ F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$
3. $Lu(t,x) = \partial_t u - \Delta u, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d,$
4. $Lu(t,x) = \partial_t u - i\Delta u, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d.$

Exercise 2 (Faber-Krahn inequality). Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^d$ with $d \geq 3$ and $V \in L^\infty(\Omega)$ such that $V \geq 0$. We consider the problem

$$\begin{cases} -\Delta u = Vu & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. Give the definition of a weak solution to (1).
2. Can you apply the Lax-Milgram theorem here?
3. Let $r > \frac{d}{2}$. Show that there is a constant $c_d > 0$ depending on d only such that, if (1) has a non-trivial weak solution, then
$$|\Omega|^{\frac{2}{d}-\frac{1}{r}}\|V\|_{L^r(\Omega)} \geq c_d.$$
Hint: Use the following Sobolev inequality
$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq M_d\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d},$$
which holds for all $u \in H_0^1(\Omega)$, where M_d depends on d only.
4. What do you obtain in the particular case $V = \lambda = \text{cst}$?

Exercise 3 (Dirichlet problem). Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$ and $F \in L^2(\Omega)^d$. Show that the following elliptic problem with Dirichlet boundary condition

$$\begin{cases} -\Delta u = f - \operatorname{div} F & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

has a unique weak solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Exercise 4 (Neumann problem). Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^d$ with smooth boundary, the exterior unit normal being denoted by n, and $f \in L^2(\Omega)$. Show that, for all $\mu > 0$, the elliptic problem with Neumann boundary condition

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

has a unique weak solution $u \in H^1(\Omega)$. In the case $\mu = 0$, give a necessary condition on $\int_\Omega f$ to the existence of a weak solution to (2).

Exercise 5 (Fourier condition). Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be an open bounded set with smooth boundary, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ and $\lambda > 0$. We consider the following elliptic problem with Fourier boundary condition

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ \lambda u + \dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

1. Give the variational formulation of the problem (3).
2. Prove that there exists a positive constant $C_\Omega > 0$ only depending on Ω such that for all $u \in H^1(\Omega)$,
$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\big(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|\gamma_0 u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}\big),$$
where γ_0 denotes the trace operator $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$.
3. Prove that (3) has a unique weak solution.
4. * Is this weak solution a strong solution ?

Exercise 6 (The method of continuity).

1. Solve the equation $u - \Delta u = f$ on $\mathbb{T}^d$ and show that it defines a map $L^2(\mathbb{T}^d) \to H^2(\mathbb{T}^d)$.
2. Let X, Y be some Banach spaces. Let $(T_t)_{t\in[0,1]}$ be a *continuous* path of continuous linear operators from X to Y satisfying
$$\exists C \geq 0, \forall u \in X, \forall t \in [0,1], \quad \|u\|_X \leq C\|T_t u\|_Y. \tag{4}$$
Prove that T_0 is onto if and only if T_1 is onto as well.
3. Let $A \in C^1(\mathbb{T}^d, M_d(\mathbb{R}))$. We assume that the following ellipticity condition holds
$$\exists \alpha \in (0,1), \forall x \in \mathbb{T}^d, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2.$$
We define the path $(T_t)_{t\in[0,1]}$ of operators $H^2(\mathbb{T}^d) \to L^2(\mathbb{T}^d)$ by the formula
$$T_t u = u - \operatorname{div}(A^{(t)}(x)\nabla u), \quad A^{(t)} = tA + (1-t)I_d.$$
   (a) Show that $t \mapsto T_t$ is continuous.
   (b) Check that (4) is satisfied.
   (c) Conclude.

Exercise 7 (Resolution by minimization). Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be open, bounded with smooth boundary. The purpose is to prove that the following elliptic problem has a non-trivial weak solution

$$\begin{cases} -\Delta u = u^3 & \text{in } \Omega, \\ \quad\; u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

1. Prove that there exists a solution to the following minimization problem
$$\inf\big\{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} : v \in H^1_0(\Omega),\ \|v\|_{L^4(\Omega)} = 1\big\}. \tag{5}$$
Recall: Since $d = 3$ here, the continuous embedding $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ holds for all $1 \leq q \leq 6$, and is moreover compact when $1 \leq q < 6$.
2. Prove that if the function $v \in H^1_0(\Omega)$ solves (5), there exists a positive constant $\lambda > 0$ such that $-\Delta v = \lambda v^3$ weakly in Ω.
3. Conclude.

