

ORSAY
n° d'ordre : 3537

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences

par

Jean-Pierre OTAL

Sujet de la thèse : Courants géodésiques et surfaces

soutenue le 28 mars 1989 devant le Jury composé de :

MM. J. CERF, Président

F. BONAHO

M. GROMOV

A. HAEFLIGER

F. LAUDENBACH

N. LOHOUE

L.C. SIEBENMANN

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le grade de Docteur ès Sciences

par

Jean-Pierre OTAL

Sujet de la thèse : **Courants géodésiques et surfaces**

soutenue le 28 mars 1989 devant le Jury composé de :

MM. J. CERF, Président

F. BONAHO

M. GROMOV

A. HAEFLIGER

F. LAUDENBACH

N. LOHOUE

L.C. SIEBENMANN

Introduction

Première partie.

- (1) Courants géodésiques et produits libres.
- (2) Relations d'équivalence sur l'ensemble des bouts d'un groupe libre.

Ce travail est motivé par le problème de comprendre les bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, non compactes, à bord convexe, dont le groupe fondamental est de type fini. Le cas des variétés géométriquement finies est relativement bien métrisé par les techniques de l'analyse: la variété M se compactifie naturellement en une variété de dimension 3 compacte à bord et son ensemble limite dans la sphère S^2 a une mesure sphérique nulle ou pleine.

Dans le cas où la variété étudiée M a un groupe fondamental *indécomposable*, c'est-à-dire différent d'un produit libre, il est connu depuis les travaux de W. Thurston et de F. Bonahon que ces bouts sont *sages* et ceci de plusieurs points de vue.

D'un point de vue topologique tout d'abord: ils se compactifient tous en une variété de dimension trois compacte à bord, en particulier la variété M est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte de dimension 3 à bord.

D'un point de vue analytique aussi: les fonctions harmoniques bornées sur la variété M réalisent leur minimum en un point du bord de M , une propriété qui entraîne en particulier que la mesure de Lebesgue de leur ensemble limite est 0 ou 1, et dans ce dernier cas que l'action du groupe est ergodique.

Ces résultats avaient tous été établis par W. Thurston dans le cas des variétés hyperboliques dont le groupe fondamental est une *limite algébrique* de groupes géométriquement finis. Dans le cas général, ils sont dus à F. Bonahon qui les a démontrés dans sa thèse.

Le problème dans le cas où le groupe est *décomposable* est pour le moment encore très mystérieux. Lorsqu'on essaie de généraliser les résultats de Thurston et de Bonahon à une variété de dimension 3 dont le groupe fondamental est décomposable, on est confronté tout d'abord au problème suivant: reconstruire à partir d'une représentation du groupe fondamental de M dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ la topologie de la variété M . Le problème se pose bien sur dans le cas où le groupe est indécomposable, mais, on peut dire que pour les variétés de dimension 3 dont le groupe est indécomposable, la géométrie est assez bien contrôlée par le groupe fondamental.

Disons tout de suite qu'il suffit de résoudre le problème pour une variété de dimension 3 M dont le type d'homotopie est celui d'un *bretzel creux*.

c'est-à-dire une variété N homéomorphe à la somme connexe de surfaces épaissies $\Sigma \times [0, 1]$ et de tores solides.

Ces variétés N sont étudiées dans cette optique, dans l'article (1): "Courants géodésiques et produits libres".

Il y a, pour une telle variété, une grande *distance* entre le *groupe fondamental* de N et la *topologie* de N : par exemple la variété possède un sous-groupe de difféotopies noté $Mod^0(N)$ dont l'action sur le groupe fondamental de N est triviale. Donc, une chose que j'ai essayé de faire a été de définir des *objets géométriques* associés à N qui ne tiennent compte que du groupe fondamental de N .

Considérons pour simplifier le cas d'un bretzel N , c'est-à-dire d'une variété homéomorphe à une somme connexe de g tores solides. Le groupe fondamental d'une telle variété est le groupe libre G à g générateurs. Le bord de la variété N est une surface S de genre g . Par objet géométrique, nous entendons des objets qui reflètent la topologie de la surface S , par exemple des laminations sur la surface S qui soient définies uniquement en termes de G ; nous voulons que ces objets soient définis uniquement en termes du groupe G .

Au groupe G , on peut associer de façon canonique un espace: les courants géodésiques $C(G)$ sur G , dont les éléments sont définis comme les mesures de Borel G -invariantes sur $M(G)$, le complémentaire de la diagonale dans $K \times K$, où K désigne les bouts de G (un tel espace peut être associé de façon générale à un *groupe hyperbolique* G , l'espace K désignant alors le *complété Gromov* du groupe G).

Dans l'article (1), on définit un espace $L(N)$ de laminations mesurées sur la surface S (§1): on peut résumer vaguement la définition de $L(N)$ en disant que ce sont les laminations de l'espace des laminations mesurées $ML(S)$ qui ne sont pas homotopiquement triviales dans N , modulo la relation d'équivalence sous l'action de $Mod^0(N)$. On montre que cet espace peut être défini uniquement en termes du groupe G . Précisément, on construit une application naturelle de $L(N)$ dans $C(G)$ et l'on montre que cette application est un homéomorphisme sur son image (§3).

Cet image joue un rôle analogue vis-à-vis du groupe G à celui joué par les laminations mesurées sur une surface S en termes de l'espace des courants géodésiques $C(\pi_1(S))$. On sait alors, que l'on peut reconnaître si un courant géodésique μ du groupe $\pi_1(S)$ est associé à une lamination mesurée sur la surface S par le fait que son nombre d'auto-intersection s'annule.

Mais le problème reste ouvert de reconnaître en termes du groupe G l'image de l'espace $L(N)$: par exemple, peut-on définir une fonctionnelle sur l'espace $C(G)$ qui s'annule exactement sur la fermeture de cette image?

Un cas particulier de ce problème est le suivant: peut-on reconnaître si une classe de conjugaison dans le groupe libre G est représentable par une courbe simple sur la surface S , bord de N ? Et aussi: existe-t-il une façon de mesurer qu'une classe de conjugaison est représentable de cette façon?

L'article (2) "Relations d'équivalence sur l'ensemble des bouts d'un groupe libre" représente une tentative dans cette direction. On y donne une condition nécessaire et, en général, suffisante pour qu'une telle représentation d'une classe de conjugaison γ dans G existe. La condition s'exprime en termes d'une relation d'équivalence fermée sur l'ensemble des bouts K de G associée au mot γ : la condition pour que la classe de conjugaison γ soit représentable par une courbe simple est que le quotient de l'ensemble K par cette relation d'équivalence se plonge dans la sphère S^2 .

Deuxième partie.

(3) Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative.

(4) Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque.

Alors que je travaillais sur les problèmes traités dans les articles (1) et (2), j'ai assisté à une conférence de P. Sarnak à Princeton, au mois d'avril 1987, où il exposait un résultat qu'il avait obtenu avec la collaboration de B. Osgood et R. Phillips. Ils montraient la compacité de l'espace des métriques riemanniennes sur une surface M ayant un spectre du Laplacien donné (*métriques isospectrales*). Le Laplacien considéré est celui agissant sur les fonctions $C^\infty(M)$.

Ce résultat est lié au problème de reconstruire une métrique riemannienne m sur une variété M à partir de la donnée du spectre de son opérateur de Laplace. Il est connu que ce n'est pas possible en général. J. Milnor a construit des exemples de tores plats isospectraux mais non isométriques; plus récemment, M.F. Vigneras a donné des exemples de surfaces de courbures constantes isospectrales mais non isométriques. Toutefois ces exemples reposent sur des constructions arithmétiques et P. Sarnak a conjecturé que, lorsque M est une surface fermée, l'ensemble des surfaces isospectrales est fini. Donc le résultat qu'il exposait représentait une étape importante vers la résolution de cette conjecture.

Il est connu depuis les travaux de Colin de Verdière et de Duistermaat-Guillemin que, sous une condition de généricité sur la métrique m , la donnée du spectre du Laplacien de m sur une variété compacte détermine l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées de la métrique m . Cette condition de généricité est toujours vérifiée pour une métrique à courbure sectionnelle négative.

De plus en courbure sectionnelle négative, les géodésiques fermées sont en correspondance avec les classes de conjugaison du groupe fondamen-

tal de M , d'après la formule de Gauss-Bonnet. On peut donc indexer l'ensemble des géodésiques fermées par la classe de conjugaison de $\pi_1(M)$ qu'elles représentent. Ainsi, si \mathcal{C} désigne l'ensemble des classes de conjugaison de la variété M , on associe à une métrique de courbure négative m sur M , un élément du produit direct $\mathbf{R}^{\mathcal{C}}$, que l'on appelle *le spectre marqué des longueurs de la métrique m* .

On peut se poser la question suivante: l'application m est-elle injective? Lorsque la variété M est une surface, cette question est résolue par l'affirmative dans l'article (3) "Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative".

Il n'y a pas de liens directs entre cette question et le problème décrit précédemment de reconstruire la métrique m à partir de la donnée du spectre de son Laplacien. Toutefois, j'ai quelque espoir qu'elle puisse servir à démontrer la conjecture de P.Sarnak lorsqu'on se restreint aux métriques de courbure négative.

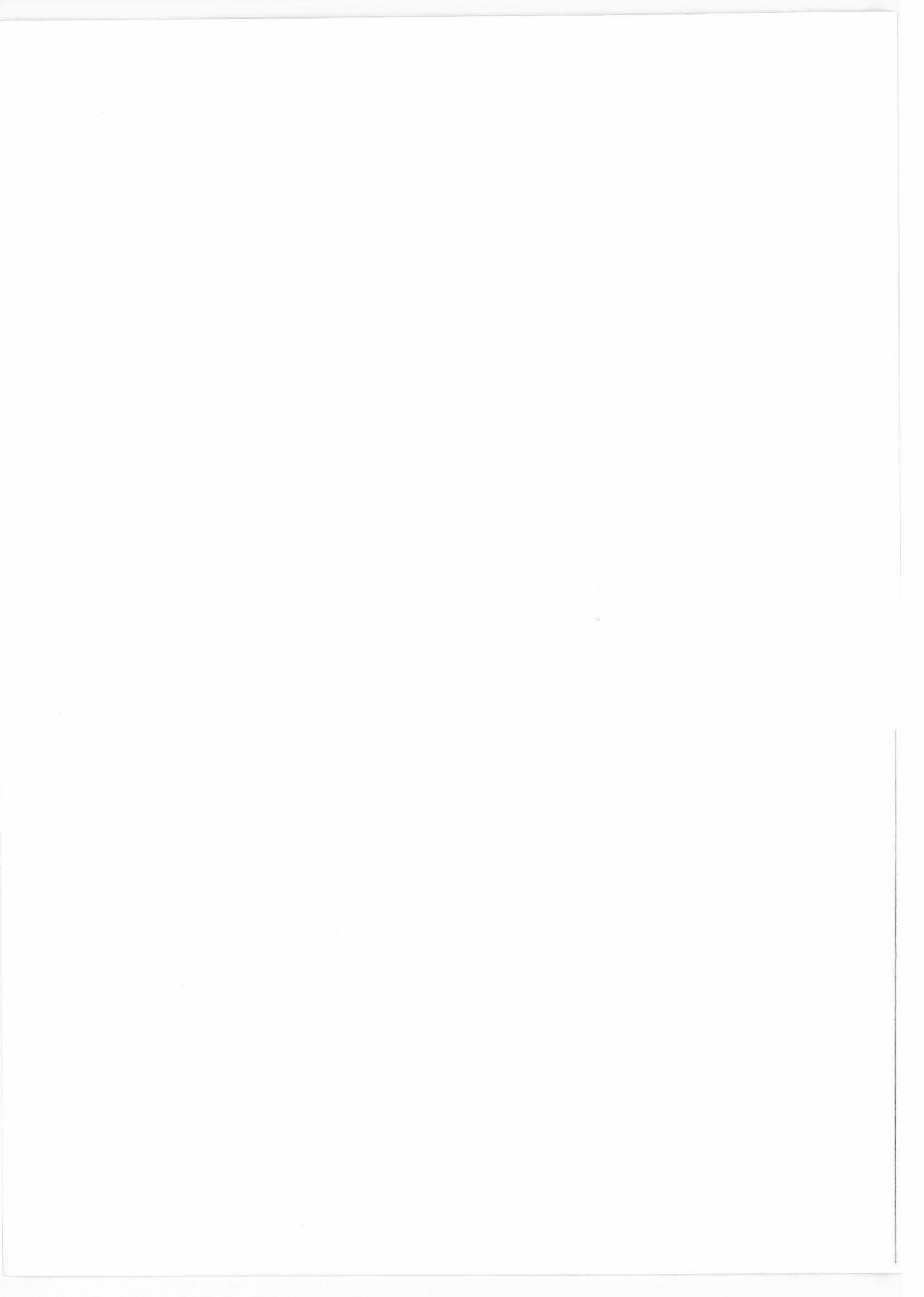
Dans l'article (4), le problème considéré est celui de reconstruire une métrique riemannienne de courbure négative sur un disque compact D de dimension n à partir de la donnée de la restriction de sa fonction distance au bord ∂D . Ce problème est résolu lorsque $n = 2$ et lorsque la métrique est suffisamment régulière (C^2 suffit).

Ce problème intervient en géophysique où il s'agit de comparer deux métriques chacune étant conformément équivalente à une métrique fixée (par exemple la métrique euclidienne): en effet, le coefficient de conformité s'interprète physiquement comme le coefficient de réfraction d'un milieu isotrope remplissant la boule d'un espace euclidien. La distance entre deux points "source" et "récepteur" du bord de la boule, dans ce contexte, est le temps de propagation d'une perturbation du point "source" au point "récepteur". La question est de reconstruire le coefficient de réfraction à partir de ces temps de propagation qui sont mesurables physiquement. Ce problème s'appelle en géophysique le *problème sismologique inverse*. C'est un cas particulier du problème que je considère, sauf que les géophysiciens ne mettent pas d'hypothèses sur la courbure de la métrique. Pour avoir une réponse positive, il est toutefois facile de voir que des hypothèses sur le comportement global des géodésiques sont nécessaires: des contre-exemples sont décrits dans l'article (4).

Les méthodes utilisées sont essentiellement les mêmes que dans l'article (3).

Table des Matières

Courants géodésiques et produits libres	1
1. Le domaine de discontinuité de Masur	3
2. Les surfaces plissées dans les bretzels creux	21
3. Les courants géodésiques dans les bretzels creux	38
4. Appendice	76
Références	95
 Relations d'équivalence sur l'ensemble des bouts d'un groupe libre	97
 Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative	115
 Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque	127



Courants géodésiques et produits libres

Dans cet article on étudie certaines variétés compactes de dimension 3, du point de vue de la dynamique sur leur groupe fondamental. Les variétés considérées sont les *bretzels creux*, définies comme somme connexe le long du bord de produits $\Sigma \times [0, 1]$ où Σ est une surface fermée orientable et de tores solides $D^2 \times S^1$ sur une boule de dimension 3. Parmi ces variétés, on a les *bretzels*, c'est-à-dire les sommes connexes de tores solides. Le groupe fondamental G d'une telle variété N est donc isomorphe au produit libre de groupes de surfaces fermées et de groupes libres.

Le bord d'un bretzel creux N a une seule composante connexe *compressible* S , c'est-à-dire une composante dont le groupe fondamental ne s'injecte pas dans le groupe fondamental de N . Ce phénomène fait que ces variétés sont difficiles à analyser géométriquement, du moins pour tous les problèmes qui essaient de lier la topologie de N au groupe G . Par exemple, le groupe de difféotopies $Mod(N)$ de la variété N contient un sous-groupe, noté $Mod^0(N)$, dont l'action sur G homotopique est par conjugaison. Ce sous-groupe est en général infiniment engendré (cf [Mc-CMi]).

Ici, nous allons définir des objets qui reflètent la topologie d'un bretzel creux N et qui ne dépendent en fait que du groupe G .

Pour cela, on considère l'espace des laminations géodésiques mesurées $ML(S)$ sur la surface S ([CEG],[FLP]). Cet espace contient comme ensemble dense les *courbes*. La surface S est une composante du bord du bretzel N et son groupe fondamental se surjecte naturellement dans le groupe fondamental G de N . Ainsi, on peut définir l'image d'une courbe simple c sur la surface S dans l'ensemble des classes de conjugaison de G , dès que la courbe c n'est pas homotope à 0 dans N .

On introduit dans le premier chapitre un ouvert O de $PML(S)$, qui a la propriété de contenir comme sous-ensemble dense des multicourbes non homotopes à 0 dans N . La définition de O est l'analogue d'une définition donnée par Masur dans [Ma] lorsque la variété N était un *bretzel*. Une de ses propriétés est d'être invariant sous l'action du groupe $Mod(N)$ (lequel, en tant que sous-groupe du groupe des difféotopies de S agit aussi sur $PML(S)$), et que l'action de ce dernier sur O est même proprement discontinue. De plus l'action de son sous-groupe $Mod^0(N)$ sur O est libre de sorte que l'on peut considérer le quotient $L(N)$ de O par l'action de $Mod^0(N)$.

Cet espace est l'objet qui décrit la topologie de N que nous allons essayer de définir en des termes ne dépendant que du groupe G .

Pour cela, on considère l'espace des *courants géodésiques* $C(G)$ sur le groupe G , introduit par F.Bonahon dans [Bo1] dans le cas où le groupe

G est le groupe fondamental d'une surface. Cet espace a la propriété de fournir une complétion pour l'espace des classes de conjugaison non nulles avec poids du groupe G . L'application qui associe à une courbe simple de O non homotope à 0 dans N sa classe de conjugaison dans G peut être définie de façon homogène sur l'ensemble des laminations de $ML(S)$ dont le support est une courbe de ce type: elle prend alors valeur dans $C(G)$. La propriété d'homogénéité fait que cette application est en fait définie sur un sous-ensemble de $ML(S)$. On montre que l'ouvert O a la propriété que cette application se prolonge à tout l'ouvert O en une application continue. Les propriétés de ce prolongement sont établis dans les deuxième et troisième chapitres.

L'un des outils que l'on utilise pour cela est la théorie des surfaces plissées de Thurston ([Thu1,§8]), que l'on adapte au cas des *bretzels creux* (§2).

L'application ainsi définie a la propriété de commuter avec l'action du groupe $Mod^0(N)$, fournissant donc une application de $L(N)$ dans $C(G)$.

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du fait que cette application est un homéomorphisme sur son image. On montre d'abord qu'elle est injective (Théorème 3.3), puis que son inverse est continue (Théorème 3.5). La démonstration du théorème 3.5 lorsque le groupe G est un groupe libre est donnée dans le troisième chapitre; le cas général est résolu dans le quatrième chapitre.

C'est la partie la plus longue et la plus difficile de l'article. On est conduit à étudier certaines relations d'équivalence sur le compactifié $L(G)$ de Gromov du groupe G (dans le cas d'un groupe libre G , ce compactifié coïncide avec l'espace des bouts du groupe libre G) et à étudier plusieurs propriétés topologiques des quotients de $L(G)$ par une telle relation (locale connexité, existence éventuelle de points séparants, conséquences de l'existence d'un plongement dans S^2).

Une question qui reste ouverte est de savoir si l'espace $L(N)$, considéré maintenant comme sous-espace de l'espace des courants $C(G)$ du groupe G peut être caractérisé de façon naturelle parmi les éléments de G . Cette question est abordée dans l'article [O] dans lequel on établit un critère topologique permettant de dire si une classe de conjugaison dans G peut être représentée par une courbe simple sur le bord de N , dans le cas où N est un bretzel.

1. Le domaine de discontinuité de Masur

Ce chapitre a pour but d'étudier l'action sur l'espace projectif des laminations mesurées $PML(S)$ du groupe $Mod(N)$ formé des classes d'isotopie de difféomorphismes de S qui s'étendent au bretzel creux N en respectant les composantes du bord de N . Contrairement à l'action du groupe modulaire sur $PML(S)$, celle de $Mod(N)$ a un domaine de discontinuité. Ceci a été établi par H. Masur lorsque N a pour groupe fondamental un groupe libre et la preuve que nous donnerons de ce résultat dans le cas général n'est que l'adaptation à notre situation de celle contenue dans [Ma].

Ensuite nous décrirons certaines propriétés que vérifient les laminations de la surface S lorsqu'on les relève dans un revêtement planaire canoniquement associé à N .

Dans la suite, le sous-groupe de $Mod(N)$ formé des difféomorphismes induisant un automorphisme intérieur du groupe fondamental de N sera noté $Mod^0(N)$.

Commençons par quelques définitions.

Définitions. Nous désignerons par M les multicourbes de $PML(S)$ dont chaque composante du support borde un disque plongé dans N . Une telle courbe sera appelée un *méridien*.

Soit M' la fermeture de M dans la sphère $PML(S)$.

Définissons finalement M'' comme:

$$M'' = \{\lambda \in PML(S), \exists \mu \in M', i(\lambda, \mu) = 0\}.$$

Il résulte de la continuité en les deux variables du nombre d'intersection ([Bo]) et de la compacité de $PML(S)$ que M'' est fermé dans $PML(S)$.

Nous considérerons à part les deux "petits" bretzels creux suivants: la somme connexe le long du bord de deux *surfaces épaissies*, chacune homéomorphe à $\Sigma \times [0, 1]$, ainsi que la somme connexe d'une surface épaissie et d'un tore solide $D^2 \times S^1$.

PROPOSITION 1.1. *Soit N un grand bretzel; alors M' est l'unique fermé invariant minimal pour les actions de $Mod(N)$ et $Mod^0(N)$. De plus, il est connexe.*

PREUVE: L'ensemble M est clairement invariant par les deux actions considérées; donc M' est fermé et invariant. Pour démontrer la première partie de la proposition, il suffit de montrer la minimalité de l'action de $Mod^0(N)$. Considérons donc un élément de M' . $m' = \lim m_i$ où

$m_i \in M$; soit λ un élément de $PML(S)$. Supposons d'abord que le nombre d'intersection $i(m_i, \lambda)$ est non nul, sauf au plus pour un nombre fini de termes. Le twist de Dehn τ_{m_i} appartient à $Mod^0(N)$, et pour i suffisamment grand, la suite $\tau_{m_i}^n(\lambda)$ converge dans $PML(S)$ vers m_i lorsque n tend vers ∞ ; on en déduit une suite d'itérés de λ par $Mod^0(N)$ qui converge vers m' .

Pour traiter la situation où les nombres d'intersection $i(m_i, \lambda)$ sont nuls pour i suffisamment grand, on commence par établir l'affirmation suivante:

AFFIRMATION 1.1.1. *Sous l'hypothèse ci-dessus, il existe, pour tout i , un méridien μ tel que $i(\mu, \lambda) \neq 0$ et $i(\mu, m_i) \neq 0$.*

PREUVE: On considère deux cas, selon que le méridien m_i est séparant ou pas:

1er cas. Le méridien m_i est séparant.

Considérons les deux régions complémentaires N_1 et N_2 , découpées par le disque méridien bordé par m_i ; l'une de ces deux régions, N_1 , contient une composante de λ .

Si le bord de N_1 est incompressible, nécessairement, puisque la variété N est un grand bretzel, l'autre région N_2 a un bord compressible. On peut alors construire un méridien μ ayant les propriétés voulues, en faisant la somme connexe le long d'un arc plongé dans leur complémentaire, soit de deux méridiens de N_2 séparants, soit de deux copies parallèles d'un même méridien non-séparant, selon qu'il existe ou non des méridiens non-séparants dans N_2 .

Lorsque le bord de N_1 est compressible, on traite d'abord le cas où N_1 n'est pas un tore solide: on peut alors plonger dans la surface S un pantalon (ie un disque à deux trous), de sorte qu'une composante de son bord soit isotope à m_i et que chaque courbe du bord soit dans M . En faisant la somme connexe des deux disques méridiens bordés par les deux courbes du bord distinctes de m_i le long d'un arc convenablement choisi, on obtient un disque méridien μ dont le bord a les propriétés voulues. Si la composante N_1 est un tore solide, d'après l'hypothèse, la composante N_2 a une composante du bord compressible; on construit alors la courbe μ à partir de deux disques méridiens non isotopes contenus dans N_2 . en effectuant une opération de somme connexe comme précédemment.

2e cas. Le méridien m_i est non séparant.

On peut alors décomposer la variété N comme somme connexe le long du bord d'un tore solide N_1 et d'une variété N_2 , de sorte que la courbe, bord du disque de somme connexe ait un nombre d'intersection non nul avec λ . Comme par hypothèse la variété N_2 est à bord compressible, on construit comme précédemment à partir de deux disques méridiens

contenus dans N_2 et non isotopes un disque méridien dont le bord μ a les propriétés cherchées.

On conclut, une fois le disque μ construit, par le même argument que dans [Ma]: pour un entier n suffisamment grand la courbe $\beta = \tau_{m_i}^n(\mu)$ est proche de m_i dans $PML(S)$. Comme le nombre d'intersection $i(\beta, \lambda)$ n'est pas nul, de même $\tau_{\beta}^k(\lambda)$ est proche de β , pour un entier k suffisamment grand et donc aussi, proche de m_i .

Nous prouvons maintenant la connexité du fermé M' : il suffit pour cela de montrer que deux éléments de M peuvent être joints par un chemin dans M' . Soient m et m' deux éléments de M et raisonnons par récurrence sur le nombre d'intersection $i(m, m')$.

Si $i(m, m') = 0$, le chemin $tm + (1 - t)m'$, pour $t \in [0, 1]$, est contenu dans M' : en effet, le raisonnement utilisé dans la démonstration de l'affirmation 1.1.1 fournit une courbe m'' de M , telle que chacun des nombres d'intersection $i(m, m'')$ et $i(m', m'')$ n'est pas nul. Alors, pour une suite (n, n') convenablement choisie, la suite de courbes de M $\tau_m^n \circ \tau_{m'}^{n'}(m'')$ converge dans $PML(S)$ vers un point $tm + (1 - t)m'$ donné à l'avance. Supposons maintenant $i(m, m') \neq 0$, on peut alors construire, en considérant les intersections des disques méridiens bordés par m et par m' , une courbe n de M , disjointe de m et telle que $i(m', n) < i(m', m)$. D'après le cas considéré ci-dessus, et l'hypothèse de récurrence, on peut joindre m et m' par un chemin, composé d'un chemin entre m et n , et d'un chemin entre n et m' . \square

Remarque 1.2. Dans le cas des petits bretzels creux, la proposition 1.1 est fausse.

En effet, si N est difféomorphe à la somme connexe de deux surfaces épaissies, l'ensemble M est réduit à une seule multicourbe, correspondant au bord du méridien de somme connexe. C'est un fermé invariant minimal pour le groupe $Mod(N)$, sans en être l'ensemble limite; toutefois, c'est l'ensemble limite pour l'action du groupe $Mod^0(N)$, qui est engendré dans ce cas par le twist de Dehn autour de cette courbe.

Lorsque le bretzel considéré est difféomorphe à la somme connexe d'un tore solide et d'une surface épaissie, il n'existe qu'un seul méridien non-séparant dans la variété N ; il est donc fixé par le groupe $Mod(N)$. Par contre, il existe une infinité de méridiens séparants, donc M' n'est pas réduit à une seule courbe.

Avant de continuer, nous avons besoin de donner quelques définitions.

Définition. Un *système admissible* est une collection α de courbes simples disjointes sur le bord de S , deux à deux non isotopes telle que lorsque N est homéomorphe à un bretzel, on a:

- (1) chaque composante de α appartient à M .

- (2) la variété obtenue en découpant M le long de la réunion de disques bordée par α est homéomorphe à une boule.

et lorsque N n'est pas homéomorphe à un bretzel plein,

- (1) soit α' la réunion des composantes de α qui appartiennent à M ; on demande que la variété obtenue en découpant N le long des disques bordés par les composantes de α' soit homéomorphe à une réunion de surfaces fermées épaissies.
- (2) les composantes de $\alpha' - \alpha$ induisent une décomposition en pantalons des surfaces ainsi obtenues.

Un *système admissible de méridiens* est l'ensemble des composantes d'un système admissible qui sont homotopes à 0.

Définition. Une lamination mesurée λ sera dite *en position tendue* relativement à un système admissible α lorsqu'il n'existe pas d'arc k proprement plongé dans S , disjoint de λ vérifiant chacune des conditions suivantes:

- (1) L'intérieur de k est disjoint de α et sa frontière est contenue dans une même composante α_i de α ;
- (2) l'arc k peut être homotopé dans N , mais pas dans S , à un arc contenu dans α_i par une homotopie fixant ses extrémités.

On aura besoin aussi d'une notion plus faible, celle de lamination λ , *en position prétendue* par rapport à un système admissible: on interdit alors la présence d'arcs *contenus dans* λ , vérifiant les deux conditions de la définition précédente et on demande à chaque feuille de la lamination λ d'intersecter au moins une composante de α .

Ces conditions garantissent déjà que les feuilles compactes d'une telle lamination λ ne sont pas homotopes à 0 dans le bretzel N . Par exemple, une composante d'une lamination en position tendue par rapport à un système admissible est en position prétendue par rapport au même système admissible.

On peut aussi définir de la même façon la notion de lamination en position prétendue par rapport à une courbe simple m , ou par rapport à un système admissible de méridiens.

Définition. Soit O l'ouvert de $PML(S)$ défini, lorsque le bretzel N n'est pas homéomorphe à une somme connexe de deux surfaces épaissies, comme le complémentaire de M'' . Lorsque le bretzel N est homéomorphe à une somme connexe le long du bord de deux surfaces épaissies, on définit O comme les laminations λ qui ont un nombre d'intersection non nul avec tout élément de M'' . Puisque M'' est fermé, l'ensemble O ainsi défini est ouvert dans $PML(S)$.

THÉORÈME 1.3. *Pour toute lamination λ contenue dans O , il existe un système admissible par rapport auquel λ est en position tendue.*

PREUVE: Raisonnons par l'absurde. Soit α un système admissible; on peut alors trouver une composante α_i de α et un arc k , disjoint de λ vérifiant les deux conditions intervenant dans la définition d'une lamination tendue.

Considérons les deux courbes obtenues en recollant l'arc k avec chacun des arcs délimités par ∂k sur α_i ; d'après les hypothèses vérifiées par l'arc k , chacune de ces deux courbes, α'_i et α''_i n'est pas homotope à 0 sur S .

Si la courbe α_i appartient à M , il en est de même des deux courbes α'_i et α''_i ; si on remplace dans le système α la courbe α_i par l'une des deux courbes α'_i ou α''_i , on obtient de nouveau un système admissible α' .

Lorsque la courbe α_i n'appartient pas à M , la collection de courbes obtenues à partir de α en remplaçant α_i par celle des deux courbes α'_i ou α''_i qui n'appartient pas à M , on obtient un nouveau système admissible α' .

AFFIRMATION 1.3.1. *Dans les deux cas, le nombre d'intersection de λ avec la lamination α a strictement diminué durant cette modification.*

PREUVE: En effet, si la courbe modifiée α_i appartient à M , le nombre d'intersection de λ avec les deux courbes α'_i ou α''_i est non nul, car ces deux courbes sont aussi dans M .

Lorsque la courbe α_i n'est pas dans M , la courbe α'_i a aussi un nombre d'intersection non nul avec λ . C'est une conséquence directe de la définition de O si le bretzel N est homéomorphe à la somme connexe de deux surfaces épaissies. Dans les autres cas, c'est une conséquence de la définition de O et du lemme suivant appliqué à la courbe α'_i .

LEMME 1.3.2. *Si le complémentaire sur la surface S d'une lamination mesurée et connexe μ contient ou bien deux courbes de M non isotopes et séparantes ou bien une courbe de M non séparante, alors la lamination μ appartient à M' .*

PREUVE: Lorsque le complémentaire de μ contient deux courbes séparantes, on se ramène d'abord au cas où la lamination μ est contenue dans une composante du complémentaire de ces deux courbes (quitte à changer celles-ci).

La courbe obtenue par chirurgie de ces deux courbes le long d'un arc appartient toujours à M . Il suffit donc de choisir cet arc suffisamment proche de μ pour que la courbe obtenue soit une approximation de μ . Le cas où le complémentaire de μ contient une courbe non-séparante dans M se traite de la même façon. □

Ceci termine la preuve de l'affirmation 1.3.1. □

En reiterant la construction précédente, on obtient une suite de systèmes admissibles (α_j) telle que les nombres d'intersection $i(\alpha_j, \lambda)$ for-

ment une suite strictement décroissante. Soit β_j la réunion des courbes de M contenues dans α_j .

Remarquons que les nombres d'intersection $i(\beta_j, \lambda)$ sont bornés par une constante indépendante de j .

Si la suite (β_j) n'est pas éventuellement constante, la suite des longueurs homotopiques $l(\beta_j)$ n'est pas bornée; on peut donc supposer quitte à extraire une sous-suite que la suite (β_j) converge projectivement vers une lamination $\beta \in M'$, telle que $i(\beta, \lambda) = 0$; ceci contredit l'appartenance de λ à O .

Si la suite (β_j) est éventuellement constante, il existe une suite de courbes $\gamma_j \in \alpha_j$ contenues dans une région complémentaire de β_j , dont les longueurs homotopiques tendent vers l'infini et telle que les nombres d'intersection $i(\gamma_j, \lambda)$ forment une suite bornée supérieurement; ces courbes γ_j , quitte à extraire une sous-suite, convergent vers une lamination γ , contenue dans une région complémentaire de β_j , dont le nombre d'intersection avec λ est nul. En appliquant le lemme 1.3.2 à la lamination γ , on contredit alors l'appartenance de λ à O .

Ceci termine la preuve du théorème 1.3. □

Nous allons maintenant montrer que l'action du groupe $Mod(N)$ sur l'ouvert O est proprement discontinue.

Soit α un système admissible. On prolonge α en une collection finie α' de courbes simples, telle que α' remplit la surface S , c'est-à-dire telle que

$$\forall \lambda \in PML(S), \exists \alpha'_i \in \alpha', i(\lambda, \alpha'_i) > 0.$$

Appelons une telle collection de courbes un *système complet*.

On définit le nombre d'intersection $i(\lambda, \alpha')$ d'une lamination λ avec le système complet α' comme la somme des nombres d'intersection de λ avec les différents éléments de α' .

Définition. Si α' est un système complet on définit $D(\alpha')$ comme l'ensemble des laminations λ contenues dans O telles que, pour tout difféomorphisme $\phi \in Mod(N)$, on a l'inégalité: $i(\lambda, \alpha') \leq i(\lambda, \phi(\alpha'))$.

PROPOSITION 1.4. *Soit α' un système complet; alors $D(\alpha')$ est un domaine fondamental pour l'action de $Mod(N)$ sur O , au sens que tout compact de O ne rencontre qu'un nombre fini de translatés de $D(\alpha')$ et que ces translatés recouvrent l'ouvert O .*

PREUVE: On montre tout d'abord qu'une lamination arbitraire λ de O appartient à un ensemble $D(\phi(\alpha')) = \phi(D(\alpha'))$ pour un certain difféomorphisme $\phi \in Mod(N)$.

Raisonnons par l'absurde; il existe alors une suite de difféomorphismes ϕ_i telle que la suite des nombres d'intersection $i(\lambda, \phi_i(\alpha'))$ est strictement

décroissante. Puisque la collection de courbes α' forme un système complet, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isotopie de difféomorphismes qui la stabilise.

Soit β la collection de courbes du système admissible α qui sont contenues dans M . Si la suite $(\phi_i(\beta))$ n'est pas éventuellement constante, elle converge vers une lamination appartenant à M' dont le nombre d'intersection avec λ est nul. Ceci contredit l'appartenance de λ à l'ouvert O .

Si la suite $(\phi_i(\beta))$ est éventuellement constante, on peut choisir, quitte à extraire une sous-suite, une courbe $\gamma \in \alpha'$ telle que la suite des nombres d'intersection $i(\phi_i(\gamma), \lambda)$ soit bornée supérieurement et que les courbes $\phi_i(\gamma)$ aient une longueur strictement croissante. Une valeur d'adhérence dans $PML(S)$ de cette suite est une lamination dont le nombre d'intersection avec λ est nul et qui est contenue dans le complémentaire sur la surface S des courbes $\phi_i(\beta)$. On contredit alors de la même façon que dans la démonstration du théorème 1.3, l'appartenance de λ à l'ouvert O .

On démontre maintenant qu'un compact de O ne rencontre qu'un nombre fini d'ensembles $\phi(D(\alpha')) = D(\phi(\alpha'))$.

Raisonnons par l'absurde: il existe alors une suite de laminations (λ_i) qui converge vers une lamination $\lambda \in O$, et une suite infinie de difféomorphismes $\phi_i \in \text{Mod}(N)$, tels que $\lambda_i \in D(\phi_i(\alpha'))$.

Par définition de $D(\phi_i(\alpha'))$, le nombre d'intersection $i(\lambda_i, \phi_i(\alpha'))$ est inférieur à $i(\lambda_i, \alpha')$. D'après la convergence de la suite (λ_i) vers λ , ces derniers nombres d'intersection sont bornés par une même constante: on conclut comme dans le raisonnement précédent. \square

COROLLAIRE 1.5. *L'action de $\text{Mod}(N)$ sur l'ouvert O est proprement discontinue.*

\square

Dans la suite nous aurons besoin d'une version relative du théorème 1.3. Pour éviter des définitions trop lourdes, nous n'énonçons qu'une version faible de cette généralisation mais suffisante pour les applications que nous en ferons; la démonstration est la même que celle du théorème 1.3.

Considérons une famille de courbes simples γ dans la surface S , non-homotopes à 0 dans N , et non parallèles sur S .

THÉORÈME 1.6. *Soit λ une lamination minimale, connexe, contenue dans une région compressible R du complémentaire de γ . Alors, ou bien la lamination λ a même support qu'une limite de méridiens contenus dans R , ou bien, il existe un méridien contenu dans R par rapport auquel la lamination λ est en position prétendue.*

\square

Du corollaire 1.5, il résulte que le quotient de l'ouvert O par l'action du groupe $Mod(N)$ est un espace séparé. En fait, nous serons surtout intéressés par le quotient de O par l'action du sous-groupe $Mod^0(N)$. Sur cette action, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 1.7. *Le groupe $Mod^0(N)$ agit librement sur l'ouvert O . L'espace quotient $O/Mod^0(N) = L(N)$ est donc une variété topologique séparée de dimension $6g - 7$ sur laquelle le groupe $Mod(N)/Mod^0(N)$ agit proprement discontinument.*

PREUVE: D'après le corollaire 1.5, un élément de $Mod(N)$ qui a un point fixe dans O est nécessairement d'ordre fini; il suffit donc de voir que le groupe $Mod^0(N)$ est sans torsion.

Soit ϕ un difféomorphisme représentant un élément d'ordre fini de $Mod^0(N)$ et soit Φ un prolongement de ϕ au bretzel creux N . La restriction de Φ à chaque composante du bord de N a donc une puissance isotope à l'identité. On peut isotoper Φ de sorte que sa restriction à ∂N soit d'ordre fini. Considérons l'espace $G(N)$ des métriques hyperboliques géométriquement finies dans l'intérieur du bretzel N , modulo isotopies. D'après la théorie d'Ahlfors-Bers, $G(N)$ est homéomorphe à $T(\partial N)$, l'espace de Teichmüller du bord de N . Le groupe des difféotopies de N agit sur $G(N)$ et l'action d'un difféomorphisme Φ sur l'espace $G(N)$ est l'action habituelle sur l'espace de Teichmüller de la restriction $\Phi|_N$. Dans notre cas, cette restriction étant d'ordre fini, elle a un point fixe dans $T(\partial N)$, et donc le difféomorphisme Φ a un point fixe dans l'espace $G(N)$. On en déduit une métrique hyperbolique dans l'intérieur de N pour laquelle le difféomorphisme Φ est isotope à une isométrie. Mais, comme Φ induit l'identité sur le groupe fondamental de N , cette isométrie est nécessairement l'identité. Ainsi, Φ est isotope à l'identité et donc ϕ aussi. □

Lorsque le groupe fondamental du bretzel étudié est un groupe libre un théorème de Nielsen dit que le groupe $Mod(N)/Mod^0(N)$ est isomorphe au groupe des automorphismes extérieurs $Out(\pi_1(N))$ du groupe fondamental de la variété N ; en général, on peut seulement dire que le premier groupe est d'indice fini dans le second ([McCMi])

Du fait de l'existence de l'action proprement discontinue du groupe infini $Mod(N)/Mod^0(N)$, la variété $L(N)$ est loin d'être compacte. Nous décrirons dans les chapitres suivants une compactification naturelle et essaierons de donner une interprétation géométrique des points à l'infini.

Il sera utile dans la suite d'avoir un critère permettant de reconnaître les laminations qui sont des limites de méridiens; il semble toutefois difficile d'obtenir un critère général, lorsque la topologie considérée est celle de l'espace des laminations mesurées. Si on s'intéresse à la topologie de Hausdorff, il existe un critère, annoncé par A.Casson (cf [CL] pour une

preuve dans un cas particulier) qui donne une caractérisation de ces limites en termes de la lamination relevée dans un revêtement particulier de la surface S que nous définissons maintenant.

Définition. On notera S' le revêtement planaire de la surface S dont le groupe fondamental est le noyau de l'application de $\pi_1(S)$ dans $\pi_1(N)$.

On considèrera dans la suite le revêtement S' plongé dans la sphère S^2 de la façon suivante. Uniformisons l'intérieur de N par un groupe géométriquement fini G sans éléments paraboliques; alors le revêtement universel de N s'identifie au complémentaire de l'ensemble limite du groupe G dans la sphère à l'infini de l'espace hyperbolique \mathbf{H}^3 . La préimage de la surface S dans ce revêtement du bretzel N s'identifie alors naturellement à S' .

Dans le cas où le bretzel N a pour groupe fondamental un groupe libre, ce revêtement est homéomorphe au complémentaire d'un ensemble de Cantor dans la sphère.

Le critère de Casson dit qu'une lamination est une limite pour la topologie de Hausdorff d'une suite de méridiens si et seulement si sa préimage dans le revêtement planaire S' possède une feuille homoclinique.

Définition. Une feuille de la lamination $\tilde{\lambda}$, préimage de la lamination λ dans le revêtement S' est dite *homoclinique* lorsque ses deux bouts ont des fermetures (dans la compactification de S' associée à son plongement dans la sphère) qui s'intersectent.

Par exemple, une feuille compacte de $\tilde{\lambda}$ est toujours homoclinique.

Nous allons démontrer une version faible du résultat de Casson, qui est la présence d'une feuille "faiblement homoclinique", notion que nous définissons maintenant.

Définition. Supposons le revêtement S' muni d'une métrique hyperbolique relevant une métrique hyperbolique sur la surface S . Une feuille de la lamination $\tilde{\lambda}$ est dite *faiblement homoclinique* lorsqu'elle contient deux suites de points (x_i) et (y_i) tels que la distance entre les points x_i et y_i mesurée sur la feuille tend vers l'infini avec i , tandis que leur distance dans la surface S' reste bornée: cette définition est indépendante du choix de la métrique sur la surface S .

THÉORÈME 1.8. *Soit λ une lamination géodésique de S qui est une limite de méridiens pour la topologie de Hausdorff. Alors la lamination $\tilde{\lambda}$, préimage de la lamination λ dans le revêtement planaire S' possède une feuille faiblement homoclinique: de plus cette feuille peut être choisie isolée d'un côté.*

PREUVE: Munissons le revêtement planaire S' d'une métrique relevant une métrique hyperbolique sur la surface S .

Considérons une suite de méridiens (m_i) qui converge vers λ pour la topologie de Hausdorff; chacune de ces courbes se relève dans le revêtement S' en une courbe fermée.

On distingue deux cas:

1er cas. Le diamètre des relevés des courbes m_i est borné supérieurement.

Comme l'action du groupe $\pi_1(N)$ a un domaine fondamental compact dans S' , on peut alors choisir des relevés m'_i contenus dans un même compact K de S' . Alors la limite des courbes m'_i pour la topologie de Hausdorff est une lamination contenue dans K , qui contient une feuille du type cherché. Comme cette limite des courbes fermées m'_i est contenue dans la lamination $\tilde{\lambda}$, le théorème est démontré dans ce cas.

2e cas. Il existe une sous-suite, encore notée m_i , telle que le diamètre des relevés m'_i tend vers l'infini avec i .

On démontre tout d'abord le lemme suivant, sous l'hypothèse que la lamination $\tilde{\lambda}$ ne possède pas de feuille contenue dans un compact de S' , auquel cas le théorème 1.8 est automatiquement vérifié.

LEMME 1.8.1. *Sous l'hypothèse précédente, pour tout entier n , il existe une constante $c(n)$ et, pour i suffisamment grand un arc $k_i \subset m'_i$ tels que:*

- (1) *la distance dans S' entre les extrémités de k_i est inférieure à une constante indépendante de i ;*
- (2) *la longueur de l'arc k_i est comprise entre n et $c(n)$.*

PREUVE: Considérons une famille de méridiens pour le bretzel creux N , deux à deux non isotopes et de cardinalité maximale; cette dernière hypothèse entraîne que le complémentaire sur la surface S de cette collection de courbes est une réunion de pantalons et de surfaces avec une seule composante de bord. Notons \tilde{m} la préimage dans S' de cette collection de courbes.

Soient deux points a et b de m'_i dont la distance dans S' est égale au diamètre de m'_i . D'après le choix du système m , les courbes m'_i intersectent \tilde{m} , pour un entier i suffisamment grand.