TD 4: Elliptic regularity and maximum principles

Exercise 1 (Control of the L^∞ norm). Let Ω be an open bounded subset of $\mathbb{R}^d$ of class C^2. Let $A \in C^1(\overline{\Omega}, S_d(\mathbb{R}))$ satisfying the following ellipticity condition

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2. \tag{1}$$

Let $f \in L^2(\Omega)$ and $u \in H_0^1(\Omega)$ be the weak solution of the following Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

1. In this question, we assume that $d \leq 3$. Show that there exists a constant $C \geq 0$ depending only on Ω and d such that

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2}$$

2. We assume that $\Omega = B(0, R)$ where $R \in (0, 1)$.
   (a) Compute Δv when $v(x) = \psi(|x|)$ is a radial function.
   (b) By considering the function $u(x) = \ln|\ln|x||$ and the case $A(x) = \mathrm{I}_d$, discuss the validity of the estimate (2) when $d \geq 4$.

Remark: One can prove (this is a bit technical) that when $d \geq 4$ and $f \in L^p(\Omega)$, where $p > d/2$, there exists a positive constant $C > 0$ only depending on d, Ω and p such that the following estimate, somehow analogous to (2), holds

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Exercise 2 (Hölder regularity). The purpose of this exercise is to show a gain of derivatives in Hölder spaces for the solution u to the Poisson equation $-\Delta u = \rho$, where $\rho \in C^0(\mathbb{R}^3)$ is a function with compact support. Let G be the Green function of the Laplacian in dimension 3. Let us recall that the function

$$u(x) = (G * \rho)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{|x - y|} \, \mathrm{d}y,$$

is solution of the Poisson equation in $\mathbb{R}^3$. We assume that $\rho \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ for a given $\alpha \in (0, 1)$, and we set

$$[\rho]_{\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)} = \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^3} \frac{|\rho(x) - \rho(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

Let K be a compact of $\mathbb{R}^3$. We want to prove that $u, \nabla u \in C^\alpha(K)$ and that there exists a positive constant $c > 0$ only depending on K, d, α and on the support of ρ such that

$$[u]_{\dot{C}^\alpha(K)} + [\nabla u]_{\dot{C}^\alpha(K)} \leq c[\rho]_{\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)}. \tag{3}$$

1. Show that $u \in C^\alpha(K)$ and that the estimate (3) holds for u.
2. By introducing a cut-off function ω_ε of the form $\omega_\varepsilon(x) = \theta(\varepsilon^{-1}|x|)$ and considering the approximation $u_\varepsilon = (G\omega_\varepsilon) * \rho$, prove that $\nabla u \in C^\alpha(K)$ and that the estimate (3) holds for the function ∇u.

Remark: By using similar techniques, one can prove that for all $\delta \in (0, \alpha)$, we have $\nabla^2 u \in C^\delta(K)$ and also that there exists a positive constant $c' > 0$ depending only on K, d, α, δ and the support of the function ρ such that

$$[\nabla^2 u]_{\dot{C}^\delta(K)} \leq c'[\rho]_{\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)}.$$

Exercise 3 (Weak maximum principle). Let Ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^d$ with smooth boundary and $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfying $\Delta u \leq 0$ on Ω. Proof by hand that

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Hint: Assume first that $\Delta u < 0$.

Exercise 4 (Weak maximum principle for weak solutions). Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded open set. We consider the following operator $L = -\operatorname{div}(A(x)\nabla\cdot)$, where $A \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ satisfies the following ellipticity assumption

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2.$$

We want to prove that if $u \in H_0^1(\Omega)$ is a weak solution of the equation $Lu \leq 0$, then $u \leq 0$ a.e. in the set Ω.