Puisque les composantes de \tilde{m} disconnectent S' , on peut en trouver une qui sépare les points a et b ; elle découpe m'_i en une réunion d'arcs dont l'un, k_i , contient le point b , de sorte que la distance, mesurée sur S' du point b à la frontière de k_i soit comprise entre n et $50n$, ceci pour un entier i suffisamment grand. D'après la propriété de a et b de réaliser le diamètre de m'_i , le diamètre (mesuré dans S') de cet arc est inférieur à $100n$. Supposons que la longueur des arcs k_i tende vers l'infini avec i . Alors, après application d'un élément du groupe, on peut supposer qu'ils sont contenus dans un compact fixe (de diamètre $100n$) de la surface S' :

ils convergent alors vers une lamination géodésique à support contenu dans ce compact, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut donc trouver une constante $c(n)$ comme dans l'énoncé du lemme. \square

On peut maintenant supposer quitte à extraire une sous-suite, que la suite des projections des arcs k_i dans S converge vers un arc contenu dans une feuille de λ , dont la longueur est comprise entre n et $c(n)$; on peut aussi supposer que cet arc est contenu dans une feuille isolée d'un côté. Comme ces feuilles sont en nombre fini (cf [Le]), quitte à extraire une sous-suite, les arcs ainsi obtenus sont contenus dans une même feuille l . Une feuille de $\tilde{\lambda}$ relevant cette feuille est alors faiblement homoclinique: les extrémités x_i et y_i des relevés de ces arcs vérifient en effet les conditions de la définition.

Ceci termine la preuve du théorème 1.8. \square

Nous allons déduire du théorème précédent une propriété des laminations de M' qui sont en position prétendue par rapport à un système admissible de méridiens.

Commençons par une propriété générale des laminations en position prétendue par rapport à un système admissible de méridiens.

LEMME 1.9. *Soit λ une lamination mesurée sur la surface S , en position prétendue par rapport à un méridien α et soit l une feuille de cette lamination. Alors, dans le revêtement planaire S' , chaque relevé \tilde{l} de la feuille l n'est pas faiblement homoclinique et chaque demi-feuille contenue dans \tilde{l} a un bout bien défini dans l'ensemble limite $K = \bar{S}' - S'$.*

PREUVE: La feuille \tilde{l} intersecte au plus une fois chaque relevé de m puisque λ est en position prétendue par rapport au système admissible m . Considérons l'ensemble $(m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des relevés de la courbe m qui intersectent \tilde{l} , ensemble que nous supposons indexé par l'ordre le long de la feuille \tilde{l} , une orientation sur celle-ci étant choisie une fois pour toutes. La distance entre deux points d'intersection successifs de la feuille \tilde{l} avec les relevés m_i est comprise entre deux constantes non nulles: ceci entraîne que la feuille \tilde{l} n'est pas faiblement homoclinique.

D'autre part, pour i positif (resp. négatif), chaque courbe m_i dans \bar{S}' borde un fermé K_i de \bar{S}' de sorte que deux quelconques des fermés K_i associés aux différentes composantes m_i soient inclus l'un dans l'autre, et que le diamètre des K_i pour la distance sphérique de la sphère S^2 tende vers 0 lorsque i tend vers l'infini. La feuille \tilde{l} coupe exactement une fois la frontière de ce fermé; d'après le théorème des segments emboîtés, chaque demi-feuille contenue dans \tilde{l} a donc un bout bien défini dans l'ensemble limite $K = \bar{S}' - S'$. \square

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant qui concerne les surfaces compactes incompressibles contenues dans le bord d'un bretzel creux.

LEMME 1.10. *Soit R une surface compacte incompressible contenue dans la composante S du bord du bretzel creux N . Munissons la surface R d'une métrique hyperbolique à bord géodésique et soit \tilde{R} le revêtement universel de R , que l'on complète de la façon habituelle en un disque fermé $\bar{\tilde{R}}$. Alors, chaque composante de la préimage de R dans S' est un disque dont la fermeture est homéomorphe à $\bar{\tilde{R}}$ de façon équivariante.*

PREUVE: Puisque la surface R est incompressible dans le bretzel creux N , pour chaque composante de la préimage de R dans S' , l'inclusion de R dans S se relève en un homéomorphisme f de \tilde{R} sur cette composante.

Soit x un point situé sur la surface \tilde{R} ; pour établir que f s'étend en une application continue, il nous suffit de montrer d'après la compacité de R , que sa restriction à l'orbite de x s'étend en une application continue.

Munissons le groupe $G = \pi_1(N)$ de la distance par mots associée à un système de générateurs particuliers. Considérons la distance induite sur le sous-groupe $G' = \pi_1(R)$, et munissons l'orbite du point x dans \tilde{R} de cette distance, après l'identification canonique de $G'(x)$ avec G' .

AFFIRMATION 1.10.1. *La distance d' sur $G'(x)$ est quasi-isométrique à la distance induite par une métrique hyperbolique sur \tilde{R} .*

PREUVE: Considérons une représentation géométriquement finie sans éléments paraboliques du groupe G . Alors la distance par mots du groupe G est quasi-isométrique à la distance d_H induite par la distance hyperbolique (de \mathbf{H}^3) sur l'orbite d'un point quelconque, cette orbite étant identifiée avec G .

Si G est géométriquement fini, le sous-groupe G' l'est aussi. En effet, c'est un groupe libre et son ensemble limite est totalement discontinu puisqu'il ne contient pas de paraboliques. Un théorème de Maskit (cf [Ma]) dit alors que G' est géométriquement fini.

On sait que la distance induite par d_H sur l'orbite $G'(x)$ est quasi-isométrique à la distance par mots sur G' associée à un système de générateurs quelconque de G' . Donc la distance d' est quasi-isométrique à la distance d sur l'orbite $G'(f(x))$ induite par une métrique hyperbolique sur R .

□

D'après l'affirmation précédente, l'application f induit une quasi-isométrie G' -équivariante entre les deux espaces métriques $(G'(x), d')$ et $(G'(f(x)), d)$. Observons maintenant que si deux points a et b de l'orbite $G'(f(x))$ sont proches pour la distance usuelle de la sphère S^2 de deux points distincts α et β de $K = \bar{S}' - S'$, alors la géodésique de la distance d qui les joint rencontre un compact de S' qui ne dépend que des points α et β .

Pour établir que l'application f s'étend en une application continue, il suffit de raisonner par l'absurde: la remarque précédente contredit alors la propriété de l'application f .

L'injectivité de l'application obtenue se démontre de la même façon.

Remarquons que la preuve de l'existence d'une extension pour l'application f montre en fait le résultat suivant: si on munit le disque $f(\tilde{R})$ de la distance associée à une métrique sur S' relevant une métrique hyperbolique de S , et le disque \tilde{R} de la métrique associée à une métrique hyperbolique sur R , alors l'application f induit une quasi-isométrie entre ces deux espaces métriques.

□

Définition. Considérons le revêtement planaire S' muni d'une métrique hyperbolique relevant une métrique hyperbolique sur la surface S . Deux demi-géodésiques de S' sont dites *asymptotes*, lorsque, pour un certain choix d'origine sur chacune d'entr'elles, la distance entre leurs paramétrisations respectives par longueur d'arc tend vers 0.

Remarquons que puisque le revêtement S' n'est pas simplement connexe, deux demi-géodésiques de S' peuvent avoir un bout en commun dans K sans être asymptotes pour autant.

La conséquence principale que nous allons tirer du théorème de Casson est la proposition suivante.

PROPOSITION 1.12. *Si une lamination λ de M' est en position prétendue par rapport à un système admissible de méridiens, au moins l'une des trois conditions suivantes est vérifiée:*

- (1) *l'une de ses régions complémentaires de la lamination λ sur la surface S est compressible;*
- (2) *il existe deux feuilles de la lamination $\tilde{\lambda}$, préimage de λ dans le revêtement planaire S' , qui ne sont pas asymptotes dans le revêtement planaire S' mais qui ont un bout en commun dans $K = \tilde{S}' - S'$;*
- (3) *le bretzel creux N est homéomorphe à un produit $\Sigma \times [0, 1]$ d'une surface compacte orientable à bord Σ par un intervalle, de sorte que la lamination λ soit isotope à une lamination minimale contenue dans $\Sigma \times 0$.*

Le dernier cas décrit ci-dessus entraîne bien entendu que le groupe fondamental du bretzel est un groupe libre. Il est toutefois difficile d'imaginer comment il pourrait avoir lieu.

PREUVE: On suppose que la lamination λ a ses régions complémentaires incompressibles, sinon la proposition est vérifiée.

Soit (m_i) une suite de méridiens qui converge vers la lamination λ dans $PML(S)$; quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que

la suite (m_i) converge pour la topologie géométrique vers une lamination λ' . Le support de λ est alors contenu dans λ' .

D'après le théorème 1.8, la préimage $\tilde{\lambda}'$ de la lamination λ' dans le revêtement planaire S' contient une feuille faiblement homoclinique \tilde{l} .

D'après le lemme 1.9, la feuille \tilde{l} n'est pas contenue dans la préimage $\tilde{\lambda}$ de la lamination λ . Soit l la projection de la feuille \tilde{l} dans la surface S .

La feuille l est contenue dans une région complémentaire R de la lamination λ . Le complété de la surface R est une surface hyperbolique R' à bord géodésique de volume fini, homéomorphe à la réunion d'une surface compacte Q et de pointes recollées sur le bord de Q ; on peut supposer la surface Q contenue avec un bord géodésique dans le complété R' de la surface R .

D'après le lemme 1.11, la feuille l ne peut être entièrement contenue dans la surface Q . En effet, dans le revêtement universel de la surface Q , la feuille l se relève en une géodésique; donc la feuille \tilde{l} est une quasi-géodésique pour la métrique induite par la métrique de S' sur la préimage de Q . En particulier, cette feuille ne peut être faiblement homoclinique et a ses deux bouts distincts dans K .

AFFIRMATION 1.12.1. Si les deux bouts de la feuille l tendent vers des pointes de R' ou des composantes de bord de R' , alors on est dans la situation 2 de la proposition 1.12.

PREUVE: Supposons dans un premier temps que les deux bouts sont contenus dans des pointes de R' . Dans le revêtement planaire S' , les deux bouts de la feuille \tilde{l} sont donc contenus dans les préimages de ces pointes. Ces deux préimages sont distinctes puisque la surface R est incompressible. Le couple de feuilles de $\tilde{\lambda}$ formé d'une feuille dans la frontière de chacune de ces deux pointes vérifie la deuxième conclusion de la proposition 1.12: ces deux feuilles ont en commun le bout de \tilde{l} et ne sont pas asymptotes sur S' .

Si la feuille l a un bout dans une pointe de R' et l'autre qui spirale sur une composante de bord de R' , le bout de la feuille \tilde{l} est fixe par un élément du groupe G , disons g ; l'autre bout est asymptote dans S' à une feuille f de $\tilde{\lambda}$. Les deux feuilles f et $g(f)$ vérifient la deuxième conclusion de la proposition 1.12. □

On peut donc supposer qu'un seul bout de la feuille l tend vers une pointe de R' , tandis que l'autre reste dans Q , à une distance non-nulle de ∂Q . Soit μ la composante minimale de la lamination λ adhérente au bout de l . On définit la surface $S(\mu)$ comme la plus petite surface à bord contenue dans S , contenant μ dans son intérieur. On peut supposer que cette surface a un intérieur disjoint de celui de Q et qu'elle partage avec cette dernière au moins une courbe du bord, soit γ .

AFFIRMATION 1.12.2. *Si la surface $S(\mu)$ est compressible dans N , alors la deuxième conclusion de la proposition 1.11 est vérifiée.*

PREUVE: En effet, si la lamination μ a un nombre d'intersection nul avec une lamination limite de méridiens contenus dans $S(\mu)$, le théorème 1.8 fournit une feuille homoclinique dans une région complémentaire de μ dans $S(\mu)$. Le raisonnement précédent montre qu'alors, la deuxième conclusion de la proposition 1.12 est vérifiée.

Sinon, d'après le théorème 1.6, on peut trouver un méridien contenu dans $S(\mu)$ par rapport auquel la lamination μ est en position tendue. La feuille l , asymptote à une feuille de μ est aussi en position tendue par rapport ce méridien; d'après le lemme 1.9, cette feuille ne peut être faiblement homoclinique. \square

On peut donc supposer la surface $S(\mu)$ incompressible dans N .

Notons \tilde{Q} , $\tilde{S}(\mu)$ les fermetures des relevés des surfaces Q et $S(\mu)$ qui contiennent l'un des bouts de la feuille \tilde{l} . Les deux disques fermés ainsi définis (cf Lemme 1.11) sont d'intérieurs disjoints mais leurs frontières s'intersectent au moins en un arc $\tilde{\gamma}$, fermeture d'un relevé de la courbe γ , et en le bout de la feuille homoclinique \tilde{l} . Remarquons que d'après le lemme 1.11, ce dernier bout n'est pas contenu dans $\tilde{\gamma}$, puisque une demi-feuille de l est à une distance strictement positive de γ sur la surface Q .

AFFIRMATION 1.12.3. *Le fermé $F = \partial\tilde{S}(\mu) \cap \tilde{Q}$ n'est pas un intervalle.*

PREUVE: Raisonnons par l'absurde; il existe alors un élément h du groupe Γ , stabilisateur de $\tilde{S}(\mu)$, tel que l'intervalle $h(F)$ soit strictement inclus dans F . On en déduit que le disque $h(\tilde{Q})$ est contenu strictement dans \tilde{Q} , ce qui est impossible. \square

AFFIRMATION 1.12.4. $F = \partial\tilde{S}(\mu) = \partial\tilde{Q}$.

PREUVE: Raisonnons par l'absurde et supposons le fermé F propre et non connexe dans les deux courbes de Jordan considérées.

Soit $c(F)$ l'enveloppe convexe de F dans la surface $\tilde{S}(\mu)$, celle-ci étant identifiée avec le revêtement universel de la surface $S(\mu)$, munie d'une métrique hyperbolique à bord géodésique. Dire que le fermé F est propre dans la frontière de $\tilde{S}(\mu)$ revient à dire que l'enveloppe convexe $c(F)$ est propre dans $\tilde{S}(\mu)$.

On démontre dans un premier temps que les translatés de $c(F)$ par le groupe Γ , stabilisateur de la surface $\tilde{S}(\mu)$ sont d'intérieurs disjoints. Dans le cas contraire, en effet, on trouverait deux arcs fermés proprement plongés dans $\tilde{S}(\mu)$, qui se rencontrent transversalement en un point et dont les extrémités sont dans les frontières de deux relevés distincts de la

surface Q . On en déduirait donc deux courbes de Jordan plongées dans la sphère S^2 se rencontrant transversalement en un point, ce qui est absurde.

Ceci entraîne en particulier que chaque courbe dans la frontière de $c(F)$ a une image sur la surface $S(\mu)$ qui est une géodésique sans points doubles. Soit δ une géodésique dans la frontière de $c(F)$. Lorsque cette géodésique a une projection sur la surface $S(\mu)$ qui intersecte la lamination μ , alors dans la surface $\tilde{S}(\mu)$, la demi-feuille de \tilde{l} contenue dans $S(\mu)$ intersecte une infinité de translatés de δ . Si le diamètre de ces translatés dans \tilde{S}' tendait pas vers 0, la demi-feuille \tilde{l} ne pourrait pas avoir son bout contenu dans F , ce qui est impossible. Si le diamètre de ces translatés a une longueur bornée inférieurement, puisque $\gamma(F) = \gamma(\tilde{Q}) \cap S(\mu)$ pour $\gamma \in \Gamma$, on en déduit une suite infinie de translatés de la région \tilde{Q} dont le diamètre est borné inférieurement; cette suite de translatés doit rencontrer un compact fixe de \tilde{S}' , ce qui est impossible.

Donc la géodésique δ a sa projection sur la surface $S(\mu)$ qui est ou bien disjointe de μ ou bien contenue dans μ . Cette projection ne peut être une courbe du bord de $S(\mu)$, car δ est contenue dans l'intérieur de $\tilde{S}(\mu)$. Donc puisque la lamination μ est minimale dans la surface $S(\mu)$, il existe une suite de translatés de δ par des éléments de Γ dont le diamètre a une longueur bornée inférieurement dans \tilde{S}' . Le raisonnement précédent permet de conclure. \square

Donc $F = \tilde{Q} \cap \tilde{S}(\mu)$. Le groupe fondamental Γ de la surface $S(\mu)$ se surjecte donc dans G , car aucun élément de G n'échange les composantes complémentaires de la courbe de Jordan F . D'après un théorème de Waldhausen ([Wa1]), il existe une décomposition de N en un produit $\Sigma \times [0, 1]$, telle que la composante $\Sigma \times 0$ s'identifie à $S(\mu)$. On est donc dans la troisième situation de la proposition 1.12.

Ceci termine la preuve de la proposition 1.12. \square

Dans le cas où la deuxième conclusion de la proposition est vérifiée, on peut légèrement améliorer le résultat pour obtenir deux feuilles distinctes de $\tilde{\lambda}$, ayant leurs deux bouts en commun. C'est le contenu du résultat qui suit, dans lequel la lamination λ n'est plus supposée appartenir à M' .

PROPOSITION 1.13. *Soit λ une lamination mesurée en position prétendue par rapport à un système admissible de méridiens α ; supposons que la lamination $\tilde{\lambda}$, préimage de λ dans le revêtement planaire S' , possède deux feuilles non asymptotes dans S' , mais qui ont un bout en commun dans le fermé $K = \tilde{S}' - S'$. Alors, il existe deux feuilles distinctes l_1 et l_2 de la lamination $\tilde{\lambda}$ qui ont leurs deux bouts en commun.*

PREUVE: D'après le lemme 1.9, chaque feuille de la lamination $\tilde{\lambda}$ a ses deux bouts bien définis et distincts dans l'ensemble limite $K = \tilde{S}' - S'$.

Soit $M(K)$, l'espace homéomorphe au complémentaire de la diagonale dans le produit $K \times K$ quotienté par l'involution canonique.

On définit une application "bout", e sur le support de $\tilde{\lambda}$ à valeurs dans $M(K)$ de la façon suivante: à un point on associe les bouts de la feuille de $\tilde{\lambda}$ qui passe par ce point.

LEMME 1.14. *Soit λ une lamination en position prétendue par rapport à un système admissible α . Alors, l'application e est continue lorsque le support de la lamination préimage $\tilde{\lambda}$ est équipé de la topologie induite de celle de S' .*

PREUVE: Soit \tilde{l} une feuille de $\tilde{\lambda}$. Un voisinage de ses bouts est le produit de deux voisinages définis dans la preuve du lemme 1.9. Un tel voisinage est délimité par la préimage d'une composante de α . Une feuille suffisamment proche de \tilde{l} dans S' , intersectera le même couple de préimages. Ses deux bouts seront donc dans le voisinage donné. \square

Revenons à la preuve de la proposition 1.13. Notons λ_1 et λ_2 les demi-feuilles de la lamination $\tilde{\lambda}$ qui ont un bout en commun, fournies par l'hypothèse.

Soit m une composante du système admissible α qui intersecte une infinité de fois la projection de λ_1 sur la surface S . Dans le revêtement planaire S' , les demi-feuilles λ_1 et λ_2 intersectent au bout d'un certain temps les mêmes relevés de m , $g_i(m)$.

Alors les feuilles $g_i^{-1}(\lambda_1)$ et $g_i^{-1}(\lambda_2)$ ont la propriété de rencontrer m et aussi d'avoir leurs bouts sont de plus en plus proches. On peut en extraire une sous-suite de sorte que les deux suites correspondantes convergent vers des feuilles de $\tilde{\lambda}$ qui auront leurs deux bouts en commun d'après le lemme 1.14.

Pour démontrer la proposition 1.13, il suffit de trouver une sous-suite telle que les deux feuilles limites soient différentes. Mais si une telle suite n'existait pas, les deux demi-feuilles λ_1 et λ_2 seraient asymptotes dans S' ce qui est interdit par l'hypothèse. \square

Nous aurons aussi besoin dans la suite d'une autre propriété des laminations de O , contenue dans la remarque suivante:

REMARQUE 1.15. *Soit λ une lamination mesurée appartenant à l'ouvert O ; alors, il n'existe pas d'anneau incompressible et incompressible vers le bord proprement plongé dans N , de sorte que son bord soit disjoint de λ .*

Soit l , une courbe simple tracée sur ∂N , disjointe de λ : alors la classe de conjugaison dans $\pi_1(N)$ correspondant à cette courbe est non-nulle et indivisible.

PREUVE: S'il existe un tel anneau, on peut considérer l'élément de $Mod(N)$ représentant le twist de Dehn le long de cet anneau. La suite de courbes obtenue en itérant par ce difféomorphisme une courbe de M dont le nombre d'intersection avec le bord de cet anneau est non nul converge

dans $PML(S)$ vers un élément de M' dont le support contient le bord de l'anneau de départ. Ceci est impossible car la lamination λ appartient à O .

Si l était homotope à 0, elle appartiendrait à M . Ceci est impossible puisqu'elle aurait un nombre d'intersection nul avec une lamination de l'ouvert O .

Supposons que la classe de conjugaison de $\pi_1(N)$ représentée par la courbe l soit non nulle et divisible. Il existe alors un anneau proprement immergé dans N , dont le groupe fondamental s'injecte, qui ne peut pas être homotopé dans ∂N , et dont le bord est contenu dans un voisinage régulier sur ∂N de la courbe l . D'après une version locale du théorème de l'anneau ([**Wa2**]), il existe aussi un anneau proprement plongé dans N vérifiant les mêmes propriétés.

C'est impossible d'après la première partie de la remarque 1.15. \square

2. Les surfaces plissées dans les bretzels creux

Dans l'étude des variétés hyperboliques de dimension trois dont le groupe fondamental n'est pas un produit libre, un outil fondamental introduit par Thurston a été celui des surfaces plissées (cf aussi [Bo] pour une notion légèrement différente, celle de surface hyperboliquement simpliciale). Nous allons ici analyser le comportement de ces surfaces dans une variété hyperbolique de dimension 3 N' dont le type d'homotopie est celui d'un bretzel creux. Lorsque N' est géométriquement finie, cette étude permettra d'associer à chaque lamination de O un fermé invariant du flot géodésique sur le fibré en droites $P^1(N')$.

Nous rappelons d'abord quelques définitions, en renvoyant à [CEG] et à [Thu1 §8] pour plus de détails.

Soit f une classe d'homotopie d'applications d'une surface S dans une variété de dimension trois N' , équipée d'une métrique hyperbolique complète. Une surface plissée dans la classe d'homotopie de f est la donnée d'une métrique hyperbolique σ sur la surface S et d'une application p de S dans N' homotope à f telle que :

- (1) l'image de tout chemin rectifiable de S par p est un chemin rectifiable de même longueur dans N' ;
- (2) tout point de S est contenu dans l'intérieur d'un arc géodésique de la métrique σ dont l'image par p est un arc géodésique de la variété N' .

On définit le lieu de plissage, comme l'ensemble des points de S contenus dans un seul arc géodésique de σ qui est envoyé isométriquement dans N' par p . On montre que c'est une lamination géodésique.

Dans les cas qui nous intéressent, la variété N' a le type d'homotopie de l'intérieur d'un bretzel creux N , la surface S est identifiée avec la composante compressible du bord de N , et l'application f est la composée de l'inclusion de S dans N et de l'équivalence d'homotopie de N avec N' .

Pour simplifier l'exposition, on demandera que le groupe fondamental de la variété N' ne contienne pas d'éléments paraboliques.

Soit λ le lieu de plissage d'une application plissée p de S dans N' . Du fait de l'existence de courbes qui sont essentielles sur S , mais homotopes à 0 dans N , le lieu de plissage λ doit vérifier certaines conditions.

Supposons par exemple qu'il existe une courbe simple m dans M qui peut être isotopée de sorte à être disjointe de λ : dans ce cas, la géodésique de la métrique σ , homotope à m , ou bien est disjointe de λ , ou bien coïncide avec une feuille de λ . Dans les deux cas, son image par f est une géodésique fermée de N' , ce qui est impossible si m est homotope à 0 dans N' . Une autre situation est décrite par le résultat suivant:

PROPOSITION 2.1. *Le lieu de plissage d'une application plissée ne peut pas être le support d'une lamination mesurée complète de M' .*

PREUVE: Raisonnons par l'absurde et soit λ une lamination mesurée complète dont le support est le lieu de plissage d'une application plissée; soient σ la métrique hyperbolique sur S et p l'application de S dans N' associées à cette application plissée. Considérons un réseau ferroviaire τ sur la surface S , qui porte la lamination λ ([Pa], [Thu1]). Comme la lamination λ est complète, un voisinage ouvert de λ dans $PML(S)$ est formé de laminations portées par τ ([Thu1], [Pa]). Par une construction décrite dans [Thu1] et dans [CEG, Lemme 5.3.10], quitte à raffiner le réseau τ on peut supposer que son image par p est une réunion d'arcs géodésiques qui se rencontrent en leurs extrémités en faisant un angle arbitrairement proche de π . Donc toutes les courbes portées par τ ont une image dans N' qui est géodésique par morceaux, avec des coins arbitrairement proches de π ; une telle courbe ne peut être homotope à 0 dans N' , car les bouts de l'un de ses relevés au revêtement universel \mathbf{H}^3 sont distincts (cf [Thu1], [CEG, Lemme 4.2.10]). Ceci contredit le fait que le réseau ferroviaire τ porte des courbes de M . \square

Jusqu'à présent, nous n'avons pas donné d'exemples de surfaces plissées. Tout d'abord, rappelons une définition.

Définition. Une lamination géodésique λ de la surface S est dite *réalisée* dans la variété N , lorsqu'il existe une application plissée (σ, p) telle que la lamination géodésique de la métrique σ représentant λ est envoyée par p de façon totalement géodésique dans N' .

PROPOSITION 2.2. *Soit γ une multi-courbe appartenant à O , alors γ est contenue dans le lieu de plissage d'une surface plissée dans la classe d'homotopie de l'inclusion de S dans N .*

L'énoncé ci-dessus contient une ambiguïté: celle d'identifier une multi-courbe γ avec son support. Toutefois ceci ne pose pas vraiment de problèmes du moment que, tant que les poids restent strictement positifs, le fait pour une multi-courbe d'appartenir à O est indépendant de la mesure transverse.

PREUVE: Toute lamination contenant une lamination appartenant à O est elle-même contenue dans O . On peut donc supposer que les régions complémentaires sur la surface S de la multi-courbe γ sont toutes homéomorphes à des pantalons.

Nous commençons par prolonger la lamination γ en une lamination γ' dont les régions complémentaires sont toutes homéomorphes à des triangles idéaux. Nous allons maintenant construire une application plissée qui réalise la lamination γ' . Pour cela on raisonne en deux temps, comme dans [CEG, Théorème 5.3.6].

On commence par homotoper l'application d'inclusion de S dans N' de sorte que les feuilles de γ' soient envoyées sur des géodésiques dans la variété N' . Comme les feuilles fermées de γ ne sont pas homotopes à 0 dans la variété N , et que le groupe fondamental de la variété N' ne contient pas d'éléments paraboliques, chaque composante de γ est homotope à une géodésique fermée de N' .

Si on relève l'application obtenue au revêtement universel en une application de \mathbf{H}^2 vers \mathbf{H}^3 , l'image des bouts des relevées des feuilles de γ est dès lors déterminée, et donc de même pour l'image des feuilles non compactes de γ' ; pour obtenir l'application cherchée, il faut vérifier que les deux extrémités d'une feuille non compacte sont distinctes dans \mathbf{H}^3 . Supposons le contraire: ou bien la feuille en question est contenue dans un pantalon plongé dans la surface S et bordé par des composantes de γ , ou bien elle est contenue dans un tore troué dont le bord est une composante de γ . Dans le premier cas, l'image du groupe fondamental de ce pantalon dans la variété N est cyclique, contredisant l'incompressibilité des régions complémentaires de γ . Dans l'autre cas, à partir de la feuille non compacte considérée, on peut construire une courbe simple contenue dans ce tore troué, qui intersecte γ en un seul point et qui est homotope à 0 dans N' ; ceci contredirait de nouveau l'incompressibilité des régions complémentaires de γ .

On peut alors construire une application homotope à l'inclusion, qui envoie homéomorphiquement chaque feuille de γ' sur une géodésique de la variété N' (cf [CEG, Théorème 5.3.6.]); à partir de cette application, on construit une métrique hyperbolique sur la surface S et une application p qui définissent une application plissée de S dans N' qui réalise γ (cf [CEG, Théorème 5.3.9.]). \square

Nous allons maintenant construire des exemples de surfaces plissées qui réalisent une lamination mesurée à feuilles denses. Dans le cas où l'application de la surface S dans N induit une injection du groupe fondamental, le théorème de compacité des surfaces plissées de Thurston permet de construire de telles surfaces. Avant d'adapter ce théorème au cas des bretzels creux, nous allons rappeler la topologie que l'on considère sur l'ensemble des surfaces plissées.

Une surface plissée consiste en la donnée d'un couple (σ, p) , où σ est un point de l'espace de Teichmüller de S et p une application de S dans N' qui induit une isométrie sur tous les chemins rectifiables. On définit une distance d sur cet ensemble de la façon suivante:

$$d((\sigma_1, p_1), (\sigma_2, p_2)) = \delta(\sigma_1, \sigma_2) + \min \delta'(p_2, p_1 \circ \phi).$$

Dans la formule précédente, la distance δ désigne une distance quelconque sur l'espace de Teichmüller, compatible avec la topologie habituelle et invariante sous l'action du groupe des difféotopies de S . La distance δ'

est la distance entre les applications de S dans N' associée à la distance hyperbolique dans N' , et le minimum est pris sur toutes les applications quasi-isométriques isotopes à l'identité ϕ entre les métriques σ_1 et σ_2 . On vérifie que l'application d ainsi définie est bien une distance (cf [CEG, Lemme 5.2.16.]).

Dans le cas où l'application f entre les variétés S et N est une équivalence d'homotopie, Thurston a montré que l'ensemble des surfaces plissées dans la classe d'homotopie de f , et dont les images rencontrent un compact est compact pour la topologie définie par la distance introduite ci-dessus; en particulier, si on se restreint aux variétés géométriquement finies, l'espace des surfaces plissées est compact ([Thu1, §8.8.], [CEG, Théorème 5.2.16.]).

Dans le cas des bretzels creux, ce théorème dans sa généralité est faux: une raison simple en est l'existence d'éléments d'ordre infini dans $Mod^0(N)$. Soit par exemple (σ, p) une application plissée le long d'une lamination γ ayant un nombre fini de feuilles, fournie par la Proposition 2.2. Soit aussi ϕ un élément de $Mod^0(N)$ d'ordre infini dans le groupe modulaire, par exemple un pseudo-Anosov (cf [FL] pour une construction de tels difféomorphismes). Alors la lamination $\phi^k(\gamma)$ est le lieu de plissage d'une application plissée, à savoir $(\phi^{-k}(\sigma), p \circ \phi^k)$, et lorsque k tend vers ∞ , cette suite ne peut converger car la suite $\phi^k(\sigma)$ tend vers l'infini dans l'espace de Teichmüller.

Nous allons voir maintenant que, par contre, si on contrôle la limite des lieux de plissage, on peut garantir la précompacité d'une suite d'applications plissées.

THÉORÈME 2.3. *Soit K un compact de la variété N' . Soit $(S_i = (\sigma_i, p_i))$ une suite de surfaces plissées réalisant chacune une lamination mesurée λ_i , réunion de feuilles compactes, telle que les images $p_i(S)$ ont une intersection non vide avec le compact K . Supposons que la suite de laminations (λ_i) converge vers une lamination $\lambda \in O$ dont les régions complémentaires sont toutes simplement connexes. Alors la suite (S_i) possède une sous-suite convergeant vers une surface plissée qui réalise la lamination λ .*

PREUVE: Nous suivons la démarche utilisée dans le cas incompressible. Nous allons d'abord montrer que la suite σ_i est bornée dans l'espace modulaire, puis dans l'espace de Teichmüller. Le théorème en découlera par l'argument habituel (cf [CEG]).

On peut supposer puisque O est ouvert dans $PML(S)$, que les laminations λ_i appartiennent toutes à O .

Notons $l_i(\gamma)$ la longueur de la géodésique de S pour la métrique σ_i homotope à une courbe γ .

AFFIRMATION 2.3.1. *Il n'existe pas de suite de courbes (γ_i) appartenant à M telle que la suite $(l_i(\gamma_i))$ tende vers 0.*

PREUVE: Raisonnons par l'absurde. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les courbes γ_i convergent vers une lamination $\gamma \in M'$. D'après l'hypothèse sur la lamination λ , le nombre d'intersection $i(\lambda, \gamma)$ est non nul.

En particulier, on peut trouver dans une feuille de la lamination γ un arc α transverse à la lamination λ . Par hypothèse, les feuilles de λ sont denses dans λ . Par conséquent, une feuille quelconque de λ intersecte l'arc α une infinité de fois. On peut alors trouver dans une feuille de λ un arc k_1 , qui rencontre en ses extrémités l'arc α avec la même orientation. Soit k_2 le sous-arc de α bordé par ces deux points d'intersection.

Considérons la courbe fermée $k = k_1 \cup k_2$. Pour un entier i suffisamment grand, il y a une feuille de λ_i près de chaque feuille de λ ; de même pour γ_i et γ . On peut donc trouver deux suites d'arcs $k_1^i \subset \lambda_i$ et $k_2^i \subset \gamma_i$ qui ont les mêmes propriétés que les arcs k_1 et k_2 ci-dessus et tels que la courbe $k^i = k_1^i \cup k_2^i$ soit homotope sur S à la courbe k .

Puisque la courbe γ_i est très courte, c'est l'âme d'un tube très long et très fin de la surface hyperbolique (S, σ_i) . L'image $p_i(k^i)$ dans la variété N' est la réunion de l'arc géodésique $p_i(k_2^i)$ et de l'arc $p_i(k_1^i)$ contenu dans $p_i(\gamma_i)$. Considérons deux arcs β_i et β_i' contenus dans λ_i voisinages symétriques de longueur constante des extrémités de $p_i(k_1^i)$. Soit r un rectangle plongé dans S , bordé par la réunion des arcs β_i, β_i' , et de deux arcs géodésiques entre leurs extrémités. Sur la surface S équipée de la métrique σ_i , la distance entre les extrémités voisines de ces arcs tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini. Puisque l'application restreinte $p_i|_r$ se relève en une application de r dans \mathbf{H}^3 qui a toujours la propriété de décroître les distances, les extrémités des images dans \mathbf{H}^3 des arcs β_i et β_i' sont à une distance qui tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini. Ceci entraîne que la distance dans le fibré unitaire tangent de N' entre les vecteurs tangents à β_i et à β_i' en leur milieu tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

Soit maintenant γ_i la courbe fermée de N' formée de la réunion de l'arc géodésique $p_i(k_1^i)$ et de l'arc géodésique homotope à extrémités fixes à $p_i(k_2^i)$; cette courbe est homotope dans N' à la courbe de départ $p_i(k^i)$, elle-même homotope à la courbe $p_i(k)$. D'autre part, la propriété des vecteurs tangents à λ_i en les extrémités de $p_i(k_2^i)$ énoncée précédemment entraîne que la courbe ainsi construite est à une distance uniformément bornée de la géodésique fermée de N' qui lui est homotope. La contradiction provient alors du fait que la classe de conjugaison de $\pi_1(N')$ représentée par cette géodésique est constante alors que la longueur de $p_i(k_1^i)$ tend vers l'infini avec i . \square

AFFIRMATION 2.3.2. *La suite σ_i est bornée dans l'espace modulaire de S .*

PREUVE: D'après le critère de Mumford, (cf [CEG, Théorème 3.2.13], [Thu1]), une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (σ_i) soit bornée dans l'espace modulaire est que le rayon d'injectivité des métriques σ_i soit borné inférieurement par une constante strictement positive.

Raisonnons par l'absurde. Il existe alors une suite de courbes simples γ_i tracées sur S telles que la suite des longueurs $l_i(\gamma_i)$ tende vers 0 lorsque i tend vers l'infini. D'après l'affirmation 2.3.1, les courbes γ_i ne sont pas homotopes à 0 dans N . Nous allons voir maintenant que c'est impossible, en utilisant l'hypothèse que les images $p_i(S)$ rencontrent le compact K , hypothèse qui n'avait pas été utilisée dans l'argument précédent.

Définition. Soit μ un réel strictement positif. On définit $N'(\mu)$, la partie μ -fine de la variété N' , comme l'ensemble des points de N' tels qu'il existe un lacet non-homotope à 0, de longueur inférieure à μ , basé en ce point. Puisque la variété N' ne contient pas d'éléments paraboliques, pour un réel μ suffisamment petit l'ensemble $N'(\mu)$ est une réunion disjointe de tores solides plongés dans N' : *les tubes de Margoullis*. Chacun est isométrique au quotient d'un voisinage de rayon constant d'une géodésique de \mathbf{H}^3 par un élément loxodromique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ ayant cette géodésique comme axe (cf [Thu]).

On définit de même la partie fine $S_i(\mu)$ de la surface S pour la métrique σ_i ; les tubes de Margoullis sont alors des voisinages de rayon constant d'une géodésique courte de S . Puisque les courbes γ_i ne sont pas homotopes à 0, l'image par p_i de la partie mince $S_i(\mu)$ est contenue dans $N'(\mu)$, pour un réel μ suffisamment petit.

Cette situation nous permet de conclure comme dans le cas où la surface S est incompressible. Soit μ un réel choisi de sorte que les parties minces de S et de N' vérifient l'inclusion précédente et que μ soit inférieur au rayon d'injectivité de N' sur le compact K . On rappelle qu'il existe une constante d , ne dépendant que du type topologique de la surface S telle que deux points de S peuvent être joints par un chemin rectifiable dont la longueur dans le complémentaire de $S_i(\mu)$ est inférieure à d .

Soit K' le sous-ensemble de N' formé des points qui peuvent être joints à K par un chemin dont la longueur dans le complémentaire de $N'(\mu)$ est inférieure ou égale à d . Il est facile de vérifier que K' est compact, puisque la distance entre deux tubes de Margoullis est bornée inférieurement par une constante strictement positive. D'autre part les images des surfaces S_i sont toutes contenues dans K' . Comme le rayon d'injectivité de N' dans le compact K' est borné inférieurement par une constante strictement positive, il en est de même pour les métriques σ_i . La suite σ_i est donc bornée dans l'espace modulaire d'après le critère de Mumford. □

Montrons maintenant que la suite (σ_i) est bornée dans l'espace de

Teichmüller. D'après l'affirmation 2.3.2, quitte à remplacer la suite σ_i par une sous-suite, il existe une métrique hyperbolique σ et des quasi-isométries ϕ_i entre les métriques σ_i et σ dont les coefficients de quasi-isométrie tendent vers 1.

D'après le théorème d'Ascoli, la suite d'applications $(p_i \circ \phi_i^{-1})$ converge uniformément vers une application de S dans N' . Donc, comme le rayon d'injectivité de N' est borné inférieurement sur le compact K' , les applications $p_i \circ \phi_i^{-1}$ sont homotopes entre elles pour $i \geq i_0$. On en déduit que les difféomorphismes $\psi_i = \phi_i \circ \phi_{i_0}^{-1}$ pour $i \geq i_0$ ont leur classe d'isotopie dans le groupe $Mod^0(N)$.

Supposons donc que la suite σ_i n'est pas bornée dans l'espace de Teichmüller; on peut supposer, quitte à en extraire une sous-suite qu'elle converge vers une lamination mesurée ν , dans la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller (cf [Thu], [FLP]).

AFFIRMATION 2.3.3. *La lamination ν appartient à M'' .*

PREUVE: Soit m un méridien quelconque de S : la suite de courbes $\phi_i^{-1}(m)$ a une longueur bornée pour la métrique σ_i . Soit $\mu \in M'$ une valeur d'adhérence de cette suite dans l'espace des laminations mesurées $PML(S)$.

On a: $i(\nu, \mu) = 0$. On peut montrer ce résultat en utilisant les estimations de [FLP]. Une autre raison est la suivante: la longueur de la géodésique $\phi_i^{-1}(m)$ pour la métrique σ_i est égale au nombre d'intersection $i(\sigma_i, \phi_i^{-1}(m))$ (cf [Bo2]). Or, cette longueur est bornée indépendamment de i . En utilisant la bicontinuité du nombre d'intersection (cf [Bo1]), on obtient par passage à la limite $i(\nu, \mu) = 0$.

Donc, par définition de M'' , la lamination ν appartient à M'' . \square

Par hypothèse la lamination λ a toutes ses régions complémentaires simplement connexes: on a donc $i(\lambda, \nu) \neq 0$. Dans le cas contraire en effet, la lamination λ aurait même support que ν , et appartiendrait aussi à M'' , contrairement à l'hypothèse.

Notons $l_i(\lambda_i)$ la longueur sur la surface S_i de la lamination λ_i , dont le support est réunion de feuilles compactes. Soit σ une métrique hyperbolique fixée sur la surface S et $l(\lambda)$ la longueur d'une lamination mesurée λ relativement à cette métrique. D'après l'argument utilisé dans la preuve de l'affirmation 2.3.3, on a, comme $i(\lambda, \nu) \neq 0$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{l_i(\lambda_i)}{l(\lambda_i)} = \infty.$$

Notons $l_{N'}(\lambda_i)$ la longueur pour la métrique hyperbolique de N' de la lamination λ_i .

On a bien entendu: $l_i(\lambda_i) = l_{N'}(\lambda_i)$.

D'autre part, on a aussi l'inégalité:

$$l_{N'}(\lambda_i) \leq l_{i_0}(\lambda_i) \leq Cl(\lambda_i).$$

Ceci apporte la contradiction cherchée.

Donc la suite σ_i est bornée dans l'espace de Teichmüller. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer qu'elle converge. D'après le théorème d'Ascoli, la suite p_i possède une sous-suite convergente vers une application p . On montre comme dans [CEG, Lemme 5.2.8] que l'application p est une application plissée, dont le lieu de plissage contient la limite géométrique des laminations λ_i . Comme cette limite géométrique contient la lamination λ , le théorème 2.3 est prouvé. \square

Nous allons maintenant montrer que l'on peut réaliser les laminations de O dont les régions complémentaires ne sont pas toutes simplement connexes.

Soit λ une telle lamination. La proposition 2.2 a déjà résolu le cas où toutes les feuilles de λ sont compactes.

Pour réaliser la lamination λ , il nous suffit de réaliser une lamination dont le support contient celui de λ . Quitte à rajouter à λ des courbes fermées, on peut donc supposer que la propriété suivante est vérifiée: aucune composante du complémentaire de λ dans la surface S ne contient de géodésique compacte sans point double.

Notons γ la réunion des feuilles compactes de λ . On peut approcher dans $PML(S)$ la lamination λ par une suite de laminations (λ_i) dont le support contient γ .

Soit (σ_i, p_i) une surface plissée réalisant λ_i , fournie par la proposition 2.2. Nous allons montrer le résultat suivant, analogue au théorème 2.3..

PROPOSITION 2.4. *La suite de surfaces plissées (σ_i, p_i) converge quitte à en extraire une sous-suite vers une surface plissée qui réalise la lamination λ . Donc, toutes les laminations de O dont les régions complémentaires ne sont pas toutes simplement connexes sont réalisées dans la variété N' .*

PREUVE: Les arguments utilisés dans la démonstration des affirmations 2.3.1 et 2.3.2 s'adaptent mot pour mot. En effet, on n'a utilisé dans aucune de ces démonstrations que la lamination λ avait ses régions complémentaires simplement connexes. La seule hypothèse utilisée dans la preuve de l'affirmation 2.3.2 était que les images $p_i(S)$ rencontraient un compact fixe de N' . Or cette hypothèse est vérifiée ici: il suffit de prendre comme compact la géodésique de N' homotope à une courbe compacte du support de λ .

Donc la suite de métriques hyperboliques σ_i est bornée dans l'espace modulaire de la surface S . Il existe alors, quitte à extraire une sous-suite, des difféomorphismes ϕ_i de la surface S tels que la suite de métriques hyperboliques $(\phi_i(\sigma_i))$ converge dans l'espace de Teichmüller vers une métrique σ .

AFFIRMATION 2.4.1. *Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les difféomorphismes $\psi_i = \phi_i \circ \phi_{i_0}^{-1}$ respectent composante par composante la collection de courbes γ et appartiennent à $Mod^0(N)$.*

PREUVE: Remarquons que la longueur pour la métrique σ_i de la collection de courbes γ est constante. Donc la longueur pour la métrique σ de la collection de courbes $\phi_i^{-1}(\gamma)$ est bornée par une constante indépendante de i . Comme l'ensemble des collections de courbes ayant une longueur bornée par une constante est fini, on peut extraire de la suite (ϕ_i) une sous-suite telle que la suite (ψ_i) associée respecte composante par composante la collection γ . Le fait que les difféomorphismes ψ_i représentent des éléments de $Mod^0(N)$ découle du fait que les applications $p_i \circ \psi_i^{-1}$ convergent, après extraction d'une nouvelle sous-suite. \square

Soit R une région complémentaire de γ dont le groupe fondamental ne s'injecte pas dans $\pi_1(N)$. Notons $\psi_i|_R$ la restriction du difféomorphisme ψ_i à cette composante.

AFFIRMATION 2.4.2. *Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que pour chaque composante compressible R , la restriction $\psi_i|_R$ est isotopie à l'identité.*

PREUVE: Tout d'abord, quitte à extraire une sous-suite de la suite σ_i , on peut supposer que les difféomorphismes ψ_i respectent l'orientation de S .

Notons $\sigma_i|_R$ la métrique hyperbolique induite sur une région complémentaire de ce type R . Il nous suffit de montrer que la suite $\sigma_i|_R$ est bornée dans l'espace de Teichmüller $T(R)$ de la surface à bord R . L'espace de Teichmüller $T(R)$ que l'on considère est celui des métriques hyperboliques sur R dont le bord est géodésique et de longueur constante: deux métriques sont considérées comme équivalentes lorsqu'elles diffèrent par un difféomorphisme de R isotopie à l'identité. Cet espace peut être compactifié par l'espace $PLM(R)$ formé des laminations projectives mesurées de la surface R , dont aucune composante n'est contenue dans le bord (cf [FLP]).

Raisonnons par l'absurde: si la suite $(\sigma_i|_R)$ n'est pas bornée, elle converge vers une lamination mesurée du type précédent ν de la surface R .

L'argument utilisé dans la preuve de l'affirmation 2.3.3 montre que la lamination ν a le même support qu'une lamination limite de méridiens contenus dans R .