1. Prove that there exists a non-negative function $G \in C^1(\mathbb{R})$ with bounded derivative such that $G' > 0$ on $(0, +\infty)$ and $G' = 0$ on $(-\infty, 0]$.
2. Check that we have
$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 (G' \circ u)(x) \, \mathrm{d}x \leq 0.$$
3. Conclude.

Exercise 5 (No solution). Let $L > 0$. We aim at proving that when $L \gg 1$ is large enough, there is no smooth solution u satisfying $-u'' = e^u$ in $(0, L)$ and $u(0) = u(L) = 0$. We assume by contradiction that such a solution $u \in C^0[0, L] \cap C^2(0, L)$ exists.

1. Given $\varepsilon > 0$, we consider the function $w = u + \varepsilon$. Give the equation satisfied by this new function w.
2. We consider the family of functions $(v_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ defined on $[0, L]$ by $v_\lambda(x) = \lambda \sin(\pi x/L)$. Give the equations satisfied by these functions.
3. Prove that when $L \gg 1$ is large enough, the function w is a sub-solution of the equation established in the above question. Check moreover that when $0 < \lambda \ll 1$ is sufficiently small, then $v_\lambda < w$ on $[0, L]$.
4. Let us now start increasing λ until the graphs of v_λ and w touch at some point
$$\lambda_0 = \sup\big\{\lambda \geq 0 : \forall x \in [0, L],\ v_\lambda(x) < w(x)\big\}.$$
By considering the function $p = v_{\lambda_0} - w$ and using the weak maximum principle, obtain a contradiction.

TD 5 : Fonctions harmoniques

Exercice 1. Montrer que la fonction $h : z \in \mathbb{C}^* \to \log |z|$ est harmonique.

Exercice 2. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $h : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Montrer que si h^2 est harmonique, alors h est constante.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour toute fonction holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$, la fonction $\mathrm{Re}\, f$ est harmonique.
2. On suppose de plus que Ω est simplement connexe. Soit $h : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. On souhaite démontrer qu'il existe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $h = \mathrm{Re}\, f$.
   (a) Montrer que la fonction $g = \partial_x h - i\partial_y h$ est holomorphe sur Ω.
   (b) Construire une telle fonction f recherchée en utilisant la fonction g.
   (c) Montrer que la fonction f est en fait unique à constante additive près.
3. *Application* : Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Montrer que si h est majorée ou minorée, alors h est constante.

Exercice 4. Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $h : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction harmonique.

1. Montrer que si h s'annule sur un ouvert non vide de Ω, alors h est identiquement nulle.

Dans les questions suivantes, on suppose de plus que $h(0) = 0$.

2. Montrer que l'origine n'est pas un zéro isolé de h.
3. Que dire plus précisément si la fonction h prend des valeurs positives ?

Exercice 5. Soit $r > 0$ et $f : D(0, r) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $0 < |f| < 1$. Montrer l'estimation suivante

$$\forall z \in D(0, r), \quad |f(z)| \leq |f(0)|^{\frac{r-|z|}{r+|z|}}.$$

Exercice 6.

1. Soit h une fonction harmonique définie sur un voisinage du disque fermé $\overline{D(0, R)}$ avec $R > 0$. Etablir l'égalité

$$\forall r \in [0, R], \quad \sup_{|z|=r} h(z) \leq \frac{2r}{r+R} \sup_{|z|=R} h(z) + \frac{R-r}{R+r} h(0).$$

2. *Application* : Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique telle que

$$\liminf_{r \to +\infty} r^{-1} \sup_{|z|=r} h(z) \leq 0.$$

   Montrer que h est constante.

Exercice 7. Soit $(h_n)_n$ une suite croissante de fonctions harmoniques définies sur $D(0, 1)$. Montrer que l'on est dans un des deux cas suivants

(*i*) $h_n \to +\infty$ uniformément sur les compacts de $D(0, 1)$.
(*ii*) Il existe une fonction harmonique $h : D(0, 1) \to \mathbb{R}$ telle que la suite $(h_n)_n$ converge localement uniformément vers h sur $D(0, 1)$.