D'autre part, le nombre d'intersection de λ avec ν n'est pas nul, car sinon la composante de λ contenue dans R aurait le même support qu'une lamination de M' , ce qui est impossible puisque $\lambda \in O$. On obtient alors une contradiction par le même raisonnement que dans la fin de la preuve du théorème 2.3.

On peut donc extraire de la suite σ_i une sous-suite de sorte que les métriques induites sur toutes les composantes compressibles convergent dans leurs espaces de Teichmüller respectifs. On en déduit l'affirmation 2.3.2. \square

Revenons à la preuve de la proposition 2.4. Pour montrer que les métriques σ_i convergent dans l'espace de Teichmüller de la surface S , il nous suffit de montrer que les difféomorphismes ψ_i sont isotopes à l'identité.

Pour le moment nous savons d'une part que la restriction de ces difféomorphismes aux composantes compressibles du complémentaire de γ est isotope à l'identité et d'autre part, que les difféomorphismes ψ_i ont leur classe d'isotopie dans le groupe $Mod^0(N)$. Nous pouvons supposer que la restriction de ψ_i à chaque composante compressible du complémentaire d'un voisinage régulier de γ sur S est l'identité.

Soit m une courbe de M , disjointe de γ et homotope à 0 dans N , et soit D un disque proprement plongé dans N , bordé par cette courbe. Notons Φ_i un prolongement de ϕ_i en un difféomorphisme de N . On peut supposer après une isotopie que le difféomorphisme Φ_i respecte le disque D . La variété obtenue en effectuant une chirurgie sur N le long du disque D est une réunion de bretzels creux. Le difféomorphisme ψ_i induit un difféomorphisme du bord de ce bretzel vérifiant les mêmes propriétés que ψ_i .

Par un nombre fini de compressions disjointes de γ du type précédent, on se ramène à un difféomorphisme ψ'_i d'une variété N'' homéomorphe à une réunion de bretzels creux, dont le bord contient la collection de courbes γ , de sorte que les régions complémentaires de γ sur le bord soient incompressibles dans N'' .

On peut imposer en outre que le difféomorphisme ψ'_i est l'identité sur les composantes du complémentaire de γ qui étaient compressibles avant d'effectuer l'opération de chirurgie.

Remarquons d'abord qu'une composante de γ ne peut être homotope à 0 dans N'' et que deux composantes de γ ne peuvent être homotopes dans la nouvelle variété N'' . En effet, dans le premier cas, on pourrait construire un anneau disque dans N bordé par une composante de γ et dans le second, on pourrait construire un anneau non parallèle au bord, incompressible, et proprement plongé dans la variété N dont le bord est disjoint de λ : les deux situations sont impossibles, d'après la remarque 1.15, puisque λ appartient à l'ouvert O .

En particulier, aucune composante de γ ne borde un disque sur le bord de N'' et deux composantes distinctes de γ ne peuvent pas être isotopes sur le bord de cette même variété.

Le lemme 2.5 ci-dessous va entraîner que le difféomorphisme ψ'_i est

isotope à l'identité par une isotopie qui respecte γ . Voyons tout de suite comment en déduire que ψ_i est isotope à l'identité.

Soit R une composante du complémentaire de γ sur $\partial N''$ qui était compressible avant d'effectuer la chirurgie: l'isotopie de ψ_i' à l'identité induit sur la composante R un lacet de difféomorphismes joignant l'identité à elle-même. Puisque la région R n'est pas homéomorphe à un anneau, un tel chemin de difféomorphismes est homotope au chemin constant ([G]). On peut donc supposer que l'isotopie de ψ_i' à l'identité est constante dans chaque région R . Cette isotopie permet alors de construire une isotopie de ψ_i à l'identité.

LEMME 2.5. *Soit γ une collection de courbes simples disjointes, tracées sur le bord d'un bretzel creux N . Supposons que les régions complémentaires de γ sur ∂N sont incompressibles et qu'il n'existe pas d'anneau proprement plongé dans la variété N qui soit incompressible, incompressible vers le bord, et dont le bord soit contenu dans un voisinage régulier de γ sur ∂N . Soit Ψ un difféomorphisme du bretzel N homotope à l'identité, qui respecte composante par composante la collection de courbes γ . Alors, Ψ est isotope à l'identité par une isotopie qui respecte γ .*

PREUVE: L'hypothèse sur les anneaux permet de se ramener au cas où l'homotopie de ψ à l'identité respecte chaque composante de γ . Soit \tilde{N} la variété obtenue en doublant N le long d'un voisinage régulier de γ sur ∂N . Le double $\tilde{\psi}$ du difféomorphisme ψ est alors homotope à l'identité. Le bord de la variété $\partial \tilde{N}$ est incompressible; donc, d'après un théorème de F.Waldhausen ([Wa1]), $\tilde{\psi}$ est isotope à l'identité. On en déduit que ψ est isotope à l'identité. \square

Nous avons vu que quitte à extraire une sous-suite de la suite σ_i , les difféomorphismes ϕ_i étaient isotopes. Donc la suite σ_i converge dans l'espace de Teichmüller. L'argument habituel permet alors de conclure la preuve de la proposition 2.4. \square

COROLLAIRE 2.6. *Si la variété N' est géométriquement finie et sans éléments paraboliques, toutes les laminations contenues dans O sont réalisées.*

PREUVE: D'après la proposition 2.4, il suffit de considérer le problème de la réalisation des laminations dont les régions complémentaires sont toutes simplement connexes. Lorsque la variété N' est géométriquement finie et sans paraboliques, il existe par définition un compact qui contient toutes les géodésiques fermées. Une suite d'applications plissées qui réalisent une suite de laminations à feuilles compactes qui approxime une lamination λ de O vérifie les hypothèses du théorème 2.3. Donc, quitte à en extraire une sous-suite, elle converge vers une surface qui réalise la lamination λ .

\square

Nous allons maintenant adapter un théorème de Thurston (cf [Thu2]) au cas compressible que nous étudions. Tout d'abord soit (σ, p) une surface plissée qui réalise une lamination λ , pas nécessairement mesurée. Soit $P^1(N')$ le fibré tangent en droites à la variété N' . On définit une application P sur le support de la lamination σ -géodésique λ à valeurs dans $P^1(N')$ en associant à un point $x \in \lambda$ la direction du vecteur unitaire de N' tangent à $p(\lambda)$ au point $p(x)$; l'image de cette application est un fermé invariant par le feuilletage géodésique sur $P^1(N')$.

PROPOSITION 2.7. *L'application P est continue lorsque le support de la lamination géodésique λ est muni de la topologie induite par celle de S .*

PREUVE: Soit x un point du support de la lamination λ . Considérons un arc k , contenu dans la feuille de λ passant par x , voisinage symétrique de longueur non nulle de x . Un arc contenu dans une feuille de λ , et proche de k a la propriété que ses extrémités ont par l'application p des images proches de celles de k (cf la preuve de l'affirmation 2.3.1). Ceci entraîne, comme alors, que l'application P est continue. \square

En particulier l'image d'un fermé minimal invariant de λ est un fermé invariant minimal du flot géodésique sur $P^1(N')$.

Lorsque la lamination λ appartient à O , on a la généralisation suivante d'un résultat de Thurston ([Thu2])

THÉORÈME 2.8. *Soit λ une lamination de O réalisée par une application plissée (σ, p) . Alors, l'application P est un homéomorphisme sur son image.*

PREUVE: Il nous suffit de montrer que l'application P est injective, d'après la compacité du support de λ et la proposition 2.7.

Raisonnons par l'absurde: soient deux points distincts p_1 et p_2 de λ qui ont la même image dans $P_1(N')$.

AFFIRMATION 2.8.1. *Les deux points p_1 et p_2 ne sont pas contenus dans la même feuille l de λ .*

PREUVE: Si la feuille l est compacte, la classe de conjugaison du groupe $\pi_1(N)$ représentée par cette feuille compacte est divisible. Mais ceci est interdit par la remarque 1.15, puisque la lamination λ appartient à O .

Supposons maintenant que les deux points sont contenus dans une feuille non compacte l . Le fermé minimal de λ qui contient cette feuille coïncide avec la fermeture \bar{l} de la feuille l . Son image par P est aussi un fermé minimal du feuilletage géodésique dans $P^1(N')$. Comme l'image de la feuille l est une géodésique compacte, cette géodésique est aussi l'image du fermé invariant \bar{l} .

Considérons la surface $S(\bar{l})$, définie comme la plus petite sous-surface compacte de S à bord géodésique, qui contient l . L'image du groupe

fondamental de cette surface dans $\pi_1(N')$ est un groupe cyclique. Donc le groupe fondamental de la surface $S(\bar{l}) \in N$ a une image cyclique dans $\pi_1(N)$. On en déduit une contradiction comme suit: si la surface $S(\bar{l})$ a deux composantes de bord au moins, on construit un anneau joignant ces deux composantes. Cet anneau est disjoint de λ , ce qui est interdit par la remarque 1.15. Si la surface $S(\bar{l})$ a une seule composante de bord, alors cette composante de bord appartient à M , ce qui est aussi interdit. \square

Donc les deux points p_1 et p_2 sont contenus dans des feuilles distinctes l_1 et l_2 de la lamination λ .

Soit S' le revêtement planaire de la surface S , introduit dans la section précédente. Choisissons un relevé de l'application p en une application \tilde{p} de la surface S' à valeurs dans l'espace hyperbolique \mathbf{H}^3 .

L'application \tilde{p} est une application propre, et il existe deux relevés de l_1 et l_2 dans S' qui ont pour image la même géodésique de \mathbf{H}^3 : soient \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 ces relevés.

AFFIRMATION 2.8.2. *Les deux feuilles \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 ont les mêmes bouts dans $K = \bar{S}' - S'$.*

PREUVE: Munissons le revêtement S' de la métrique qui relève la métrique σ sur S . Soient (x_i) et (y_i) deux suites de points respectivement contenus dans \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 , telles que la suite (x_i) tend vers un bout de \tilde{l}_1 et dont les images par l'application \tilde{p} sont les mêmes.

Puisque le quotient de S' par son groupe d'automorphismes $G = \pi_1(N)$ est compact, il existe une suite d'éléments γ_i du groupe G , tels que les éléments $\gamma_i(x_i)$ vivent dans un même compact de S' . On a $\tilde{p}(\gamma_i(x_i)) = \tilde{p}(\gamma_i(y_i))$. Donc la distance dans S' entre les points $\gamma_i(x_i)$ et $\gamma_i(y_i)$ est bornée par une constante indépendante de i , d'après la propriété de l'application \tilde{p} . Il en est donc de même pour la distance dans S' entre les points x_i et y_i .

Donc la suite (y_i) tend vers un bout de \tilde{l}_2 qui est le même que celui de la feuille \tilde{l}_1 .

En raisonnant de la même façon avec l'autre bout de \tilde{l}_1 , on démontre l'affirmation 2.8.2. \square

Considérons un système admissible α par rapport auquel la lamination λ est en position tendue (cf Théorème 1.3).

La feuille l_i rencontre nécessairement une courbe m de ce système admissible qui appartient à M . Sinon, le fermé minimal de λ contenant cette feuille, aurait un nombre d'intersection nul avec tous les méridiens de la famille α ce qui contredirait l'appartenance de λ à l'ouvert O (cf Lemme 1.4).

Notons $(m_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ la famille de relevés de la courbe m qui intersecte \tilde{l}_1 . Rappelons que la feuille \tilde{l}_1 intersecte exactement une fois chaque courbe

m_i (cf Lemme 1.9). D'après l'affirmation 2.8.2, la feuille \tilde{l}_2 intersecte aussi exactement une fois chaque courbe m_i . Ordonnons la famille $(m_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ à partir d'une orientation choisie sur la feuille \tilde{l}_1 . Notons finalement a_i et b_i les points d'intersection respectifs des feuilles \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 avec la courbe m_i .

On considère les deux cas suivants:

1er cas. La distance mesurée sur la courbe m_i entre a_i et b_i n'est pas bornée inférieurement par une constante strictement positive, lorsque $i > 0$ et lorsque $i < 0$.

Dans ce cas, les deux feuilles l_1 et l_2 sont contenues dans un même minimal exceptionnel λ' de la lamination λ . Par hypothèse, il existe des entiers i_k et j_k , respectivement proches de $+\infty$ et $-\infty$ tels que la longueur des intervalles $[a_{i_k}, b_{i_k}] \subset m_{i_k}$ et $[a_{j_k}, b_{j_k}] \subset m_{j_k}$ soit arbitrairement petite. Ceci entraîne que la mesure déposée par λ sur ces intervalles est arbitrairement petite. On construit une suite de courbes fermées dans S' en prenant la réunion des intervalles $[a_{i_k}, b_{i_k}]$, $[a_{j_k}, b_{j_k}]$, et des arcs contenus dans \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 qui les joignent. Ces courbes fermées ne sont pas homotopes à 0 dans S' , car les deux feuilles \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 sont des géodésiques distinctes de S' . Leur projection sur S est une suite de courbes (g_k) homotopes à 0 dans N , dont le nombre d'intersection avec λ tend vers 0. D'après la version de Stallings du lemme de Dehn, on peut construire à partir des courbes g_k une suite de courbes simples h_k , appartenant à M , telles que le nombre d'intersection $i(\lambda, h_k)$ tend vers 0, lorsque k tend vers ∞ . Ceci contredit l'appartenance de λ à O .

2e cas. Pour $i > 0$ ou pour $i < 0$, la distance sur la courbe m_i entre les points a_i et b_i est bornée inférieurement par une constante strictement positive.

Supposons par exemple que cette situation se présente pour $i > 0$. On commence alors par montrer le résultat suivant:

AFFIRMATION 2.8.3. *Sur la courbe m , les projections (a'_i, b'_i) des couples (a_i, b_i) pour $i > 0$ ne se croisent pas, c'est à dire que chacun de ces couples est contenu dans un intervalle du complémentaire dans m de tout autre couple.*

PREUVE: On considère le revêtement planaire S' , muni de son plongement habituel dans la sphère S^2 . La réunion des fermetures des feuilles \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 est une courbe de Jordan c . Soit γ un élément du groupe d'automorphismes G . Comme les feuilles \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 se plongent dans S , l'une des deux conditions suivantes est vérifiée:

- (1) la courbe $\gamma(c)$ borde un disque de S^2 disjoint d'un disque bordé par c .
- (2) l'élément γ fixe les deux bouts communs aux feuilles \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 .

Dans ce dernier cas, si l'une des feuilles l_1 ou l_2 est non compacte, on en déduit par minimalité, que la fermeture dans λ de cette feuille est une lamination dont l'image par P est une géodésique fermée de N' : c'est impossible d'après l'argument utilisé dans la preuve de l'affirmation 2.8.1. Lorsque les deux feuilles l_1 et l_2 sont compactes, on en déduit un anneau essentiel proprement immergé dans N dont le bord est contenu dans un voisinage de $l_1 \cup l_2$. D'après le théorème de l'anneau, il existe un anneau plongé dont le bord vérifie les mêmes propriétés. C'est impossible d'après la remarque 1.15, puisque $\lambda \in O$.

Donc nous sommes nécessairement dans le premier cas. Ceci démontre l'affirmation 2.8.3. □

Revenons à la preuve du théorème 2.8. Soit D un disque proprement plongé dans N de bord m . Identifions ce disque avec la fermeture du disque de Poincaré. A chaque couple (a'_i, b'_i) , on associe la géodésique g_i de D qui a ce couple pour extrémités. D'après l'affirmation 2.8.3, les géodésiques g_i sont disjointes. Comme par hypothèse, la distance entre les extrémités de ces couples est bornée inférieurement par une constante non nulle, l'ensemble des géodésiques g_i est précompact dans l'ensemble des géodésiques du disque hyperbolique D .

Si deux géodésiques distinctes g_i et g_j ont au moins un bout en commun, on en déduit un élément non trivial du groupe G , qui fixe les deux bouts communs aux feuilles l_1 et l_2 . D'après la preuve de l'affirmation 2.8.3, on sait que c'est impossible.

Donc l'ensemble des géodésiques g_i est infini et deux quelconques d'entr'elles ne sont pas asymptotes dans D .

Ceci entraîne que les feuilles l_1 et l_2 sont chacune contenues dans un minimal exceptionnel de λ . On peut donc trouver deux géodésiques, g_i et g_j telles que la distance entre leurs extrémités respectivement situées sur les feuilles l_1 et l_2 est arbitrairement petite et telles que le rectangle contenu dans D découpé par ces deux géodésiques ne contienne aucune des géodésiques g_k pour $i < k < j$. On construit alors à partir de ces deux géodésiques et de deux arcs respectivement contenus dans l_1 et dans l_2 un anneau proprement plongé dans N , dont chaque courbe du bord a un nombre d'intersection avec λ qui est arbitrairement petit.

Comme les deux feuilles l_1 et l_2 ne sont pas parallèles sur la surface S' , l'anneau ainsi construit n'est pas parallèle vers le bord dans le bretzel creux N . Soient γ_1 et γ_2 les courbes du bord de cet anneau; pour des entiers n_1 et n_2 bien choisis, la lamination $n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2$ appartient à M' . Dans notre cas, on peut prendre: $n_i = i(\gamma_i, m)$. Comme $n_1 = n_2$, la lamination $\gamma_1 + \gamma_2$ appartient à M' . Le nombre d'intersection de cette lamination avec λ peut être rendu arbitrairement petit: on a donc une contradiction avec l'appartenance de λ à O .

Ceci termine la preuve du théorème 2.8. □

De la proposition 1.13 et du théorème précédent on déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.9. *Soit λ une lamination appartenant à l'ouvert O ; si deux feuilles de la lamination relevée $\tilde{\lambda}$ ont un bout en commun dans $S^2 - S'$, elles sont asymptotes dans le revêtement planaire S' .*

Nous allons maintenant étudier le problème de la réalisation des laminations géodésiques, pas nécessairement mesurées.

PROPOSITION 2.10. *Soit λ une lamination mesurée de l'ouvert O , réalisée dans la variété N . Alors, toute lamination géodésique λ' contenant le support de λ est aussi réalisée.*

PREUVE: Quitte à rajouter à λ un nombre fini de feuilles isolées, on peut supposer que ses régions complémentaires sur la surface S sont toutes homéomorphes à des triangles idéaux.

Considérons la lamination mesurée maximale λ'' dont le support est contenu dans λ . Si la lamination λ a toutes ses régions complémentaires simplement connexes, alors $\lambda'' = \lambda$. Sinon, la lamination λ'' est réalisée dans la variété N' d'après la proposition 2.4. On peut donc toujours supposer que $\lambda = \lambda''$.

Pour construire une réalisation de la lamination λ' , nous allons construire une application de S dans N' homotope à l'inclusion, qui envoie chaque feuille de λ' homéomorphiquement sur une géodésique de N' . Par hypothèse, une telle application est déjà définie sur le support de λ . Nous allons donc voir comment, à partir d'une réalisation de λ obtenir une telle application.

Soit (σ, p) une réalisation de λ . Choisissons un relevé de p en une application \tilde{p} du revêtement universel \mathbf{H}^2 de la surface S à valeurs dans l'espace hyperbolique \mathbf{H}^3 . Soit \tilde{l} une feuille de la préimage de $\lambda' - \lambda$. Par maximalité de la lamination λ , chacun des bouts de cette feuille est asymptote dans \mathbf{H}^2 à une feuille de la préimage de λ . Donc l'image de chacun des bouts de la feuille \tilde{l} est déjà donnée par l'application \tilde{p} , puisque chaque feuille de $\tilde{\lambda}$ est envoyée sur une géodésique de \mathbf{H}^3 .

Il nous suffit de voir que les images des bouts de la feuille \tilde{l} sont bien distinctes. Soit l l'image de la feuille \tilde{l} dans le revêtement planaire S' . Si les images par \tilde{p} des deux bouts de la feuille \tilde{l} étaient les mêmes, les deux demi-feuilles de la préimage de λ auxquelles l est asymptote auraient un bout en commun dans $K = \tilde{S}' - S'$. Mais ceci est impossible d'après le corollaire 2.9 et l'incompressibilité du complémentaire de λ sur S .

Donc les deux bouts de la feuille \tilde{l} ont des images par \tilde{p} qui sont distinctes. On peut alors construire une application homotope à p , qui envoie chaque feuille de λ' sur une géodésique de \mathbf{H}^3 .

On en déduit l'application cherchée (cf [CEG, Théorèmes 5.3.6 et 5.3.9]). \square

Généralisant le théorème 2.8, on a:

PROPOSITION 2.11. *Soit λ' une lamination géodésique réalisée sur une surface plissée. Supposons que le support de la lamination λ' contienne le support d'une lamination mesurée $\lambda \in O$. Alors l'application P est un homéomorphisme de λ' sur son image.*

PREUVE: On sait déjà d'après le théorème 2.8, que l'application P restreinte au support de la lamination mesurée maximale qu'elle contient est un homéomorphisme sur son image: en effet cette lamination mesurée maximale contient λ et donc appartient à O . On peut supposer que cette lamination mesurée maximale s'appelle aussi λ . Le complémentaire du support de λ dans λ' est un nombre fini de feuilles isolées. Dans le revêtement planaire S' , chaque relevé d'une feuille isolée de ce type est asymptote à une feuille de la préimage de λ . Donc chaque demi-feuille de ce type a un bout bien défini dans $K = \bar{S}' - S'$. De plus chaque relevé d'une feuille de $\lambda' - \lambda$ a des bouts distincts dans K puisque l'application propre \tilde{p} l'envoie sur une géodésique de \mathbf{H}^3 .

Si deux feuilles de la préimage de $\lambda' - \lambda$ sont identifiées entr'elles, ou sont identifiées à des feuilles de la préimage de $\tilde{\lambda}$, on déduit à partir d'elles deux feuilles de $\tilde{\lambda}$, non asymptotes dans S' mais possédant un bout en commun. Ceci est impossible d'après le corollaire 2.9.

Donc, l'application P est un homéomorphisme de λ' sur son image. \square

3. Les courants géodésiques dans les bretzels creux

Dans cette section, nous introduisons l'espace des courants géodésiques $C(N)$ du bretzel creux N . Ensuite, nous construisons un plongement de la variété de Masur $L(N)$ (cf §1), dans cet espace $C(N)$.

Donnons-nous une équivalence d'homotopie entre le bretzel creux N et une variété hyperbolique complète N' , sans éléments paraboliques. Considérons le feuilletage géodésique \mathcal{F} du fibré en droites $P^1(N')$ à la variété N' .

Définition. Un courant géodésique sur la variété N' est une mesure transverse au feuilletage \mathcal{F} , c'est-à-dire la donnée sur chaque transversale de ce feuilletage d'une mesure positive invariante par l'holonomie.

L'exemple le plus simple de mesure transverse s'obtient à partir d'une collection finie d'orbites fermées de \mathcal{F} , en munissant chacune de ces orbites d'un poids transverse non nul.

On définit le support d'une mesure transverse μ comme l'ensemble des géodésiques de \mathcal{F} qui sont, sur chaque transversale, dans le support de μ . Le support est donc un fermé invariant du feuilletage \mathcal{F} .

On munit l'espace $C(N')$ de la topologie de la convergence vague.

Parfois, on aura aussi à considérer l'espace projectif $PC(N')$ sur $C(N')$, c'est à dire le quotient de $C(N')$ par la relation qui identifie deux mesures non nulles si et seulement si elles sont proportionnelles. Cet espace projectif muni de la topologie quotient de celle de $C(N')$ est un espace topologique séparé.

L'un des intérêts des courants géodésiques provient du fait que les classes de conjugaison du groupe fondamental de N s'injectent dans $PC(N')$, par l'application qui associe à une classe de conjugaison la masse de Dirac en la géodésique de N' qui la représente.

On rappelle le résultat suivant (cf [Bo3]).

PROPOSITION 3.1. *Soit K un compact de $P^1(N')$. L'ensemble des courants projectifs de $PC(N')$ dont le support est contenu dans K est compact. Les classes de conjugaison sont denses dans ce compact.*

Par exemple, si la variété N' est géométriquement finie et sans éléments paraboliques, la proposition ci-dessus permet de compactifier l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(N)$ par l'ensemble des courants géodésiques de $PC(N')$ supportés dans le coeur de Nielsen de la variété N' , c'est-à-dire le quotient de l'enveloppe convexe de l'ensemble limite du groupe G dans \mathbf{H}^3 par l'action du groupe G .

Un tel courant se relève dans \mathbf{H}^3 en un courant G -invariant sur la restriction du feuilletage géodésique de \mathbf{H}^3 à l'enveloppe convexe de l'ensemble limite $L(N')$ du groupe G . L'espace des feuilles du feuilletage géodésique restreint à cette enveloppe convexe est homéomorphe au quotient du complémentaire de la diagonale dans le produit $L(N') \times L(N')$ par l'involution qui échange les deux facteurs. Un courant géodésique supporté dans le coeur de Nielsen s'interprète donc comme une mesure de Borel $\pi_1(N')$ -invariante sur cet espace. Lorsque le groupe $\pi_1(N')$ est géométriquement fini, l'ensemble limite $L(N')$ peut être défini en termes uniquement combinatoires ([Gro],[Fl]). Donc l'espace des courants géodésiques dans ce cas ne dépend que du groupe G . Nous le noterons alors $C(G)$, et $PC(G)$ pour l'espace projectif associé. Nous noterons aussi $M(G)$ l'espace des feuilles du feuilletage géodésique, décrit précédemment.

Dans les cas qui nous intéressent, la variété N' n'est pas géométriquement finie et nous désirons mesurer la différence entre l'espace des courants géodésiques de N' , $PC(N')$ et l'espace $PC(G)$.

Nous allons d'abord considérer les résultats du chapitre précédent dans le contexte des courants géodésiques.

Notons \tilde{O} la préimage de l'ouvert O dans l'espace des laminations mesurées $ML(S)$. Si λ est une lamination de \tilde{O} réalisée dans la variété N' , on notera $P(\lambda)$, l'image du support de λ dans le fibré en droites $P^1(N')$.

Soit γ une lamination de \tilde{O} dont le support est une réunion de feuilles compactes. Alors $P(\gamma)$ est la réunion des géodésiques de N' homotopes aux composantes du support de γ . Rappelons que $P(\gamma)$ a autant de composantes connexes que le support de γ et que chaque composante de $P(\gamma)$ est parcourue exactement une fois (cf Remarque 1.15). On peut donc associer un élément de $C(N')$ à γ , en munissant chaque composante de $P(\gamma)$ de la mesure transverse de la composante de γ qui lui correspond. Soit $F(\gamma)$ l'élément de $C(N')$ ainsi défini.

Nous allons maintenant montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 3.2. *Soit N' une variété hyperbolique complète, sans éléments paraboliques et dont le groupe fondamental est isomorphe à G . Soit λ une lamination mesurée de \tilde{O} réalisée dans la variété N' . Alors, il existe un voisinage de λ dans \tilde{O} sur lequel l'application F définie ci-dessus, se prolonge en une application continue à valeurs dans $C(N')$.*

PREUVE: Nous commençons par montrer que les laminations de \tilde{O} réalisées dans N' forment un ouvert.

AFFIRMATION 3.2.1. *Il existe un voisinage de λ dans \tilde{O} , dont tous les éléments sont réalisés dans N' .*

PREUVE: D'après la proposition 2.4, les laminations de O dont les régions complémentaires ne sont pas toutes simplement connexes sont toutes réalisées dans N' . Le problème est donc de réaliser les laminations proches de λ , et dont les régions complémentaires sont toutes simplement connexes.

D'après le théorème 2.3, il nous suffit de montrer l'existence d'un compact K de la variété N' et d'un voisinage $V(\lambda)$ de la lamination λ dans \tilde{O} tels que si γ est une multi-courbe de $V(\lambda)$, son image $F(\gamma)$ à un support γ^* qui rencontre K .

Raisonnons par l'absurde. Soit (γ_i) une suite de multi-courbes de O qui converge vers λ dans O et telles que les géodésiques γ_i^* finissent par quitter tout compact de N' . Quitte à extraire une sous-suite de la suite (γ_i) , on peut supposer que ces laminations convergent pour la topologie de Hausdorff vers une lamination λ' .

On a une inclusion naturelle du support de λ dans le support de λ' .

Donc, d'après la proposition 2.10, la lamination λ' est réalisée dans la variété N' par une application plissée (σ, p) .

Considérons un réseau ferroviaire presque géodésique τ sur la surface (S, σ) qui porte la lamination λ' . On peut homotoper l'application p en une application p' de sorte que l'image par l'application p' de ce réseau dans la variété N' soit une réunion d'arcs géodésiques qui se rencontrent en leurs extrémités en y faisant un angle proche de π . Pour un entier i suffisamment grand, les multi-courbes γ_i sont portées par le réseau τ .

Donc, l'image $p'(\gamma_i)$ est une courbe géodésique par morceaux, dont les coins sont proches de π . La géodésique γ_i^* de la variété N' homotope à une telle courbe, est contenue dans un voisinage de rayon constant de la courbe $p'(\gamma_i)$ ([Bo1]).

Ceci contredit l'hypothèse que les géodésiques γ_i^* finissent par quitter tout compact de N' . □

Soit $V(\lambda)$ un voisinage fermé de la lamination λ dans O fourni par l'affirmation précédente.

Nous allons montrer que l'application F s'étend par continuité dans le voisinage $V(\lambda)$.

Nous commençons par définir à partir de la donnée d'une application plissée (σ, p) qui réalise une lamination mesurée λ , un courant de $C(N')$ supporté sur $P(\lambda)$. Rappelons pour cela que l'application P est un homéomorphisme sur son image $P(\lambda)$ (cf le Théorème 2.8). Soit R un petit rectangle fermé contenu dans S , voisinage d'un arc dans une feuille de λ . On choisit R de sorte que les feuilles de $\lambda \cap R$ soient des arcs parallèles. Soit maintenant U un disque fermé de codimension 1 dans $P^1(N')$, transverse au feuilletage \mathcal{F} au point $P(p)$, et tel que $P^{-1}(U)$ soit en bijection avec un fermé de l'espace des feuilles de $R \cap \lambda$ (un tel disque existe toujours, d'après la continuité de P^{-1}). On peut alors trans-

porter la mesure transverse à λ en une mesure sur \mathcal{U} par l'application P .

En utilisant des recouvrements, on peut définir une mesure transverse $F(\lambda)$ sur chaque transversale de \mathcal{F} . On montre l'invariance par holonomie sur les petits ouverts transverses qui ont servi à définir $F(\lambda)$.

Pour justifier le nom $F(\lambda)$ que nous avons donné à cette mesure, remarquons que lorsque la lamination λ a un support réunion de feuilles compactes, le courant ainsi défini coïncide avec le courant $F(\lambda)$ introduit précédemment comme une combinaison linéaire de masses de Dirac.

Toutefois, il nous faut montrer que le courant ainsi défini ne dépend pas de la réalisation (σ, p) de la lamination λ . Ceci découle de l'affirmation suivante:

AFFIRMATION 3.2.2. *Soit $\lambda \in \tilde{\mathcal{O}}$ une lamination mesurée réalisée dans la variété N' . Soit (γ_i) une suite de laminations à feuilles compactes qui converge vers λ pour la topologie de $\tilde{\mathcal{O}}$, ainsi que pour la topologie de Hausdorff. Alors, la suite $(F(\gamma_i))$ converge vers $F(\lambda)$ dans $C(N')$.*

PREUVE: Nous allons suivre les arguments utilisés dans [Bo1.§5].

D'après un lemme de théorie de la mesure, il nous suffit de montrer que pour tout disque fermé U , de codimension 1 dans $P^1(N')$, transverse au feuilletage \mathcal{F} tel que la mesure de la frontière de \mathcal{U} soit nulle, la masse déposée par $F(\gamma_i)$ sur U converge vers la masse déposée par $F(\lambda)$.

Soit (σ, p) une surface plissée qui réalise la lamination λ . Soit \mathcal{U} un petit disque transverse à \mathcal{F} dont la frontière a une $F(\lambda)$ -mesure nulle. On peut se restreindre aux disques contenus dans les petites variétés transverses qui ont servi à définir $F(\lambda)$.

Soit ϵ un nombre positif arbitraire. Munissons le fibré $P^1(N')$ de la distance associée à la métrique de N' . Il existe une couronne C_η d'épaisseur 2η autour de la frontière de U , dont la masse $F(\lambda)(C_\eta)$ est strictement inférieure à ϵ .

Considérons un réseau ferroviaire τ sur la surface S , tel que la lamination λ soit contenue dans un voisinage de τ .

On peut homotoper l'application p de sorte que l'image de τ soit un graphe dont les branches ont une petite courbure, et sont tangentes en leurs extrémités (*réseau différentiable*). Après une seconde homotopie, cette fois uniquement à la source, on obtient une application p' telle que la lamination λ à une image contenue dans $p'(\tau)$.

La condition de différentiabilité imposée à $p'(\tau)$ entraîne que l'on peut relever dans le fibré unitaire $P^1(N')$ l'image par p' de toute courbe portée par τ ; on notera \tilde{p}' l'application relevée.

On peut donc parler du poids déposé sur une sous-variété \mathcal{U} de codimension 1 dans $P^1(N')$ transverse à $\tilde{p}'(\tau)$, par $p'(\mu)$, dès que μ est une

lamination portée par τ : ce nombre s'exprime comme la somme des coordonnées de μ sur les branches b (comptées avec multiplicité) du réseau τ telles que $\tilde{p}'(b)$ rencontre U .

Si le réseau de départ τ est choisi suffisamment proche de λ , on peut garantir que :

- (1) l'homotopie de p à p' bouge les vecteurs tangents aux feuilles de λ de moins que $\eta/2$;
- (2) le réseau $p'(\tau)$ a une courbure suffisamment petite de sorte qu'une courbe fermée quelconque qu'il porte puisse être homotopée à sa géodésique de N' par une homotopie qui bouge les vecteurs tangents de moins que $\eta/2$.

Cette dernière propriété entraîne que pour une courbe fermée quelconque γ portée par le réseau τ , on a l'inégalité:

$$|p'(\gamma)(U) - F(\gamma)(U)| \leq p'(\gamma)(C_{\eta/2}).$$

D'après la définition de la mesure $F(\lambda)$, et la première propriété ci-dessus, la même inégalité est vérifiée entre les poids déposés sur U par les mesures $p'(\lambda)$ et $F(\lambda)$.

Remarquons maintenant que l'hypothèse que la suite (γ_i) converge géométriquement vers λ entraîne que tout réseau ferroviaire qui porte λ porte aussi presque tous les termes de la suite (γ_i) . On peut donc appliquer l'inégalité précédente à chaque terme de la suite (γ_i) , le réseau τ étant fixé.

On a aussi: $p'(\lambda)(C_{\eta/2}) \leq F(\lambda)(C_\eta)$. Donc $p'(\lambda)(C_{\eta/2}) < \epsilon$.

Choisissons maintenant les courbes γ_i suffisamment proches de λ de sorte que:

$$|p'(\gamma_i)(U) - p'(\lambda)(U)| \leq \epsilon$$

et

$$p'(\gamma_i)(C_\eta) \leq \epsilon.$$

On a alors: $|F(\gamma_i)(U) - F(\lambda)(U)| \leq 3\epsilon$. Ceci termine la preuve de l'affirmation 3.2.2. □

Pour terminer la preuve du théorème 3.2, il nous suffit de montrer l'affirmation suivante:

AFFIRMATION 3.2.3. *Soit (γ_i) une suite de multi-courbes dans \tilde{O} qui converge vers une lamination λ , réalisée dans la variété N' . Alors la suite $(F(\gamma_i))$ converge vers $F(\lambda)$ dans $C(N')$.*

PREUVE: On démontre cette affirmation d'une manière similaire à celle de l'affirmation précédente. On peut supposer que la suite (γ_i) converge pour la topologie de Hausdorff vers une lamination géodésique λ' . Le support de λ est donc contenu dans λ' .

D'après la proposition 2.10, la lamination λ' est réalisée par une surface plissée (σ, p) .

Soit τ un réseau ferroviaire quelconque qui porte la lamination λ' ; alors, d'après la convergence géométrique de la suite (γ_i) vers λ' , les multi-courbes γ_i seront portées par τ pour i suffisamment grand.

L'argument utilisé dans la preuve de l'affirmation précédente montre que la suite $(F(\gamma_i))$ converge dans $C(N')$ vers le courant $F(\lambda)$ associé à l'application (σ, p) .

D'après l'affirmation 3.2.2, le courant $F(\lambda)$ ne dépend pas de la réalisation (σ, p) .

Ceci démontre l'affirmation 3.2.3. □

L'application F peut d'après les affirmations 3.2.1 et 3.2.2, être définie en tout point de l'ouvert $V(\lambda)$. L'affirmation 3.2.3 entraîne que ce prolongement est une application continue.

Ceci termine la preuve du théorème 3.2. □

D'après le théorème précédent, l'application F est définie sur un ouvert dense de \tilde{O} , qui, d'autre part est invariant sous l'action du groupe $Mod^0(N)$. De plus, l'application F commute avec $Mod^0(N)$. On a donc une application continue d'un ouvert dense de $\tilde{O}/Mod^0(N)$ sur $C(N)$; comme cette application est homogène, on peut la voir comme une application F' d'un ouvert dense de $L(N)$ dans l'espace projectif $PC(N)$.

Dans le cas où la variété N' est géométriquement finie et sans cusps, d'après le corollaire 2.6, toutes les laminations mesurées de O sont réalisées, et donc l'application F' introduite ci-dessus est définie sur toute la variété $L(N)$.

Le reste de ce chapitre est consacré à l'étude de cette application F' dans le cas où N' est géométriquement finie. Nous allons montrer qu'alors, l'application F' est un homéomorphisme sur son image.

Commençons par l'injectivité.

THÉORÈME 3.3. *L'application F' est injective.*

PREUVE: Soient λ et λ' deux laminations de \tilde{O} qui ont la même image par l'application P . Nous allons construire un difféomorphisme ψ de $Mod^0(N)$ tel que $\psi(\lambda) = \lambda'$. On distingue pour cela trois cas, selon le type topologique de la lamination λ .

1er cas. La lamination λ a toutes ses feuilles compactes.

Alors, il en est de même pour la lamination λ' , d'après le théorème 2.8. Les supports respectifs des laminations λ et λ' sont homotopes dans N . On construit alors une application f du bretzel creux N dans lui-même, homotope à l'identité, qui envoie chaque composante de λ sur la composante de λ' qui lui est homotope.

On peut voir l'application f comme une application de la paire (N, λ) vers la paire (N, λ') ([Jo]). Puisque la paire (N, λ) est incompressible et anannulaire, l'application f est une équivalence d'homotopie de paires. Donc, d'après un théorème de Johansson (cf [Jo]), elle est homotope à travers des applications de paires à un difféomorphisme. La restriction au bord de ce difféomorphisme est un élément ψ de $Mod^0(N)$ qui envoie le support de λ sur le support de λ' .

2e cas. La lamination λ a toutes ses régions complémentaires simplement connexes.

Considérons deux applications plissées (σ, p) et (σ', p') définies sur S dont le lieu de plissage contient respectivement les laminations λ et λ' .

D'après la définition de l'application F , le support du courant $F(\lambda)$ est $P(\lambda)$, où l'application P est définie à partir de la réalisation de λ par l'application plissée p . Soit P' l'application associée à λ' . Puisque les deux applications P et P' sont des homéomorphismes sur leurs images (Théorème 2.8), l'application $P'^{-1} \circ P$ définit un homéomorphisme ϕ du support de la lamination λ sur la surface (S, σ) sur le support de la lamination λ' sur la surface (S, σ') .

Par construction, l'homéomorphisme ϕ est une isométrie le long des feuilles, et les applications p et $p' \circ \phi$ coïncident sur la lamination λ .

LEMME 3.3.1. *On peut prolonger l'application ϕ en un homéomorphisme de la surface S dont la classe d'isotopie appartient à $Mod^0(N)$.*

PREUVE: On commence par étendre cet homéomorphisme à un voisinage de la lamination λ .

Tout d'abord, on remarque que la lamination λ a un nombre fini de feuilles isolées: ces feuilles isolées se groupent par cycles où les feuilles dans un même cycle correspondent à une composante du bord d'une région complémentaire de λ dans S .

Si deux feuilles de λ sont asymptotes sur S , leurs images par ϕ sont deux feuilles de λ' qui sont aussi asymptotes, d'après le corollaire 2.9. Donc, l'image par ϕ des feuilles de λ contenues dans le bord d'une région complémentaire de λ est un cycle de feuilles contenues dans le bord d'une région complémentaire de λ' .

Puisque nous avons supposé que les régions complémentaires de λ étaient simplement connexes, il en est de même pour les régions complémentaires de λ' par un argument de caractéristique d'Euler.

On construit un feuilletage partiel des régions complémentaires de la lamination λ sur la surface (S, σ) en prenant les horocycles contenus dans ces régions de longueur inférieure à une constante que nous déterminerons plus tard; choisissons toutefois cette constante suffisamment petite de sorte que les horocycles ainsi construits soient disjoints. Ceci définit une sous-surface contenant λ et telle que chaque point de cette surface est contenu

dans λ ou dans un horocycle du type précédent. Effectuons la même construction sur la lamination λ' contenue dans la surface (S, σ') .

AFFIRMATION 3.3.2. *Les images par ϕ des extrémités d'un horocycle du feuilletage associé à λ sont les extrémités d'un horocycle du feuilletage associé à λ' .*

PREUVE: Considérons un horocycle h_0 du premier feuilletage. Tout d'abord, les images des extrémités de cet horocycle sont situées sur deux feuilles de λ' qui sont asymptotes. Supposons que ces extrémités ne sont pas extrémités d'un horocycle du feuilletage associé λ' .

Soient x_t et y_t les images par ϕ des extrémités de l'horocycle h_t obtenu en poussant h_0 à une distance t dans le cusp délimité par h_0 . On peut trouver une suite (x_{t_i}) telle que $P(x_{t_i})$ (et donc aussi $P(y_{t_i})$) convergent vers des points joints par un arc géodésique de longueur non nulle contenu dans une feuille de $P(\lambda')$.

D'autre part, ces points étant images des extrémités d'un horocycle dont la longueur tend vers 0, les deux limites sont en fait égales. Donc la lamination $P(\lambda)$ contient une orbite fermée. Ceci est en contradiction avec le fait que l'application P est un homéomorphisme sur son image.

□

L'affirmation précédente permet d'étendre l'application ϕ sur le voisinage feuilleté de λ en un homéomorphisme qui respecte les feuilletages horocycliques. On prolonge ensuite cette application en un homéomorphisme ψ de la surface S en utilisant le fait que les régions complémentaires des laminations λ et λ' sont toutes deux simplement connexes.

Soit h un horocycle du feuilletage associé à λ . Si la longueur des horocycles a été choisie inférieure à la moitié du rayon d'injectivité sur un voisinage compact de $p(\lambda)$, l'arc $p(h)$ sera homotope à extrémités fixes à l'arc $p' \circ \psi(h)$ dans la variété N' .

Donc, par construction, les applications p et $p' \circ \psi$ sont homotopes lorsque on les restreint au voisinage feuilleté de λ construit. On en déduit, puisque le groupe fondamental de ce voisinage se surjecte dans le groupe fondamental de S , que les deux applications p et $p' \circ \psi$ sont homotopes.

Donc la classe d'isotopie de l'homéomorphisme ψ appartient à $Mod^0(N)$.

Ceci termine la preuve du lemme 3.3.1. □

On a ainsi ramené la situation à celle de deux laminations mesurées λ et $\psi(\lambda')$ qui ont le même support et telles que $F(\lambda) = F(\lambda')$.

Il découle alors de la définition de l'application F , que les mesures transverses de ces laminations coïncident.

Ceci résout le problème de l'injectivité dans ce cas.

3e cas. La lamination λ est quelconque.

Il nous suffit de considérer le cas où la lamination λ n'est ni une réunion de feuilles compactes, ni réduite à un minimal exceptionnel dont les régions complémentaires sont simplement connexes.

On construit comme dans le deuxième cas, un homéomorphisme du support de λ vers le support de λ' : cet homéomorphisme peut être prolongé à un voisinage $\mathcal{V}(\lambda)$ de chacune des composantes de λ qui est un minimal exceptionnel, en un homéomorphisme à valeurs dans un voisinage $\mathcal{V}(\lambda')$ des composantes correspondantes de la lamination λ' .

Notons ϕ l'homéomorphisme ainsi construit. L'homéomorphisme ϕ a la propriété que, pour toute courbe tracée dans une composante connexe du voisinage $\mathcal{V}(\lambda)$, l'image de cette courbe par ϕ lui est homotope dans la variété N .

On choisit maintenant une suite de laminations à feuilles compactes (λ_i) avec les propriétés suivantes:

- (1) pour tout i , le support de la lamination λ_i est contenu dans la réunion des feuilles compactes de λ et des voisinages feuilletés $\mathcal{V}(\lambda)$ des composantes minimales de λ ;
- (2) la suite (λ_i) converge dans l'espace des laminations mesurées vers la lamination λ .

Considérons pour tout i , les deux laminations λ_i et $\phi(\lambda_i)$. D'après le premier cas, il existe un difféomorphisme ψ_i appartenant à $Mod^0(N)$ tel que $\psi_i(\lambda_i) = \phi(\lambda_i)$.

Lorsque i tend vers l'infini, la suite $(\phi(\lambda_i))$ tend vers la lamination $\phi(\lambda)$ dont le support coïncide avec celui de λ' . La lamination $\phi(\lambda)$ appartient donc à l'ouvert \tilde{O} .

Puisque l'action du groupe $Mod^0(N)$ est proprement discontinue sur l'ouvert \tilde{O} (car elle l'est sur O), les classes d'isotopie de difféomorphismes ψ_i sont en nombre fini. On peut donc supposer, quitte à extraire une sous-suite de la suite λ_i que le même difféomorphisme ψ intervient. On a alors par continuité: $\psi(\lambda) = \phi(\lambda)$.