TD 6 : Inégalité de Caccioppoli, régularité intérieure et surfaces minimales

Exercice 1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $A \in L^\infty(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ satisfaisant la condition d'ellipticité suivante

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2.$$

On considère également $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, ainsi que l'opérateur L défini par

$$L = -\operatorname{div}(A(x)\nabla \cdot) + b(x) \cdot \nabla + c(x).$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant $Lu = f$. Montrer que pour tout ouvert $\Omega' \Subset \Omega$, on a l'inégalité de type Caccioppoli suivante

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

où la constante $c > 0$ ne dépend que des fonctions A, b et c.
Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur Ω'.

Exercice 2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $A \in C^{0,1}(\Omega, M_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles vérifiant la condition d'ellipticité suivante

$$\exists \alpha > 0, \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad A(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^2.$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et pour toute fonction u, on note

$$\tau_h u = u(x+h) \quad \text{et} \quad \Delta_h u = |h|^{-1}(u(x+h) - u(x)).$$

On considère également des ouverts $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$.

1. Rappeler pourquoi, pour $u \in H^1(\Omega)$ et h assez petit

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\Omega'')} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$.

2. Montrer que pour tout h assez petit et $\phi \in H^1(\Omega)$ à support dans Ω'', on a

$$\int_\Omega (\tau_h A)\nabla(\Delta_h u) \cdot \nabla \phi = \int_\Omega (\Delta_h f)\phi - \int_\Omega (\Delta_h A)\nabla u \cdot \nabla \phi.$$

3. En s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Caccioppoli, montrer que

$$\|\nabla \Delta_h u\|_{L^2(\Omega')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big),$$

où la constante $c > 0$ ne dépend que de la fonction A.
Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1.

4. En déduire l'estimation suivante

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\big).$$

On considère maintenant le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } R, \\ u = 0 & \text{sur } \partial R. \end{cases}$$

où R est le rectangle $[0,1] \times [-1,1]^{n-1}$.

5. Montrer que

$$\|\nabla^2 u\|_{L^2(R')} \leq c\big(\|f\|_{L^2(R)} + \|u\|_{L^2(R)}\big).$$

où $R' = [0,1/2] \times [-1/2,1/2]^{n-1}$.

Exercice 3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier connexe et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée régulière. On introduit l'espace affine suivant

$$H^1_g(\Omega) = \big\{u \in H^1(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = g\big\}.$$

Considérons une fonction $u \in H^1_g(\Omega)$. On note $S(u)$ la surface

$$S(u) = \big\{(x, u(x)) : x \in \Omega\big\},$$

et $A(u)$ l'aire de $S(u)$, définie par

$$A(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\,\mathrm{d}x.$$

On dit que $S(u)$ est une surface minimale si

$$A(u) = \inf_{v \in H^1_g(\Omega)} A(v).$$

1. Montrer que si $S(u)$ est une surface minimale, alors

$$H(u) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0,$$

au sens où

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

2. * Montrer que si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ est solution de l'équation (1), alors on a en fait $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ et $\operatorname{div}(A(x)\nabla\partial_k u) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq d$, où $A = (\partial_i\partial_j F(\nabla u))_{1\leq i,j\leq d}$ avec $F(\zeta) = \sqrt{1+|\zeta|^2}$. Pour cela, on pourra montrer que la fonction u satisfait

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^d c^h_{i,j}(x)\partial_{x_j}(\Delta_{he_k} u)\partial_{x_i} v\,\mathrm{d}x = 0,$$

pour tout h assez petit et pour toute fonction test $v \in H^1_0(\Omega)$, où $\Delta_h u$ désigne la dérivée discrète de u définie dans l'exercice précédent et où la matrice $(c^h_{i,j}(x))_{i,j}$ est elliptique uniformément par rapport au paramètre h. On pourra ensuite conclure en s'inspirant de la démonstration de l'inégalité de Caccioppoli.

Remarque : on peut démontrer grâce au théorème de Schauder que si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifie $H(u) = 0$, alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

École Normale Supérieure de Lyon **Année 2023 - 2024**

Département de Mathématiques **M1 - EDP**

TD 7 : Théorème de Riesz–Thorin et inégalité de Strichartz

Exercice 1 (Lemme des trois droites d'Hadamard).
Soit $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$. On considère une fonction continue bornée $F : \overline{B} \to \mathbb{C}$ qui est également holomorphe sur B, et on pose $M(\theta) = \sup_{\operatorname{Re} z = \theta} |F(z)|$. Montrer que l'on a

$$\forall \theta \in [0,1], \quad M(\theta) \leq M(0)^{1-\theta} M(1)^{\theta}.$$

Exercice 2 (Théorème de Riesz–Thorin).
Soient $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$, et $\Omega, U \subset \mathbb{R}^d$ des ouverts. On considère également un opérateur T borné de $L^{p_i}(\Omega)$ dans $L^{q_i}(U)$ de norme d'opérateur M_i, pour $i = 0, 1$. L'objectif est de démontrer que T est également borné de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(U)$ pour tout couple (p, q) satisfaisant la relation

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0,1),$$

avec de plus

$$\|T\|_{L^p(\Omega) \to L^q(U)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

1. On note q' l'exposant conjugué de q, *i.e.* tel que $1/q + 1/q' = 1$, et

$$\langle h, g \rangle = \int_U h(y) g(y) \, \mathrm{d}y,$$

dès que l'intégrale a un sens. Montrer qu'il suffit de vérifier que

$$|\langle Tf, g \rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

pour toutes fonctions $f \in C_0(\Omega)$ et $g \in C_0(U)$ telles que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$.

2. * Pour $f \in C_0(\Omega)$, $g \in C_0(U)$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, on pose

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$

ainsi que

$$\varphi(x,z) = f(x)|f(x)|^{p/p(z)-1} \quad \text{et} \quad \psi(y,z) = g(y)|g(y)|^{q'/q(z)'-1}.$$

Montrer que l'expression

$$F(z) = \langle (T\varphi)(\cdot, z), \psi(\cdot, z) \rangle,$$

définit une fonction F vérifiant les hypothèses du lemme des trois droites d'Hadamard.

3. Conclure.

4. *Application 1 :* Soit $p \in [1,2]$. Démontrer que la transformée de Fourier se prolonge en une application linéaire continue $\mathscr{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

5. *Application 2 : Théorème de Young.* Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, où $p, q \geq 1$ vérifient $1/p + 1/q \geq 1$. Démontrer que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ pour
$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$
avec de plus
$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Exercice 3 (Inégalité de Strichartz).
Soit $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une famille d'opérateurs linéaires satisfaisant les bornes suivantes pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \|S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C, \\ \|S(t)S(s)^*\|_{L^1(\mathbb{R}^d)\to L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C|t-s|^{-\sigma}, \end{cases}$$
où $C > 0$ et $\sigma > 0$ sont des constantes fixés. L'inégalité de Strichartz stipule que l'on a alors l'estimation suivante pour toute fonction $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$,
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|S(t)u_0\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)} \,\mathrm{d}t \right)^{1/p} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1}$$
et pour tout couple (p, q) satisfaisant les conditions
$$\frac{2}{p} + \frac{2\sigma}{q} = \sigma, \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (p,q) \neq (2,\infty). \tag{2}$$
L'objectif est ici de démontrer ce résultat dans le cas le plus simple où $p = q$.