On conclut comme dans le deuxième cas. Les deux laminations $\psi(\lambda)$ et λ' ont le même support et leurs images par l'application F sont égales. Elles sont donc égales en tant que laminations mesurées.

Ceci termine la preuve du théorème 3.3. □

Nous allons maintenant montrer le résultat suivant:

THÉORÈME 3.4. *L'application F' est un homéomorphisme sur son image.*

PREUVE: Il nous suffit de montrer que si (λ_i) est une suite de laminations dans l'ouvert \tilde{O} , telle que la suite de courants $(F(\lambda_i))$ converge vers le courant $F(\lambda)$ dans $C(N)$, où λ est un élément de \tilde{O} , alors il existe des

difféomorphismes ϕ_i dont les classes d'isotopie appartiennent au groupe $Mod^0(N)$ tels que la suite de laminations $(\phi_i(\lambda_i))$ converge vers λ pour la topologie de \tilde{O} .

On peut se restreindre au cas où les laminations λ_i ont toutes pour support une réunion de feuilles compactes, d'après la continuité de l'application F .

Nous allons d'abord traiter le cas où le bretzel creux N a pour groupe fondamental un groupe libre; nous indiquerons dans le chapitre suivant les modifications à apporter pour traiter le cas général.

La stratégie de la démonstration consiste à partir d'un système admissible méridiens α par rapport auquel la lamination λ est en position tendue, et de trouver des éléments ϕ_i du groupe $Mod^0(N)$ tels que les laminations $\phi_i(\lambda_i)$ convergent vers une lamination λ' , en position tendue par rapport au même système α . On montrera ensuite que la lamination λ' appartient nécessairement à \tilde{O} . Ceci permettra de conclure grâce à l'injectivité de l'application F' .

Le premier problème est de nature topologique: nous avons besoin de comprendre à quelle condition on peut modifier une lamination de O à feuilles compactes par un difféomorphisme ϕ dans $Mod^0(N)$ pour la rendre en position tendue par rapport à un système admissible donné.

Rappelons que si l'on n'impose pas au difféomorphisme ϕ d'avoir sa classe d'isotopie dans $Mod^0(N)$, on peut toujours mettre une lamination de O en position tendue par rapport à un système admissible donné en lui appliquant un difféomorphisme de $Mod(N)$ (cf Théorème 1.3).

Nous allons trouver une condition nécessaire et suffisante de nature combinatoire pour qu'un tel difféomorphisme ϕ existe dans le groupe $Mod^0(N)$.

Pour cela, soit α un système admissible de méridiens de la surface S .

Soit S' le revêtement planaire de la surface S , bord du bretzel N , introduit dans le chapitre 1. Les bouts de ce revêtement s'identifient de manière naturelle à un ensemble de Cantor K .

On construit à partir du système de méridiens α , un domaine fondamental pour l'action du groupe $G = \pi_1(N)$ sur la surface S' . Ce domaine fondamental est une surface planaire \mathcal{D} avec $2g$ composantes de bord, que l'on peut voir comme la fermeture d'une composante connexe de la préimage de $S - \alpha$ dans S' .

Soit m une composante de bord de la surface \mathcal{D} . La courbe m définit une partition de l'ensemble de Cantor K en deux compacts disjoints m^+ et m^- . Choisissons les indices $+$ ou $-$ de sorte que les compacts m^+ soient disjoints lorsque m décrit la frontière de \mathcal{D} : ils forment donc une partition de K en $2g$ compacts m_i^+ .

Donnons-nous maintenant un courant géodésique μ ; à partir du système de méridiens α , nous allons construire un graphe qui va jouer en quelque sorte le rôle d'un réseau ferroviaire pour le courant μ .

Les sommets de ce graphe sont en bijection avec les éléments de la partition définie ci-dessus; on joint deux sommets par une arête s'il existe un couple (a, b) dans le support de μ tel que a et b appartiennent respectivement aux deux éléments de la partition correspondants aux sommets considérés.

Cette construction n'est autre que la généralisation d'une construction de Whitehead dans le cas où le courant μ était une masse de Dirac ([W]).

Définition. Nous appellerons le graphe ainsi défini *le graphe de Whitehead du courant μ relativement au système de méridiens α* et nous le noterons $\Gamma_\alpha(\mu)$.

REMARQUE 3.5. Soit (μ_i) une suite de courants qui converge vaguement vers un courant μ . Soit α un système admissible de méridiens. Alors, le graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$ est contenu de façon naturelle, pour tout entier i suffisamment grand, dans le graphe $\Gamma_\alpha(\mu_i)$.

Cette remarque étant faite, considérons maintenant le cas d'une mesure μ , qui est une somme finie de masses de Dirac.

Nous allons associer au support de la mesure μ une relation d'équivalence sur l'ensemble K , par une construction qui sera exploitée dans un cadre plus général dans la suite.

On interprète le courant μ comme une mesure de Radon sur $M(K)$, invariante sous l'action du groupe G . Le support de cette mesure est un fermé de $M(K)$ que l'on peut relever dans $K \times K$. Soit $\mathcal{G} \subset K \times K$ la réunion de ce support et de la diagonale.

PROPOSITION 3.6. Lorsque le support de μ est une réunion finie de feuilles compactes, l'ensemble \mathcal{G} introduit ci-dessus est le graphe d'une relation d'équivalence sur K d'espace quotient séparé.

PREUVE: Un couple de points distincts (a, b) est dans \mathcal{G} , si et seulement si il existe un élément du groupe G relevant une composante du support de μ qui le fixe.

Deux couples différents de points distincts de \mathcal{G} n'ont jamais une extrémité en commun, car deux éléments de G , ou bien n'ont aucun point fixe en commun, ou bien ont exactement deux points fixes en commun.

Que \mathcal{G} soit fermé dans $K \times K$ résulte du fait que le support de μ dans $M(K)$ est fermé. D'après la remarque précédente c'est le graphe d'une relation d'équivalence. Puisque K est compact, l'espace quotient de cette relation est séparé. \square

Notons K_μ l'espace quotient de K par cette relation.

Nous allons maintenant relier des propriétés combinatoires du graphe de Whitehead $\Gamma(\mu)$ avec des propriétés topologiques de l'espace quotient K_μ .

PROPOSITION 3.7. *Soit μ un courant géodésique de $C(N)$. Supposons que le graphe $\Gamma(\mu)$ est connexe ainsi que le complémentaire de chacun de ses sommets. Alors, pour tout i , et pour toute partition de m_i^+ en deux compacts disjoints A et B , il existe une feuille du support de μ dont les bouts sont respectivement contenus dans A et dans B .*

PREUVE: On raisonne par l'absurde. Le fermé m_i^+ peut alors être écrit comme la réunion de deux compacts disjoints A et B de sorte qu'il n'existe aucun couple dans le support de la mesure μ dont une extrémité est dans A et l'autre dans B .

Au système de méridiens α , on peut associer une base de voisinages pour le fermé m_i^+ de la façon suivante. Chaque translaté par un élément du groupe G de la partition associée à un méridien du système α définit une nouvelle partition de K . Considérons la famille des ouverts de ces partitions qui sont entièrement contenus dans m_i^+ . Les ouverts ainsi construits engendrent la topologie de m_i^+ ; nous appellerons ces ouverts des *ouverts basiques*.

On peut exprimer chacun des compacts (ouverts) A et B comme la réunion d'un nombre fini d'ouverts basiques. Etant donné deux ouverts basiques, ou bien ils sont disjoints, ou bien l'un est contenu dans l'autre: on peut donc supposer que les ouverts basiques qui interviennent dans la décomposition de A et de B sont disjoints.

Choisissons parmi toutes les décompositions de ce type une qui possède le plus petit nombre d'éléments.

Rappelons que la composante de la préimage de α qui définit m_i^+ est une composante de bord du domaine fondamental \mathcal{D} de l'action de G sur S' .

Chaque ouvert basique qui intervient dans la décomposition de A et de B est associé à une composante de la préimage de α , dans la frontière d'un unique translaté de \mathcal{D} . Choisissons parmi les translatsés de \mathcal{D} associés à la décomposition de A et de B un translaté $g(\mathcal{D})$ qui est à distance maximale de \mathcal{D} : ici, la distance entre deux translatsés de \mathcal{D} mesure le nombre minimal de composantes de la préimage de α que l'on rencontre pour joindre ces deux translatsés de \mathcal{D} par un chemin.

Soit m la composante de la frontière de $g(\mathcal{D})$ qui sépare, dans S' , les surfaces \mathcal{D} et $g(\mathcal{D})$. D'après l'hypothèse de maximalité de la distance, chaque composante de la frontière de $g(\mathcal{D})$ différente de m définit un ouvert basique qui intervient dans les décompositions de A ou de B ci-dessus. D'après l'hypothèse de minimalité sur la cardinalité des recouvrements de A et de B , on voit apparaître parmi ces $2g - 1$ ouverts,

des ouverts qui interviennent dans le recouvrement de A et d'autres qui interviennent dans le recouvrement de B .

Le fait qu'il n'y a pas de connexions de A à B dans le domaine $g(\mathcal{D})$ traduit alors exactement le fait que le graphe de Whitehead du courant μ ou bien est non connexe ou bien peut être disconnecté en lui enlevant un sommet, à savoir celui qui correspond au méridien m .

Cette contradiction avec l'hypothèse termine la preuve de la proposition 3.7. \square

COROLLAIRE 3.8. *Soit μ un courant géodésique de $C(N)$ dont le support est réunion d'un nombre fini de géodésiques fermées. Alors l'espace K_μ est localement connexe.*

PREUVE: Si le support de μ est réunion d'un nombre fini de feuilles compactes, l'espace K_μ est défini et la projection de m_{i+} dans K_γ a une image connexe, pour tout indice i , d'après la proposition 3.7. Puisque les translatés par le groupe G de ces ouverts forment une base de voisinages fermés de K , leurs projections dans K_μ forment une base de voisinages fermés connexes. \square

Nous allons maintenant restreindre notre attention aux courants $F(\lambda)$, où λ est une lamination à feuilles compactes de l'ouvert \tilde{O} . On désignera par K_λ l'espace quotient de K par la relation d'équivalence associée au courant $F(\lambda)$.

Soit d'autre part α un système admissible de méridiens pour le bretzel N . On notera Γ_λ le graphe de Whitehead du courant $F(\lambda)$ par rapport au système α .

Nous allons maintenant montrer le résultat suivant:

THÉORÈME 3.9. *Soit λ une lamination à feuilles compactes telle que le graphe de Whitehead Γ_λ est connexe, ainsi que le complémentaire de chacun de ses sommets. Alors, il existe un difféomorphisme ϕ du groupe $Mod^0(N)$, tel que la lamination $\phi(\lambda)$ soit en position prétendue par rapport au système admissible α .*

PREUVE: Pour la démonstration de ce théorème, nous allons utiliser l'existence d'un plongement du compact K_λ dans la sphère S^2 . On pourrait construire un tel plongement par des méthodes purement topologiques, mais les propriétés qui nous intéressent de ce plongement seraient plus difficiles à établir. Aussi, nous allons utiliser la géométrie hyperbolique, et identifier K_λ avec l'ensemble limite d'un groupe kleinien.

AFFIRMATION 3.9.1. *Le fermé K_λ est homéomorphe à l'ensemble limite dans S^2 d'un groupe Kleinien géométriquement fini. La fermeture de chaque région complémentaire de ce fermé dans la sphère S^2 est un disque*

fermé. Les frontières de deux composantes complémentaires de K_λ dans S^2 ont au plus un point en commun.

PREUVE: La variété parée (N, λ) est incompressible et anannulaire (cf Remarque 1.15). Donc, d'après le théorème d'hyperbolisation, il existe une métrique hyperbolique complète sur N , telle que les régions complémentaires de la lamination λ sur $S = \partial N$ soient totalement géodésiques et que les courbes λ soient homotopes à des éléments paraboliques. Soit Γ le sous groupe de $\text{PSL}_2(\mathbf{C})$ ainsi obtenu.

D'après un théorème de W.Floyd ([F1]), l'ensemble limite de du groupe Γ est homéomorphe de façon équivariante à K_λ .

Le fait que les composantes du complémentaire de λ sur la surface S soient totalement géodésiques pour la métrique associée à Γ entraîne que la fermeture de chaque région complémentaire de K_λ dans la sphère S^2 est homéomorphe à un disque fermé. \square

Définition. Une courbe de Jordan contenue dans la frontière d'une région complémentaire de K_λ sera appelée une *courbe frontière*.

Soit \mathcal{D} un domaine fondamental pour l'action du groupe G sur la sphère S' associé au système admissible α . Soient $(m_i^+), i = 1, \dots, 2g$ les $2g$ fermés de K délimités par les composantes du bord de \mathcal{D} .

On note π la projection de l'ensemble de Cantor K sur K_λ . Identifiant l'espace K_λ avec l'ensemble limite d'un groupe Kleinien grâce à l'affirmation 3.9.1, nous allons montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 3.9.2. *Il existe des courbes de Jordan γ_i , pour $i = 1, \dots, 2g$, contenues dans la sphère S^2 , se rencontrant tangentiellement en un nombre fini de points telles que pour tout $i = 1, \dots, 2g$ l'un des disques de la sphère S^2 , délimité par la courbe γ_i , intersecte l'espace quotient K_λ exactement en l'ensemble $\pi(m_i^+)$.*

PREUVE: Considérons tout d'abord l'intersection de deux fermés distincts $\pi(m_i^+)$ et $\pi(m_j^+)$. Cette intersection est exactement l'image dans K_λ des couples $(a, b) \in (m_i^+ \times m_j^+)$, où a et b sont les points fixes dans K d'un élément de G relevant une composante du support de λ . Cette intersection est donc finie. D'autre part, ces points d'intersection sont des points fixes dans K_λ d'éléments de G dans la classe de conjugaison de composantes du support de λ .

Soit p un point dans cette intersection. D'après la construction du plongement de K_λ dans l'affirmation 3.9.1, il existe dans K_λ exactement deux courbes frontières c_1 et c_2 , qui contiennent p . Ces deux courbes frontières sont tangentes exactement au point p .

La seule finitude de l'intersection $\pi(m_i^+) \cap \pi(m_j^+)$ entraîne l'affirmation suivante sur l'allure de ces deux fermés près du point p .

Soit tout d'abord k un petit arc dans S^2 qui intersecte les deux courbes c_1 et c_2 , transversalement au point p .

AFFIRMATION 3.9.3. *Il existe un disque D , voisinage du point p sur la sphère S^2 tel que l'intersection de chacune des deux composantes connexes de $D - k$ avec K_λ est entièrement contenue, l'une dans $\pi(m_i^+)$, l'autre dans $\pi(m_j^+)$.*

PREUVE: Rappelons que l'intersection de deux fermés $\pi(m_k^+)$ et $\pi(m_l^+)$ est finie. Choisissons alors un disque D , voisinage du point p suffisamment petit de sorte que p soit le seul point de ces intersections contenu dans D . On peut choisir aussi ce disque de sorte que sa frontière ne rencontre qu'un nombre fini de courbes frontières.

L'intersection de chacune des courbes c_i avec D est un arc. Le point p découpe chacun de ces arcs en deux composantes, chacune contenue dans l'un des fermés $\pi(m_k^+)$.

Deux de ces arcs c'_1 et c'_2 qui sont d'un même côté de l'arc k sont contenus dans le même fermé. En effet, on peut joindre ces arcs par une chaîne finie de courbes frontières tangentes et contenues dans $D - k$. Puisque chacune de ces courbes est entièrement contenue dans l'intérieur de l'un des fermés $\pi(m_k^+)$, toutes ces courbes sont contenues dans le même fermé. Il en est donc de même pour les arcs c'_1 et c'_2 .

L'argument précédent montre aussi que chaque courbe frontière contenue dans $D - k$ est contenue dans le même fermé que les deux arcs c'_1 et c'_2 . La densité des courbes frontières dans le quotient K_λ entraîne alors que l'intersection de chacune des deux composantes de $D - k$ avec K_λ est entièrement contenue dans un fermé $\pi(m_k^+)$.

Maintenant, comme le point p est dans la frontière des fermés $\pi(m_i^+)$ et $\pi(m_j^+)$, l'intersection de chacune des deux composantes de $D - k$ avec K_λ est entièrement contenue soit dans $\pi(m_i^+)$, soit dans $\pi(m_j^+)$.

Ceci termine la démonstration de l'affirmation 3.9.3. □

Reprenons la démonstration de la proposition 3.9.2.

Définition. Nous dirons qu'une courbe frontière de K_λ est *exceptionnelle* lorsqu'elle contient des points de la frontière de l'un des fermés $\pi(m_i^+)$.

Il y a donc un nombre fini de courbes exceptionnelles, toutes les autres courbes étant entièrement contenues dans l'intérieur d'un fermé $\pi(m_i^+)$. Chaque courbe exceptionnelle est réunion d'un nombre fini d'intervalles, chacun contenu dans un même fermé $\pi(m_i^+)$, et qui s'intersectent en leurs extrémités.

Soit D le disque de S^2 bordé par une courbe frontière exceptionnelle, et d'intérieur disjoint de K_λ . Pour chaque intervalle, composante connexe de l'intersection de ∂D avec l'un des fermés $\pi(m_i^+)$, choisissons un arc proprement plongé dans D et ayant les mêmes extrémités que cet

intervalle. On peut choisir ces arcs de sorte que leurs intérieurs soient disjoints.

Ces arcs peuvent être groupés en $2g$ familles selon la composante $\pi(m_i^+)$ qui a servi à les définir. D'après l'affirmation 3.9.3, près d'un point p de l'intersection de deux fermés $\pi(m_i^+)$ et $\pi(m_j^+)$, les arcs construits se recollent en deux arcs l'un dans la famille d'indice i , l'autre dans la famille d'indice j , tangents au point p et coupant transversalement K_λ . La réunion des arcs dans une même famille est donc une collection de courbes fermées disjointes, qui rencontre l'espace quotient K_λ en un nombre fini de points.

AFFIRMATION 3.9.4. *Pour tout indice $i = 1, \dots, 2g$, la collection de courbes associées à l'indice j ne contient qu'un seul élément.*

PREUVE: Soit m_j^- le complémentaire dans l'ensemble K du compact m_j^+ . La projection $\pi(m_j^-)$ dans K_λ est homéomorphe, par un élément du groupe G associé au domaine fondamental \mathcal{D} , à un fermé $\pi(m_k^+)$, pour un certain indice $j \in 1, \dots, 2g$. Donc $\pi(m_j^-)$ est connexe, d'après l'hypothèse sur le graphe $\Gamma(\lambda)$.

Maintenant, chaque composante du complémentaire dans S^2 de cette collection de courbes d'indice j est une surface dont l'intersection avec K_λ est entièrement contenue dans le fermé $\pi(m_j^+)$ ou dans le fermé $\pi(m_j^-)$: ceci d'après l'allure locale de $\pi(m_j^+)$ près de ces points frontières (Affirmation 3.9.3), et parce que $K_\lambda = \pi(m_j^+) \cup \pi(m_j^-)$.

Si la collection de courbes associées à l'indice j n'était pas connexe, on contredirait alors la connexité de l'un de ces deux fermés. Or $\pi(m_j^+)$ est connexe, par hypothèse, et $\pi(m_j^-)$ l'est aussi, comme on vient de voir.

Ceci termine la preuve de l'affirmation 3.9.4. □

Soit donc γ_i la courbe de Jordan fournie par l'affirmation précédente, associée à l'indice j . Cette courbe découpe S^2 en deux disques fermés qui intersectent K_λ respectivement en $\pi(m_i^+)$ et en $\pi(m_i^-)$.

Lorsque j décrit l'ensemble $(1, \dots, 2g)$, les courbes γ_j ont des contacts tangentiels.

Le disque bordé par γ_i et qui contient la composante $\pi(m_i^+)$ ne contient dans son intérieur aucune des courbes γ_j , car l'intersection des deux fermés $\pi(m_i^+)$ et $\pi(m_j^+)$ est contenue dans la frontière γ_i .

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.9.2. □

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.9.

Au domaine fondamental \mathcal{D} , on associe une base (g_i) du groupe fondamental G , et une numérotation des $2g$ courbes (m_i) de la frontière ∂F , telle que $g_i(m_i) = m_{i+g}$.

On notera N_λ la variété hyperbolique utilisée dans la démonstration de l'affirmation 3.9.1, c'est à dire la variété hyperbolique homéomorphe à N pour laquelle les composantes du support de λ sont paraboliques, et les composantes de $\partial N - \lambda$ sont totalement géodésiques. Le revêtement universel de la variété N_λ est l'enveloppe convexe de l'ensemble limite K_λ dans \mathbf{H}^3 . On identifiera le bord de ce revêtement avec le complémentaire de K_λ dans la sphère S^2 , par la projection orthogonale.

Considérons la partie fine de la variété N_λ ; chaque composante de cette partie fine est homéomorphe au produit d'un anneau par l'intervalle $[0, \infty[$, et est contenue dans un voisinage de chaque cusp de N_λ .

Notons N'_λ la fermeture du complémentaire dans N_λ de cette partie fine. La variété N'_λ est homéomorphe à N . De plus le bord de N'_λ porte la marque des composantes de la partie fine qui ont été enlevées. Par construction de N_λ , c'est une réunion d'anneaux $A(\lambda)$, voisinages réguliers des composantes du support de λ .

Soit \tilde{N} la préimage dans \mathbf{H}^3 de N'_λ . On a une action naturelle du groupe $G = \pi_1(N)$ sur cette variété.

En utilisant la proposition 3.9.2, nous allons montrer le résultat suivant: on rappelle que (g_i) est la base du groupe G , associée précédemment au domaine fondamental \mathcal{D} .

PROPOSITION 3.9.5. *Il existe sur $\partial\tilde{N}$ des courbes de Jordan disjointes (m'_i) , pour $i = 1, \dots, 2g$, telles que:*

- (1) *les courbes (m'_i) bordent une surface planaire $F' \subset \partial\tilde{N}$;*
- (2) *pour tout $i \in (1, \dots, g)$, on a: $g_i(m'_i) = m'_{i+g}$;*
- (3) *l'intersection de chaque courbe m'_i avec toute composante de la préimage de $A(\lambda)$ est connexe.*

PREUVE: Identifions le bord de \tilde{N}_λ et le complémentaire de K_λ dans la sphère S^2 . On passe de \tilde{N}_λ à \tilde{N} en enlevant les composantes de la préimage de la partie fine de N_λ .

Réalisons sur le bord de \tilde{N}_λ les courbes γ_i fournies par la proposition 3.9.2, par des géodésiques dans chaque composante de $S^2 - K_\lambda$ qu'elles traversent. Soient γ'_i les courbes (non compactes) obtenues. On a alors la propriété: $g_i(\gamma_i) = \gamma_{i+g}$.

Pour obtenir à partir des courbes γ'_i , les courbes m'_i cherchées, considérons leur intersection avec le bord de \tilde{N} : c'est une réunion d'arcs, plongés et disjoints.

Sur le bord de chaque composante de la préimage des anneaux $A(\lambda)$ que les courbes γ'_i rencontrent, on a deux paires de points d'intersection (une paire sur chaque composante du bord du relevé de cet anneau). Puisque les courbes γ_i ont des contacts tangentiels dans S^2 , ces deux paires de points apparaissent dans le même ordre sur chacune des deux composantes de la frontière de ce relevé.

On peut donc prolonger à l'intérieur de ces anneaux la réunion d'arcs $\gamma'_i \cap \tilde{N}$ en des courbes fermées disjointes m'_i .

Prolongeons les par exemple par des géodésiques de la métrique (plate) induite sur ces anneaux: la 2ème conclusion de la proposition 3.9.5 sera alors vérifiée.

La troisième conclusion est vérifiée car les courbes γ_i fournies par la proposition 3.9.2 sont plongées dans S^2 : les courbes γ'_i passent donc au plus une fois par chaque cusp de \tilde{N} .

La première conclusion est aussi vérifiée car, dans S^2 , chaque courbe γ_i borde un disque dont l'intérieur est disjoint de toutes les autres. Il en est donc de même, d'après la construction pour les courbes m'_i sur le bord de \tilde{N} .

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.9.5. □

Pour terminer la démonstration du théorème 3.9, nous remarquons que la surface \mathcal{D}' , bordée dans $\partial\tilde{N}$ par les courbes m'_i est un domaine fondamental pour l'action du groupe G , d'après la condition (3) de la proposition 3.9.5.

Identifions, comme les notations nous y invitent, la variété \tilde{N} avec le revêtement universel du bretzel N . Ainsi, on peut considérer que les deux surfaces planaires \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont contenues toutes deux sur le bord de \tilde{N} .

A partir d'un homéomorphisme entre les deux surfaces \mathcal{D} et \mathcal{D}' , on en construit un autre ϕ , tel que

$$\forall i = 1, \dots, g, \forall x \in m_i, \phi(g_i(x)) = g_i(\phi_i(x))$$

ceci par une isotopie supportée sur dans un voisinage régulier de la réunion des courbes m_i , pour $i \in g + 1, \dots, 2g$.

Cet homéomorphisme peut alors être prolongé, d'après la deuxième condition en un homéomorphisme ϕ de $\partial\tilde{N}$ qui commute avec l'action du groupe G .

Cet homéomorphisme se projette en un homéomorphisme ψ de la surface ∂N , dont la classe d'isotopie est dans le groupe $Mod^0(N)$.

D'après la troisième conclusion de la proposition 3.9.5, la lamination λ est en position prétendue par rapport au système de méridiens $\psi(\alpha)$.

Donc la lamination $\psi^{-1}(\lambda)$ est en position prétendue par rapport au système de méridiens α .

Ceci termine la preuve du théorème 3.9. □

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 3.5. Soit donc (λ_i) une suite de laminations de l'ouvert \hat{O} telles que les courants $F(\lambda_i)$ convergent dans $C(N)$ vers un courant $F(\lambda)$, où λ est un élément de \hat{O} . Nous allons montrer que la suite λ_i converge dans $L(N)$ vers la lamination λ (nous gardons la même notation pour une lamination mesurée et pour son image dans $PML(S)$).

On peut supposer, d'après la continuité de l'application F et la densité des laminations à feuilles compactes que les laminations λ_i sont toutes à feuilles compactes.

D'autre part, comme λ est une lamination de l'ouvert O , il existe d'après le théorème 1.3, un système admissible α par rapport auquel elle est en position tendue.

PROPOSITION 3.10. *Soit λ une lamination de l'ouvert O en position prétendue par rapport à un système de méridiens α . Alors elle est en position tendue par rapport à ce même système α si et seulement si, le graphe de Whitehead $\Gamma_\alpha(F(\lambda))$ est connexe ainsi que le complémentaire de chacun de ses sommets.*

Pour la démonstration de ce lemme, nous allons donner une autre définition de l'application F , qui montrera le lien entre le graphe de Whitehead d'une lamination et la combinatoire de cette lamination sur la surface ∂N .

Soit λ une lamination de $ML(S)$ en position prétendue par rapport à un système admissible donné α . Si le support de cette lamination est une réunion de feuilles compactes, on peut définir une lamination image $F(\lambda)$ dans $C(N)$: en effet chaque composante de λ représente une classe de conjugaison particulière non triviale du groupe G . Cette classe de conjugaison peut être divisible mais définit toutefois une masse de Dirac dans $C(N)$: le support en est la racine dans G de la classe de conjugaison, et le poids transverse est l'ordre de divisibilité. Si on associe à λ la combinaison linéaire des images de ses composantes, on définit un courant de $C(G)$, qui si λ appartient à \tilde{O} , coïncide avec le courant $F(\lambda)$ (cf Remarque 1.15).

Nous allons maintenant généraliser cette construction à une lamination λ de $ML(S)$ à laquelle on demande seulement d'être en position prétendue par rapport à un système admissible donné α .

On va utiliser comme définition de courant géodésique celle de mesure de Borel G -invariante sur $M(K)$.

Soit S' le revêtement planaire de la surface S , bord du bretzel N . Les bouts de ce revêtement s'identifient de manière naturelle avec l'ensemble limite K du groupe $G = \pi_1(N)$.

Notons $\tilde{\lambda}$ la préimage dans ce revêtement de la lamination λ .

Chaque feuille de $\tilde{\lambda}$ coupe au plus une fois chaque composante de la préimage de α , puisque la lamination λ est en position prétendue par rapport au système α . D'autre part, d'après la définition de *prétendue* aucune feuille de $\tilde{\lambda}$ n'est compacte. En particulier, chaque relevé de α dans S' a une intersection non nulle avec $\tilde{\lambda}$.

Un relevé particulier d'une composante de α définit une *coupure* de K en deux compacts disjoints. Si on se donne deux composantes distinctes

α_1 et α_2 de la préimage de α , on définit un ouvert de K : en effet, exactement deux des ouverts bordés par ces composantes sont disjoints, de sorte que leur produit définit un ouvert compact $U(\alpha_1, \alpha_2)$ de $M(K)$.

Si on considère tous les ouverts ainsi associés aux paires de composantes de la préimage de α , on obtient une famille d'ouverts F_α qui engendre la topologie de $M(K)$.

Une autre propriété de la famille F_α est que l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des ouverts de la famille F_α est dense dans l'espace des fonctions continues à support compact sur $M(K)$. Grâce à cette dernière propriété, pour définir une mesure sur $M(K)$, il nous suffit de donner la valeur de cette mesure sur les ouverts de la famille F_α , de sorte que la relation d'additivité finie soit vérifiée. (La densité de l'espace des fonctions caractéristiques sur les éléments de F_α permettra ensuite d'intégrer cette mesure sur toutes les fonctions continues).

Si λ est une lamination en position prétendue par rapport à α , on définit un courant $F(\lambda)$ (la justification de cette notation apparaîtra plus tard) de la manière suivante.

Soient α_1 et α_2 deux composantes de la préimage de α dans S' . L'ensemble des feuilles de $\tilde{\lambda}$ qui coupent exactement une fois α_1 et α_2 est compact dans l'espace des feuilles de $\tilde{\lambda}$. On peut donc prendre sa masse pour la mesure transverse de $\tilde{\lambda}$. Ce nombre sera la masse de l'ouvert $U(\alpha_1, \alpha_2)$ pour $F(\lambda)$. Cette fonctionnelle est finiment additive et définit donc d'après la remarque précédente, une mesure de Borel sur $M(K)$. La relation d'invariance sous l'action de G est automatiquement vérifiée.

L'allure du support de $F(\lambda)$ est décrite par le résultat suivant:

AFFIRMATION 3.10.1. *Le support du courant $F(\lambda)$ considéré comme une mesure sur $M(K)$ est exactement l'ensemble des bouts des feuilles de la lamination $\tilde{\lambda}$ dans $M(K)$.*

PREUVE: On a une inclusion de l'ensemble des bouts de $\tilde{\lambda}$ dans le support de la mesure $F(\lambda)$, car chaque feuille de la lamination $\tilde{\lambda}$ est dans le support de la mesure transverse à $\tilde{\lambda}$.

La réciproque découle du fait que le support de la lamination $\tilde{\lambda}$ est fermé dans S' et que l'application qui à une feuille de $\tilde{\lambda}$ associe la paire de $M(K)$ formée de ses deux bouts est continue (Lemme 1.14). \square

D'après l'affirmation 3.10.1, lorsque le support de la lamination λ est réunion de feuilles compactes, les deux définitions du courant $F(\lambda)$ coïncident.

Pour montrer que la nouvelle définition est la même que l'ancienne dans le cas des laminations de l'ouvert \tilde{O} , nous commençons par établir la continuité de l'application définie.

AFFIRMATION 3.10.2. Soit A_α l'ensemble des laminations de $ML(S)$ en position prétendue par rapport au système admissible α , ensemble que l'on munit de la topologie induite de celle de $ML(S)$. Alors, l'application restreinte $F|_{A_\alpha}$ est continue.

PREUVE: Il nous suffit de montrer que pour tout ouvert de la base F_α , la masse déposée sur cet ouvert par $F(\lambda)$ varie continument lorsque λ décrit A_α .

Soit λ une lamination de A_α . Puisque le nombre d'intersection de chaque composante de la préimage de α avec la lamination $\tilde{\lambda}$ est non nul, la continuité au point λ découle directement de la définition de F et de la topologie sur l'espace des laminations $ML(S)$. \square

L'affirmation 3.10.2 entraîne que la définition de l'application F coïncide avec celle donnée dans le théorème 3.2, puisque ces deux applications continues coïncident sur un ensemble dense.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la proposition 3.10.

PREUVE: Le graphe de Whitehead du courant $F(\lambda)$ sur le système admissible α peut d'après les affirmations 3.10.1 et 3.10.2, être décrit de la façon suivante.

On choisit un domaine fondamental \mathcal{D} pour l'action du groupe G sur la surface S' , en prenant la fermeture d'une composante du complémentaire de la préimage de α dans S' . Les composantes de la frontière de \mathcal{D} s'identifient alors de façon naturelle aux sommets du graphe de Whitehead de $F(\lambda)$ sur la base α .

D'après la description précédente de l'application F , le graphe $\Gamma_\alpha(F(\lambda))$ contient une arête joignant deux sommets donnés si et seulement si la lamination $\tilde{\lambda}$ contient une feuille qui coupe exactement une fois les deux composantes de $\partial\mathcal{F}$ qui correspondent à ces deux sommets.

On définit un autre graphe $\Gamma'_\alpha(\lambda)$, dont les sommets correspondent aux composantes du bord de \mathcal{D} , en joignant deux sommets m_1 et m_2 par autant d'arêtes qu'il y a de classes d'isotopie modulo le bord $\partial\mathcal{F}$ d'arcs, composantes connexes de $\tilde{\lambda} \cap \mathcal{F}$. Il y a une surjection naturelle du graphe $\Gamma'_\alpha(\lambda)$ vers le graphe de Whitehead $\Gamma_\alpha(F(\lambda))$ qui consiste à identifier les arêtes dont les deux sommets sont les mêmes.

Supposons maintenant que la lamination λ n'est pas en position tendue par rapport au système de méridiens α . Alors, dans le graphe $\Gamma'_\alpha(\lambda)$, le complémentaire d'un sommet n'est pas connexe: il en est donc de même pour le graphe de Whitehead $\Gamma_\alpha(F(\lambda))$.

Pour la réciproque, considérons une partition du graphe de Whitehead en deux graphes G_1 et G_2 qui s'intersectent au plus en un sommet. Il existe donc une partition du même type pour le graphe $\Gamma'_\alpha(\lambda)$ qui disconnecte le complémentaire du sommet correspondant par exemple à la

courbe m de $\partial\mathcal{D}$. Puisque le graphe de Whitehead $\Gamma'_\alpha(\lambda)$ est planaire, il existe alors un arc proprement plongé dans \mathcal{D} ayant ses extrémités dans m et qui intersecte le graphe $\Gamma'_\alpha(\lambda)$ exactement en le sommet m .

L'existence de cet arc montre que la lamination λ n'est pas en position tendue par rapport au système admissible α .

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.10. \square

D'après la proposition précédente, dans le graphe de Whitehead du courant $F(\lambda)$ sur le système admissible α , le complémentaire de chaque sommet est connexe.

D'après la remarque 3.5, il en est de même pour le graphe de Whitehead des courants $F(\lambda_i)$ sur le même système α , lorsque i est suffisamment grand.

D'après le théorème 3.9, on peut donc supposer que les laminations λ_i sont en position prétendue par rapport au système de méridiens α , ceci sans changer leur image dans $L(N)$.

On utilise maintenant le résultat suivant:

LEMME 3.11. *Quitte à remplacer la suite (λ_i) par une sous-suite, on peut trouver une suite de difféomorphismes (ϕ_i) dans le groupe $Mod^0(N)$ telle que:*

- (1) *la suite $(\phi_i(\lambda_i))$ est contenue dans A_α et converge dans $PML(S)$ vers un élément de A_α ;*
- (2) *la suite $(\phi_i(\lambda_i))$ converge dans $ML(S)$.*

PREUVE: Les termes de la suite $\phi_i(\lambda_i)$ sont déjà contenus dans A_α . La trace de λ_i sur le complémentaire de α est une réunion d'arcs. On peut supposer, quitte à extraire une sous-suite de la suite (λ_i) que ces réunions d'arcs sont dans la même classe d'isotopie lorsque i varie; on obtient cette situation en appliquant à la lamination λ_i un difféomorphisme qui respecte chaque composante de la collection de courbes α (ce difféomorphisme appartient donc au groupe $Mod^0(N)$).

On peut contrôler aussi le twist de λ_i sur chaque composante de α par un produit de twist de Dehn sur ces composantes. Finalement, en composant les deux difféomorphismes, on obtient une suite de difféomorphismes (ϕ_i) pour laquelle nous allons montrer qu'elle vérifie les conclusions du lemme 3.11.

Définition. Si μ est une lamination de $ML(S)$ dont le support est réunion de feuilles compactes, on notera $l(\mu)$ sa longueur dans le groupe fondamental de la surface S , mesurée à partir d'un système de générateurs de ce groupe.

Si μ est de plus en position prétendue par rapport à un système de méridiens α , on peut aussi mesurer la longueur $l'(F(\mu))$ dans le groupe $G = \pi_1(N)$ du courant $F(\mu)$.

Les choix effectués dans la première partie de la démonstration qui ont fixé l'allure de λ_i dans le complémentaire de α , ainsi que le twist le long de α entraînent que les longueurs $l(\lambda_i)$ et $l'(F(\lambda_i))$ sont commensurables (choisir par exemple comme base de G la base duale de α , et pour base de $\pi_1(S)$ une base contenant α et une collection de g courbes duales).

Puisque par hypothèse, la suite $(F(\lambda_i))$ converge dans $C(G)$, la suite de longueurs $(l'(F(\lambda_i)))$ converge. Pour montrer que la suite $(\phi_i(\lambda_i))$ converge après extraction d'une sous-suite, il nous suffit de montrer que la suite $(l(\lambda_i))$ est bornée.

Ceci découle de ce qui vient d'être dit. □

D'après la proposition précédente, on peut supposer que la suite de laminations (λ_i) converge dans $ML(S)$ vers une lamination λ' en position prétendue sur le système admissible α .

D'après la continuité de l'application F (cf Affirmation 3.10.2), on a $F(\lambda) = F(\lambda')$.

La proposition suivante dit que la lamination λ' appartient à l'ouvert O . L'injectivité de l'application F' terminera la preuve du théorème 3.4.

PROPOSITION 3.12. *Soit λ une lamination mesurée appartenant à l'ouvert O , en position tendue par rapport à un système admissible de méridiens α . Soit λ' une lamination mesurée en position prétendue par rapport au même système α , telle que $F(\lambda') = F(\lambda)$. Alors, la lamination λ' appartient aussi à l'ouvert O .*

PREUVE: Nous déduisons tout d'abord de l'égalité des courants $F(\lambda)$ et $F(\lambda')$ que leurs graphes de Whitehead sont les mêmes par rapport à un système de méridiens quelconque. En particulier, si on raisonne avec le système de méridiens α de l'énoncé, on déduit de la proposition 3.10 que la lamination λ' est aussi en position tendue.

AFFIRMATION 3.12.1. *La lamination λ' n'appartient pas à M' .*

PREUVE: Dans le cas contraire, le support de la lamination λ' est contenu dans une lamination géodésique μ qui est limite de méridiens pour la topologie de Hausdorff.

D'après le critère de Casson (Théorème 1.8), il existe alors une feuille homoclinique pour la lamination $\tilde{\mu}$, préimage de μ dans le revêtement planaire S' de la surface S .

Si cette feuille homoclinique intersecte la préimage de α , on voit alors un arc proprement plongé dans le domaine fondamental \mathcal{D} , qui fait un aller retour sur une composante de $\partial\mathcal{D}$, et qui est disjoint de la préimage $\tilde{\lambda}'$ de la lamination λ dans le revêtement S' .

Si cette feuille n'intersecte pas la préimage de α , il existe une courbe fermée de \mathcal{D} disjointe de la lamination $\tilde{\lambda}'$ qui découpe S' en deux composantes, chacune rencontrant $\tilde{\lambda}'$.

Selon laquelle de ces deux situations qui se présente, ou bien le graphe de Whitehead n'est pas connexe ou bien le complémentaire d'un de ses sommets ne l'est pas. \square

Mais ceci ne suffit pas en général à entraîner que la lamination λ' appartient à l'ouvert O , aussi nous allons utiliser un autre raisonnement pour démontrer le lemme 2.16: l'outil principal sera l'étude de certaines relations d'équivalence sur l'ensemble limite K .

Définition. Soit λ une lamination en position prétendue par rapport à un système admissible de méridiens, de sorte que le courant $F(\lambda)$ existe. On définit une relation sur l'ensemble de Cantor K en identifiant deux points si le couple de $M(K)$ qu'ils représentent est dans le support de la mesure $F(\lambda)$. Cette relation engendre une relation d'équivalence transitive. On note R la relation obtenue en prenant la fermeture de cette relation.

Nous désirons décrire de manière précise cette relation d'équivalence R à partir de la lamination λ .

Définition. On notera $\bar{\lambda}$ la lamination obtenue en rajoutant à λ les composantes éventuelles du bord de la surface $S(\lambda)$ qui ne sont pas contenues dans λ .

Si la lamination λ appartient à l'ouvert de Masur O , il en est de même de la lamination $\bar{\lambda}$ d'après la positivité du nombre d'intersection.

AFFIRMATION 3.12.2. *Soit λ une lamination contenue dans l'ouvert de Masur O . Deux points distincts a et b de K sont identifiés par la relation R exactement dans les deux situations suivantes:*

- (1) *a et b sont bouts d'une même feuille de $\bar{\lambda}$;*
- (2) *il existe une région complémentaire de $\bar{\lambda}$ dont le stabilisateur est ou bien cyclique ou bien trivial qui contient dans sa fermeture les deux points a et b ;*
- (3) *il existe deux régions complémentaires de $\bar{\lambda}$ ayant un même stabilisateur cyclique (et donc adjacentes) telle que l'une contient a dans sa fermeture, et l'autre contient b dans sa fermeture.*

PREUVE: Nous allons d'abord montrer que la relation qui identifie deux points distincts si et seulement si ils vérifient l'une des trois conditions ci-dessus est une relation d'équivalence dont le graphe est fermé.

Puisque la lamination $\bar{\lambda}$ est mesurée, deux régions complémentaires distinctes de sa préimage n'ont une feuille de leur frontière en commun que lorsque cette feuille a une projection compacte.

Puisque la lamination $\bar{\lambda}$ appartient au domaine de Masur, deux feuilles distinctes de sa préimage non asymptotes dans la surface S' n'ont jamais un bout en commun (cf Corollaire 2.9).

Ces deux remarques entraînent que la relation R' qui identifie deux points de K lorsqu'ils vérifient l'une des trois conditions de l'affirmation précédente est une relation d'équivalence.

Que cette relation d'équivalence est fermée résulte du fait que la préimage de la lamination $\tilde{\lambda}$ est fermée dans la surface plane S' .

Pour terminer la démonstration de l'affirmation 3.12.2, il nous suffit de montrer que les graphes des deux relations R et R' coïncident.

D'après l'affirmation 3.10.1, le support de la mesure $F(\lambda)$ est exactement l'ensemble des bouts des feuilles de la lamination $\tilde{\lambda}$. Comme la relation R' est fermée, on a donc une inclusion du graphe de R dans celui de R' .

Pour l'autre inclusion, il nous suffit de considérer les classes de R' qui sont du 2e ou 3e type. Considérons une région complémentaire C de la lamination $\tilde{\lambda}$ dont le stabilisateur est cyclique. Si la feuille de la frontière de C fixée par le groupe cyclique n'est pas contenue dans la préimage de λ , ses extrémités sont dans la fermeture de la relation transitive associée à λ , de sorte qu'elles sont aussi dans le graphe de R .

De la même façon, on montre l'inclusion de la classe de R' associée à cette région (ou à ces deux régions) dans une classe d'équivalence de la relation R . □

Puisque la relation R est fermée, son espace quotient est séparé ([Bou]). Nous le noterons K_λ .

La démonstration de l'affirmation 3.12.2 a utilisé d'une manière détournée que la lamination $\tilde{\lambda}$ appartenait à l'ouvert O : la propriété utilisée des laminations appartenant à cet ouvert est que si on les relève dans le revêtement plane S' , deux feuilles non asymptotes sur la surface S' n'ont jamais un bout en commun (Corollaire 2.9). Ceci suggère la définition suivante:

Définition. Une lamination en position prétendue par rapport à un système admissible de méridiens vérifie la *Propriété ** lorsque son support n'est pas contenu dans celui d'une lamination mesurée dont la préimage dans le revêtement plane S' contient deux feuilles non asymptotes qui ont les mêmes bouts dans K .

Il est facile de voir que toute lamination de l'ouvert O vérifie la *Propriété **: toute lamination mesurée qui la contient appartient en effet aussi à l'ouvert O , et la préimage d'une telle lamination dans la surface S' ne possède pas deux feuilles avec la propriété ci-dessus, d'après le corollaire 2.9.

D'autre part, toute lamination vérifiant la *Propriété ** a toutes ses régions complémentaires incompressibles et anannulaires.

Nous désirons montrer que la relation R peut être décrite, comme dans l'affirmation 3.12.2, à partir de la lamination $\bar{\lambda}'$. Nous allons en fait montrer le lemme suivant, plus fort, mais qui sera utilisé sous cette forme par la suite.

LEMME 3.12.3. *Sous l'hypothèse de la proposition 3.12, la lamination $\bar{\lambda}'$ vérifie la Propriété *.*

PREUVE: On raisonne par l'absurde. Il existe alors une décomposition du compact K_λ en deux fermés disjoints qui s'intersectent exactement en l'image des extrémités du couple de feuilles obtenues en niant le fait que λ' vérifie la Propriété *.

En particulier, selon que les extrémités de ce couple de feuilles sont ou non identifiées par la relation, le complémentaire d'un point ou de deux points dans K_λ n'est pas connexe.

Pour démontrer que ceci n'est pas le cas, nous allons utiliser que, la lamination λ appartenant à O , la lamination $\bar{\lambda}$ vérifie la Propriété *. Nous construirons avec cette information un plongement du fermé K_λ dans la sphère S^2 qui montrera certaines propriétés topologiques de cet espace dont celle-là.

Commençons par décrire ce plongement. Considérons la sphère $S^2 = S' \cup K$, obtenue en compactifiant le revêtement planaire S' par ses bouts. Chaque composante connexe du complémentaire de la lamination relevée $\bar{\lambda}$ dans la surface planaire S' est homéomorphe à un disque dont la fermeture dans S^2 est un disque fermé (cf Lemme 1.10 et Propriété *). Cette composante peut avoir un stabilisateur trivial, cyclique ou bien isomorphe au groupe fondamental d'une sous-surface de $S = \partial N$.

Définition. Nous appellerons une composante connexe du complémentaire de la préimage de λ dans S' une *région*.

Une région dont le stabilisateur est trivial est bordée par un nombre fini de feuilles isolées d'un côté; chaque feuille isolée d'un seul côté apparaît dans la frontière d'une région à stabilisateur trivial ou cyclique, d'après la définition de $\bar{\lambda}$.

Soit C une région dont le stabilisateur est cyclique; il existe exactement une feuille dans la frontière de cette région qui est invariante par le groupe cyclique en question, d'après la définition de la lamination $\bar{\lambda}$. Lorsque la région C' , dont la fermeture est adjacente à celle de C le long de cette feuille a aussi un stabilisateur cyclique, nous dirons que la réunion $C \cup C'$ est une *région maximale à stabilisateur cyclique*. Remarquons que la fermeture d'une région maximale à stabilisateur cyclique est homéomorphe à un disque fermé d'après la Propriété *.

Nous définissons une partition de la sphère S^2 en les ensembles de l'un des trois types suivants:

- (1) la fermeture d'une région à stabilisateur trivial ou la fermeture d'une région maximale à stabilisateur cyclique;
- (2) la fermeture d'une feuille isolée d'aucun côté ou la fermeture d'une feuille isolée des deux côtés (et donc de projection compacte sur S), qui n'est pas dans une composante du type précédent;
- (3) un point de S^2 qui n'est dans aucun compact du type précédent.

AFFIRMATION 3.12.4. *Soit λ une lamination mesurée vérifiant la Propriété *. Alors, les ensembles ci-dessus définissent une partition semi-continue supérieurement de la sphère S^2 en compacts cellulaires.*

PREUVE: Pour montrer que les ensembles définis ci-dessus forment bien une partition de la sphère, il nous suffit de montrer que deux ensembles du premier type sont disjoints. Ceci résulte d'une part du fait que deux feuilles distinctes non asymptotes de la préimage $\bar{\lambda}$ ne peuvent avoir un bout en commun, puisque la lamination $\bar{\lambda}$ vérifie la Propriété *, et d'autre part de l'existence d'une mesure transverse pour $\bar{\lambda}$ qui interdit l'existence de feuilles non compactes isolées des deux côtés.

Cette décomposition est cellulaire: en effet, les éléments du premier type sont des disques, ceux du deuxième sont des intervalles fermés puisque chaque feuille de la préimage de $\bar{\lambda}$ a ses deux bouts distincts, et ceux du troisième type sont des points.

Dire que la décomposition est semi-continue supérieurement (cf [Why, page 122]), équivaut à dire, d'après la compacité de la sphère, que son graphe est fermé dans $S^2 \times S^2$. Cette dernière propriété découle directement du fait que le support de la lamination $\bar{\lambda}$ est fermé dans S' (cf [CaThu]). □

COROLLAIRE 3.12.5. *L'espace quotient de la sphère S^2 par la décomposition ci-dessus est homéomorphe à une sphère de dimension 2, que l'on notera S_λ^2 , qui contient de façon naturelle l'espace quotient K_λ .*

PREUVE: D'après un théorème de R.L. Moore ([M], [Why, page 170]), une décomposition cellulaire semi-continue supérieurement de la sphère S^2 a un espace quotient homéomorphe à la sphère.

Par construction, la décomposition est invariante sous l'action du groupe $G = \pi_1(N)$, ce qui fournit une action par homéomorphismes du même groupe G sur l'espace quotient S_λ^2 .

L'espace quotient K_λ est naturellement contenu dans S_λ^2 : en effet, chaque classe d'équivalence de la relation R sur l'ensemble de Cantor K est contenue dans exactement un compact de la décomposition de S^2 puisque la lamination $\bar{\lambda}$ vérifie la Propriété *. L'inclusion de K dans S^2 fournit donc par passage au quotient un plongement de K_λ dans S_λ^2 . □

Remarque. D'après la construction du plongement ci-dessus, l'espace K_λ est homéomorphe à la sphère si et seulement si les régions complémentaires de la lamination $\bar{\lambda}$ sur la surface S ont un groupe fondamental cyclique ou trivial.

Reprenons la démonstration du lemme 3.12.3.

Considérons tout d'abord la frontière d'une région complémentaire du fermé K_λ dans la sphère S_λ^2 . Cette région complémentaire correspond à une région complémentaire de la lamination $\bar{\lambda}$ dans la sphère $S' \cup K$ dont le stabilisateur n'est ni cyclique ni trivial, car la restriction de la projection sur une telle composante est un homéomorphisme sur son image. La fermeture de cette région avant le passage au quotient est un disque fermé R d'après le lemme 1.10.

Nous allons d'abord montrer en utilisant la Propriété *, qu'il en est de même après le passage au quotient, c'est-à-dire que l'image de la courbe de Jordan ∂R dans K_λ est encore une courbe de Jordan.

SOUS-LEMME 3.12.6. *Soit λ une lamination vérifiant la Propriété *. Soit R la fermeture dans S^2 d'une région complémentaire de la lamination $\bar{\lambda}$, dont le stabilisateur n'est ni cyclique ni trivial. Soit \tilde{l} une feuille de la lamination $\bar{\lambda}$ dont les deux bouts sont contenus dans la frontière ∂R . Alors, la feuille \tilde{l} est entièrement contenue dans ∂R .*

PREUVE: Remarquons tout d'abord que si la feuille \tilde{l} en question a une projection sur la surface S qui est une courbe fermée l , la conclusion ci-dessus est vérifiée. En effet, dans le cas contraire, considérons les translatés par le groupe Γ , stabilisateur de la région R du couple de points formé des bouts de la feuille \tilde{l} . Ces couples ne se croisent pas d'après le théorème de Jordan puisque la courbe l est plongée dans la surface S . D'autre part, comme la feuille \tilde{l} a une projection compacte, seulement un nombre fini de relevés distincts $\gamma(\tilde{l})$, pour $\gamma \in \Gamma$, peuvent rencontrer un compact donné de $S^2 - K$. On définit ainsi une courbe simple l' sur la surface compacte quotient de l'intérieur de la région R par le groupe Γ , qui est homotope dans le bretzel N à la courbe l .

Dire que les courbes l et l' sont parallèles sur la surface S , bord du bretzel, équivaut à dire que la feuille \tilde{l} est contenue dans la frontière de la région R .

Dans le cas contraire, la lamination $\bar{\lambda} \cup l'$ contredit le fait que λ vérifie la Propriété *.

Considérons maintenant l'autre cas, à savoir celui où la feuille \tilde{l} a sa projection sur S qui est contenue dans un minimal exceptionnel de la lamination $\bar{\lambda}$. Elle est donc contenue dans une région complémentaire C de la réunion des feuilles compactes de $\bar{\lambda}$ sur la surface S . Soit R' la fermeture dans S^2 de la composante de la préimage de cette région C qui contient l .

On distingue deux cas, selon que la surface C est incompressible ou non.

1er cas. La surface C est incompressible.

Alors, d'après le lemme 1.11, la surface R' est un disque fermé. Considérons le fermé $A = \partial R \cap \partial R'$.

1er sous-cas. Le fermé A est égal à ∂R .

Une application du théorème de Jordan comme dans la démonstration de l'affirmation 1.12.4 montre que les translatés par un élément du groupe Γ , stabilisateur de la région R , du fermé A , ne se croisent pas entr'eux, c'est-à-dire que l'image d'un couple de points appartenant à A par un élément de Γ ne sépare pas sur le cercle $\partial R'$ deux éléments quelconques de A .

Munissons la surface S d'une métrique hyperbolique, et considérons l'enveloppe convexe $c(A)$ du fermé A (qui n'est pas réduit à un intervalle, comme dans l'affirmation 1.12.3) pour la métrique hyperbolique induite sur la surface R' . La frontière de l'enveloppe convexe de ce fermé dans la région R' se plonge donc dans la surface, quotient de $R' \cap S'$ par son stabilisateur. On a supposé le fermé A propre, ce qui est équivalent à dire que cette enveloppe convexe $c(A)$ est différente de l'intérieur de R' .

La projection sur la surface S d'une géodésique dans la frontière de l'enveloppe convexe $c(A)$ est une géodésique l' sans point double contenue dans la projection de l'intérieur de la surface R' .

AFFIRMATION 3.12.7. *La feuille l' n'intersecte pas la lamination λ .*

PREUVE: Sinon, il existe un conjugué $\gamma(\tilde{l}')$ de la préimage de la feuille l' qui intersecte la feuille l . C'est impossible d'après le théorème de Jordan.

□

Puisque l'enveloppe convexe $c(A)$ est différente de la surface R' , la feuille l' est différente d'une courbe de la frontière de l'image de la surface R' .

La seule possibilité qui reste est que la feuille l' soit contenue dans une composante (minimale, donc) de la lamination λ . Mais, dans ce cas, on contredit le fait qu'un nombre fini seulement de translatés de la région $R' \cap S'$ rencontre un compact donné de S' .

2e sous-cas. Le fermé A est égal à ∂R .

Comme dans la fin de la démonstration de la proposition 1.12, on a alors une décomposition en un produit $C \times [0, 1]$ du bretzel N telle que la surface $C \times 0$ s'identifie à la surface C .

La lamination $\bar{\lambda}$ est donc entièrement contenue dans $C \times 0$ et on peut la reproduire sur la composante $C \times 1$. La nouvelle lamination obtenue contredit le fait que la lamination λ vérifie la Propriété *.

2e cas. La surface C est compressible.

AFFIRMATION 3.12.8. *La lamination $\lambda \cap C$ est en position prétendue par rapport à un méridien contenu dans C .*

PREUVE: D'après le théorème 1.6, il nous suffit de montrer que la lamination $\bar{\lambda} \cap C$ n'a pas un nombre d'intersection nul avec une limite de méridiens contenus dans C .

D'après le théorème 1.8, et puisque la lamination $\bar{\lambda} \cap C$ est minimale dans la surface C , il existerait alors deux feuilles distinctes de la lamination $\tilde{\lambda}$ avec un bout en commun dans K . C'est impossible puisque la lamination $\bar{\lambda}$ vérifie la Propriété *.

Soit donc m un méridien contenu dans la surface C par rapport auquel la lamination $\lambda \cap C$ est en position prétendue. Dans le revêtement planaire S' , chaque relevé de ce méridien est disjoint de la surface R' . Comme la feuille l' coupe exactement une fois un de ces relevés, elle ne peut pas avoir ses deux bouts dans la frontière de R' .

Ceci termine la démonstration du sous-lemme 3.12.6.

COROLLAIRE 3.12.9. *Soit λ une lamination vérifiant la propriété *. Chaque région complémentaire du fermé K_λ dans la sphère S_λ^2 est un disque dont la fermeture est un disque fermé. Ces disques sont en correspondance avec les régions complémentaires de $\tilde{\lambda}$ dont le stabilisateur n'est ni cyclique ni trivial.*

PREUVE: Soit π la projection de la sphère S^2 dans la sphère S_λ^2 . Soit R la fermeture dans S^2 d'une composante connexe du complémentaire de la préimage $\tilde{\lambda}$. D'après le sous-lemme 3.12.6, la restriction de cette projection à la frontière ∂R n'identifie deux points que s'ils sont dans la fermeture d'une même composante de la préimage de $\bar{\lambda}$. Cette projection ne fait donc qu'écraser en un point une famille d'intervalles de ∂R . Il est alors clair que l'image de ∂R dans S_λ^2 est une courbe de Jordan.

Définition. Une courbe frontière d'une région complémentaire de K_λ s'appellera une *courbe frontière*.

COROLLAIRE 3.12.10. *Soit λ une lamination mesurée qui vérifie la Propriété *. Soit \tilde{l} une feuille de la préimage $\tilde{\lambda}$, dont l'image dans S_λ^2 appartient à une courbe frontière, correspondant à une région complémentaire R de $\tilde{\lambda}$. Alors, ou bien la feuille \tilde{l} est contenue dans ∂R , ou bien elle est dans la frontière d'une région dont le stabilisateur, cyclique, stabilise aussi R .*

PREUVE: D'après la définition de la relation d'équivalence sur S_λ^2 , si on n'est pas dans l'une des deux situations décrites, il existe une feuille de

la lamination $\tilde{\lambda}$, que nous noterons toujours \tilde{l} dont un bout appartient à ∂R , et qui n'est pas contenue dans ∂R .

Une telle feuille \tilde{l} ne peut avoir une projection compacte: en effet ses deux bouts appartiendraient alors à ∂R , ce qui est interdit par le sous-lemme 3.12.6.

Donc, la projection de \tilde{l} sur la surface S est une feuille non compacte l , contenue dans un minimal exceptionnel disjoint de la frontière ∂R .

Munissons la surface S d'une métrique hyperbolique, et considérons le revêtement planaire S' équipé de la métrique riemannienne induite. Soit g une demi-géodésique sur la surface R qui tend vers le bout $\tilde{l} \cap R$. Il existe alors deux suites de points (x_i) et (y_i) , chacune indexées par $i \in \mathbf{N}$, telles que:

- (1) $x_i \in \tilde{l}$ et $y_i \in g$;
- (2) la distance mesurée dans S' entre les points x_i et y_i est bornée par une constante;
- (3) la suite (x_i) tend vers le bout $\tilde{l} \cap R$.

En utilisant que le groupe G a un domaine fondamental compact pour son action sur la surface R , on en déduit des éléments γ_i , dans le sous-groupe stabilisant R , tels que $\gamma_i(x_i)$ appartient à un compact de S' et que les bouts de la feuille $\gamma_i(\tilde{l})$ sont de plus en plus proches des bouts de la feuille $\gamma_i(g)$. Quitte à extraire une sous-suite de la suite de feuilles $\gamma_i(\tilde{l})$, on peut supposer qu'elle converge vers une feuille l_∞ de la lamination $\tilde{\lambda}$, dont les deux bouts seront contenus dans ∂R .

D'autre part, cette feuille a sa projection contenue dans le même minimal exceptionnel que la feuille l . On a donc une contradiction avec le sous-lemme 3.12.6. □

Nous allons maintenant étudier plus précisément la topologie du fermé K_λ en vue de démontrer le lemme 3.12.3. C'est l'objet de la proposition suivante:

PROPOSITION 3.12.11. *Soit λ une lamination vérifiant la propriété *. Alors, dans l'espace quotient K_λ , les propriétés suivantes sont vérifiées:*

- (1) *deux courbes frontières distinctes s'intersectent en au plus un point;*
- (2) *le complémentaire d'un point est connexe ainsi que le complémentaire d'un couple de points, ainsi que le complémentaire d'une courbe frontière.*

PREUVE: Pour la démonstration de cette proposition, nous allons suivre des arguments déjà utilisés dans la preuve du sous-lemme 3.12.6.

Soient R et R' les fermetures de deux régions complémentaires du fermé K_λ dans la sphère S_λ^2 telles que leur intersection contient plus

d'un point. Cette intersection A est un fermé distinct d'un intervalle, d'après l'affirmation 1.12.3.

Dans le cas où ce fermé est exactement l'une des courbes ∂R ou $\partial R'$, on décrit par un argument déjà rencontré le bretzel N comme un produit d'une surface compacte à bord par un intervalle, de sorte que la lamination $\bar{\lambda}$ soit isotope à la réunion des courbes du bord de cette surface. Si cette surface n'est pas homéomorphe à un pantalon, la lamination λ ne vérifie pas la Propriété *; le cas où la surface est un pantalon n'apparaîtra pas dans la suite.

Supposons donc le fermé A propre et considérons l'image réciproque de ce fermé dans la sphère S^2 . Les deux disques fermés préimages respectives des disques R et R' ont alors une intersection non connexe A' . Munissons la surface S' d'une métrique hyperbolique qui relève une métrique sur la surface S .

Sur chacune des deux surfaces R et R' , on considère l'enveloppe convexe du fermé A' que l'on note $c(A')$ et $c'(A')$.

AFFIRMATION 3.12.12. *Une géodésique dans la frontière de $c(A')$ (ou de $c'(A')$) a une projection sur S qui est une géodésique fermée sans point double.*

PREUVE: Un argument déjà utilisé basé sur le théorème de Jordan, montre que la projection sur la surface S d'une courbe \tilde{l} dans la frontière de chacune de ces enveloppes convexes est une courbe simple.

Si cette projection n'est pas compacte, ou bien elle spirale vers une composante du bord de la projection de R , ou bien elle s'accumule dans l'intérieur de cette projection. Le premier cas est impossible d'après le théorème de Jordan.

Dans le second cas, on aurait une infinité de translatés de la feuille l qui s'accumulent dans l'intérieur de R . Ces translatés auraient leurs bouts dans des translatés distincts de la surface R' . Mais c'est impossible, puisque seulement un nombre fini de translatés de R' peuvent rencontrer un compact donné de S' . □

Considérons deux géodésiques dans la frontière de $c(A')$ et de $c'(A')$ qui ont les mêmes bouts dans A' . La projection de ces deux géodésiques sur la surface S fournit une ou deux courbes simples, disjointes de $\bar{\lambda}$. La lamination obtenue en rajoutant à $\bar{\lambda}$ cette ou ces courbes simples contredit que la lamination λ vérifie la Propriété *. Ceci démontre la première partie de la proposition 3.12.11.

Nous pouvons maintenant montrer la deuxième partie de cette proposition. Les arguments utilisés dans les trois cas étant les mêmes, nous montrerons plus en détail le fait que les courbes frontières ne disconnectent pas K_λ .

La préimage dans S^2 du disque bordé par une telle courbe frontière C est homéomorphe à un disque fermé D , d'après le corollaire 3.12.10.

Considérons deux compacts dans la décomposition de S^2 , disjoints de D , et que nous supposons dans un premier temps non réduits à des points.

D'après la connexité du complémentaire de D dans $S^2 - k$, on peut joindre ces deux compacts par un chemin plongé k , disjoint de D et de K . On peut supposer que ce chemin est transverse à la lamination $\bar{\lambda}$. Par compacité, il ne rencontre qu'un nombre fini de régions complémentaires de $\bar{\lambda}$ à stabilisateur ni cyclique ni trivial.

L'image d'un tel arc dans S^2_λ n'est pas entièrement contenue dans K_λ . Toutefois par construction, elle est disjointe de la courbe C . L'image est un chemin qui rencontre l'intérieur d'un nombre fini de disques du complémentaire de K_λ . Puisque chacun de ces disques est distinct de celui délimité par la courbe C , sa frontière intersecte la courbe C en au plus un point. On peut alors, d'après la première partie de la proposition, pousser l'image de l'arc k dans le fermé K_λ de sorte que son image soit disjointe de la courbe frontière C .

Ceci montre que les compacts de la décomposition de K , non réduits à des points et disjoints de la courbe C ont leur image dans une même composante connexe du complémentaire de C . Puisque ces compacts sont denses dans le complémentaire de C dans K_λ , ce complémentaire est donc connexe.

Pour terminer la démonstration de la proposition 3.12.12, il nous suffit de montrer que le complémentaire de deux points de K_λ est connexe. Si les deux points en question ne sont pas contenus dans une même courbe frontière, la même démonstration que la précédente donne le résultat: on utilise que la préimage de ces deux points ne disconnecte pas la sphère. Si ces deux points sont dans une même courbe frontière, on peut utiliser que cette courbe frontière a un complémentaire dans K_λ connexe, et que ce connexe est dense dans le complémentaire des deux points en question.

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.12.12.

Remarquons qu'il est faux, en général, que le complémentaire de trois points dans K_λ soit connexe. □

Cette dernière proposition nous permet de conclure la démonstration du lemme 3.12.3.

On a vu que si la lamination λ' ne vérifiait pas la Propriété *, le complémentaire d'un point ou de deux points dans K_λ ne serait pas connexe ce qui n'est pas le cas. □

Maintenant, nous revenons à la démonstration de la proposition 3.12.

Nous désirons montrer que la lamination λ' appartient à l'ouvert de Masur O . Dans le cas contraire, d'après la définition de cet ouvert, il

existe une lamination mesurée μ' de M' , dont le nombre d'intersection avec λ' est nul.

AFFIRMATION 3.12.13. *La lamination μ' est en position prétendue par rapport au système de méridiens α .*

PREUVE: Puisque la lamination λ' est en position tendue par rapport au système de méridiens α (cf le début de la démonstration de la proposition 3.12), la lamination μ' est en position prétendue par rapport à ce même système. \square

On peut donc appliquer à la lamination μ' la proposition 1.12. Distinguons les trois cas suivants correspondants aux trois possibilités fournies par cette proposition.

1er cas. La lamination μ' a un complémentaire compressible.

1er sous-cas. Une composante de μ' est contenue dans le support de λ' .

Si cette composante est réduite à une feuille compacte l' , le complémentaire de la courbe l sur la surface S est compressible. D'autre part, le couple formé des bouts d'un relevé quelconque de la feuille l' appartient au support de la mesure $F(\lambda)$. Il existe donc, d'après l'affirmation 3.10.1, une feuille \tilde{l} du support de la lamination $\tilde{\lambda}$ qui a les mêmes extrémités.

La projection l de cette feuille sur la surface S est compacte puisque λ vérifie la Propriété *. Donc les deux feuilles l et l' sont librement homotopes dans le bretzel N .

AFFIRMATION 3.12.14. *Le complémentaire de la courbe l sur la surface S est compressible.*

PREUVE: La courbe l est homotope à la courbe l' , dont le complémentaire est compressible. Il existe donc une application continue surjective sur le groupe fondamental, de la surface S dans un bouquet de cercles, telle que l'image de la courbe l évite au moins un des cercles. On en déduit une application du même type pour la courbe l . Ceci entraîne, par la construction de Stallings ([St]), que le complémentaire de la courbe l sur la surface S est compressible. \square

Dans notre situation, d'après cette affirmation, le complémentaire de la courbe l est compressible. D'après le lemme 1.3.2, la lamination l appartient à M . Ceci contredit l'appartenance de la lamination λ à l'ouvert O .

Lorsque la composante commune au support des deux laminations λ' et μ' est minimale, on se ramène à la situation précédente de la façon suivante: une courbe simple dans le bord d'une composante commune a un complémentaire compressible et appartient d'autre part à $\tilde{\lambda}'$. Il

existe donc une courbe simple dans $\bar{\lambda}$ avec les mêmes propriétés. Le raisonnement utilisé précédemment permet ensuite de conclure.

2e sous-cas. La lamination μ' a un complémentaire compressible et est contenue dans le complémentaire du support de la lamination λ' .

Si une composante de la lamination μ' est contenue dans le support de $\bar{\lambda}'$, on peut appliquer le raisonnement du premier sous-cas. Ceci se passe par exemple lorsque le fermé K_λ est homéomorphe à la sphère, c'est à dire lorsque les régions complémentaires de la lamination $\bar{\lambda}'$ ont toutes un groupe fondamental cyclique ou trivial.

Nous pouvons donc supposer que le support de la lamination μ' est contenu dans une région complémentaire de $\bar{\lambda}'$.

On commence par approximer dans $PML(S)$ une composante quelconque de μ' par une lamination réduite à une feuille compacte l' , ayant un complémentaire compressible et un nombre d'intersection nul avec λ' .

Considérons une composante de la préimage dans le revêtement planaire S' de la région complémentaire de la lamination $\bar{\lambda}'$ qui contient la courbe l' dans son intérieur. L'image de la fermeture de cette région dans la sphère $S_{\lambda'}^2$ est une région complémentaire R' du fermé $K_{\lambda'}$ dans la sphère $S_{\lambda'}^2$.

Il existe un homéomorphisme ϕ , G -équivariant entre le fermé $K_{\lambda'}$, contenu dans la sphère $S_{\lambda'}^2$, et le fermé K_λ dans la sphère S_λ^2 .

D'après la proposition 3.12.12, les courbes frontières de K_λ (donc aussi de $K_{\lambda'}$) sont caractérisées intrinsèquement par la propriété de ne pas disconnecter le fermé K_λ (ou le fermé $K_{\lambda'}$). Donc, l'image par l'homéomorphisme ϕ de la courbe frontière $\partial R'$ est une courbe frontière ∂R . Les stabilisateurs de ces deux régions sont donc les mêmes sous-groupes de G . Considérons les bouts des relevés de la courbe l' situés dans la courbe de Jordan $\partial R'$. Puisque la courbe l' est simple sur la surface S , les extrémités de ces relevés ne se croisent pas sur $\partial R'$, il en est de même de l'image par l'homéomorphisme ϕ de ces extrémités. Donc, cette image représente les bouts des relevés dans R d'une courbe simple l sur la surface R contenue dans une région complémentaire de la lamination $\bar{\lambda}$. Par construction, la courbe l est librement homotope dans N à la courbe l' . D'après l'affirmation 3.12.14, le complémentaire de la courbe l sur la surface S est compressible.

On termine la démonstration comme dans le premier sous-cas, en contredisant l'appartenance de λ à l'ouvert O .

2e cas. La lamination μ' a un complémentaire incompressible.

D'après l'affirmation 3.12.13, la lamination μ' est en position prétendue par rapport au système de méridiens α . Donc sa préimage dans le revêtement planaire S' contient deux feuilles distinctes non asymptotes ayant un bout en commun, d'après les propositions 1.12 et 1.13. C'on-

sidérons la lamination $\bar{\lambda}' \cup \mu'$. Sa préimage dans la surface S' possède alors deux feuilles distinctes ayant un bout en commun. Or d'après le lemme 3.12.3, la lamination $\bar{\lambda}'$ vérifie la Propriété *. C'est la contradiction cherchée.

3e cas. Le bretzel N est décomposé comme un produit $\Sigma' \times [0, 1]$ et la lamination μ' est une lamination minimale contenue dans la composante $\Sigma \times 0$.

1er sous-cas. La lamination μ' est contenue dans le support de la lamination λ' .

Alors, la lamination $\bar{\lambda}'$ contient parmi ses feuilles compactes le bord de la surface Σ' , bord que nous noterons l' .

AFFIRMATION 3.12.15. *La lamination $\bar{\lambda}$ contient dans ses feuilles compactes une collection de courbes fermées l , librement homotopes dans N à l' .*

PREUVE: Il suffit de voir que à chaque composante compacte de $\bar{\lambda}'$, il correspond une composante compacte de $\bar{\lambda}$. Les composantes compactes de $\bar{\lambda}$ sont caractérisées par la propriété que tout élément du groupe G qui leur correspond agit sur l'espace K_λ avec un point fixe et un seul. On en déduit qu'à chaque composante de l' correspond une composante de $\bar{\lambda}$. La réunion de toutes les composantes obtenues est une collection l de courbes simples dans le support de $\bar{\lambda}$, qui vérifie les conclusions de l'affirmation précédente. \square

AFFIRMATION 3.12.16. *Il existe une décomposition du bretzel N en un produit $\Sigma \times [0, 1]$ telle que la frontière de la surface Σ soit isotope à l . Les deux fibrations $\Sigma \times [0, 1]$ et $\Sigma' \times [0, 1]$ diffèrent par un homéomorphisme ψ du bretzel N dont la restriction au bord appartient au groupe $\text{Mod}^0(N)$.*

PREUVE: A la collection de courbes l est associée une relation d'équivalence dont l'espace quotient K_l est homéomorphe au cercle S^1 , puisque tel est le cas pour le quotient $K_{l'}$. On a un plongement de ce fermé dans une sphère S_l^2 , tel que les régions complémentaires de K_l soient en correspondances avec les régions complémentaires de la collection de courbes l . On en déduit donc que le groupe G agit sur la sphère S_l^2 en respectant chacune de ces deux composantes, puisque le groupe G respecte l'orientation de la sphère. Ceci entraîne que le groupe fondamental des régions complémentaires de la collection de courbes l se surjecte dans le groupe fondamental du bretzel N . D'autre part, le quotient K_l étant connexe, ces régions complémentaires sont incompressibles.

D'après un théorème de Waldhausen ([Wa1]), il existe alors une décomposition du bretzel N comme un produit $\Sigma \times [0, 1]$ tel que le bord de la surface Σ s'identifie à la collection de courbes l .

Ceci démontre la première partie de l'affirmation 3.12.16.

On construit l'homéomorphisme ψ de la façon suivante: puisque les collections de courbes l et l' sont homotopes dans N , on a un homéomorphisme de K_l vers $K_{l'}$, qui commute aux actions du groupe G sur ces deux espaces. Les régions complémentaires de ces deux fermés sont en correspondance respectives avec les régions complémentaires des collections de courbes l et l' . Le type topologique de ces surfaces se lit sur l'action du groupe G sur les cercles K_l ou $K_{l'}$. Donc ces types topologiques sont les mêmes et on peut étendre l'homéomorphisme entre les cercles à l'infini en un homéomorphisme G -équivariant entre les sphères S_l^2 et $S_{l'}^2$. Cet homéomorphisme fournit par passage au quotient un homéomorphisme dans le groupe $Mod^0(N)$ qui vérifie la seconde assertion de l'affirmation 3.12.16.

Remarquons que le difféomorphisme construit peut envoyer à volonté la surface $\Sigma' \times 0$ sur l'une des deux surfaces $\Sigma \times 0$ ou $\Sigma \times 1$. En effet, il existe un difféomorphisme de N homotopiquement trivial qui échange ces deux composantes: à savoir, la réflexion à travers les fibres. \square

On peut maintenant supposer, quitte à appliquer l'homéomorphisme fourni par la proposition précédente, que les deux laminations λ et λ' sont situées toutes les deux dans la réunion des surfaces $\Sigma \times 0$ et $\Sigma \times 1$.

La lamination λ contient une composante qui définit le même courant que la composante de λ' de même support que μ' . On peut se ramener au cas où cette composante de λ est contenue dans $\Sigma \times 0$, d'après la remarque terminant la preuve de l'affirmation 3.12.16. Elle coïncide alors avec la composante de λ , puisque les laminations sur les surfaces sont classées à isotopies près, par le courant qu'elles définissent.

De même, la composante de la lamination λ contenue dans la surface $\Sigma \times 1$ coïncide avec la composante de la lamination $\bar{\lambda}'$ sur cette surface. Donc, les deux laminations λ et λ' ont le même support. En particulier, si l'une appartient à O , l'autre aussi.

2e sous-cas. La lamination μ' est contenue dans le complémentaire de λ' .

Alors, la lamination λ' est contenue par exemple dans la composante $\Sigma \times 1$; c'est -à-dire que la surface $\Sigma \times 0$ est contenue dans une région complémentaire de la lamination λ' sur la surface S . Choisissons une région complémentaire du fermé $K_{\lambda'}$ dans la sphère $S_{\lambda'}^2$, qui correspond à cette région complémentaire. Par l'homéomorphisme ϕ entre les fermés $K_{\lambda'}$ et K_{λ} , cette région complémentaire R' est en correspondance avec une région complémentaire R de K_{λ} dans la sphère S_{λ}^2 . En utilisant que la collection de courbes $l' = \partial\Sigma$ est plongée sur la surface S , on montre comme dans le deuxième sous-cas du premier cas, que les images par ϕ des bouts des relevés de l sont les bouts des relevés d'une collection de courbes simples l , dont la projection sur la surface S est contenue dans la

composante complémentaire de λ correspondant à la surface R . D'après la première partie de l'affirmation 3.12.16, on a donc une décomposition du bretzel N en un fibré $\Sigma \times [0, 1]$ tel que la frontière de la surface $\Sigma \times 0$ s'identifie à l . D'après la construction de l , la surface $\Sigma \times 0$ est contenue dans une région complémentaire de λ .

Ceci est impossible pour une lamination λ de l'ouvert O , si la surface Σ n'est pas homéomorphe à un pantalon: en effet on peut alors rajouter à la lamination λ son double sur la surface $\Sigma \times 0$ et la nouvelle lamination obtenue appartient à M' (présence d'anneaux essentiels ou de limites d'anneaux).

Si la surface Σ est homéomorphe à un pantalon, la lamination λ a son support contenu dans la réunion des courbes frontières de cette surface. La deuxième partie de l'affirmation 3.12.16 dit alors que λ' diffère de λ par un élément de $Mod^0(N)$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.12. □

Comme il a déjà été dit, cette proposition et le théorème d'injectivité de l'application F' terminent la démonstration du théorème 3.4. L'application F' est donc un homéomorphisme sur son image. □

4. Appendice

Dans le cas où le bretzel N a un groupe fondamental différent d'un groupe libre, le plan de la démonstration du théorème 3.4 reste le même: on commence par établir un critère qui permette de transformer une lamination λ appartenant à l'ouvert O , dont le support est réunion de feuilles compactes par un élément de $Mod^0(N)$ pour la mettre en position prétendue par rapport à un système de méridiens dans N .

Un *système de méridiens* est, par définition (cf §1) la réunion des composantes d'un système admissible qui sont homotopes à 0.

Soit α un système de méridiens. La réunion des composantes de α a donc la propriété de border une réunion de disques $D = \cup D_i$ qui découpe N en une réunion de surfaces épaissies Σ_i pour $i = 1, \dots, k$ (correspondant bijectivement dans la décomposition de $\pi_1(N)$ en facteurs indécomposables aux facteurs qui sont des groupes fondamentaux de surface fermée).

Notons K la complété de Gromov du groupe G : on peut voir cet espace comme un fermé de la sphère S^2 , ensemble limite d'une représentation géométriquement finie de G sans éléments paraboliques.

Chaque composante connexe de la préimage dans la sphère S^2 de la collection de courbes α découpe l'ensemble K en deux ouverts compacts disjoints, que nous appellerons *ouverts basiques*.

Chaque région complémentaire F de $\partial N - \alpha$ est une surface dont le groupe fondamental a une image dans $G = \pi_1(N)$, conjuguée à l'un des facteurs $\pi_1(\Sigma)$ de la décomposition en produits libres de G . Donc, à chaque composante de la préimage de $\alpha \cap \partial F$, on associe un sous-groupe conjugué à $\pi_1(\Sigma)$, dont l'ensemble limite est une courbe de Jordan de K . Réciproquement, à toute courbe de Jordan C de la frontière de K dans S^2 , on peut associer une famille de composantes de la préimage de (α) particulière: cette famille est formée des méridiens du bord de la composante de la préimage de F dont la frontière dans S^2 contient C . Chacun de ces méridiens découpe K en deux ouverts dont un seul est disjoint de la courbe C .

Définition. L'ouvert basique ainsi défini sera dit *associé* à C .

L'analyse précédente entraîne la remarque suivante sur la topologie de K .

REMARQUE A.1. Soit α une système de méridiens comme ci-dessus: alors:

- (1) tout point de K , qui n'est pas contenu dans une courbe de Jordan correspondant à l'ensemble limite d'un sous-groupe con-

jugué à un sous-groupe $\pi_1(\Sigma_i)$, admet une base de voisinages dans K formée d'ouverts basiques.

- (2) toute courbe de Jordan $C \subset K$ admet un système de voisinages compacts ouverts dont chaque élément est le complémentaire d'une réunion finie d'ouverts basiques associés à C .

Soit μ un courant géodésique du groupe $\pi_1(N)$ et α un système de méridiens. On définit le *graphe de Whitehead* $\Gamma_\alpha(\mu)$ de μ par rapport à α de la façon suivante: ce graphe est une réunion de graphes chacun associé à une composante connexe de $N - D$ et appelés *facteurs*. Pour une telle composante connexe Σ , le graphe a autant de sommets qu'il y a de composantes D_i dans sa frontière. Fixons une courbe de Jordan C invariante par un sous-groupe conjugué de $\pi_1(C)$. À un tel sommet correspond de manière unique, à conjugaison près, un ouvert basique associé à C .

Un couple de sommets définit donc deux ouverts de K , associés à C disjoints, que nous notons U_1 et U_2 ; on joint alors ces deux sommets par une arête si et seulement s'il existe un élément γ du groupe $\pi_1(\Sigma)$ tel que la mesure $\mu(U_1 \times \gamma(U_2))$ est non nulle. Le nombre d'arêtes joignant deux sommets différents est donc égal par définition au nombre d'éléments γ_i du groupe $\pi_1(\Sigma)$ tels que la mesure $\mu(U_1 \times \gamma_i(U_2))$ est non nulle.

On joint finalement un sommet à lui-même par autant d'arêtes qu'il y a d'éléments du groupe $\pi_1(\Sigma)$ tels que la mesure $\mu(U_1 \times \gamma_i(U_1))$ est non nulle.

On obtient ainsi un graphe, éventuellement non localement fini, pour chaque composante connexe de $N - D$. Dans les cas qui nous intéresseront ce graphe sera compact.

Nous introduisons maintenant la propriété combinatoire de $\Gamma_\alpha(\mu)$ qui traduira, lorsque μ appartiendra à O , des propriétés intéressantes de μ rapport à α sur ∂N .

Définitions. On dira qu'un graphe connexe inclus dans une composante de $\Gamma_\alpha(\mu)$ correspondant à un sous-groupe $\pi_1(\Sigma)$ est *fortement connexe* s'il contient au moins un cycle qui représente un élément non nul de $\pi_1(\Sigma)$.

On dira qu'un facteur du graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$ a un *point de jonction*, lorsqu'on peut l'écrire comme la réunion de deux graphes G_1 et G_2 s'intersectant en un seul sommet, tels que l'un de ces deux graphes est connexe mais pas fortement connexe.

Lorsque le support de μ est une réunion finie de géodésiques fermées, on définit une relation d'équivalence sur K , comme dans l'affirmation 3.7. Son espace quotient K_μ est séparé comme dans le cas des bretzels.

La proposition suivante montre un premier lien entre les propriétés combinatoires de $\Gamma_\alpha(\mu)$ et la topologie de K_μ .

PROPOSITION A.2. *Supposons que chaque composante connexe du graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$ est fortement connexe et n'a pas de sommet de jonction; alors:*

- (1) *pour toute partition de K en deux compacts disjoints A et B , on a $\mu(A \times B) \neq 0$;*
- (2) *pour toute partition d'un ouvert basique U en deux fermés disjoints A et B , on a $\mu(A \times B) \neq 0$;*
- (3) *si le support de μ est une réunion de feuilles compactes, l'espace K_μ est connexe et localement connexe.*

PREUVE: Pour démontrer la première partie de l'affirmation A.2, on raisonne par l'absurde.

Soit $K = A \cup B$ une partition de K en deux fermés disjoints telle que $\mu(A \times B) = 0$. Remarquons que si une courbe de Jordan de K rencontre l'un des ouverts A ou B , alors elle est entièrement contenue dans cet ouvert.

Utilisons les ouverts basiques associés aux composantes de la préimage de (α) . Puisque A est ouvert, et d'après la remarque sur la topologie de K , on peut le recouvrir par des ouverts qui sont ou bien des ouverts associés aux composantes de la préimage de α dans S^2 , ou bien qui sont complémentaires d'une réunion finie d'ouverts basiques associés à une courbe de Jordan de K .

Par compacité de A , on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini. Effectuons la même construction avec l'ouvert compact B et supposons que les recouvrements obtenus ont une cardinalité minimale parmi tous les recouvrements de A et de B par des ouverts du type précédent.

Les ouverts intervenant dans les recouvrements de A et de B sont chacun associés par définition à une courbe de Jordan. Ces recouvrements étant finis, il n'y a qu'un nombre fini de telles courbes de Jordan. On en déduit que, pour l'une de ces courbes de Jordan, C , les ouverts basiques associés sauf au plus un sont contenus dans A ou dans B . De plus l'hypothèse de minimalité faite sur les recouvrements de A et de B , entraîne la présence d'ouverts dans A et d'ouverts dans B parmi les ouverts associés à C .

Considérons alors la composante du graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$ associée à la composante de $\partial N - D$ correspondant à C . Le fait qu'il n'y a pas de feuilles dans le support de μ joignant A à B se traduit par le fait que la composante étudiée du graphe n'est pas connexe ou bien est la réunion de deux graphes ayant un seul sommet en commun. Suivant lequel de ces cas se produit, le graphe n'est pas fortement connexe, ou bien a un sommet de jonction: en effet, si par exemple $C \subset A$, alors la famille des ouverts basiques associés à C et contenus dans B est finie.

Pour traiter la deuxième partie du lemme, on raisonne de la même façon: il faut alors considérer le recouvrement de U obtenu à partir de

ceux des ouverts du type $\gamma(V)$ ou $\gamma(K - V)$, qui sont contenus dans U . Le même raisonnement que précédemment permet de conclure.

Pour ce qui est de la dernière partie de la proposition, la première étape entraîne que K_μ est connexe; d'après la deuxième étape, les points qui ne sont pas dans l'ensemble limite d'un sous-groupe conjugué à un $\pi_1(\Sigma)$ ont une base de voisinages connexes. Considérons donc le problème de la locale connexité pour les points contenus dans l'une de ces courbes, disons C .

Soit l et l' deux courbes simples tracées sur la composante de $N - D$ dont l'ensemble limite est C , et qui ont la propriété d'avoir un nombre d'intersection non nul avec toutes les courbes tracées sur cette composante. On peut supposer que ces courbes sont disjointes de α , de sorte qu'on peut les voir sur une surface Σ , composante connexe de $S - \alpha$. Alors chaque relevé de l ou de l' dans S^2 découpe K en deux fermés dont l'intersection est formée d'exactly deux points dans l'ensemble limite d'un conjugué de $\pi_1(\Sigma)$. Ceux de ces fermés dont la frontière est contenue dans la courbe C définissent une base de voisinages compacts des points de C , car les courbes l et l' ont la propriété d'intersecter toutes les courbes tracées sur Σ .

Soit U un tel ouvert; on construit en utilisant les deux cas précédents et la connexité de $U \cap C$ un ouvert connexe contenu dans $\pi(U)$, et contenant $U \cap C$. Donc tout point de K_μ possède une base de voisinages connexes.

Ceci termine la démonstration de la proposition A.2. \square

Avant de reprendre la démonstration du théorème 3.4 dans le cas des bretzels creux, nous allons d'abord déduire des méthodes précédentes un algorithme pour décider si un mot du groupe G est conjugué à un mot dans l'un des facteurs d'une décomposition en produit libre de G . Cet algorithme repose sur le résultat suivant:

PROPOSITION A.3. *Soit γ une classe de conjugaison de G . Supposons que γ est la classe de conjugaison d'un mot contenu dans un facteur d'une décomposition en produits libres de G ; alors, pour tout système admissible α , il existe une composante du graphe de Whitehead $\Gamma_\alpha(\mu)$ qui, ou bien est connexe sans être fortement connexe, ou bien a un point de jonction.*

PREUVE: D'après un théorème de Stallings, on peut réaliser une décomposition de G en produit libre (resp. en HNN) par un disque méridien Δ , séparant (resp. non séparant). Dire que γ est contenu dans un facteur d'une telle décomposition, revient à dire que γ est représentable par un lacet librement homotope dans l'une des composantes de $N - \Delta$.

Si ce disque Δ coïncide avec l'un des disques du système de méridiens α , une composante du graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$ a alors un sommet isolé, qui correspond à Δ . En effet, pour que le sommet correspondant à Δ ne soit pas isolé, il est nécessaire que γ intersecte géométriquement Δ .

Il en est de même si le disque Δ est isotope à un disque disjoint de a : dans ce cas, Δ est contenu dans une composante connexe $\Sigma \times [0, 1]$ de $N - D$, et est parallèle au bord dans cette composante. La composante du graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$ correspondant à Σ a alors une composante connexe qui n'est pas fortement connexe.

Si on n'est pas dans l'une des deux situations précédentes, l'intersection de Δ avec D contient alors un arc qui découpe sur D un disque Δ dont l'intérieur est disjoint de D . Supposons que cet arc est contenu dans une composante D_0 de D ; alors l'un des deux disques Δ_0 que l'on peut former à partir de Δ et de D_0 est contenu dans une composante $\Sigma \times [0, 1]$ de $N - D$, et est parallèle au bord sur cette composante. La composante du graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$ correspondant à $\Sigma \times [0, 1]$ peut alors être écrite comme la réunion de deux graphes ayant un sommet en commun (provenant de D_0). Celui de ces deux graphes qui provient de la boule de parallélisme de Δ_0 vers $\partial(\Sigma \times [0, 1])$ n'est pas fortement connexe (il est non réduit à un point, dès que le disque Δ minimise les intersections avec D , ce que l'on peut toujours supposer). \square

Algorithme de réduction des mots dans G .

La proposition A.3 nous permet de définir un algorithme pour décider si un mot γ est conjugué dans G à un mot contenu dans un facteur d'une décomposition en produit libre de $G = \pi_1(N)$. Soit α un système de méridiens pour N . Si chaque composante du graphe de Whitehead $\Gamma_\alpha(\mu)$ est ou bien connexe sans être fortement connexe, ou bien n'a pas de sommet de jonction, alors d'après la proposition A.3, le mot γ n'est pas conjugué à un mot contenu dans un facteur d'une décomposition en produit libre de G .

Sinon, on a deux possibilités: la composante du graphe de Whitehead associée à $\Sigma \times [0, 1]$ ou bien a une composante connexe Z qui n'est pas fortement connexe (1er cas), ou bien possède un sommet de jonction (2e cas).

1er cas. Si C est réduit à un sommet, alors le mot γ est représenté par une courbe contenue dans $N - D_0$, où D_0 est la composante de D correspondant à ce sommet. Selon que D_0 est un disque séparant ou non, le mot γ est donc contenu dans un facteur de G d'une décomposition en produit libre ou en HNN, et si on veut, on peut continuer en raisonnant par récurrence sur la longueur de γ pour trouver un facteur (éventuellement indécomposable de G) qui contient un conjugué de γ .