1. En appliquant le théorème de Riesz–Thorin, démontrer que l'on a pour tous $s, t \in \mathbb{R}$,
$$\|S(t)S(s)^*\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)\to L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C|t-s|^{-\sigma(2/p'-1)},$$
où $p' \in [1,2]$ vérifie $1/p + 1/p' = 1$.
2. En déduire que pour tous $s, t \in \mathbb{R}$ et pour toutes fonctions $F, G \in L^{p'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, on a
$$|\langle S(t)^*G(t,\cdot), S(s)^*F(s,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \leq C|t-s|^{-\sigma(2/p'-1)} \|G(t,\cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \|F(s,\cdot)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$
3. On rappelle l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev, qui stipule que pour $K_a(t) = |t|^{-a}$ et $0 < a < 1$, on a
$$\|K_a * u\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^{r'}(\mathbb{R})} \quad \text{avec} \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + a.$$
Démontrer que l'estimation suivante est vérifiée pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $G \in L^{p'}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$,
$$\left| \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} (S(t)u_0)(x)G(t,x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \right| \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|G\|_{L^{p'}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}.$$
4. Conclure.
5. *Application* : En admettant que l'inégalité (2) est vraie pour les couples (p, q) vérifiant les conditions (2), montrer que l'on a pour toute fonction $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$,
$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|e^{it\Delta}u_0\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/p} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$
pour tout couple (p, q) d-admissible, *i.e.* satisfaisant les conditions suivantes
$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad 2 \leq p \leq \infty, \quad (p,q,d) \neq (2,\infty,2).$$

TD 8 : Equations paraboliques

Exercice 1 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger et équation de la chaleur en dimension 1).

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Montrer que si u est de moyenne nulle, alors
$$\left(\int_0^T |u(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leq \frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T |u'(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$
2. Soit $u = u(t,x)$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, 2π-périodique en x et solution de l'équation de la chaleur
$$\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$
où γ est une fonction de classe C^∞, 2π-périodique et minorée par une constante strictement positive. Montrer que si $u(0,\cdot)$ est de moyenne nulle, alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout temps $t \geq 0$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2 \, \mathrm{d}x \leq e^{-ct} \int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 2 (Théorie spectrale).
Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné.

1. Démontrer l'existence d'un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$ vérifiant
$$\forall f \in L^2(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Tf, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$
2. Soit $\iota : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'injection canonique. Vérifier que l'opérateur $T \circ \iota : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ est positif, autoadjoint, injectif et compact.
3. En déduire que le spectre du laplacien de Dirichlet $-\Delta$ sur Ω est une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels strictement positifs qui diverge à l'infini. En déduire également l'existence d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ de $H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ pour tout $n \geq 0$.
4. Calculer explicitement ces valeurs propres et ces fonctions propres lorsque $d = 1$ et $\Omega = (0,1)$.

Exercice 3 (Domaine borné).
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $T > 0$ un temps final, $u_0 \in L^2(\Omega)$ une donnée initiale et $f \in L^2((0,T) \times \Omega)$ un terme source. On veut démontrer l'existence d'une unique solution faible $u \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T], L^2(\Omega))$ à l'équation de la chaleur sur Ω avec condition de Dirichlet
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. Définir le problème variationnel associé à l'équation (1).

2. Donner le développement formel d'une solution faible dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice précédent.
3. Démontrer que ce développement converge dans l'espace $L^2((0,T),H_0^1(\Omega))$, mais aussi dans l'espace $C^0([0,T],L^2(\Omega))$.
4. Conclure et montrer de plus que la solution faible vérifie l'estimée d'energie suivante pour tout temps $t\in[0,T]$,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^t\|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s\leq C\bigg(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2+\int_0^t\|f(s,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}s\bigg).$$

Exercice 4 (Principe du maximum faible).
Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $T>0$ et $Q_T=(0,T]\times\Omega$. On considère l'opérateur différentiel suivant

$$L=-\sum_{i,j=1}^d a^{i,j}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\sum_{i=1}^n b^i(t,x)\partial_{x_i}+c(t,x),\quad (t,x)\in Q_T,$$

les coefficients $a^{i,j},b^i$ et c étant bornés sur $\overline{Q_T}$, avec en plus $a^{i,j}=a^{j,i}$. On suppose que l'opérateur ∂_t+L est uniformément parabolique, *i.e.* satisfait

$$\exists\theta>0,\forall(t,x)\in Q_T,\forall\xi\in\mathbb{R}^d,\quad \sum_{i,j=1}^d a^{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|^2.$$

Démontrer que lorsque $c\equiv 0$, on a pour toute fonction $u\in C^{1,2}(Q_T)\cap C^0(\overline{Q_T})$,

$$\partial_t u+Lu\leq 0 \text{ sur } Q_T\quad\Longrightarrow\quad \max_{\overline{Q_T}}u=\max_{\Gamma_T}u,$$

où l'on a posé $\Gamma_T=(\{0\}\times\Omega)\cup([0,T]\times\partial\Omega)$.
Indication : On pourra s'inspirer du cas des équations elliptiques.

Exercice 5 (Equation non linéaire).
On garde les notations de la question précédente et on admet lorsque $c\geq 0$, on a pour toute fonction $u\in C^{1,2}(Q_T)\cap C^0(\overline{Q_T})$,

$$\partial_t u+Lu\leq 0 \text{ sur } Q_T\quad\Longrightarrow\quad \max_{\overline{Q_T}}u\leq\max_{\Gamma_T}u^+.$$

Soient $f\in C^1(\mathbb{R})$ et $u,v\in C^{1,2}(Q_T)\cap C^0(\overline{Q_T})$ deux fonctions satisfaisant l'équation suivante

$$\begin{cases}\partial_t v-\Delta v-f(v)\;\leq\;\partial_t u-\Delta u-f(u) & \text{in } Q_T,\\ \qquad\qquad\qquad v\;\leq\;u & \text{on } \Gamma_T.\end{cases}$$

Démontrer que $v\leq u$ sur Q_T.
Application : On considère $u\in C^{1,2}(Q_T)$ une solution de l'équation

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u\;=\;u(1-u)(u-a) & \text{in } Q_T,\\ \qquad\quad u\;=\;0 & \text{on } (0,T]\times\partial\Omega,\\ \quad u(0,\cdot)\;=\;u_0 & \text{in } \Omega,\end{cases}$$

où $0<a<1$ est une constante positive et où u_0 est une donnée initiale régulière satisfaisant $0\leq u_0\leq 1$ dans Ω. Démontrer que $0\leq u\leq 1$ sur Q_T. Que dire de plus si $0\leq u_0<a$?

École Normale Supérieure de Lyon **Année 2023 - 2024**

Département de Mathématiques **M1 - EDP**

TD 9 : Equation de Schrödinger non linéaire cubique
Enoncé à reprendre

On étudie l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique donnée par

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,\cdot) = u_0, \end{cases} \tag{NLS}$$

avec $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. On dira qu'une fonction u est solution de l'équation (NLS) si elle vérifie la relation de Duhamel suivante pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^2u)(s)\,\mathrm{d}s.$$

Précisément, on va démontrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c$, l'équation (NLS) admet une unique solution dans l'espace $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$ et qui de plus appartient à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))$. Pour cela, on pourra utiliser les inégalités de Strichartz suivantes, qui sont une généralisation de celles présentées dans le TD 7

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R},L^q(\mathbb{R}^2))} \leq c(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^2))}), \quad \frac{2}{p}+\frac{2}{q} = 1, \quad (p,q) \neq (2,\infty), \tag{1}$$

où u est solution de l'équation de Schrödinger suivante

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

On considère la fonctionnelle non-linéaire Q définie par

$$\begin{cases} i\partial_t Q(u) + \Delta Q(u) = |u|^2 u, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \\ Q(u)(0,\cdot) = 0, \end{cases}$$

ainsi que l'application

$$F(u) = e^{it\Delta}u_0 + Q(u).$$

1. Démontrer que la fonctionnelle Q envoie continûment l'espace $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$ dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$.
2. Vérifier que si $\|u_0\|_{L^2}$ est assez petite, alors une boule de la forme $B(0, c\|u_0\|_{L^2})$ de l'espace de Banach $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$, avec $c > 0$ à choisir, est invariante par la fonctionnelle F.
3. En utilisant le théorème du point fixe de Banach, démonter qu'il existe une unique solution à l'équation (NLS) dans un voisinage de 0 dans l'espace $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$.
4. Démontrer que cette solution appartient également à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))$.
5. En s'inspirant de l'Exercice 3 du TD 7, démontrer les inégalités (1).
6. Aurait-on pu considérer des non-linéarités plus générales de la forme $|u|^{2\sigma}u$ avec $\sigma > 0$?
7. Aurait-on pu travailler plus généralement sur $\mathbb{R}^d$?