Sinon, fixons un sommet de la composante C qui correspond à un disque D_0 du système de disques méridiens D . Les arêtes de C correspondent à des arcs sur $\partial(\Sigma \times [0, 1])$ joignant entr'eux les disques de D correspondants aux sommets de C . On réalise alors des glissements d'anses pour ramener successivement les disques correspondants aux sommets de D dans un voisinage D'_0 de D_0 , la trace de γ correspondant à C

étant contenue dans le même voisinage de D_0 . Ces glissements se font de proche en proche en utilisant un arbre maximal contenu dans C issu du sommet D_0 : qu'en suite une homotopie de la courbe représentant γ permette d'obtenir que la trace de γ associée à C soit contenue dans le même voisinage D'_0 découle de la non-existence dans C de cycles représentant des courbes homotopes à 0 (cf la définition de *fortement connexe*). Alors la partie de γ correspondant aux arêtes disjointes de C peut être supposée disjointe de D'_0 . Remarquons que les glissements d'anses ci-dessus ont changé le système de méridiens D en un nouveau système D' , fournissant une nouvelle décomposition en produit libre de G , toutefois *calculable* à partir de la composante C et donc du mot γ .

Pour ce nouveau système de méridiens, on a un nouveau disque proprement plongé dans N et disjoint de la courbe représentant γ (si on a choisi le voisinage D'_0 de D_0 sur ∂N , homéomorphe à un disque, il nous suffit de pousser ce disque dans l'intérieur de N en gardant son bord fixe, pour obtenir un tel disque). On poursuit alors comme précédemment

2e cas. Soit D_0 le disque de D correspondant au sommet de jonction du graphe $\Gamma_\alpha(\mu)$. On réalise des glissements d'anses, de la même façon que ci-dessus pour amener les disques du système de méridiens D correspondants aux sommets de C distincts de D_0 , dans un voisinage D'_0 de D_0 .

On peut alors tracer un arc proprement plongé dans Σ , dont les extrémités seront sur ∂D_0 , qui découpe sur $\Sigma - D_0$ un disque contenant tous les sommets de C ainsi que toute la partie de γ correspondant à C . On construit à partir de cet arc et de D_0 , deux disques dont l'un peut être incorporé à la place de D_0 dans un système de méridiens. Chacun de ces deux disques est calculable (à partir de C) et son nombre d'intersection avec γ est inférieur strictement à celui de γ avec D_0 . On peut donc raisonner par récurrence. On recommence alors avec ce nouveau système de méridiens: ou bien on produit un facteur d'une décomposition de G en produit libre qui contient γ , ou bien on trouve un nouveau système de méridiens qui a un nombre d'intersection strictement inférieur. Donc en un nombre fini d'étapes, on peut trouver un facteur d'une décomposition de G en produit libre (ou HNN) qui contient un conjugué de γ .

Remarque. Cet algorithme n'est autre que l'adaptation au cas des groupes fondamentaux des bretzels creux d'un algorithme de Whitehead pour décider si un mot γ d'un groupe libre est conjugué à un générateur: la condition de Whitehead est alors que pour tout système admissible α , le graphe de Whitehead $\Gamma_\alpha(\gamma)$ ou bien n'est pas connexe ou bien est la réunion de deux graphes ayant exactement un sommet en commun ([W]).

Nous allons aborder maintenant le problème de la généralisation au cas des bretzels creux du théorème 3.9. Soit α un système de méridiens pour le bretzel N , c'est à dire une collection d'éléments de M , bordant des disques qui découpent N en une réunion de surfaces épaissies $\Sigma_i \times [0, 1]$.

Soit aussi λ une lamination appartenant à O dont le support est réunion de feuilles compactes. Cette lamination définit un courant $F(\lambda)$. Nous noterons pour simplifier Γ_λ le graphe de Whitehead du courant $F(\lambda)$ par rapport au système de méridiens α .

Rappelons qu'une lamination $\lambda \in O$ est dite *en position prétendue* par rapport au système admissible α si d'une part, il n'existe pas d'arc contenu dans une feuille du support de λ , dont les extrémités sont dans une même composante α_0 de α et qui peut être homotopé à extrémités fixes dans α_0 (cf §1) et si d'autre part chaque feuille de λ intersecte au moins une composante de α .

THÉORÈME A.4. *Avec les notations ci-dessus, supposons que le graphe $\Gamma_\alpha(\lambda)$ a tous ses facteurs fortement connexes, et sans point de jonction. Alors, il existe un difféomorphisme $\phi \in \text{Mod}^0(N)$, tel que la lamination $\phi(\lambda)$ est en position prétendue par rapport au système de méridiens α .*

PREUVE: On notera K_λ le quotient de K , ensemble limite de G , par la relation qui identifie les paires de points fixes d'éléments de G conjugués à une composante du support de λ ; soit aussi π la projection de K sur K_λ .

AFFIRMATION A.4.1. *L'ensemble K_λ , est homéomorphe à l'ensemble limite (dans la sphère S^2) d'un groupe Kleinien géométriquement fini: la fermeture de chaque composante complémentaire de K_λ dans la sphère S^2 est un disque fermé. Les frontières de deux tels disques fermés ont au plus un point en commun.*

PREUVE: La variété parée (N, λ) est incompressible et anannulaire (cf Remarque 1.15). Le raisonnement est alors exactement le même que celui de l'affirmation 3.9.1. On raisonnera dans la suite avec cette identification de K_λ avec l'ensemble limite d'un groupe kleinien Γ . \square

Avant de continuer, rappelons la définition d'un ouvert basique. Soit F une composante connexe du complémentaire de α dans $S \subset \partial N$. Chaque composante de la préimage de F dans le revêtement planaire S' de la surface S est homéomorphe au complémentaire dans le disque de Poincaré d'une réunion dénombrable de disques invariants sous l'action du groupe $\text{Im}(\pi_1(F))$, lequel est isomorphe au groupe fondamental d'une surface fermée. La frontière d'une telle composante, \tilde{F} dans S^2 est une courbe de Jordan C contenue dans K . Les composantes du bord de \tilde{F} correspondent à des éléments de la préimage de α invariants par $\text{Im}(\pi_1(F))$. Chacun de ces éléments découpe K en deux fermés disjoints U^+ et U^- , dont un seul, disons U^+ , ne contient pas C . Alors un ouvert (fermé) du type U^+ sera appelé un *ouvert basique associé à C* . Sous l'hypothèse du théorème A.4, et d'après la proposition A.2, chaque fermé $\pi(U^+)$ est connexe. Nous noterons \mathcal{U} l'ensemble des ouverts basiques associés

aux diverses courbes de Jordan, ensembles limites des conjugués des sous-groupes $\pi_1(\Sigma_i)$.

PROPOSITION A.4.2. *Il existe une famille de courbes de Jordan $(\gamma)_{\mathcal{U}}$ dans la sphère S^2 , invariante sous l'action du groupe Γ , en bijection avec la famille d'ouverts \mathcal{U} , telle que:*

- (1) *deux courbes de la famille s'intersectent tangentiellement au plus en un nombre fini de points et une réunion d'intervalles contenus dans une région complémentaire de $S^2 - K_\lambda$;*
- (2) *l'intersection de l'un des deux disques de S^2 bordés par chaque courbe γ_{U^+} avec K_λ est exactement $\pi(U^+)$.*

PREUVE: La frontière de K_λ dans S^2 contient deux types de courbes de Jordan. En effet la restriction de la projection π à une courbe de Jordan C dans K est injective: aucune feuille de la préimage $\tilde{\lambda}$ n'a l'un de ses bouts dans une telle courbe de Jordan C , car alors ses deux bouts seraient dans C , et sa projection dans S serait un élément de M'' (si N est différent de la somme connexe de deux surfaces épaissies) ou de M' (dans les autres cas, d'après le lemme 1.4). Les courbes C de ce type se plongent donc dans K_λ .

Définition. Les autres courbes de Jordan dans la frontière de K_λ dans S^2 seront appelées *courbes frontières*.

Une courbe frontière borde un disque dans le revêtement planaire S' : ce disque est un relevé d'une composante connexe du complémentaire de λ dans S .

Considérons une courbe de Jordan C , dans K , et tous les ouverts basiques de la famille \mathcal{U} qui lui sont associés. Soit \mathcal{U}_C la famille formée de ces ouverts basiques: deux ouverts de cette famille sont disjoints dans K . L'image dans K_λ d'un ouvert basique U a une frontière dont les éléments correspondent bijectivement aux feuilles du courant $F(\lambda)$ dont une extrémité est dans U et l'autre dans $K - U$: cette frontière est donc finie.

Pour la même raison, les images de deux ouverts distincts (compacts) de la famille \mathcal{U}_C sont deux compacts d'intersection finie. Soit p un point de l'intersection de deux fermés $\pi(U_1)$ et $\pi(U_2)$: nous allons décrire l'allure de ces fermés près du point p , comme dans l'affirmation 3.9.3. Le point p est contenu dans l'intersection de deux courbes frontières c_1 et c_2 , tangentes au point p . Soit k un petit arc plongé dans S^2 qui coupe transversalement ces deux courbes au point p .

AFFIRMATION A.4.3. *Il existe un disque D , voisinage de p sur la sphère S^2 , tel que les intersections des deux composantes de $D - k$ avec K_λ sont entièrement contenues, l'une dans U_1 , l'autre dans U_2 .*

PREUVE: La démonstration est exactement la même que celle de l'affirmation 3.9.3. □

Les fermés de la famille \mathcal{U} se partagent en un nombre fini d'orbites sous l'action du groupe G . Soit U l'un de ces fermés; la frontière du fermé $\pi(U)$ intersecte un nombre fini de courbes frontières, toutes les autres courbes frontières étant entièrement contenues dans $\pi(U)$ ou dans $\pi(K-U)$. Soit D le disque de S^2 bordé par l'une de ces courbes frontières: l'intersection de $\pi(U)$ et de ∂D est une réunion d'intervalles. Pour chacun de ces intervalles, considérons la géodésique de l'intérieur de D qui a les mêmes bouts (pour la métrique associée à Γ): on obtient donc une réunion d'arcs disjoints de D . Ces arcs se recollent, d'après l'allure locale de K_λ (cf Affirmation A.4.3), pour former une réunion de courbes de Jordan de la sphère S^2 qui intersectent chacune en un nombre fini de points l'ensemble K_λ . Si l'on fait cette construction pour l'image du fermé U ainsi que pour l'image du fermé $K-U$, on obtient deux familles de courbes de Jordan: deux courbes dans des familles différentes ont un contact tangentiel en des points de la frontière de $\pi(U)$ ou le long d'arcs géodésiques dans l'un des disques de S^2 bordés par une courbe frontière.

AFFIRMATION A.4.4. *Pour tout ouvert U , la famille de courbes de Jordan associée à U est réduite à une seule courbe.*

PREUVE: Soit R la fermeture d'une composante connexe du complémentaire dans S^2 de la collection de courbes associées à U . D'après l'affirmation A.4.3, l'intersection de R avec $\pi(\lambda)$ est entièrement contenue dans l'un des fermés $\pi(U)$ ou $\pi(K-U)$. Or, chacun de ces deux fermés est connexe d'après l'hypothèse sur le graphe de Whitehead de λ et la proposition A.2. Donc, la famille de courbes associées à U est réduite à une seule courbe simple. □

Nous en déduisons tout de suite:

COROLLAIRE A.4.5. *L'intersection de $\pi(U)$ avec chacune des courbes frontières exceptionnelles est un intervalle. En particulier, les courbes associées aux fermés $\pi(U)$ et $\pi(K-U)$ sont les mêmes.*

PREUVE: Raisonnons par l'absurde. Soit γ la courbe fournie par l'affirmation A.4.4, qui délimite $\pi(U)$. Si ce dernier intersecte une courbe frontière f en $k \geq 2$ intervalles, la courbe γ intersecte le complémentaire du disque de S^2 bordé par f en k arcs. Les extrémités de chacun de ces arcs sont nécessairement, à cause de la topologie du plan, les extrémités d'un intervalle de $\pi(K-U) \cap f$. Puisque $k \geq 2$, on en déduit que $\pi(K-U)$ n'est pas connexe.

La dernière partie du corollaire est immédiate, d'après la construction des courbes associées à U et à $K-U$. □

Reprenons la démonstration de la proposition A.4.2. Soit $(\gamma)_U$ la famille de courbes de Jordan associées par la construction précédente aux divers ouverts de la famille U .

Tout d'abord, deux telles courbes γ_U et $\gamma_{U'}$ ont un contact tangentiel en un nombre fini de points et d'intervalles du complémentaire de K_λ dans S^2 . En effet, ou bien les fermés U et U' sont disjoints, ou bien l'un des deux disons U est contenu dans l'autre. Dans le premier cas, soit δ un disque de $S^2 - K_\lambda$ bordé par un cercle frontière associé à U ; alors l'intervalle $\partial\delta \cap (\pi(U))$ intersecte l'intervalle $\partial\delta \cap (\pi(U'))$ au plus en ses extrémités. Dans les trois cas de figure qui peuvent se présenter, on en déduit que les arcs $\gamma_U \cap \delta$ et $\gamma_{U'} \cap \delta$ ou bien sont disjoints, ou bien ont une extrémité en commun, ou bien coïncident. Ceci entraîne, en utilisant l'affirmation A.4.3 que les contacts entre les courbes γ_U et $\gamma_{U'}$ sont bien du type décrit.

On raisonne de la même façon lorsque $\pi(U)$ est contenu dans $\pi(U')$.

La deuxième partie de la proposition A.4.2 découle directement de la construction des courbes γ_U associées aux ouverts U .

De même, la condition d'équivariance de la famille $(\gamma)_U$ provient de la construction. □

Reprenons maintenant la démonstration du théorème A.4.

Nous noterons N_λ , la variété hyperbolique à bord convexe associée au groupe Γ intervenu dans la démonstration de l'affirmation A.4.1, c'est-à-dire la variété hyperbolique homéomorphe à N pour laquelle les composantes du support de λ sont paraboliques, et les composantes de $\partial N - \lambda$ sont totalement géodésiques.

On peut identifier le bord du revêtement universel de N_λ avec le complémentaire dans S^2 de K_λ . Considérons la partie finie de N_λ . La fermeture dans N_λ du complémentaire de cette partie fine est une variété (compacte) homéomorphe à N que nous noterons N'_λ . La composante compressible du bord de N'_λ porte la trace des composantes de la partie fine qui ont été enlevées. C'est une réunion d'anneaux $A(\lambda)$, voisinages réguliers des composantes du support de λ . Nous noterons $\partial(\tilde{N})$ la préimage dans le revêtement universel de N de la composante compressible du bord de N . Cette composante s'identifie naturellement avec une composante du bord de N'_λ . On a le résultat suivant, dont nous allons déduire le théorème A.4.

AFFIRMATION A.4.6. *Il existe une famille G -équivariante de courbes de Jordan $(\tilde{\alpha}^i)_U$, deux à deux disjointes, telle que:*

- (1) *l'intersection de chacune des courbes de cette famille avec une composante de $A(\lambda)$ est connexe, ainsi que son intersection avec chaque composante de $\partial(\tilde{N}) - A(\lambda)$;*
- (2) *chaque courbe $\tilde{\alpha}^i_U$ découpe K en deux fermés dont l'un est U .*

PREUVE: Considérons la famille $(\gamma)_{\mathcal{U}}$ fournie par la proposition A.4.2. On passe d'abord de cette famille à une famille de courbes qui réalise les mêmes coupures de K_{λ} et qui n'ont entr'elles que des contacts tangenciels en des points. Ceci de la manière suivante: les disques de S^2 bordés par des courbes frontières de K_{λ} se partagent en un nombre fini d'orbites sous l'action du groupe G , correspondant aux diverses composantes connexes du support de la lamination λ sur la composante compressible de ∂N . Choisissons un représentant de l'une de ces orbites de stabilisateur G_0 : la trace de la famille $(\gamma)_{\mathcal{U}}$ sur chacune de ces composantes est une réunion de géodésiques plongées et disjointes, invariante sous l'action du groupe G_0 . Remplaçons chacune de ces géodésiques β par autant d'arcs β_i , parallèles, disjoints, et avec les mêmes bouts que β qu'il y a de courbes dans la famille $(\gamma)_{\mathcal{U}}$ qui intersectent le disque sélectionné le long de l'arc β (on vérifie qu'il n'y a pour tout arc β qu'un nombre fini de telles courbes). On peut supposer que la nouvelle famille d'arcs obtenus est encore G_0 -équivariante. On prolonge cette construction par équivariance à toute l'orbite du disque sélectionné. On raisonne de même avec les autres disques. Finalement, on obtient un disque ayant les propriétés voulues.

Les arcs dans les disques complémentaires ainsi construits se recollent en des courbes fermées, formant une famille G -équivariante de courbes de Jordan disjointes avec des contacts tangenciels. A chaque courbe de l'ancienne famille correspond de manière unique une courbe de la nouvelle famille, de sorte que ces deux courbes découpent de la même façon l'ensemble K_{λ} ; ainsi, on peut indexer la nouvelle famille par \mathcal{U} . Nous noterons encore la nouvelle famille $(\gamma)_{\mathcal{U}}$.

Pour obtenir à partir de la famille $(\gamma)_{\mathcal{U}}$, une famille de courbes $(\tilde{\alpha}')_{\mathcal{U}}$ sur le bord de \tilde{N}'_{λ} , on raisonne comme dans la proposition 3.9.6. D'après la construction, chaque courbe α'_U découpe K en deux ouverts fermés dont l'un, U_0 a une image par π qui coïncide avec $\pi(U)$. On peut dire aussi que si on lui enlève un nombre fini de points (ceux dont l'image est dans la frontière de $\pi(U)$), cet ouvert fermé est saturé pour la relation d'équivalence qui définit K_{λ} . Donc cet ouvert (fermé) U_0 est égal à U . La collection de courbes $(\gamma)_{\mathcal{U}}$ vérifie donc les conclusions de l'affirmation A.4.6. \square

La condition d'équivariance ci-dessus entraîne que les courbes $\tilde{\alpha}'$ se projettent en une famille de courbes simples α' sur ∂N qui sont toutes des méridiens (puisque'elles se relèvent en des courbes fermées), par rapport aux quelles la lamination λ est en position prétendue.

Pour terminer la démonstration du théorème A.4, il nous suffit de montrer qu'il existe un difféomorphisme $\phi \in \text{Mod}^0(N)$ tel que $\alpha' = \phi(\alpha)$. L'inverse de cet homéomorphisme vérifiera alors les conclusions du théorème A.4.

Soit (F_i) la famille des composantes complémentaires de α sur la sur-

face compressible de ∂N . Soit C l'ensemble limite d'une composante \tilde{F} de la préimage de $F \in (F_i)$ dans le revêtement planaire S' . La courbe de Jordan C définit une certaine famille d'ouverts basiques \mathcal{U}_C délimités par la famille de courbes $(\tilde{\alpha})_{\mathcal{U}_C}$ de la préimage de α . Notons $(\tilde{\alpha}')_{\mathcal{U}_C}$ les composantes de la préimage de α' qui délimitent les ouverts de la famille \mathcal{U}_C , fournies par l'affirmation A.4.6. Les disques de S^2 bordés par les courbes de cette famille et contenant un ouvert basique de \mathcal{U}_C sont deux à deux disjoints. Le complémentaire \tilde{F}' de la réunion de ces disques dans le revêtement planaire S' est le relevé dans S' d'une composante complémentaire F' de la collection de courbes α' sur la surface S ; l'adhérence dans S' de \tilde{F}' est la courbe C , puisque le complémentaire dans K de la réunion des ouverts de la famille \mathcal{U}_C n'est autre que C .

On choisit alors un homéomorphisme ϕ_i de la surface F_i sur la surface Σ_i qui a la propriété de se relever en un homéomorphisme de \tilde{F}_i vers \tilde{F}'_i , qui est l'identité sur C , et qui envoie la courbe $\tilde{\alpha}_U$ sur la courbe $\tilde{\alpha}'_U$. On peut supposer que ces homéomorphismes coïncident sur chaque composante de α ; ils se recollent alors en un homéomorphisme ϕ de la surface ∂N qui envoie le système de méridiens α sur le système α' . Cet homéomorphisme se prolonge par construction au bretzel N . D'autre part, le relevé privilégié, obtenu en recollant tous les relevés des ϕ_i (de la seule façon possible) agit par l'identité sur l'ensemble limite de G . Donc $\phi \in \text{Mod}^0(N)$. □

Nous reprenons maintenant la démonstration du théorème 3.4 dans le cas des bretzels creux. Il nous faut montrer que l'application F est bicontinue.

Soit (λ_i) une suite de laminations (que l'on peut supposer chacune être réunion de feuilles compactes) appartenant à l'ouvert O telle que la suite $(F(\lambda_i))$ converge vers l'image $F(\lambda)$ d'une lamination de l'ouvert O . D'après le théorème 1.3, il existe un système admissible par rapport auquel λ est en position tendue. Soit α le système de méridiens formé de la réunion des courbes de α qui sont dans M . On a alors:

PROPOSITION A.5. Soit λ une lamination appartenant à l'ouvert O en position tendue par rapport à un système admissible contenant α . Alors, le graphe de Whitehead du courant $F(\lambda)$ par rapport au système de méridiens α a toutes ses composantes connexes fortement connexes et n'a pas de sommet de jonction.

PREUVE: Le premier point est d'interpréter le graphe de Whitehead en termes de la topologie de la lamination λ sur $S \subset \partial N$.

On commence pour cela par redéfinir l'application F pour étendre son domaine de définition aux laminations mesurées λ qui sont seulement en position *prétendue* par rapport à un système admissible de méridiens α .

On définit à partir de λ un courant géodésique du groupe G , c'est-à-dire une mesure G -invariante μ , sur $M(K)$, de la façon suivante. Soient deux courbes α_1 et α_2 contenues dans la préimage de α dans le revêtement planaire S' ; chacune de ces deux courbes partage K en deux ouverts de K . Parmi les quatre ouverts ainsi définis, exactement deux sont disjoints: leur produit est donc un ouvert (fermé) de l'espace $M(K)$, ensemble des paires de points distincts de K . L'ensemble des feuilles de la lamination $\tilde{\lambda}$ qui coupent à la fois α_1 et α_2 est fermé dans l'espace des feuilles de $\tilde{\lambda}$; sa mesure transverse est un nombre positif que l'on définit comme la masse de $U_1 \times U_2$ pour la mesure μ .

Toutefois, les ouverts du type $U_1 \times U_2$ ne suffisent pas à engendrer la topologie de $M(K)$ (en effet les ouverts du type U_1 n'engendrent pas la topologie de K). Nous allons donc définir un nouveau type d'ouverts qui constituera cette fois une base de voisinages des points situés sur les courbes de Jordan de K . Notons, pour chaque composante F du complémentaire de α sur S , F' la surface fermée obtenue en identifiant en un point chaque composante du bord de F . Considérons deux courbes simples l_1 et l_2 de la surface F' telles que chaque composante complémentaire sur F' de $l_1 \cup l_2$ est un disque. Perturbons légèrement ces courbes, de sorte qu'elles soient disjointes des points images du bord de $\alpha \cap F$. On peut alors les considérer comme des courbes simples (que nous noterons toujours l_1 et l_2) de la surface S , qui, adjointes au système α découpent F en une réunion de surfaces planaires dont toutes les composantes du bord sauf au plus une sont des courbes de ∂F . Considérons la préimage de ces deux courbes dans un relevé \tilde{F} de la surface F . C'est une réunion d'intervalles homéomorphes à $]0, 1[$, proprement plongés; la fermeture de chacun de ces intervalles est un intervalle fermé qui découpe K en deux ouverts. L'ensemble des ouverts ainsi construits, à partir de deux courbes ayant les mêmes propriétés que l_1, l_2 , sur chaque composante de la préimage du complémentaire de α sur $S \subset \partial N$, définit une base de voisinages ouverts de tous les points de K dont la composante connexe est une courbe de Jordan. Donc, la réunion de cette famille et de la famille d'ouverts basiques \mathcal{U} , fournit une base de la topologie de K tout entier.

Soient U_1 et U_2 deux ouverts de la famille ci-dessus, disjoints et supposons que l'un de ces deux ouverts au moins, n'est pas un ouvert basique, puisque la mesure μ a déjà été définie sur le produit des ouverts de ce type.

Celui (ou ceux) de ces ouverts qui ne sont pas des ouverts basiques est (ou sont) défini par des composantes \tilde{l}_1 (et \tilde{l}_2) de la préimage de la réunion des courbes l_1 et l_2 associées aux diverses composantes connexes de $S - \alpha$. Considérons l'ensemble de tous les ouverts basiques contenus dans U_1 ou dans U_2 . Définissons la masse de $U_1 \times U_2$ comme la somme des masses $\mu(u_1 \times u_2)$, pour tous les couples u_1, u_2 d'ouverts basiques respectivement contenus dans U_1 ou U_2 . Il nous faut vérifier que ce

nombre est fini; or tel est bien le cas, d'après le fait suivant:

AFFIRMATION A.5.1. *Il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts du type $u_1 \times u_2$ qui contribuent de manière non-nulle à la somme ci-dessus.*

PREUVE: Considérons d'abord le cas de deux ouverts non basiques U_1 et U_2 , associés à des composantes connexes distinctes de \tilde{F}_i .

Les feuilles de λ qui joignent ces ouverts (contribuant ainsi à la masse) doivent rencontrer un compact fixe de \tilde{S}' (par exemple une composante $\tilde{\alpha}$ qui sépare dans S' les deux surfaces \tilde{F}_i). Si l'affirmation A.5.1 n'était pas vérifiée, on déduirait du lemme 1.14 l'existence d'une feuille f de $\tilde{\lambda}$ possédant un bout dans une courbe de Jordan de K . Ceci entraîne facilement, puisque λ est une lamination *mesurée* que la feuille f est entièrement contenue dans une composante connexe de la préimage de l'une des surfaces F_i . Ceci est contraire à la propriété de λ d'être en position prétendue par rapport au système de méridiens α : en effet, alors, la feuille l aurait une intersection géométrique nulle avec α .

Lorsque les deux ouverts U_1 et U_2 sont associés à des feuilles de \tilde{l}_1 et \tilde{l}_2 , contenues dans une même composante connexe de la préimage des F_i , de stabilisateur Γ , l'argument ci-dessus doit être modifié. S'il existe une infinité d'ouverts $u_1^i \times u_2^i$ qui contribuent à la masse de $U_1 \times U_2$, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que les ouverts u_1^i sont de la forme $\gamma_i(u_1^0)$ pour une certaine suite d'éléments γ_i du groupe Γ . Alors, quitte à extraire éventuellement une sous-suite, la suite d'ouverts $\gamma_i^{-1}(u_2^i)$ s'accumule vers un point de l'ensemble limite C du groupe Γ (puisque U_1 et U_2 sont disjoints et que Γ agit proprement discontinuement sur la composante \tilde{F} qu'il stabilise). On en déduit toujours d'après le lemme 1.14 l'existence d'une feuille f de la préimage $\tilde{\lambda}$ dont un bout appartient à C . On trouve alors une contradiction, comme précédemment, avec le fait que la lamination λ est en position prétendue par rapport à α . \square

L'affirmation précédente nous dit que μ prend des valeurs finies sur tous les ouverts de $M(K)$ (relativement compacts) obtenus en effectuant des produits d'ouverts de la famille \mathcal{U} que nous avons agrandie. On vérifie que cette fonctionnelle est finiment additive. Pour pouvoir en faire une mesure, il nous suffit de remarquer que l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques de ces ouverts est dense dans l'espace des fonctions continues de $M(K)$ pour la topologie uniforme.

Ainsi μ définit bien une mesure de Borel sur $M(K)$, invariante sous l'action du groupe G , par construction.

Notation. Nous noterons $\mu(\lambda)$ la mesure ainsi définie.

Le support de $\mu(\lambda)$ est exactement le fermé de $M(K)$ formé des bouts des feuilles de la lamination $\tilde{\lambda}$, préimage de λ dans le revêtement planaire S' .

Nous nous intéressons maintenant à la continuité de l'application μ . Nous noterons G_i les sous-groupes de surface intervenant dans la décomposition en produit libre de groupe G (ces groupes sont bien définis à conjugaison près); il correspond à chacun de ces sous-groupes un espace de courants $C(G_i)$ naturellement contenu dans $C(G)$.

LEMME A.5.2. *Soit (λ_i) une suite de laminations mesurées en position prétendue par rapport à un système de méridiens α telle que la suite $\mu(\lambda_i)$ converge dans $C(G)$ vers un courant géodésique μ . Alors le courant μ est la somme d'un courant $\mu(\lambda)$ où λ est une lamination mesurée en position prétendue par rapport à α et de courants géodésiques dans $C(G_i)$.*

PREUVE: Considérons la trace d'une lamination λ_j sur une surface F_i , composante connexe de $S - \alpha$. Cette intersection est formée d'arcs proprement plongés; ces arcs se décomposent en un nombre fini de classes d'isotopie relativement au bord ∂F_i .

Nous allons définir une notion de *longueur* pour un arc k proprement plongé dans F_i . Fixons un arc k_i^0 contenu dans F et dont les extrémités sont dans les mêmes composantes que k ; alors la longueur $l(k)$ de k sera la longueur homotopique du mot de G_i représenté par le lacet $k \cup k_i^0$, cette longueur étant mesurée sur une base fixée une fois pour toutes. Pour un arc k dont les extrémités sont sur la même composante, la longueur est définie comme la longueur du lacet de G_i représenté par k . Nous appellerons ce nombre la longueur *algébrique* de k .

On a alors une notion de longueur pour la lamination λ_j , en position tendue par rapport à α . Puisque λ_j est une lamination mesurée, les classes d'isotopie d'arcs k_j^p de $\lambda_j \cap F$ ont une mesure transverse λ_j^p ; le nombre obtenu en additionnant les longueurs algébriques $\lambda_j^p l(k_j^p)$ des diverses classes d'isotopie d'arcs de $\lambda_j \cap F$ fournit une bonne mesure $l(F(\lambda_j))$ de la longueur de $F(\lambda_j)$. Pour un courant de $C(G)$, réunion finie de feuilles compactes, la notion de longueur habituelle l' est définie comme combinaison des longueurs des classes de conjugaison des composantes du courant considéré.

Il existe une constante C , telle que, pour tout courant $\mu(\lambda)$ associé à une lamination mesurée en position prétendue par rapport à α , dont le support est réunion de feuilles compactes, on a:

$$l(\mu(\lambda)) \leq C l'(\mu(\lambda)).$$

Cette constante C ne dépend que des bases des groupes G_i intervenant dans la définition

Supposons que les arcs de $\lambda_j \cap F$ ont une longueur algébrique bornée (lorsque j varie). Alors, quitte à extraire une sous-suite, on peut remplacer la suite (λ_j) par une suite de laminations (λ'_j) , telle que λ_j est homotope à λ'_j , que les nouvelles laminations soient toujours en position

prétendue par rapport à α , et telle que les classes d'isotopie d'arcs de $F \cap \lambda_j$ forment une famille indépendante de i .

La nouvelle suite λ'_j converge alors dans l'espace des laminations mesurées $ML(S)$ vers une lamination λ qui est en position prétendue par rapport au système α : en effet, d'après l'inégalité précédente, et puisque la suite $(\mu(\lambda_j))$ converge, tous les poids λ_j^p sont bornés supérieurement. Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que ces poids ont une limite, non toutes nulles puisque les arcs k_j^p ont une longueur bornée supérieurement.

Considérons maintenant le cas où la longueur algébrique de certaines classes d'isotopie de feuilles de $\lambda_j \cap F$ tend vers l'infini. Les feuilles dans une même classe d'isotopie ont un poids transverse pour la mesure λ_j .

Puisqu'on a supposé que la suite $\mu(\lambda_j)$ convergeait, le poids transverse des feuilles dont la classe d'isotopie a une longueur qui tend vers l'infini, tend nécessairement vers 0.

Considérons alors les feuilles de $\lambda_j \cap F$ dont la classe d'isotopie a une longueur bornée. Ces feuilles ne se recollent pas exactement en une lamination; on peut toutefois supposer, comme précédemment que ces classes d'isotopie, en nombre fini, sont telles que leurs poids transverses convergent. Ces poids limites vérifient alors les conditions de recollement le long des composantes de α (puisque λ_j vérifie ces conditions et que l'on a négligé exactement des classes d'isotopie d'arcs dont le poids transverse tend vers 0). Ces poids limites définissent ainsi, lorsqu'ils ne sont pas tous nuls, une lamination λ en position prétendue par rapport au système α . Rappelons que le support de $\mu(\lambda)$ est exactement formé des bouts des feuilles de la lamination préimage $\tilde{\lambda}$. Une base de voisinages compacts de ce support est formé des produits de deux ouverts basiques disjoints. Sur ces ouverts U , on a:

$$\mu(U) \geq \mu(\lambda)(U).$$

Donc, la différence $\mu - \mu(\lambda)$ est un courant géodésique μ' . Il nous suffit de voir que le courant μ' est une somme de courants géodésiques contenus dans les espaces $C(G_i)$. Pour cela, il nous faut montrer que le nombre d'intersection de μ' avec chaque composante de α est nul. Or, puisque λ_j est en position prétendue par rapport à α , le nombre d'intersection de $\mu(\lambda_j)$ avec une composante α_0 de α , est *exactement* le nombre d'intersection (celui de $ML(S)$) de la lamination λ_j avec α_0 .

Par construction de la lamination λ , ce nombre d'intersection converge, lorsque j tend vers l'infini, vers le nombre d'intersection de λ (le nombre d'intersection calculé dans $ML(S)$) avec α_0 , qui est aussi le nombre d'intersection de $\mu(\lambda)$ avec α_0 .

Donc le courant μ' est bien du type décrit dans le lemme A.5.2.

Remarquons que lorsque les longueurs algébriques de tous les arcs k_j^l tendent vers l'infini, la lamination λ n'existe pas, et qu'alors le courant μ est exactement μ' . \square

COROLLAIRE A.5.3. *Sur l'ouvert O , les applications μ et F coïncident.*

PREUVE: Pour une lamination λ de O dont le support est réunion de feuilles compactes, on a égalité de $\mu(\lambda)$ et de $F(\lambda)$.

Il suffit donc de voir la continuité de μ sur O . Or l'argument précédent montre que si la lamination λ de O est en position tendue par rapport à un système admissible qui contient un système de méridiens α , la mesure $F(\lambda) - \mu(\lambda)$ est une mesure somme de courants géodésiques contenus dans les espaces $C(G_i)$.

Or, d'après le Théorème 2.8, le support de $F(\lambda)$ ne peut contenir le support d'un courant dans un sous-espace $C(G_i)$. En effet, alors, ce courant a même support que l'image par F d'une sous-lamination λ' de λ . Or, cette lamination a un nombre d'intersection non-nul avec tous les méridiens de α (sinon, elle appartiendrait à M'), et donc puisqu'elle est en position prétendue par rapport à α , son nombre d'intersection avec α est non-nul. \square

Définition. Nous noterons toujours F le prolongement de l'application F à l'ensemble des laminations en position prétendue par rapport à un système de méridiens. C'est-à-dire, nous poserons $F(\lambda) = \mu(\lambda)$, pour toute lamination λ en position prétendue par rapport au système α .

Pour terminer la démonstration de la proposition A.5, on définit un graphe $\Gamma'_\alpha(\lambda)$, lié à la topologie de la lamination λ sur la surface S .

Pour chaque composante de $S - \alpha$, ce graphe a ses sommets en correspondance avec les courbes de α dans la frontière de $S - \alpha$. Pour chaque classe d'isotopie de feuille de $\lambda \cap (S - \alpha)$, ce graphe aura une arête joignant les sommets en question. Le graphe $\Gamma'_\alpha(F(\lambda))$ est alors la réunion disjointe des graphes associés aux diverses composantes de $S - \alpha$.

On a une application naturelle du graphe $\Gamma'_\alpha(\lambda)$ vers le graphe de Whitehead $\Gamma_\alpha(F(\lambda))$ qui identifie deux arêtes si elles correspondent à des feuilles de $\lambda \cap (S - \alpha)$, homotopes relativement à α dans la variété N .

Supposons que le graphe associé à la composante F de $S - \alpha$ n'est pas fortement connexe: on peut alors exprimer ce graphe comme réunion de deux graphes tel que tous les cycles que contient l'un d'eux, disons Γ_0 sont homotopes à 0 dans N . On construit alors une courbe fermée dans F , homotope à 0 dans N qui sépare les feuilles de λ dont l'image est dans Γ_0 de celles dont l'image est dans le complémentaire $\Gamma_\alpha(\lambda) - \Gamma_0$ (cf la démonstration de la proposition 3.10). L'existence d'une telle courbe fermée est impossible pour une lamination λ contenue dans l'ouvert O .

De la même façon, on montre que ce graphe n'a pas de sommets de jonction (on utilise cette fois la planarité du revêtement \tilde{F}).

Ceci termine la démonstration de la proposition A.5. \square

Retournons à la démonstration du théorème 3.5 dans le cas des bretzels creux. Soit (λ_i) une suite de laminations de O telle que la suite $(F(\lambda_i))$ converge vers un courant $F(\lambda)$, où λ est aussi un élément de O . On peut supposer, puisque F est continue, que les laminations λ_i ont toutes un support qui est réunion de feuilles compactes. D'autre part, puisque λ appartient à O , elle est en position prétendue par rapport à un système admissible de méridiens α . Donc, d'après la proposition A.5, le graphe de Whitehead de $F(\lambda)$ par rapport à α est fortement connexe et sans point de jonction. Puisque les courants $F(\lambda_i)$ convergent vers $F(\lambda)$, la même propriété est vérifiée pour le graphe des courants $F(\lambda_i)$ du moins lorsque i est suffisamment grand.

D'après le théorème A.4, quitte à remplacer la suite de laminations (λ_i) par une suite qui a même image dans $L(N)$, on peut supposer que ses éléments sont des laminations en position prétendue par rapport à α .

D'après le lemme A.5.2, il existe une lamination λ' en position prétendue par rapport à α telle que le courant $F(\lambda)$ est la somme de $F(\lambda')$ et de courants dans les espaces $C(G_i)$. Comme dans le corollaire A.5.3, l'étude du support des courants $F(\lambda)$, où λ appartient à O , entraîne que nécessairement $F(\lambda) = F(\lambda')$. Nous sommes donc conduits à généraliser la proposition 3.12 au cas des bretzels creux:

PROPOSITION A.6. *Soit λ une lamination de l'ouvert O en position prétendue par rapport à un système de méridiens α ; soit λ' une lamination mesurée en position prétendue par rapport à α telle que $F(\lambda) = F(\lambda')$. Alors, la lamination λ' appartient aussi à l'ouvert O .*

PREUVE: La démonstration est exactement la même que celle de la proposition 3.12. On montre d'abord que la lamination λ' n'appartient pas à M' , c'est-à-dire qu'elle n'est pas une limite de méridiens. Dans ce cas en effet, le complémentaire de sa préimage dans S' contiendrait une courbe simple homoclinique. Selon que cette feuille intersecte ou non une composante de $\hat{\alpha}$, on trouve alors que le graphe de Whitehead de $F(\lambda)$ n'est pas fortement connexe ou bien contient un sommet de jonction.

On définit alors une relation d'équivalence sur \tilde{K} associée à λ et on montre ensuite que cette relation peut aussi être décrite à partir de λ' . Plus précisément, on montre que λ' vérifie la Propriété *, définie comme dans le §3 par le fait que sa préimage dans S' ne contient pas deux feuilles distinctes avec les mêmes bouts dans \tilde{K} : on démontre pour cela que l'espace quotient \tilde{K}_λ ne peut pas être disconnecté en lui enlevant un ou deux points.

Pour terminer la démonstration du fait que λ' appartient à O , on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une lamination $\mu \in M'$, telle que le nombre d'intersection $i(\lambda', \mu)$ est nul. Comme dans l'affirmation 3.12.13, cette lamination μ' est en position prétendue par rapport à α . D'après les propositions 1.12 et 1.13, ou bien le complémentaire de μ' sur la surface S est compressible, ou bien il existe deux feuilles de la préimage $\tilde{\mu}'$ qui ont les mêmes bouts dans K . C'est ici une simplification par rapport au cas des bretzels, car le 3e cas de cette proposition n'apparaît pas. Alors, les mêmes raisonnements que ceux utilisés dans la fin du §3 achèvent la démonstration.

□

Ceci termine la démonstration du théorème 3.5 dans le cas des bretzels creux.

REFERENCES

- [Bo1] F. Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3.* Ann. of Maths **124** (1986), 71-158.
- [Bo2] F. Bonahon, *The geometry of Teichmüller space via geodesic currents.* Invent. Math. **92** (1988), 139-162.
- [Bo3] F. Bonahon, *Geodesics currents on hyperbolic groups*, article 1989.
- [CEG] R.D. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green., *Notes on notes of Thurston.* Analytical and geometrical aspects of hyperbolic space, LMS LNS 111.
- [CaThu] J.W. Cannon, W.P. Thurston, *Group invariant Peano curve*, article 1985.
- [FL] A. Fathi, F. Laudenbach, *Difféomorphismes pseudo-Anosov et décompositions de Heegaard*, CRAS **291** (1980), 423-425.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poéanaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces.* Astérisque **66-67**,.
- [Fl] W.J. Floyd, *Group completions and limit sets of Kleinian groups*, Inv.Math **57** (1980), 205-218.
- [G] F. Gramain, *Sur le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **6** (1973), 53-66.
- [Jo] K. Johansson, *Homotopy equivalence of 3.manifolds with incompressible boundary*, Lecture Notes in Math. (1979).
- [Le] G. Levitt, *Foliations and laminations on hyperbolic surfaces.* Topology **22** (1983), 119-135.
- [Ma] B. Maskit, *A characterisation of Schottky groups*, J. d'Analyse. Math. **19** (1967), 227-230.
- [McC] D. McCullough, *Twist groups of compact 3.manifolds*, Topology. **24** (1985), 461-474.
- [McC.Mi] D. McCullough et A. Miller, *Homeomorphisms of 3.manifolds with compressible boundary*, Memoirs of the AMS **344** (1986).
- [M] H. Masur, *Measured foliations and handlebodies*, Erg. Theory and Dyn. Sys **6** (1986), 99-116.
- [M] R.L. Moore, *Concerning upper semi-continuous collections of compacta*, Trans AMS **27** (1925), 416-428.
- [O] J.P. Otal, *Relations d'équivalence sur l'ensemble des bouts d'un groupe libre.* article 1988.
- [Pa] A. Papadopoulos, *Réseaux ferroviaires. difféomorphismes pseudo-Anosov et automorphismes symplectiques de l'homologie d'une surface.* Pub.math.d'Orsay (1983).
- [SW] A. Shapiro et J.H.C. Whitehead, *A proof and extension of Dehn's lemma.* Bull.AMS (1958), 174-178.
- [St] J. Stallings, *Group theory and three-dimensional manifolds.* Yale math. monographs.
- [Thu1] W. Thurston, *The geometry and topology of 3.manifolds.* Notes de cours. Université de Princeton (1976-79).
- [Thu2] W. Thurston, *Hyperbolic structures on 3.manifolds I: Deformations of acylindrical manifolds*, Ann. of Maths **124** (1986), 203-246.
- [Wa1] F. Waldhausen, *On irreducible manifolds which are sufficiently large.* Ann. of Maths **87** (1968), 56-88.
- [Wa2] F. Waldhausen, *Eine Verallgemeinerung des Schleifensatzes.* Topology **6** (1967), 501-504.

- [W] J.H.C. Whitehead, *On certain sets of elements in a free group*, Proc. of the LMS 41 (1936), 48–56.
- [Why] G.T. Whyburn, *Analytic Topology*, A.M.S. Coll. Publ. 28 (1942).

Relations d'équivalence sur l'ensemble des bouts d'un groupe libre

Soit G un groupe libre à g générateurs. Nous nous intéressons dans cet article au problème de reconnaître les classes de conjugaison de G qui peuvent être représentées par des courbes simples sur le bord d'un bretzel (*handlebody*) H de groupe fondamental G . Rappelons qu'il existe, à difféomorphisme près, deux bretzels de groupe fondamental G : l'un orientable, l'autre non-orientable.

Le problème plus général que nous étudierons sera celui de représenter une collection finie de classes de conjugaison non proportionnelles par une réunion de courbes simples disjointes sur ∂H .

Définition. Un *multimot* du groupe G est une collection finie $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ de classes de conjugaison de G , chacune indivisible et distinctes deux à deux.

Soit K l'espace des bouts de G . On associe à un multimot γ une relation d'équivalence sur K de la façon suivante: deux points distincts x et y de K sont identifiés si et seulement si il existe un élément de G dont la classe de conjugaison appartient à γ et dont les deux (seuls) points fixes sont x et y . Cette relation est fermée de sorte que l'espace quotient de K par cette relation est un espace séparé compact que nous noterons K_γ . Nous noterons π la projection canonique de K sur K_γ .

Remarquons que l'action du groupe G sur K se projette naturellement en une action topologique sur K_γ .

1. Une condition nécessaire pour la représentabilité d'un multimot γ par une réunion de courbes simples disjointes.

Soit H un bretzel de groupe fondamental G dont le bord contient une réunion c de courbes simples disjointes représentant γ . Le revêtement universel de H se compactifie de façon naturelle en une boule de dimension 3, de sorte que la frontière de cette boule est une sphère S^2 , réunion disjointe de la préimage de ∂H et de l'ensemble K . L'action du groupe G sur K se prolonge donc en une action sur cette sphère S^2 . La préimage de c dans $S^2 - K$ est une réunion d'arcs proprement plongés et disjoints, dont la fermeture dans S^2 est une réunion d'intervalles fermés *disjoints* d'après l'hypothèse d'indivisibilité des classes de conjugaison de la famille γ .