TD 10: Logarithmic Sobolev inequality

Let γ denote the centered normalized Gaussian measure

$$\mathrm{d}\gamma(y) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|y|^2/2} \mathrm{d}y.$$

For $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ (continuous and bounded), set

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y)\, \mathrm{d}\gamma(y). \tag{1}$$

The formula (1) has also the probabilistic representation

$$P_t f(x) = \mathbb{E} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}Y),$$

where Y is a real-valued random variable of normal law $\mathcal{N}(0,1)$. Note that $P_t \colon C_b(\mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}^d)$. We recall the following property:

> If X, Y are two independent random variable of normal law $\mathcal{N}(0,1)$ and α, $\beta \in \mathbb{R}$ satisfy $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, then the random variable $\alpha X + \beta Y$ follows the normal law $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Show that $(P_t)_{t\geq 0}$ is a semigroup on $C_b(\mathbb{R}^d)$.
2. Prove the invariance property for all $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$
$$\langle P_t f, \gamma \rangle_{L^2} = \langle f, \gamma \rangle_{L^2}.$$
3. Prove the following inequality for all $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$
$$|P_t f|^2 \leq P_t(f^2).$$
4. Let $L^2(\gamma)$ be the set of measurable functions $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ such that
$$\|f\|_{L^2(\gamma)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 \, \mathrm{d}\gamma(y) \right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}|f(Y)|^2\right)^{1/2}$$
is finite (Y there has the normal law $\mathcal{N}(0,1)$). Prove that, for all $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ and $t \geq 0$,
$$\|P_t f\|_{L^2(\gamma)} \leq \|f\|_{L^2(\gamma)}. \tag{2}$$
Justify that we can then extend the semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ by density as a semigroup of contractions on $L^2(\gamma)$.
5. * Prove that the semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ has the generator T given by
$$Tf(x) = -\Delta f(x) + x \cdot \nabla f(x).$$

6. Check that for all $f, g \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$

$$\langle Tf, g\rangle_{L^2(\gamma)} = \langle \nabla f, \nabla g\rangle_{L^2(\gamma)}.$$

7. Show that for all $x \in \mathbb{R}^d$ and $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$P_t f(x) \to \langle f, \gamma\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\gamma \quad \text{as } t \to +\infty.$$

8. Show that P_t satisfies for all $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ and $t \geq 0$ that

$$\nabla P_t f(x) = e^{-t} P_t \nabla f(x).$$

In the following questions, we will use an interpolation procedure, by means of $t \mapsto P_t f(x)$, between $f(x)$ and $\langle f, \gamma\rangle$, to show the two following results:

Poincaré inequality for the Gaussian measure:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^2 \,\mathrm{d}\gamma - \langle f, \gamma\rangle^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}\gamma. \tag{3}$$

Logarithmic Sobolev inequality for the Gaussian measure:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \ln f \,\mathrm{d}\gamma - \langle f, \gamma\rangle \ln\langle f, \gamma\rangle \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\nabla f|^2}{f} \,\mathrm{d}\gamma. \tag{4}$$

Both inequality are understood for smooth functions, positive in the case of (4).

9. Let D be an open convex subset of $\mathbb{R}$, $\Phi\colon D \to \mathbb{R}$ be a smooth function and $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ be a function taking values in D. Prove the successive identities

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(f) \,\mathrm{d}\gamma - \Phi(\langle f, \gamma\rangle) &= -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(P_t f) \,\mathrm{d}\gamma \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Phi''(P_t f) |\nabla P_t f|^2 \,\mathrm{d}\gamma \,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

10. Establish (3) and (4).