Définissons une relation d'équivalence sur S^2 de la façon suivante: chaque classe d'équivalence non réduite à un point sera l'ensemble des points de S^2 sur une même composante de la fermeture de la préimage de c . Comme ces composantes sont disjointes, on a bien défini une relation

d'équivalence. Puisque l'action de G sur la préimage du bord de H est proprement discontinue, cette relation est fermée. L'espace quotient de S^2 par cette relation est donc homéomorphe à la sphère de dimension 2 d'après un théorème de R. Moore ([M]). D'autre part, cette relation induit sur K la relation d'équivalence que nous avons associée au multimot γ . On a donc un plongement de K_γ dans la sphère de dimension 2, c'est-à-dire que le continuum K_γ est *planaire*. On peut résumer ce qui précède dans la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Si la collection de classes de conjugaison γ est représentable par une réunion de courbes simples disjointes sur le bord d'un bretzel H , le continuum K_γ est planaire.*

§2. La topologie des espaces quotients K_γ .

Nous nous intéressons maintenant à la réciproque de la proposition 1, à savoir:

Question. La planarité du continuum K_γ entraîne-t-elle que le multimot γ est représentable par une réunion de courbes simples disjointes sur le bord d'un bretzel?

Commençons par une réduction du problème: supposons qu'il existe une décomposition du groupe G en un produit libre de deux groupes A et B telle que la collection γ se décompose en deux familles γ_A et γ_B , l'une contenue dans A et l'autre dans B . Alors, si γ_A et γ_B sont représentables chacune par une réunion de courbes simples disjointes sur des bretzels de groupes respectifs A et B , la collection γ sera représentable sur la somme connexe de ces bretzels par une réunion de courbes simples disjointes. Il en est de même lorsque le groupe G se décompose en une HNN sur le groupe trivial.

On peut donc supposer dans le problème de la représentabilité de γ qu'une telle décomposition n'existe pas.

Définition. La collection γ est dite *indécomposable* lorsqu'une décomposition de G en produit libre ou HNN induisant une décomposition de γ n'existe pas.

Considérons alors une base \mathcal{B} du groupe G sur laquelle la collection γ a une longueur minimale. Le graphe de Whitehead de γ sur cette base a alors la propriété d'être connexe, ainsi que le complémentaire de chacun de ses sommets (cf [O, §3]).

A cette base, nous pouvons associer une partition du compact K en $2g$ compacts disjoints $m_i, i = 1, \dots, 2g$; la propriété du graphe de Whitehead entraîne que l'image de chacun de ces compacts dans l'espace quotient K_γ est connexe (cf [O, §3 Proposition 3.7]). Ce qui vient d'être dit et le fait que les translatés par G des compacts ouverts m_i forment une base de voisinages de K démontre donc la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Si le multimot γ est indécomposable, le continuum K_γ est connexe et localement connexe.*

Notons que la réciproque de cette proposition est immédiate.

Poursuivant notre analyse des quotients K_γ , nous nous posons maintenant la question de savoir à quelle condition l'espace K_γ peut posséder des points de coupure, c'est à dire des points qui le disconnectent.

Soit p un tel point. Tout d'abord la classe d'équivalence de p ne peut être réduite à un seul point. En effet, le complémentaire de p dans K_γ est alors une réunion croissante d'images de translatés des ouverts (m_i) . Ceux-ci sont connexes par hypothèse; il en est donc de même pour K_γ .

Donc, pour que le point p puisse disconnecter K_γ , il est nécessaire que sa classe d'équivalence ne soit pas réduite à un seul point. La préimage du point p est donc formée des points fixes d'un élément g du groupe G dont la classe de conjugaison appartient à γ . Notons alors (g^+, g^-) la classe d'équivalence du point p , c'est-à-dire les deux points fixes, respectivement attractif et répulsif de l'élément g . Notons aussi m^+ et m^- des voisinages respectifs des points g^+ et g^- , translatés des ouverts de la partition (m_i) de K . Une base de voisinages de p dans K_γ s'obtient en prenant la réunion des images par π de deux fermés de ce type.

Remarquons tout de suite que les images par l'application π de deux tels voisinages suffisamment petits s'intersectent uniquement au point p : le point p est donc toujours un point de coupure local.

LEMME 3.1. *Le complémentaire du point p a un nombre fini de composantes connexes.*

PREUVE: Soit C une composante connexe de $K_\gamma - p$. La préimage \hat{C} de C dans K est un ouvert fermé de $K - (g^+, g^-)$, dont la frontière dans K contient au moins l'un des points g^+ ou g^- : sinon cette préimage est un ouvert fermé de K saturé pour le relation d'équivalence, alors que d'après notre hypothèse l'espace K_γ est connexe.

On peut exprimer l'ouvert \hat{C} comme une réunion disjointe d'ouverts basiques contenus dans $K - (g^+, g^-)$. Remarquons que les ouverts basiques sont chacun associés à un translaté privilégié du domaine fondamental de référence pour l'action de G sur l'arbre dual \mathcal{T} à la base choisie \mathcal{B} du groupe G .

Remarquons aussi que l'on peut effectuer sur le recouvrement de \hat{C} par des ouverts basiques la réduction suivante: dès que tous les ouverts associés à un domaine fondamental donné sauf un apparaissent dans le recouvrement, on peut les remplacer par le complémentaire de celui qui n'apparaît pas (ces modifications peuvent s'effectuer par récurrence en utilisant une numérotation convenable des translatés du domaine fondamental). Ces modifications étant faites, on a alors:

AFFIRMATION 3.1.1. *Chaque ouvert basique intervenant dans le recouvrement de \tilde{C} est associé à un domaine fondamental situé le long de l'axe de l'élément g dans \mathcal{T} .*

PREUVE: Considérons un translaté d du domaine fondamental situé le long de l'axe de l'élément g dans \mathcal{T} et supposons que l'un des ouverts basiques qui lui sont associés, autre que l'un des deux qui contiennent respectivement g^+ et g^- n'est pas entièrement contenu dans \tilde{C} ou dans son complémentaire. Considérons les domaines fondamentaux qui ne sont pas contenus le long de l'axe et tels que le chemin qui les joint à l'axe de g aboutit à d .

Il n'y a qu'un nombre fini de tels domaines qui contiennent un ouvert basique intervenant dans le recouvrement de \tilde{C} : en effet, dans le cas contraire, on trouverait un point dans la frontière de \tilde{C} distinct de g^+ et de g^- . Considérons un domaine fondamental de ce type qui contient un ouvert basique dans le recouvrement de \tilde{C} . D'après notre hypothèse de minimalité sur le recouvrement de \tilde{C} , l'un au moins des ouverts basiques associés à ce domaine fondamental est entièrement contenu dans le complémentaire de \tilde{C} . On met alors facilement en évidence un point de coupure dans le graphe de Whitehead (cf [O, §3 Proposition 3.7]). Donc, les ouverts basiques intervenant dans le recouvrement de \tilde{C} sont associés à des domaines fondamentaux situés le long de l'axe de g . \square

AFFIRMATION 3.1.2. *Il n'existe pas d'ouvert basique m^+ , voisinage de g^+ ou de g^- dans K tel que $m^+ - (g^+)$ (ou $m^+ - (g^-)$) soit entièrement contenu dans $K - \tilde{C}$ ou dans son complémentaire.*

PREUVE: Raisonnons par l'absurde: soit m^+ un ouvert qui contient par exemple g^+ , maximal pour la relation d'inclusion, et qui vérifie cette propriété. Soit d le translaté du domaine fondamental qui contient m^+ . Chacun des ouverts basiques associés à d , sauf celui qui contient g^- est entièrement contenu dans \tilde{C} ou bien dans son complémentaire d'après l'affirmation 3.1.1. Si on décrit le graphe de Whitehead de γ sur ce domaine fondamental, on découvre alors l'existence d'un sommet qui le disconnecte. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 3.1. Choisissons un ouvert basique m situé le long de l'axe de g , c'est-à-dire tel que $g^+ \in m$ et $g^- \in K - m$. D'après l'affirmation précédente, \tilde{C} a une intersection non vide avec m et aussi avec $K - m$. Soit C une composante connexe du complémentaire du point p dans K . Il existe donc un élément de la préimage de γ , autre que g , dont un point fixe est dans $m \cap \tilde{C}$ et l'autre dans $K - m \cap \tilde{C}$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de composantes de la préimage de γ dont un point fixe est dans m et l'autre dans $K - m$, il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes pour $K_\gamma - p$.

Ceci termine la démonstration du lemme 3.1. \square

Notons donc C_i , pour $i = 1, \dots, k$, les fermetures des composantes connexes de $K_\gamma - p$. Ces connexes sont donc permutés par l'élément g car celui-ci agit sur K_γ en fixant le point p . Nous allons maintenant construire à partir d'une telle donnée combinatoire une action de G sur un arbre simplicial.

Tout d'abord, si h est un élément de G non proportionnel à g , $h(p)$ est contenu dans une composante connexe de $K - p$, disons C_0 . Soit C la composante telle que $p \in h(C_i)$. Si $i \geq 1$, puisque $h(p) \notin C_i$, $h(C)$ est ouvert dans C_i ; il est aussi fermé. Donc, C_i est contenu dans $h(C)$. Donc, toutes les composantes $h(C_i)$, sauf exactement une, sont contenues dans C_0 .

Définition. Considérons les éléments $h(p)$ contenus dans C_0 et distincts de p . Un tel élément sera dit *maximal* s'il n'existe pas un autre $h'(p)$ avec h' distinct de h et d'une puissance de g , tel que $h'(p) \in C_0$ et $h(p)$ appartient à l'une des composantes $h'(C_i)$ contenues dans C_0 . Lorsqu'une telle relation d'inclusion a lieu entre $h(p)$ et $h'(p)$, on dira que h est *supérieur* à h' .

LEMME 3.2. *Pour tout élément $h(p)$ contenu dans C_0 , il existe une suite finie d'éléments h_i , pour $i = 1, \dots, k$ telle que*

- (1) h_1 est maximal et $h_k = h$;
- (2) $h_i \leq h_{i+1}$.

PREUVE: Nous commencerons par montrer que tout élément h est supérieur à un élément maximal. Si h n'est pas maximal, il existe un élément h^1 qui lui est inférieur; si ce dernier élément n'est pas maximal, on recommence, définissant ainsi une suite décroissante d'éléments (h^i). Si cette suite est finie, on a obtenu un élément maximal inférieur à h . Supposons donc que cette suite est strictement décroissante. Nous allons trouver une contradiction grâce à l'affirmation suivante:

AFFIRMATION 3.2.1. *Soit C la fermeture dans K de la préimage d'une composante connexe de $K_\gamma - p$. Il existe alors un nombre fini de translatés $h'(C)$ dont le diamètre ainsi que celui de leur complémentaire est supérieur à une constante positive donnée à l'avance.*

PREUVE: Rappelons que C est un fermé dont la frontière est réduite aux deux points a et b . D'après l'affirmation 3.1.1, l'ouvert $C - (a, b)$ est réunion d'ouverts basiques associés à des domaines fondamentaux le long de l'axe de g .

Considérons l'action standard du groupe G sur la sphère S^2 d'ensemble limite K . A la base \mathcal{B} est associée un système de méridiens m du bretzel H . On peut alors construire deux arcs de Jordan k_1 et k_2 qui vérifient:

- (1) ces arcs s'intersectent en leurs seules extrémités qui sont a et b ;

- (2) k_1 et k_2 intersectent uniquement les composantes de la préimage de m situées le long de l'axe de g composantes;
- (3) ils intersectent ces courbes transversalement et une seule fois (en particulier k_1 et k_2 intersectent les mêmes composantes de la préimage de m);
- (4) leur réunion est une courbe de Jordan c qui découpe K en deux fermés dont l'un est C .

Comme les points a et b sont les points fixes d'un élément de G , l'orbite de cette paire de points dans $K \times K$ est discrète. Puisque les arcs k_1 et k_2 intersectent les composantes de la préimage de m au plus une fois, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de l'orbite de k_1 et de k_2 qui intersectent un compact donné de $S^2 - K$. En particulier seulement un nombre fini d'éléments de cette orbite peut découper K en deux fermés dont les diamètres respectifs sont supérieurs à une constante donnée à l'avance.

On construit ainsi un élément h' , inférieur à h et maximal.

Le même argument montre qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments entre deux éléments donnés à l'avance. □

Ce lemme nous permet de construire une action du groupe G sur un arbre simplicial T de la façon suivante. Tout d'abord on peut définir une notion de région complémentaire.

Définition. Une *région complémentaire* est un ensemble \mathcal{G} d'éléments de la classe de conjugaison de G tels que: pour tout couple d'éléments distincts g et g' appartenant à \mathcal{G} , g est un élément maximal dans l'ensemble $(h(p))$ des éléments de l'orbite de p contenus dans la composante connexe de K_γ qui contient g' . Le groupe G agit de façon naturelle sur les régions complémentaires avec un nombre fini d'orbites, puisque le complémentaire du point p n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.

On définit alors l'ensemble des sommets de T comme la réunion des éléments de l'orbite $(h(p))$ et des régions complémentaires. On joint deux tels sommets q et q' par une arête, si et seulement si l'un des deux, disons q , correspond à un point de l'orbite de p et l'autre à une région complémentaire qui contient p .

D'après le lemme 3.2, deux sommets quelconques sont joints par un chemin d'arêtes; d'après les relations d'inclusion qui existent entre les ensembles $\gamma(C)$, lorsque C est une région complémentaire de p , le chemin qui joint deux sommets est unique.

Donc T est un arbre simplicial sur lequel le groupe G agit simplicialement. On constate qu'il agit sans inversion.

Un domaine fondamental pour l'action de G est une étoile à k branches, k étant le nombre de régions complémentaires de p dans K_γ . Le sommet au centre de cette étoile correspond à l'élément g de G (identifié avec le point $g(p) = p$). Les autres sommets correspondent aux

régions complémentaires (au nombre de k), qui lui sont adjacentes. En particulier le stabilisateur du sommet central est le groupe cyclique engendré par l'élément g .

On peut appliquer à cette action le théorème de décomposition de Bass-Serre (cf [S]), pour en déduire une décomposition du groupe libre G comme le groupe fondamental d'un graphe de groupes, dans lequel le groupe cyclique engendré par g est le sous-groupe associé à un sommet.

Une telle écriture de G ne peut se produire pour un élément g arbitraire. En fait, comme me l'a expliqué Mladen Bestvina, les résultats contenus dans [BF] entraînent qu'un tel mot g est nécessairement contenu dans un facteur direct propre de G ; en particulier si nous supposons qu'aucune des composantes du multimot γ n'est contenue dans un sous-groupe de G , qui est facteur direct, alors l'espace quotient K_γ n'a pas de points de coupure.

Nous résumons ce qui vient d'être démontré dans la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Si aucune des composantes du multimot γ n'est contenue dans un facteur direct de G , alors l'espace K_γ n'a pas de points de coupures.*

Remarquons que lorsque le multimot γ est *connexe*, l'espace K_γ est connexe, localement connexe et sans point de coupure, dès que γ est indécomposable.

Dans la suite, nous supposons qu'il n'existe pas de décomposition de G comme produit amalgamé ou comme HNN sur Z , telle que chaque élément de γ soit contenu dans un facteur de cette décomposition.

3. La topologie des espaces K_γ lorsqu'ils sont planaires.

Comme, sous notre hypothèse, le continuum K_γ est connexe, chacune de ses régions complémentaires dans S^2 est homéomorphe avec un disque. Puisque K_γ est localement connexe, il en est de même de la frontière de chacune de ses régions complémentaires ([W, page 106]). Puisque K_γ n'a pas de points de coupure, la frontière de chaque région complémentaire est une courbe de Jordan, de sorte que la fermeture de cette région est un disque fermé.

L'espace K_γ commence donc à ressembler à l'ensemble limite d'un groupe kleinien...

Nous désirons analyser l'allure de ce fermé près des points de K_γ correspondant à des classes d'équivalence non triviales.

Désignons tout d'abord par (m_i) la famille des ouverts basiques associés à un domaine fondamental de l'action de G sur l'arbre dual à la base \mathcal{B} . On a alors:

PROPOSITION 4. *Il existe une famille de courbes de Jordan $(c_i)_{i=1, \dots, 2g}$ chacune plongée dans la sphère S^2 telles que:*

- (1) *deux courbes quelconques de cette famille ne s'intersectent qu'en un nombre fini de points où elles ont des contacts tangentiels;*
- (2) *pour tout i , l'un des deux fermés de K_γ découpé par c_i est exactement $\pi(m_i)$.*

PREUVE: L'intersection de deux fermés $\pi(m_i)$ est un nombre fini de points dont la classe d'équivalence n'est pas triviale.

Considérons un tel point p , dont la classe d'équivalence est formée des deux points fixes d'un élément g de G ; soient m^+ et m^- des ouverts basiques éléments de la famille $(m_i)_{i=1, \dots, 2g}$, voisinages des points fixes g^+ et g^- de l'élément g . On commence par montrer le résultat suivant:

LEMME 4.1. *Il existe deux arcs de Jordan (peut-être confondus) k_1 et k_2 dans la frontière de K_γ dans S^2 qui s'intersectent en le seul point p : il existe en outre un arc plongé dans S^2 qui intersecte le continuum K_γ en le seul point p et qui découpe tout disque suffisamment petit centré au point p en deux disques contenant respectivement les images de m^+ et de m^- .*

PREUVE: Tout d'abord remarquons que l'image par la projection π des deux ouverts compacts m^+ et m^- est connexe, et localement connexe. On a de plus:

AFFIRMATION 4.1.1. *Chacune des images $\pi(m^+) - p$ ou $\pi(m^-) - p$ est aussi connexe.*

PREUVE: Supposons par exemple que ce n'est pas le cas pour $\pi(m^+) - p$. Alors, cet espace a un nombre fini de composantes connexes par le même argument que dans le lemme 3.1. D'autre part, $K - (g^+, g^-)$ est la réunion des itérés par g^{-1} de $m^+ - g^+$. Donc $K_\gamma - p$ ne serait pas connexe, ce qui a été exclu précédemment. \square

Considérons alors la composante connexe R du complémentaire dans S^2 de $\pi(m^+)$ qui contient le connexe $\pi(m^-) - p$. La représentation conforme du disque unité dans R s'étend au bord en une application f , puisque $\pi(m^+)$ est localement connexe. Le point p est nécessairement contenu dans la frontière de $\pi(m^+)$ dans S^2 , puisqu'il est dans la frontière de $\pi(m^-)$. Comme p n'est pas un point de coupure de K_γ , la préimage de p par l'application f est réduite à un seul point p_0 du cercle unité. Soient k_1^+ et k_2^+ deux intervalles du cercle unité, d'intérieur disjoints, qui ont p_0 comme extrémité. Remarquons que si ces intervalles sont choisis suffisamment petits (il suffit que leur image évite le nombre fini de points de la frontière de $\pi(m^+)$ dans K_γ autres que p), la restriction de f à chacun de ces arcs est injective, étant donné encore une fois que le continuum K_γ n'a pas de points de coupure. L'image de chacun de ces

deux arcs par l'application f est contenue dans la frontière d'une région complémentaire de K_γ dans S^2 .

Le même raisonnement, effectué cette fois avec $\pi(m^-)$ fournit deux arcs k_1^- et k_2^- dont l'image est dans la frontière d'une région complémentaire de K_γ dans S^2 , et tels que la réunion des images des arcs k_i^+ et k_i^- est un arc k_i plongé dans la frontière de K_γ dans S^2 ; ces arcs sont donc contenus dans des courbes de Jordan de la frontière de K_γ dans S^2 . Un arc n'intersectant transversalement ces deux courbes de Jordan qu'au seul point p satisfera la dernière partie du lemme 4.1. \square

Pour terminer la démonstration du lemme 4, on raisonne de la manière suivante: la réunion des frontières dans K_γ des compacts $\pi(m_i)$ est un ensemble fini. Chaque point de cette frontière est contenu, d'après le lemme 4.1, dans une courbe de la frontière de K_γ dans S^2 : chacune des deux courbes de Jordan produites par ce lemme sera dite *exceptionnelle*. D'autre part, toujours d'après le même lemme 4.1, l'intersection d'un fermé $\pi(m_i)$ avec une courbe exceptionnelle est une réunion finie d'intervalles, délimités par des points de la frontière de $\pi(m_i)$. Considérons pour chacun de ces intervalles I , un arc k_I ayant les mêmes extrémités que I , dont l'intérieur est contenu dans le disque bordé par la courbe exceptionnelle qui le contient, de sorte que tous les arcs k_I ainsi construits s'intersectent au plus en leurs extrémités (ceci est possible puisque les intervalles (I) ont leurs intérieurs disjoints).

D'après le lemme 4.1, les arcs associés à un même fermé $\pi(m_i)$ se referment en une réunion de courbes fermés. La connexité des fermés $\pi(m_i)$ et $\pi(K - m_i)$ entraîne alors que cette réunion est en fait réduite à une seule courbe fermée c_i (cf [O, §3 Affirmation 3.9.4] pour plus de détails).

Ceci termine la démonstration de la proposition 4. \square

4. Existence d'un représentant pour un multimot γ lorsque les courbes de Jordan de la frontière de K_γ dans S^2 s'intersectent en au plus un point.

On raisonne avec les courbes (c_i) fournies par le lemme 4.1. Le complémentaire dans S^2 de la réunion de ces courbes a une fermeture homéomorphe à une sphère avec $2g$ trous P , pincée le long des composantes d'une famille d'arcs (κ) deux à deux disjoints (I_j) , proprement plongés dans P : ces arcs correspondent aux points de K_γ dans la réunion des frontières des ensembles $\pi(m_i)$, pour $i = 1, \dots, 2g$.

Pour tout $i = 1, \dots, 2g$, la trace de cette réunion d'arcs κ avec la courbe c_i est en correspondance avec la frontière du fermé $\pi(m_i)$. Puisque les ensembles (m_i) sont associés à un domaine fondamental pour l'action de G , les générateurs $(g_i)_{i=1, \dots, g}$ de la base \mathcal{B} envoient l'ensemble $\pi(m_i)$ sur le complémentaire de l'ensemble $\pi(m_{i+g})$, ceci après une numérotation

convenable). Donc le générateur g_i induit une bijection entre la frontière du fermé $\pi(m_i)$ et la frontière de $\pi(m_{i+g})$.

Avec ces notations, on a:

PROPOSITION 5. *Supposons que les régions complémentaires de K_γ dans S^2 ont des fermetures qui s'intersectent deux à deux en au plus un point. Pour tout $i = 1, \dots, 2g$, équipons la frontière des ensembles $\pi(m_i)$ de l'ordre cyclique induit de l'ordre cyclique sur le cercle c_i . Alors, pour tout $i = 1, \dots, g$, l'élément g_i induit une bijection entre la frontière de l'ensemble $\pi(m_i)$ et la frontière de l'ensemble $\pi(m_{i+g})$, qui respecte l'ordre cyclique.*

PREUVE: Raisonnons par l'absurde. Si cet ordre cyclique n'est pas respecté, il existe un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) contenu dans la frontière de $\pi(m_i)$ tel que:

- (1) les points x_1 et x_2 sont dans la même courbe exceptionnelle C ;
- (2) les points x_3, x_4 sont dans une courbe exceptionnelle C' ;
- (3) les images des couples (x_1, x_2) et (x_3, x_4) par l'application g_i se croisent sur c_{i+g} .

Soient D et D' les deux disques du complémentaire de la courbe c_i dans S^2 . La situation décrite ci-dessus entraîne que les deux arcs $C \cap D$ et $C' \cap D$ s'intersectent dans l'intérieur de D ; le même raisonnement appliqué cette fois à D' donne que l'intersection des arcs $C \cap D'$ et $C' \cap D'$ dans l'intérieur de D' est non-vide. Donc l'intersection des courbes C et C' a un cardinal supérieur ou égal à 2, ce qui est contraire à notre hypothèse.

□

D'après la proposition 5, pour tout i la restriction de g_i à la frontière de $\pi(m_i)$ est la restriction d'un homéomorphisme f_i du cercle c_i vers le cercle c_{i+g} . Considérons alors la surface de genre g obtenue à partir de P en identifiant les composantes du bord (en correspondance avec les courbes c_i) par l'homéomorphisme f_i .

Cette surface est munie d'une surjection naturelle de son groupe fondamental vers le groupe G . On peut donc la voir comme le bord d'un bretzel H (pas nécessairement orientable), dont le groupe fondamental est identifié à G .

Soit (κ_i) la famille de courbes fermées sur ∂H obtenues à partir de κ en identifiant la frontière des arcs composantes de κ par les homéomorphismes f_i . On obtient ainsi une collection finie de courbes simples et disjointes sur le bord de H . Puisque chaque homéomorphisme f_i a la propriété de prolonger la restriction de g_i à la frontière de $\pi(m_i)$, l'ensemble des classes de conjugaison de G représentées par les courbes κ_i n'est autre que notre multimot γ . □

5. Etude des continus planaires K_γ lorsque certaines courbes de Jordan dans la frontière de K_γ dans S^2 s'intersectent en plus de deux points.

Reprenons les notations utilisées dans la section précédente. Fixons un domaine fondamental de référence et soit c_i la courbe de Jordan associée à $\pi(m_i)$. Si l'élément g_i envoie la frontière de $\pi(m_i)$ sur la frontière de $\pi(m_{i+g})$ en respectant sur ces ensembles l'ordre cyclique induit de l'ordre des courbes de Jordan c_i , alors on construit comme précédemment une famille de courbes de Jordan qui réalise le multimot γ .

Si cet ordre cyclique n'est pas respecté, alors il existe deux courbes exceptionnelles C et C' qui passent par des points distincts $(x_i)_{i=1,2,3,4}$ de la frontière de $\pi(m)$ et qui s'intersectent dans l'intérieur de chacun des deux disques bordés par cette courbe sur la sphère S^2 .

Supposons que les points x_1 et x_2 sont dans la frontière de la courbe exceptionnelle C , que x_3 et x_4 sont dans la frontière de la courbe C' et que les points x_i apparaissent dans cet ordre sur la courbe de Jordan c_i . On peut alors trouver deux arcs k , k' respectivement contenus dans C et dans C' tels que:

- (1) $x_1 \in k$ et $x_4 \in k'$;
- (2) k et k' s'intersectent uniquement en leurs extrémités (p, q) .

Nous allons d'abord montrer le résultat suivant:

LEMME 6. *Les points p et q ont chacun une préimage dans K qui est réduite à un seul point.*

PREUVE: On raisonne par l'absurde. Supposons par exemple que la préimage de p est formée des deux points fixes g^+ et g^- d'un élément g dans la classe de conjugaison de γ . Soit $\pi(m_i)$ l'image dans K_γ d'un ouvert basique qui contient g^- et dont le complémentaire contient g^+ et la préimage de q . Considérons une courbe de Jordan qui découpe K_γ en deux fermés dont l'un est $\pi(m_i)$ (cf Proposition 4). L'intersection de B avec la frontière de $\pi(m_i)$ est réduite au seul point p . Soient x et x' les points d'intersection respectifs de l'intérieur de k et k' avec $\pi(m_i)$. On alors:

AFFIRMATION 6.1. *Pour tout entier positif m , l'un des points $g^m(x)$ ou $g^m(x')$ est contenu dans A .*

PREUVE: Les arcs $[p, x]$ et $[p, x']$ respectivement contenus dans k et dans k' sont d'intérieurs disjoints. Leur image par l'homéomorphisme g^m est donc formé de deux arcs qui s'intersectent uniquement au point p . Un voisinage du point p sur chacun de ces deux arcs est contenu dans A , car $g^{-m}(\pi(m_i))$ est inclus dans $\pi(m_i)$. Donc l'un de ces deux arcs a une image contenue dans A . □

Supposons que le point x a la propriété qu'il existe une sous-suite infinie contenue dans $(g^m(x))$ qui est contenue dans A . Alors, cette sous-suite converge, (quitte encore à extraire une sous-suite) vers un point contenu dans $A - \pi(m_i)$, donc distinct de p . Ce point est nécessairement un point fixe de g . C'est impossible car l'élément g n'a qu'un seul point fixe, le point p . \square

Définition. Nous dirons qu'un translaté $\gamma_i(D)$ du domaine fondamental D sépare les points p de q , lorsque les points p et q sont contenus dans des ouverts basiques différents associés à ce translaté.

On peut décrire les translatés de D qui séparent de la manière suivante. Considérons l'arbre dual \mathcal{T} à la base \mathcal{B} . Les sommets de cet arbre correspondent aux translatés du domaine fondamental D . D'après le lemme 6, la préimage des points p et q dans K est formée d'uniquement deux points, que nous noterons toujours p et q . Considérons la géodésique de l'arbre \mathcal{T} qui joint les deux points p et q , l'ensemble K étant identifié comme d'habitude avec les bouts de \mathcal{T} . On vérifie facilement qu'un translaté du domaine fondamental sépare les points p et q si et seulement s'il est situé le long de cette géodésique.

On peut définir sur cette famille un ordre, de la manière suivante: $\gamma_i(D)$ est inférieure à $\gamma_j(D)$ lorsque l'ouvert basique associé à $\gamma_i(D)$ qui contient q est contenu dans l'ouvert basique associé à $\gamma_j(D)$ qui contient q . C'est ordre est équivalent à l'ordre sur la géodésique $[p, q]$, celle-ci étant orientée de p vers q . Nous indexerons cette famille par Z de façon croissante et cette famille sera notée (D_i) . Si on oriente l'arc k de p vers q , et si on associe à tout élément de $\gamma_i(D)$ un point d'intersection de k avec la frontière de ces ouverts basiques associés, l'application définie est monotone.

On construit à partir de k et de k' une courbe de Jordan dans S^2 qui intersecte le continuum K_γ uniquement aux points p et q : pour ceci, on isotope relativement le bord chacun des arcs k et k' dans l'intérieur de la composante du complémentaire de K_γ qui les contient. Notons alors A et B les deux fermés de K_γ délimités par cette courbe de Jordan. Donc A et B sont deux fermés dont la frontière (commune) est réduite aux deux points p et q . Remarquons qu'ils sont tous les deux connexes puisque, sous nos hypothèses, K_γ est connexe et n'a pas de points de coupure.

Considérons les domaines fondamentaux $(D_i)_{i \in Z}$ que nous avons construits: deux translatés successifs D_i et D_{i+1} ont la propriété que l'un des ouverts basiques associés à l'un d'eux est exactement le complémentaire de l'autre. Notons $\pi(m_i)$ celui de ces ouverts basiques qui contient le point q .

Notons $A_i = A \cap \partial(\pi(m_i))$ et $B_i = B \cap \partial(\pi(m_i))$: chacun de ces deux ensembles est fini et non-vide. Sous l'action du groupe G les ouverts basiques se répartissent en un nombre fini d'orbites; il en est de même

pour les ensembles A_i et B_i . Une autre propriété des ensembles A_i est que lorsque i tend vers l'infini, ils convergent vers p ou vers q . On peut donc choisir dans une même orbite deux ensembles A_i et $A_j = g(A_i)$ disjoints. Les notations étant ainsi précisées, on a:

LEMME 7. *Les points p et q sont les points fixes de l'élément g .*

PREUVE: Soit Δ_i le disque de S^2 , contenant le point p et bordé par la courbe de Jordan c'_i qui délimite $g(\pi(m_i))$. Considérons le fermé $A \cap \Delta_i$; c'est un connexe dont la frontière est la réunion du point p et des points de l'ensemble $g(A_i)$.

Considérons maintenant l'image par l'application g de $A \cap D_i$; sa frontière consiste de $g(p)$ et des points de $g(A_i)$; ce dernier est contenu dans la courbe de Jordan associée à $g(\pi(m_i))$.

AFFIRMATION 7.1. *On a:*

- (1) *le point $g(p)$ est contenu dans A ;*
- (2) *pour tout entier n positif, le point q est contenu dans le complémentaire de $g^n(\pi(m_i))$.*

PREUVE: Si $g(p) = p$, la première assertion est claire. Sinon, considérons l'image par g de l'arc réunion de $k \cap D_i$ et de $k' \cap D_i$. Puisque cet arc contient le point p et que les extrémités de cet arc ont une image contenue dans A , l'image de cet arc par l'application g ne pourrait être un arc simple, si l'image de p n'était pas contenue dans A .

Montrons maintenant que le point q est dans le complémentaire du fermé $g^2(\pi(m_i)) \cap A$. Ce dernier ensemble est connexe, comme A (la frontière de celui-ci est en effet contenue dans un connexe de A , et K_γ est connexe). Puisque nous avons supposé que $A_i \cap g(A_i) = \emptyset$, les points de A_i sont dans l'intérieur de $g(\pi(m_i))$. Donc l'image par l'application g de A_i est dans l'intérieur de $g^2(\pi(m_i))$. D'autre part, $g(A_i)$ intersecte les arcs k et k' (par définition). Donc, un voisinage de $k \cap g(A_i)$ dans k est contenu dans l'image $g^2(\pi(m_i))$; de même pour k' . On en déduit que le complémentaire du fermé $g^2(\pi(m_i))$ contient le point q . On peut alors recommencer le raisonnement. \square

On déduit de l'affirmation précédente que les itérés positifs par l'application g de l'ensemble discret A_i convergent vers le point q ; comme d'autre part, ces itérés convergent vers le point fixe attractif de g , on a que $g(q) = q$. Le même raisonnement s'applique avec g^{-1} pour montrer que le point p est fixe. \square

AFFIRMATION 8.1. *Le complémentaire dans K_γ des points p et q n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

PREUVE: Soit $\pi(m_i)$ l'image d'un ouvert basique qui contient le point p et qui est associé à un domaine fondamental qui sépare les points p et q .

Les itérés positifs par g de $\pi(m_i) \cap A - (p)$ recouvrent $A - q$. D'après l'argument utilisé dans le lemme 3.1, $\pi(m_i) - p$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Il en est donc de même pour $K_\gamma - (p, q)$. \square

Soit C_i la fermeture de ces composantes connexes. Les ensembles C_i sont des fermés dont la frontière est formée des deux points p et q .

Nous allons appliquer le raisonnement utilisé dans la proposition 3 pour produire une décomposition du groupe libre G comme un produit amalgamé telle que le sous-groupe d'amalgamation est contenu dans le sous-groupe cyclique maximal contenant g .

On notera \tilde{C}_i la préimage dans K des fermés C_i .

Commençons par la proposition suivante qui traduit une propriété de *non-croisement* de l'orbite par le groupe G du fermé \tilde{C}_i .

LEMME 8. *Si un élément de l'orbite $G(\tilde{C}_i)$ intersecte dans son intérieur \tilde{C}_i ainsi que son complémentaire, alors, il contient ou bien \tilde{C}_i ou bien son complémentaire.*

PREUVE: Les points p et q sont les deux points fixes de l'élément g ; donc, d'après des propriétés classiques de la dynamique de G sur K , si h est un élément du groupe G tel que $h(p, q) \cap (p, q) \neq \emptyset$, alors il appartient au sous-groupe cyclique maximal contenant g .

On a de plus:

AFFIRMATION 8.2. *Pour tout élément $h \in G$, les deux points $h(p)$ et $h(q)$ sont contenus dans le même fermé \tilde{C}_i .*

PREUVE: Il nous suffit de montrer que dans le quotient K_γ les deux points $h(p)$ et $h(q)$ sont tous deux dans la même composante C_i . On peut se restreindre, d'après la remarque précédent l'affirmation, aux éléments h qui ne sont pas dans le sous-groupe maximal cyclique qui contient g .

On distingue deux cas, selon que le nombre n de composantes C_i est égal à deux ou supérieur à 3.

1er cas. $n = 2$.

Alors les deux composantes C_i sont exactement A et B . Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que $p \in A$ et $q \in B$. Alors, l'arc $h(k)$ par exemple contient p et l'arc $h(k')$ contient q (puisque le couple (p, q) disconnecte K_γ , et que k et k' sont d'intérieur disjoint).

Si l'un des arcs $h(C - k)$ ou $h(C' - k')$ contient le point p (resp. le point q), alors, on a une contradiction puisque k et $C - k$ sont d'intérieurs disjoints ainsi que les arcs k et $C - k'$ (resp. k' et $C - k'$, k' et $C - k$).

2e cas. $n \geq 3$.

Supposons par exemple que $h(p) \in C_1$ et $h(q) \in C_2$. Alors, ces deux points sont dans l'intérieur de ces composantes, puisque h n'appartient

pas au sous-groupe cyclique maximal contenant g . Pour tout i , comme $h(C_i)$ est connexe, l'un des points p ou q appartient à $h(C_i)$. Donc l'intersection $h(C_i) \cap C_3$ est non-vide. D'autre part, l'intersection de $h(C_i)$ avec C_3 est ouverte; elle est aussi fermée. Donc $h(C_i)$ contient C_3 . Ceci ayant lieu pour tout i , on a donc une contradiction. \square

Soit maintenant h un élément de G qui n'est pas dans le sous-groupe maximal cyclique contenant g . Supposons par exemple que $h(p)$ et $h(q)$ sont contenus tous les deux dans C_i ; ils sont alors contenus dans l'intérieur de C_i . Le même argument de connexité que celui utilisé précédemment entraîne qu'il existe un élément C_j (unique) tel que $h(C_j)$ contient le complémentaire de C_i .

Si h appartient au sous-groupe cyclique maximal contenant g , il permute les composantes C_i . Ceci termine la démonstration du lemme 8. \square

On peut alors construire un arbre exactement de la même façon qu'après la démonstration du lemme 3.1. On définit d'abord un ordre partiel entre les éléments de l'orbite de la paire (p, q) qui sont contenus dans une composante C_i . On montre l'existence d'un élément inférieur à tout élément donné à l'avance. Pour cela, on montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de translatés d'une composante C_i dont le diamètre, ainsi que celui de son complémentaire est supérieur à une constante donnée à l'avance. La démonstration de ce dernier point est exactement la même que celle de l'affirmation 3.2.1.

On obtient finalement un arbre simplicial sur lequel le groupe G agit sans inversion avec un domaine fondamental qui est une étoile. Si cette étoile n'a que deux branches, on en déduit une décomposition du groupe G comme un produit amalgamé sur Z dont le sous-groupe d'amalgame est le sous-groupe cyclique maximal contenant g .

Si cette étoile a plus de trois branches (cas où les composantes C_i sont en nombre supérieur ou égal à trois), on en déduit une décomposition du groupe G comme groupe fondamental d'un graphe de groupes le long d'une étoile tel que le sous-groupe associé au sommet central est le sous-groupe cyclique maximal contenant g .

Dans les deux cas, chaque classe de conjugaison du multimot γ est contenue dans le sous-groupe d'un sommet de l'étoile, distinct du sommet central. En effet, dans le cas, contraire, les composantes C_i auraient une intersection contenant le point fixe d'un conjugué d'un mot de γ . Or, les points dans la frontière de C_i sont points fixes de l'élément g , qui n'est pas conjugué à un mot de γ , puisqu'il a deux points fixes lorsqu'il agit sur K_γ .

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat auquel nous sommes parvenus, mais tout d'abord nous allons donner une dernière définition.

Définition. Un multimot γ est dit *acylindrique* s'il n'existe pas de décomposition de G comme un produit amalgamé (non-trivial) ou comme HNN sur Z telle que chaque élément du multimot γ est contenu à conjugaison près dans l'un des sous-groupes de la décomposition.

Nous avons donc démontré le résultat suivant:

THÉOREME 1. *Soit γ un multimot indécomposable et acylindrique tel que le continuum K_γ se plonge dans S^2 . Alors le multimot γ est représentable par une réunion de courbes simples disjointes sur le bord d'un bretzel H de groupe fondamental G .*

§6. Le cas particulier où le quotient K_γ est homéomorphe à un cercle.

Un exemple d'abord: soit F une surface compacte à bord dont le groupe fondamental est identifié avec le groupe G . Soient γ le multimot de G formé des classes de conjugaison des courbes du bord de F . On peut alors visualiser les bouts de G comme l'ensemble limite d'un groupe Fuchsien, à partir de la donnée d'une métrique hyperbolique sur F qui rend le bord géodésique. L'ensemble K est alors naturellement contenu dans le cercle S^1 et les classes d'équivalence de la relation associée à γ sont exactement les paires de points dans la frontière d'un intervalle de $S^1 - K$. Le quotient K_γ est alors homéomorphe à un cercle.

En fait la réciproque est vraie et la démonstration procède comme suit. Soit γ un multimot de G tel que le quotient K_γ est homéomorphe à un cercle.

Reprenons les notations du §2. Soit \mathcal{B} une base sur laquelle le multimot γ a une longueur minimale. Soient $(m_i)_{i=1, \dots, 2g}$ les ouverts basiques associés à un domaine fondamental de l'action de G sur l'arbre dual à la base \mathcal{B} . On sait d'après la proposition 2 que l'image dans K_γ de chacun des ouverts (fermés) (m_i) est connexe. Donc, dans notre cas, chacun des $\pi(m_i)$ est un intervalle fermé. En particulier, chacun des $\pi(m_i)$ intersecte exactement 2 autres intervalles $\pi(m_j)$. Considérons un $2g$ -gone dont la frontière est identifiée avec le cercle K_γ par un homéomorphisme qui envoie les côtés sur les intervalles $\pi(m_i)$. A partir de ce $2g$ -gone, on construit un $4g$ -gone en remplaçant chaque sommet par une nouvelle arête. Les côtés pairs du polygone obtenu P sont en correspondance avec les intervalles $\pi(m_i)$ et nous les indexerons par $i = 1, \dots, 2g$. Les côtés impairs sont en correspondance avec les points dans la réunion des frontières des intervalles $\pi(m_i)$. Supposons aussi que l'indexation des fermés (m_i) est telle que pour chaque générateur g_i de la base \mathcal{B} , on a $g_i(m_i) = K - m_{i+g}$, pour $i = 1, \dots, g$.

Effectuons sur le polygone P les identifications d'arêtes suivantes: on identifie l'arête (paire) m_i à l'arête m_{i+g} par un homéomorphisme dont l'action sur $\partial(\pi(m_i))$ est la même que celle du générateur g_i (un tel homéomorphisme est alors unique à isotopie près). Le quotient de P par

ces identifications est une surface compacte à bord F (pas nécessairement orientable) dont les composantes du bord représentent le multimot γ .

On a donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit γ un multimot du groupe G . Le continuum K_γ est homéomorphe à un cercle si et seulement si il existe une surface compacte à bord F dont le groupe fondamental est identifié à G telle que les courbes du bord de F représentent γ .*

REFERENCES

- [BF] M. Bestvina et M. Feighn, *Bounding the complexity of simplicial group action on trees*, article 1988.
- [M] R.L. Moore, *Concerning upper semi-continuous collections of compacta*, Trans A.M.S. **27** (1925), 416–428.
- [O] J.P. Otal, *Courants géodésiques et produits libres*, Prépublication (1988).
- [S] J.P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque **46** (1977).
- [W] G.T. Whyburn, *Analytic topology*, A.M.S. Coll. Publ. **28** (1942).

Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative.

Soit S une surface fermée orientable de genre supérieur ou égal à 2. Si cette surface est munie d'une métrique riemannienne m de courbure strictement négative, il est bien connu qu'on peut représenter chaque classe de conjugaison non triviale $\langle \gamma \rangle$ par une unique géodésique de cette métrique; on notera $l(\gamma)$ la longueur de cette géodésique.

Soit \mathcal{C} l'ensemble des classes de conjugaison du groupe fondamental $\pi_1(S)$. On définit le *spectre marqué des longueurs* de la métrique m comme l'élément $(l(\gamma))_{\gamma \in \mathcal{C}}$ du produit direct $\mathbf{R}^{\mathcal{C}}$ indexé par l'ensemble \mathcal{C} .

Si on remplace la métrique m par une métrique qui lui est isotope, c'est-à-dire qui lui est isométrique par un difféomorphisme isotope à l'identité, l'élément de $\mathbf{R}^{\mathcal{C}}$ ainsi défini ne change pas.

Soit $\mathcal{M}(S)$ l'espace des métriques de courbure négative à isotopie près. On a donc une application \mathcal{L} de $\mathcal{M}(S)$ dans $\mathbf{R}^{\mathcal{C}}$. Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant, conjecturé dans [BK, problème 3.1].

THÉORÈME 1. *L'application \mathcal{L} est injective: une métrique de courbure négative sur une surface est déterminée à isométrie près par son spectre marqué des longueurs.*

Le problème de l'injectivité de l'application \mathcal{L} a déjà été considéré par V. Guillemin et D. Kazhdan dans [GK] où il est établi que le sous-espace de $\mathcal{M}(S)$ formé des métriques ayant un même spectre marqué des longueurs ne contient pas d'arcs.

D'autre part, A. Katok a montré dans [K] que l'application \mathcal{L} restreinte aux métriques dans une même classe conforme est injective.

Il est important de remarquer que le spectre marqué des longueurs, tel que nous l'avons défini, est un ensemble *indexé* (par l'ensemble \mathcal{C}). Il ne faut pas le confondre avec la collection des longueurs des géodésiques fermées comptées avec multiplicité; cet ensemble est habituellement appelé *spectre des longueurs*. Cette distinction est fondamentale pour ce qui nous intéresse ici. En effet, on connaît depuis les travaux de M.F. Vignéras (cf [V]) des exemples de surfaces de courbure constante -1 , non isométriques, mais dont les laplaciens respectifs ont le même spectre (voir aussi [Su]); et sous notre hypothèse de courbure, le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs (cf [Be]). Donc le théorème 1 est faux si l'on remplace dans son énoncé spectre marqué des longueurs par spectre des longueurs.

Je remercie toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion de discuter de ce problème, en particulier Francis Bonahon, Adrien Douady, Albert

Fathi et Curt Mac Mullen. Le théorème 2 sur la possibilité de reconstruire un courant géodésique à partir de sa fonction nombre d'intersection (cf §1) répond à une question que m'a posée A.Fathi; je l'ai résolue en commun avec C. Mac Mullen en suivant une indication de A.Douady.

§1. Les courants géodésiques.

Soit m une métrique à courbure négative sur une surface S . On peut compactifier le revêtement universel \tilde{S} de la surface S par l'espace des rayons géodésiques issus d'un point donné $p \in \tilde{S}$: cet espace s'identifie à un cercle S^1 . Il est classique que chaque demi-géodésique de \tilde{S} est asymptote à un unique rayon géodésique issu de p , de sorte que le cercle S^1 est muni d'une action topologique du groupe fondamental $\pi_1(S)$. D'autre part, si l'on change de point p , on a encore, pour la même raison, un homéomorphisme $\pi_1(S)$ -équivariant entre les cercles à l'infini qui leurs sont associés ([EbON]).

L'espace des géodésiques de \tilde{S} s'identifie à l'ensemble des paires (non ordonnées) de points distincts de S^1 : cet espace est homéomorphe à un ruban de Mœbius ouvert $G(\tilde{S})$.

On définit un courant géodésique comme une mesure de Borel sur $G(\tilde{S})$ invariante sous l'action (produit) de $\pi_1(S)$; on note $C(S)$ l'ensemble des courants géodésiques de S , ensemble que l'on munit de la topologie de la convergence vague ([Bo1], [Bo2]). Il est important de remarquer que cet espace ne dépend pas du choix de la métrique sur S qui a servi à définir le cercle à l'infini S^1 ; en effet, si l'on remplace m par une autre métrique de courbure négative, il existe un homéomorphisme naturel (cf [Gr, §7]) entre leurs cercles à l'infini respectifs.

Une propriété fondamentale des courants géodésiques sur les surfaces est l'existence d'un nombre d'intersection.

Rappelons tout d'abord que l'ensemble \mathcal{C} s'injecte dans $C(S)$ par l'application définie de la façon suivante. Soit $\langle \gamma \rangle$ une classe de conjugaison dans $C(S)$, que nous supposerons tout d'abord indivisible: on lui associe la mesure $j(\langle \gamma \rangle)$ de $C(S)$ somme des masses de Dirac supportées sur les paires de points fixes des éléments de $\pi_1(S)$ dans la classe de conjugaison $\langle \gamma \rangle$. On vérifie facilement que la mesure ainsi définie est finie sur les compacts de sorte que $j(\gamma)$ est bien une mesure de Borel. On prolonge cette formule à l'ensemble de toutes les classes de conjugaison par homogénéité: $j(\langle \gamma^p \rangle) = |p|j(\langle \gamma \rangle)$.

Nous n'aurons à utiliser que le nombre d'intersection d'un courant avec les éléments du type $j(\langle \gamma \rangle)$, aussi nous ne rappellerons la définition que dans ce cas.

Soit donc $\langle \gamma \rangle$ une classe de conjugaison de $\pi_1(S)$ et soit μ un courant géodésique sur S . Pour alléger les notations, on notera γ le courant qui lui a été associé précédemment. Nous allons définir le nombre d'intersection $i(\mu, \gamma)$. Soit I un domaine fondamental pour l'action

d'un élément dans la classe de conjugaison de $\langle \gamma \rangle$ sur la géodésique qu'il laisse invariante; I est donc un intervalle semi-ouvert dont les translates par l'élément en question sont disjoints et recouvrent l'axe invariant. Soit F le sous-ensemble borélien de $G(\hat{S})$ formé des géodésiques qui intersectent le segment géodésique I . On pose: $i(\mu, \gamma) = \mu(F)$. Cette définition est indépendante du domaine fondamental I choisi d'après l'invariance de μ ; elle coïncide d'autre part avec celle donnée dans [Bo1]. On obtient ainsi une application "fonction nombre d'intersection" \mathcal{I} de $C(S)$ à valeurs dans $\mathbf{R}^{\mathcal{C}}$, qui associe au courant μ l'élément $(i(\mu, \gamma))_{\gamma \in \mathcal{C}}$.

Nous commencerons par démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *L'application \mathcal{I} est injective: un courant géodésique sur S est déterminé par sa fonction nombre d'intersection.*

PREUVE: Soit μ un élément de $C(S)$. Il nous faut montrer que l'on peut calculer à partir de $\mathcal{I}(\mu)$ la μ -masse de deux ouverts de $G(\hat{S})$ du type $I_1 \times I_2$, où $I_1 =]a_1, a'_1[$ et $I_2 =]a_2, a'_2[$ sont deux intervalles ouverts du cercle à l'infini d'adhérences disjointes.

Munissons la surface S d'une métrique de courbure négative arbitraire, par exemple une métrique de courbure constante -1 . Soit g une géodésique (orientée) de S dense positivement et négativement dans le fibré tangent unitaire de S (une telle géodésique existe toujours, par exemple d'après le théorème ergodique de Birkhoff appliqué à la mesure de Liouville sur le fibré unitaire $T^1(S)$). Les extrémités de ses relevés dans \hat{S} sont alors denses dans le ruban de Mœbius $G(\hat{S})$.

Il nous suffit d'après cette densité de savoir mesurer les ouverts $I_1 \times I_2$, où (a_1, a_2) et (a'_1, a'_2) sont extrémités de deux relevés disjoints h, h' de la géodésique g .

Puisque μ est une mesure de Borel, il existe un point $x \in \hat{S}$ tel que la masse de l'ensemble des géodésiques de \hat{S} passant par x est nulle. Donc, pour tout ϵ , il existe une boule centrée en x de rayon r , $B(x, r)$, telle que la masse de l'ensemble des géodésiques passant par $B(x, r)$ est inférieure à ϵ . Puisque μ est invariante sous l'action de $\pi_1(S)$, il en est de même pour l'ensemble des géodésiques passant par la boule $B(\gamma(x), r)$, pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$.

Choisissons un vecteur tangent v arbitraire basé au point x . Puisque la géodésique g est dense dans le fibré unitaire $T^1(S)$, elle passe arbitrairement près de la projection du vecteur v dans la surface S . Soit alors ϵ' un nombre positif que nous fixerons par la suite auquel il faut penser comme étant beaucoup plus petit que r . Il existe donc des éléments $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_1$ et γ'_2 dans le groupe $\pi_1(S)$, tels que :

- (1) la distance de $\gamma_1(v)$ et $\gamma_2(v)$ à h dans le fibré unitaire $T^1(S)$ est inférieure à ϵ' ;

- (2) la distance de $\gamma'_1(v)$ et $\gamma'_2(v)$ à h' dans le fibré unitaire $T^1(S)$ est inférieure à ϵ' ;
- (3) $\gamma_i(x)$ (resp. $\gamma'_i(x)$) est proche de a_i (resp. de a'_i) dans la compactification usuelle de \tilde{S} par le disque fermé.

Posons $g_1 = \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$, $g_2 = \gamma'_1 \circ \gamma'_2^{-1}$, $g_3 = \gamma_1 \circ \gamma'_2^{-1}$, et $g_4 = \gamma'_1 \circ \gamma_2^{-1}$.

Considérons l'axe de l'élément g_1 : on peut approcher un domaine fondamental de g_1 sur cet axe par l'arc géodésique k_1 de \tilde{S} qui joint $\gamma_2(x)$ à $\gamma_1(x)$. D'après les hypothèses faites, l'arc k_1 se projette en une courbe fermée géodésique sauf au point image de x , où elle fait un angle θ proche de π : en effet les extrémités de k_1 ont des vecteurs tangents proches de h et donc, respectivement proches de $\gamma_1(v)$ et $\gamma_2(v)$. Il est alors connu que le maximum de la distance d'un point situé sur l'arc k_1 à l'axe invariant de g_1 est inférieur à $f(\theta)$, la fonction $f(\theta)$ tendant vers 0 si θ tend vers π (cf [Bo1]). De plus le maximum de cette distance est atteint au point $\gamma_1(x)$ (ou $\gamma_2(x)$). Donc, si on choisit ϵ' suffisamment petit de sorte que $f(\theta) < r$, on aura, si G_1 désigne l'ensemble des géodésiques qui intersectent k_1 :

$$|\mu(G_1) - i(\mu, g_1)| \leq 2\epsilon.$$

En effet les deux ensembles de géodésiques que l'on mesure diffèrent par un ensemble de géodésiques passant par $B(\gamma_1(x), r)$ ou par $B(\gamma_2(x), r)$. On peut faire le même raisonnement avec les trois autres éléments g_2, g_3, g_4 . Si G_i , pour $i = 2, 3, 4$ désigne l'ensemble des géodésiques de \tilde{S} qui rencontrent les arcs géodésiques k_i associés de la même façon que précédemment à ces éléments, on a :

$$|\mu(G_i) - i(\mu, g_i)| \leq 2\epsilon.$$

Remarquons maintenant, que l'on a, si F_ϵ désigne l'ensemble des géodésiques de \tilde{S} qui séparent les arcs k_1 et k_2 :

$$\mu(G_3) + \mu(G_4) - \mu(G_1) - \mu(G_2) = 2\mu(F_\epsilon).$$

Si l'on fait tendre ϵ vers 0, on voit donc que l'on connaît à partir de $\mathcal{I}(\mu)$, la limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(F_\epsilon)$. Or cette limite n'est autre que $\mu(I_1 \times I_2)$; en effet, la frontière de $I_1 \times I_2$ est contenue dans l'ensemble des géodésiques de \tilde{S} dont un bout est l'un des a_1, a'_1, a_2 ou a'_2 . Puisque toute géodésique de \tilde{S} dont un bout est l'un de ces quatre points a une projection dense dans $T^1(S)$, (puisque cette projection est alors asymptote à g), et que la mesure μ est finie sur les compacts, l'ensemble des géodésiques dont un bout est l'un de ces quatre points est de mesure nulle.

Donc $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(F_\epsilon) = \mu(I_1 \times I_2)$.

Ainsi, à partir de $\mathcal{I}(\mu)$, on peut reconstruire la mesure μ . ■

Remarque. On peut voir que la seule donnée des nombres d'intersection d'un courant géodésique avec les classes de conjugaison représentables par des courbes simples sur S ne permet pas de le reconstruire en général. Dans [Ho], on trouve des exemples de classes de conjugaison distinctes dans \mathcal{C} ayant la même longueur pour toutes les métriques de l'espace de Teichmüller; par passage à la limite dans la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller par les laminations mesurées, on en déduit que les nombres d'intersection de ces deux classes de conjugaison avec toutes les courbes simples sont les mêmes (cf [Bo2]).

Le lien entre le problème de l'injectivité de l'application \mathcal{L} et le théorème ci-dessus est dû au fait que l'application \mathcal{L} se factorise à travers \mathcal{I} par une application de l'espace $\mathcal{M}(S)$ des métriques à isotopie près, dans $\mathcal{C}(S)$, appelée la mesure de Liouville, que nous définissons maintenant.

Associée à la métrique m , on a une mesure canonique sur l'espace des géodésiques, la mesure de Liouville (cf [Sa, §19]). Une façon de décrire cette mesure est à partir de la forme volume (de Liouville) sur le fibré unitaire T_m^1 , invariante par le flot géodésique. Le produit intérieur de cette 3-forme par le champ de vecteurs tangent au flot est une 2-forme dont la valeur absolue est une mesure transverse au feuilletage géodésique de T_m^1 .

Soit m une métrique riemannienne sur S , de courbure strictement négative. Elle se relève donc en une métrique \tilde{m} sur le revêtement universel de S dont l'espace des géodésiques s'identifie à $G(\tilde{S})$. La mesure de Liouville définie ci-dessus se relève donc en une mesure sur $G(\tilde{S})$ invariante sous l'action de $\pi_1(S)$. L'expression en coordonnées de la mesure de Liouville dans le $G(\tilde{S})$ est la suivante. Soit k un arc géodésique contenu dans le revêtement universel de S ; paramétrons cet arc par longueur d'arc après choix d'une origine. Considérons $G(k)$, l'ensemble des géodésiques qui intersectent k transversalement. On choisit comme coordonnées sur $G(k)$ le point t d'intersection avec k , et l'angle de rotation (le revêtement universel est orienté) de la rotation qui amène la géodésique k sur la géodésique étudiée: c'est bien un système de coordonnées puisque toute géodésique de $G(k)$ intersecte k en un seul point. Donc l'espace des géodésiques qui intersectent transversalement k s'identifie au produit $k \times]0, \pi[$; dans ces coordonnées, la mesure de Liouville s'écrit:

$$d\lambda = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta dt$$

Ceci définit bien une mesure sur l'espace $G(\tilde{S})$ des géodésiques, invariante sous l'action du groupe (d'isométries) $\pi_1(S)$. On a donc une application Λ de l'espace $\mathcal{M}(S)$ des métriques à isotopie près dans l'espace $\mathcal{C}(S)$ des courants géodésiques.

PROPOSITION 3: LA FORMULE DE CROFTON. $\mathcal{L} = \mathcal{I} \circ \Lambda$.

PREUVE: Soient γ une classe de conjugaison de $\pi_1(S)$ et m une métrique de $\mathcal{M}(S)$. Soit I un domaine fondamental pour l'action d'un élément de la classe de conjugaison de γ sur son axe et G l'ensemble des géodésiques de \tilde{S}_m qui intersectent I transversalement. Par définition du nombre d'intersection, on a

$$i(\Lambda(m), \gamma) = \Lambda(m)(G).$$

En utilisant la définition de la mesure $\Lambda(m)$ en coordonnées (t, θ) , une intégration immédiate donne: $\Lambda(m)(G) = l(\gamma)$. ■

COROLLAIRE 4. *L'application \mathcal{L} est injective si et seulement si l'application Λ est injective.*

Ce corollaire s'interprète de la façon suivante. Si m et m' sont deux métriques de courbure négative, leurs feuilletages géodésiques respectifs sont topologiquement conjugués: si $G(m)$ et $G(m')$ sont les espaces de géodésiques (non orientées) de leurs revêtements universels respectifs \tilde{S}_m et $\tilde{S}_{m'}$, il existe un unique homéomorphisme $\pi_1(S)$ -équivariant ϕ entre $G(m)$ et $G(m')$ (ceci résulte par exemple du théorème de stabilité structurelle d'Anosov puisque l'espace $\mathcal{M}(S)$ est connexe; voir aussi [Gr, §7]). En particulier, soient g une géodésique de \tilde{S}_m et $\phi(g)$ la géodésique de $\tilde{S}_{m'}$ qui lui correspond. Notons $G(g)$ l'espace des géodésiques de \tilde{S}_m qui intersectent transversalement g ; puisque ϕ est induit par un homéomorphisme entre les cercles à l'infini de ces métriques, on a: $\phi(G(g)) = G(\phi(g))$. Introduisons sur chacun de ces espaces les coordonnées (t, θ) et (t', θ') . Ces coordonnées sont définies une fois que l'on s'est choisi une orientation sur g ainsi qu'une origine sur g et une sur $\phi(g)$, car l'orientation sur $\phi(g)$ est donnée par la conjugaison ϕ .

On notera ϕ_g l'homéomorphisme de $g \times]0, \pi[$ vers $\phi(g) \times]0, \pi[$ induit par ϕ dans ces coordonnées. On déduit du corollaire 4, que, lorsque les métriques m et m' ont le même spectre marqué des longueurs, $\mathcal{L}(m) = \mathcal{L}(m')$: l'homéomorphisme ϕ_g transporte la mesure $d\lambda = \sin \theta d\theta dt$ sur la mesure $d\lambda' = \sin \theta' d\theta' dt'$.

Pour démontrer le théorème 1, nous allons associer à deux métriques de courbure négative sur S un *angle moyen*; c'est le but du prochain paragraphe.

§2. L'angle moyen entre deux métriques de courbure négative.

Soient m et m' deux métriques à courbure négative sur S . Soit θ un nombre dans l'intervalle $]0, \pi[$. Pour tout vecteur v dans le fibré tangent unitaire T_m^1 , notons $\theta.v$ le vecteur obtenu en tournant v dans sa fibre d'un angle θ . Les vecteurs v et $\theta.v$ se relèvent dans \tilde{S} en deux vecteurs qui passent par le même point, définissant ainsi deux géodésiques g_v et $g_{\theta.v}$.

de \tilde{S}_m faisant entr'elles un angle θ . Il correspond par l'homéomorphisme ϕ à cette paire de géodésiques une paire de géodésiques de S_m , qui s'intersectent en un point. On note $\theta'(v, \theta)$ l'angle de la métrique \tilde{m}' qui fait passer de la géodésique $\phi(g_v)$ à la géodésique $\phi(g_{\theta.v})$: ce nombre ne dépend pas du choix particulier du relevé de $(v, \theta.v)$ que l'on a effectué, car la conjugaison est équivariante.

On prolonge en $\theta = 0, \pi$ par $\theta'(v, 0) = 0$ et $\theta'(v, \pi) = \pi$.

AFFIRMATION 5. *La fonction $\theta'(v, \theta)$ est continue sur le produit $T_m^1 \times [0, \pi]$.*

PREUVE: Ceci résulte de ce que l'application qui associe à une géodésique ses extrémités dans le ruban de Mœbius $G(\tilde{S})$ est continue, que la conjugaison ϕ est continue et que si des géodésiques s'intersectant varient continûment l'angle qu'elles font varie aussi continûment. ■

Notons maintenant dv la mesure de Lebesgue sur T_m^1 (invariante par le flot géodésique), et $\mathcal{V}(T_m^1)$ le volume du fibré unitaire pour cette mesure, c'est-à-dire 2π fois l'aire de la surface S_m . On pose alors:

$$\Theta'(\theta) = \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} \theta'(v, \theta) dv.$$

PROPOSITION 6. *L'application Θ' est un homéomorphisme croissant de $[0, \pi]$ dans lui-même tel que:*

(1) Θ' est symétrique en $\pi - \theta$:

$$\forall \theta, \Theta'(\pi - \theta) = \pi - \Theta'(\theta);$$

(2) Θ' est sur-additif:

$$\forall \theta_1, \theta_2 \text{ tels que } \theta_1 + \theta_2 \in [0, \pi], \text{ on a: } \Theta'(\theta_1 + \theta_2) \geq \Theta'(\theta_1) + \Theta'(\theta_2).$$

PREUVE: Tout d'abord, il résulte de l'affirmation 5 que Θ' est une fonction continue de θ qui vaut 0 en 0 et π en π . D'autre part, elle est strictement positive sur $]0, \pi]$, comme moyenne d'une fonction continue strictement positive.

Montrons la première assertion. D'après Fubini, si dA désigne la mesure de Lebesgue sur la surface S_m et si $d'v$ désigne la mesure de Lebesgue sur chaque fibre f de T_m^1 , on a:

$$\Theta'(\theta) = \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{S_m} \int_f \theta'(v, \theta) d'v dA.$$

Soit f une fibre du fibré unitaire tangent T_m^1 . On a alors, pour tout θ , si $v \in f$:

$$\theta'(v, \theta) + \theta'(\theta.v, \pi - \theta) = \pi.$$

Intégrons cette égalité pour la mesure $d'v$, on obtient en utilisant l'invariance de la mesure $d'v$ par la rotation d'angle θ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_f \theta'(v, \theta) d'v + \frac{1}{2\pi} \int_f \theta'(v, \pi - \theta) d'v = \pi.$$

Si on intègre maintenant cette égalité sur la surface S_m , on obtient la symétrie en $\pi - \theta$ de Θ' .

Démontrons maintenant la deuxième assertion. Rappelons d'abord l'inégalité de Gauss-Bonnet appliquée à un triangle T contenu dans $S_{m'}$ dont le bord est réunion de géodésiques deux à deux transverses: puisque la métrique m' a une courbure strictement négative, la somme des angles intérieurs de T est inférieure à π , avec égalité si et seulement si le triangle T est réduit à un point.

Soient alors f une fibre de T_m^1 , v un vecteur contenu dans cette fibre, et θ_1 et θ_2 deux angles dans $[0, \pi]$ vérifiant $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$. Considérons les images par la conjugaison ϕ des trois géodésiques g_v , $g_{\theta_1.v}$ et $g_{(\theta_1+\theta_2).v}$. Les trois géodésiques images définissent un triangle T de $\tilde{S}_{m'}$, éventuellement réduit à un point (car elles s'intersectent transversalement deux à deux). Les angles intérieurs du triangle T sont: $\theta'(v, \theta_1)$, $\theta'(\theta_1.v, \theta_2)$, et $\pi - \theta'(v, \theta_1 + \theta_2)$. On a donc d'après Gauss-Bonnet:

$$\theta'(v, \theta_1) + \theta'(\theta_1.v, \theta_2) \leq \theta'(v, \theta_1 + \theta_2).$$

Intégrons d'abord cette inégalité sur la fibre f , pour la mesure de Lebesgue $d'v$, en utilisant l'invariance de la mesure $d'v$ par la rotation d'angle θ_1 , puis intégrons l'inégalité obtenue sur la surface S_m . On en déduit la sur-additivité de la fonction Θ' .

Ceci termine la démonstration de la proposition 6. ■

§3. Démonstration du théorème 1.

Soit F une fonction continue convexe sur l'intervalle $[0, \pi]$ à valeurs réelles. D'après l'inégalité de Jensen, on a, pour tout θ dans l'intervalle $[0, \pi]$:

$$F(\Theta'(\theta)) \leq \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} F(\theta'(v, \theta)) dv.$$

De plus, si F est strictement convexe, le seul cas d'égalité dans l'inégalité ci-dessus est lorsque la fonction $v \rightarrow \theta'(v, \theta)$ est constante.

Remarquons que le second membre de cette inégalité est une fonction continue de θ d'après l'affirmation 5 et intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour la mesure $\sin \theta d\theta$. Il vient, après application de Fubini:

$$\int_0^\pi F(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} \left(\int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta \right) dv.$$

Posons $F'(v) = \int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta$. Ainsi le second membre de l'inégalité ci-dessus est la moyenne sur T_m^1 de la fonction (continue) F' .

PROPOSITION 7. *Supposons que les métriques m et m' ont le même spectre marqué des longueurs; alors, pour toute fonction convexe F comme ci-dessus, on a:*

$$\int_0^\pi F(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta.$$

PREUVE: Il nous suffit de montrer que pour toute fonction continue F , si on définit la fonction F' sur T_m^1 par: $F'(v) = \int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta$, alors on a:

$$\frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} F'(v) dv = \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Nous allons en fait montrer que pour toute orbite fermée du flot géodésique γ paramétrée par longueur d'arc, la moyenne de la fonction F' sur γ vaut $\int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta$. On en déduira que la moyenne de la fonction F' pour n'importe quelle mesure invariante du flot géodésique vaut $\int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta$, d'après la densité des mesures invariantes supportées sur des géodésiques fermées parmi toutes les mesures invariantes (cf [Bo1]); appliqué à la mesure de Lebesgue dv , ce résultat entraînera le résultat cherché.

Soit donc t le paramètre le long de γ . On a:

$$\frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma F'(\gamma(t)) dt = \frac{1}{l(\gamma)} \int_{\gamma \times]0, \pi[} F(\theta'(\gamma(t), \theta)) \sin \theta d\theta dt.$$

Soit γ' la géodésique de la métrique m' qui correspond à γ , que nous paramétrons encore par longueur d'arc (dans la métrique m'). L'homéomorphisme de conjugaison ϕ induit un homéomorphisme de $\gamma \times]0, \pi[$ vers $\gamma' \times]0, \pi[$, qui s'écrit:

$$\Phi(\gamma(t), \theta) = (\gamma'(t'), \theta'(\gamma(t), \theta)).$$

Cet homéomorphisme envoie la mesure $\sin \theta d\theta dt$ sur la mesure $\sin \theta' d\theta' dt'$. Utilisons cet homéomorphisme pour faire un changement de variables. Il vient alors:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \times]0, \pi[} F(\theta'(\gamma(t), \theta)) \sin \theta d\theta dt &= \int_{\gamma' \times]0, \pi[} F(\theta') \sin \theta' d\theta' dt' \\ &= l'(\gamma') \int_0^\pi F(\theta') \sin \theta' d\theta'. \end{aligned}$$

Puisque $l(\gamma) = l'(\gamma')$, la moyenne de F' sur γ vaut bien $\int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta$.

LEMME 8. Soit Θ un homéomorphisme croissant de $[0, \pi]$ dans lui-même tel que:

- (1) Θ est sur-additif et symétrique en $\pi - \theta$;
- (2) pour toute fonction convexe continue F sur l'intervalle $[0, \pi]$, on a:

$$\int_0^\pi F(\Theta(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Alors Θ est l'identité.

PREUVE: Remarquons qu'il n'existe pas d'intervalle $]0, a[$ sur lequel $\Theta(x) < x$. Sinon considérons la fonction convexe décroissante sur $[0, \pi]$ définie par: $F_a(x) = \sup(a - x, 0)$. L'inégalité appliquée à cette fonction fournit alors une contradiction.

On en déduit l'existence d'une suite (x_i) tendant vers 0 telle que: $\Theta(x_i) \geq x_i$.

Supposons maintenant que Θ est différente de l'identité. Alors, puisque Θ est symétrique en $\pi - \theta$, il existe un intervalle $[a, b]$ sur lequel $\Theta(x) < x$ pour $x > a$ et $\Theta(a) = a$.

La sur-additivité appliquée aux points a et x_i , pour i suffisamment grand fournit alors une contradiction. ■

Remarque. Albert Fathi m'a fait remarquer qu'une modification de l'argument précédent permettait d'éviter l'hypothèse "symétrique en $\pi - \theta$ ".

PREUVE DU THÉORÈME 1: La fonction Θ' vérifie les hypothèses du lemme 8, donc $\Theta' = Id$. En particulier, c'est une fonction additive; donc si on reprend la démonstration de la sur-additivité de Θ' (cf Proposition 6), on constate que l'image par la conjugaison ϕ de trois géodésiques transverses concourantes est formée de trois géodésiques transverses concourantes.

Ceci nous permet de construire une application de \tilde{S}_m vers $\tilde{S}_{m'}$ de la façon suivante. Un point p de \tilde{S}_m définit un faisceau de géodésiques qui passe par ce point. L'image par ϕ de ce faisceau de géodésiques est le faisceau de géodésiques passant par un point p' de $\tilde{S}_{m'}$. Posons $f(p) = p'$.

AFFIRMATION 9. *L'application f ainsi définie est une isométrie $\pi_1(S)$ -équivariante de \tilde{S}_m vers $\tilde{S}_{m'}$.*

PREUVE: Soient p et q deux points de \tilde{S}_m ; soit g l'unique géodésique de \tilde{S}_m qui les contient et soit $[p, q]$ le segment de g qui joint p à q . L'image par ϕ du segment $[p, q]$ est contenue par définition de f dans la géodésique $\phi(g)$. La distance entre les points p et q est exactement d'après la formule de Crofton la mesure $\Lambda(m)(G([p, q]))$ où $G([p, q])$ désigne l'ensemble des géodésiques de \tilde{S}_m qui intersectent l'intérieur de $[p, q]$.

L'image par ϕ de $G([p, q])$ n'est autre que $G'([p', q'])$, ensemble des géodésiques de $\tilde{S}_{m'}$ intersectant l'arc géodésique qui joint $p' = f(p)$ à $q' = f(q)$. Soit en effet \tilde{h} une géodésique qui intersecte $[p, q]$ en son intérieur et soient h et h' deux géodésiques passant respectivement par p et q et disjointes de \tilde{h} . Alors $\phi(\tilde{h})$ est située "entre" $\phi(h)$ et $\phi(h')$, puisque la conjugaison ϕ est induite par un homéomorphisme entre les cercles à l'infini de \tilde{S}_m et $\tilde{S}_{m'}$. Donc $\phi(\tilde{h})$ intersecte $[p', q']$. L'inclusion dans l'autre sens a lieu pour la même raison.

Donc puisque la conjugaison respecte la mesure de Liouville et que $d'(p', q') = \Lambda(m')(G'(k'))$, l'application f est bien une isométrie.

D'après la naturalité de la construction, f est $\pi_1(S)$ -équivariante. ■

D'après l'affirmation précédente, l'application f se projette en une isométrie f' de S_m vers $S_{m'}$ pour la distance par chemin. Il est connu qu'une telle isométrie est toujours différentiable (cf [MS]).

D'autre part, par construction, f envoie l'axe d'un élément γ de $\pi_1(S)$ pour la métrique \tilde{m} dans l'axe du même élément pour la métrique \tilde{m}' . Donc, f' est isotopé à l'identité.

Ceci termine la démonstration du théorème 1. ■

REFERENCES

- [Be] M. Berger, *Geometry of the spectrum*, A.M.S. Proc. Symposium in Pure Math. **27** (1975), 129–152.
- [Bo1] F. Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann. of Math. **124** (1986), 71–158.
- [Bo2] F. Bonahon, *The geometry of Teichmüller space via geodesic currents*, Invent. Math. (1988).
- [BK] K. Burns et A. Katok, *Manifolds with non-positive curvature*, Erg. Th. of Dynam. Sys. **5** (1985), 307–317.
- [EbON] P. Eberlein et P. O'Neil, *Visibility manifolds*, Pacific J. Math. **46** (1973), 45–109.

- [Gr] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (MSRI Pub) 8 (1987), 75–263.
- [GK] V. Guillemin et D. Kazhdan, *Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds*, Topology 19 (1980), 301–312.
- [Ho] R. Horowitz, *Characters of free groups represented in the 2-dimensional linear group*, Comm. Pure App. Math. 25 (1972), 635–649.
- [K] A. Katok, *Three applications of conformal equivalence to geometry and dynamics*, article.
- [MS] S.B. Myers et N. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math 40 (1939), 400–416.
- [Sa] L.A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Math. and its Applications (Addison Wesley) 1 (1976).
- [Su] T. Sunada, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, Ann. of Math. 121 (1985), 169–186.
- [V] M.F. Vignéras, *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math. 110 (1980), 21–32.

Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque.

Soit D un disque compact C^2 , de dimension n . Si ce disque est muni d'une métrique riemannienne m , on peut définir une distance sur D : la distance entre deux points est la longueur d'un plus court chemin joignant ces deux points. Ce minimum est alors réalisé comme la longueur d'un chemin rectifiable.

On peut donc considérer la distance d_m induite sur le bord de D . On définit ainsi une application de l'ensemble des métriques sur D vers l'ensemble des fonctions distances sur ∂D . Si on remplace la métrique m par une métrique qui lui est isotope par un difféomorphisme qui est l'identité sur le bord, la distance restreinte ne change pas. On a donc défini une application \mathcal{B} de l'espace des métriques à isométrie près vers l'ensemble des fonctions distances sur ∂D .

Considérons le problème suivant:

Question. L'application \mathcal{B} est-elle injective?

F. Bonahon m'a fait remarquer que la réponse générale à ce problème était négative si l'on n'imposait pas de restrictions supplémentaires, par exemple sur la courbure sectionnelle de la métrique m . En effet, il est facile de construire des exemples de métriques m où les plus courtes géodésiques joignant le bord au bord évitent chacune une petite boule dans l'intérieur de D . Une perturbation de la métrique supportée dans l'intérieur de cette boule ne changera alors pas la distance induite d_m .

R. Michel a montré dans [Mi] le résultat suivant: lorsque $n = 2$, si deux métriques m et m' , l'une des deux étant de courbure constante, vérifient $\mathcal{B}(m) = \mathcal{B}(m')$, alors $m = m'$.

Il y a aussi des résultats généraux dans une même classe conforme obtenus par R.G. Mukhometov: soient m et m' deux métriques dont le comportement des géodésiques est du type courbure négative et qui sont conformément équivalentes dans un rapport de conformité dont la régularité est C^4 jusqu'au bord de D et telles que le bord ∂D est géodésiquement convexe; si $d_m = d_{m'}$ alors $m = m'$ (nous renvoyons à [Mu1] pour le cas $n = 2$ et à [Mu2] pour le cas général).

Nous nous proposons dans cette note de démontrer le Théorème 1 ci-dessous. On se restreint au cas où $n = 2$ et cette restriction est essentielle pour notre argument.

THÉORÈME 1. *Lorsque $n = 2$, la restriction de \mathcal{B} à l'espace des métriques C^2 à courbure strictement négative est injective: une métrique*

C^2 sur D m , de courbure strictement négative peut être reconstruite à partir de la distance d_m sur ∂D .

Le problème de la reconstruction des métriques sur le disque à partir de la restriction de la fonction distance sur leur bord est à comparer avec celui de reconstruire une métrique de courbure négative sur une variété compacte à partir de la donnée de son *spectre marqué des longueurs* (cf [Gr, 5.5.B]. Dans ce sens, le théorème ci-dessus est l'analogie exact du théorème de rigidité de [O].

D'autre part, on peut se demander si on peut améliorer les hypothèses de cet énoncé. En fait, les arguments que nous utilisons montrent aussi le résultat suivant. Si deux métriques C^2 m et m' sur le disque D , sans points focaux, vérifient: $\mathcal{B}(m) = \mathcal{B}(m')$, alors elles sont isométriques, dès que la courbure de l'une est négative et ne s'annule sur aucun ouvert.

§1. L'espace des géodésiques du disque D .

Soit m une métrique C^2 à courbure négative dans le disque D .

On peut joindre deux points quelconques du bord ∂D par un chemin minimisant contenu dans D . Paramétré par longueur d'arcs, un tel chemin sera appelé une *géodésique de la distance d_m* . Le résultat suivant concerne la régularité de ces chemins.

AFFIRMATION 2. *Les géodésiques de la distance d_m sont des arcs C^1 .*

PREUVE: Le fait que les chemins qui minimisent la distance entre deux points sont C^0 est classique pour les espaces de longueurs. Il nous suffit donc de montrer qu'un tel chemin k admet en chaque point une tangente et que celle-ci varie de façon continue.

Pour cela considérons d'abord un point de k dans l'intérieur de D ; un voisinage de ce point dans k est donc une géodésique de la métrique riemannienne m et en particulier k est différentiable dans un voisinage de ce point.

De même si κ est un intervalle de k dont une extrémité p , différente d'une extrémité de k est contenue dans ∂D , alors l'arc κ a une dérivée au point p . Notons en effet que sous nos hypothèses de différentiabilité la métrique m admet un prolongement en une métrique de classe C^2 . Donc la géodésique κ a une tangente au point p . Supposons qu'en son extrémité p la géodésique κ est transverse au bord ∂D . Alors la formule de la variation première fournit une contradiction au fait que dans un voisinage de κ , l'arc k minimise la distance entre chacun de ses points. Donc la dérivée de κ existe au point p et cette dérivée est la tangente unitaire de ∂D en ce point.

D'autre part si κ est un intervalle d'intersection de k avec ∂D , la tangente à k existe en tout point de κ et est égale à la tangente à ∂D au point considéré.

Soit maintenant $g : t \rightarrow g(t)$ une paramétrisation par longueur d'arcs de la courbe géodésique joignant p à q . Considérons le problème de la différentiabilité du chemin g au voisinage du point $g(0) \in \partial D$. Supposons la métrique m prolongée en une métrique C^2 m' définie dans un disque contenant D dans son intérieur; cette métrique aura donc aussi une courbure strictement négative mais nous n'utiliserons pas ce résultat.

Puisque le problème est local, nous supposerons finalement que la métrique m' est définie dans l'intérieur du disque unité de \mathbf{R}^2 , de sorte que le disque D soit l'intersection du disque unité avec le demi-plan supérieur et que le point $g(0)$ corresponde à l'origine de D . Nous noterons finalement $d_{m'}$ la fonction distance associée à m' .

Nous allons montrer que lorsque t_i est une suite tendant vers 0, la limite de $(\frac{Og(t_i)}{t_i})$ existe. Pour cela considérons d'abord la cas où la suite $(g(t_i))$ appartient à ∂D .

Alors, on a:

$$d_{m'}(0, g(t_i)) \leq t_i \leq l([O, g(t_i)]),$$

le dernier terme de l'inégalité étant la longueur de l'intervalle $[0, g(t_i)]$ contenu dans ∂D . Puisque le bord ∂D est différentiable, les deux termes extrêmes de l'inégalité ci-dessus sont équivalents lorsque t_i tend vers 0. Ils sont donc équivalents à celui du milieu et la suite $(\frac{Og(t_i)}{\|Og(t_i)\|})$ a bien une limite lorsque t_i tend vers 0, en vérifiant que $g(t_i) \in \partial D$: cette limite est alors le vecteur de norme 1 (pour la métrique m) à la courbe ∂D en l'origine.

Lorsqu'il n'existe pas de suite tendant vers 0 telle que $g(t_i)$ appartienne au bord ∂D , alors, un intervalle $]0, \alpha]$ a une image entièrement contenue dans l'intérieur du disque D . Cette image est donc un segment géodésique de la métrique riemannienne m et ce cas a été traité précédemment.

Si ce n'est pas le cas, soit (t_i) une suite tendant vers 0; on peut encadrer cette suite entre deux suites tendant vers 0, (t'_i) et (t''_i) telles que $g(t'_i)$ et $g(t''_i)$ soient contenus dans ∂D . On déduit l'existence de la limite de $(\frac{Og(t_i)}{\|Og(t_i)\|})$, de l'existence d'une limite commune pour $(\frac{Og(t'_i)}{\|Og(t'_i)\|})$ et $(\frac{Og(t''_i)}{\|Og(t''_i)\|})$.

Donc la courbe k est différentiable et sa tangente varie continûment.

□

Certaines des géodésiques de la distance d_m ressemblent vraiment à des géodésiques. On obtient une telle géodésique à partir d'un vecteur dans l'intérieur D en considérant les premiers points d'intersection de la géodésique passant par ce vecteur: cette géodésique intersecte le bord ∂D en deux points, puisqu'elle est propre (courbure négative), ces deux points étant bien distincts (courbure négative). Lorsqu'on applique la

même construction en un point de ∂D , dans une direction non tangente au bord, on obtient aussi une géodésique. Toutefois, il est possible que la géodésique issue d'un point du bord dans une direction tangente au bord ait son intérieur contenu dans l'intérieur de D jusqu'à son premier point de sortie. Les géodésiques de la distance d_m obtenues par la méthode précédente seront appelées des *géodésiques droites*: elles sont caractérisées par le fait que leur intérieur est entièrement contenu dans l'intérieur du disque D .

Lorsque le bord de D est *strictement convexe* toutes les géodésiques de la distance d_m sont des géodésiques droites et peuvent donc être décrites par la méthode précédente. Dans le cas général, où le bord n'est pas convexe, il n'en est rien.

Toutefois, on a le résultat général suivant qui traduit le fait que, même lorsque le bord de D n'est pas convexe, les géodésiques de la distance d_m s'intersectent comme des géodésiques droites.

AFFIRMATION 3. *Soit m une métrique C^2 à courbure négative définie sur le disque D . On a alors:*

- (1) *deux géodésiques de la distance d_m ont une intersection connexe ou vide;*
- (2) *pour toute paire de points distincts p et q de ∂D , il existe une unique géodésique de la distance d_m qui joint ces deux points.*

PREUVE: Considérons deux géodésiques distinctes γ et γ' dont l'intersection n'est pas connexe. Il existe alors un arc k contenu dans γ et un arc k' contenu dans γ' qui s'intersectent uniquement en leurs extrémités: chacun de ces arcs est une géodésique de la métrique m qui intersecte éventuellement ∂D . Considérons une composante connexe de l'intersection de k avec ∂D . Puisque k est une géodésique de d_m , une composante connexe de l'intersection doit être, si elle n'est pas réduite à un point, un segment du bord de D dont la concavité est tournée vers l'extérieur (courbure géodésique négative). L'arc k est donc une réunion d'arcs géodésiques de la métrique (riemannienne) m et d'arcs contenus dans ∂D , de courbure géodésique négative, tous ces arcs étant d'intérieurs disjoints. La réunion des deux arcs k et k' est le bord d'un disque contenu dans D , d'aire non nulle auquel on peut appliquer la formule de Gauss-Bonnet. On obtient immédiatement une contradiction.

Ceci montre que l'intersection de γ et γ' est connexe.

La deuxième partie de l'assertion se déduit immédiatement de la première. □

L'ensemble des géodésiques de la distance d_m s'identifie naturellement avec les paires de points distincts de ∂D : cet espace sera noté $\mathcal{M}(D)$.

Définition. On définit $\mathcal{C}(D)$ comme l'espace des mesures de Borel sur $\mathcal{M}(D)$ de masse totale finie.

Un exemple de mesure dans $\mathcal{C}(D)$ est défini de la manière suivante. Soient p et q deux points distincts de ∂D : ces deux points s'interprètent comme un élément de $\mathcal{M}(D)$ que l'on voit à son tour comme le support d'une masse de Dirac.

Un autre exemple est la mesure de Liouville associée à une métrique à courbure négative m , que nous définissons maintenant. Soit O l'ensemble des paires de points de ∂D tels que la géodésique qui les joint est une géodésique droite dont l'intérieur est entièrement contenu dans D et qui est transverse en ses extrémités à ∂D . Ainsi défini, l'ensemble O est ouvert. Il correspond à un ouvert de l'espace des géodésiques de la métrique *riemannienne* du disque D . Sur cet espace de géodésiques on a une mesure, la mesure de Liouville, définie comme la valeur absolue de la 2-forme obtenue comme produit intérieur de la forme volume de Liouville sur le fibré unitaire de D par le champ de vecteurs tangent au flot.

Nous allons maintenant donner la formule de cette mesure en coordonnées. Soit k un segment géodésique de la métrique m contenu dans D ou bien un arc contenu dans ∂D , dont la concavité est tournée vers l'extérieur; munissons cet arc d'une coordonnée par longueur d'arcs.

On peut paramétrer les géodésiques de l'ouvert O qui intersectent k transversalement par leur point d'intersection avec k et par l'angle qu'elles font en ce point d'intersection avec k . Cette paramétrisation est injective pour les géodésiques de O et l'ensemble des géodésiques de O qui intersectent k est ainsi homéomorphe à un ouvert de $k \times]0, \pi[$. Sur cet ouvert, l'expression de la mesure de Liouville est $d\mu = \sin \theta dt d\theta$ (cf [Sa, §9]).

On définit finalement la mesure de Liouville $\mu(m)$ sur $\mathcal{M}(S)$ en prolongeant la mesure ainsi définie sur O par 0 dans le complémentaire. On a ainsi défini une mesure de Borel; son support contient O , donc ce support est exactement la fermeture de O dans $\mathcal{M}(D)$. Remarquons que ce support est contenu dans l'ensemble des géodésiques droites, quoiqu'il soit possible qu'il en soit différent. Il nous reste à voir que la masse totale de la mesure de Liouville est finie; toutefois ce dernier point découlera d'une formule générale, la formule de Crofton que nous allons maintenant expliquer. Reprenons les notations utilisées pour définir en coordonnées la mesure de Liouville. L'ensemble des géodésiques de O qui intersectent k transversalement est homéomorphe à un ouvert O_k de $k \times]0, \pi[$. On a alors:

AFFIRMATION 4. *L'ouvert O_k est de mesure pleine pour la mesure de Lebesgue sur $k \times]0, \pi[$.*

PREUVE: Il nous suffit de montrer, d'après Fubini, que pour tout point $p \in k$, l'ensemble des vecteurs v au point p tels que la géodésique (de la métrique riemannienne m) issue de p dans la direction v est transverse

en ses deux extrémités à la courbe ∂D est un ensemble de mesure pleine dans l'espace unitaire tangent du disque D_m au point p .

Pour cela, soit v_0 un vecteur au point p tel que la géodésique issue de p dans la direction v_0 soit tangente en son extrémité p' à la courbe ∂D . Prolongeons la métrique m sur le disque D en une métrique que nous noterons toujours m définie dans un disque D' contenant D dans son intérieur. La nouvelle métrique peut être choisie C^2 et aura une courbure sectionnelle négative quitte à restreindre le disque D' . Les géodésiques issues de p dans un voisinage de la direction v_0 fournissent un feuilletage \mathcal{F} d'un voisinage U du point p' sur le disque D' . Ce feuilletage est C^1 puisque la métrique m est C^2 , c'est-à-dire que, si k' est petit arc géodésique transverse à ∂D et contenu dans U la projection de U sur k' le long des feuilles du feuilletage \mathcal{F} est C^1 . Donc, si k'' est un arc contenu dans $\partial D \cap U$ voisinage du point p' , paramétré par longueur d'arcs, la projection de k'' sur l'arc k' est une application C^1 . Donc l'image des points critiques de cette application est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Mais l'image de ces points critiques contient les directions v au point p telles que la géodésique issue de p dans la direction v est tangente à ∂D .

Donc pour tout point p l'ensemble des directions au point p qui définissent des géodésiques droites contenues dans O a un complémentaire de mesure nulle.

Donc O_k est de mesure pleine. □

On en déduit immédiatement que si un arc k est soit un segment géodésique, soit un arc contenu dans ∂D dont la concavité est tournée vers l'extérieur (de sorte qu'une géodésique ayant une extrémité dans k ait son autre extrémité dans $\partial D - k$), alors la mesure de Liouville des géodésiques de la distance d_m qui intersectent k est exactement le double de la longueur de k .

Nous allons généraliser la formule précédente mais il nous faut pour cela définir le *nombre d'intersection* entre deux éléments de $C(D)$.

Soit μ et μ' deux éléments de $C(D)$. Dans l'espace $\mathcal{M}(D) \times \mathcal{M}(D)$, on peut considérer l'ouvert formé des paires de paires de points telles que l'une des paires n'est pas contenue dans une composante connexe du complémentaire dans ∂D de l'autre paire.

L'espace $\mathcal{M}(D) \times \mathcal{M}(D)$ étant muni de la mesure produit $d\mu \times d\mu'$, la masse totale de cet ensemble sera notée $i(\mu, \mu')$ et appelée *nombre d'intersection* de μ et de μ' . Ce nombre d'intersection est symétrique.

Dans le cas où l'une des mesures, disons μ , est supportée sur une seule paire g , et disons avec masse totale 1, le nombre d'intersection de μ avec une autre mesure μ' se calcule en prenant la μ' -masse de l'ensemble des paires de points qui sont dans des composantes distinctes de $\partial D - g$.

En particulier, on a le résultat suivant, qui découle de la définition du nombre d'intersection, de l'écriture de la mesure de Liouville en coordonnées, et du fait que toute géodésique de la distance d_m est réunion disjointe d'arcs concaves contenus dans ∂D et de segments géodésiques de la métrique riemannienne m .

PROPOSITION 5. *Supposons que le disque D est muni d'une métrique à courbure négative. Soit p et q deux points distincts de ∂D . Alors la longueur de la géodésique de la métrique d_m qui joint ces deux points est égale à la moitié du nombre d'intersection de la mesure $[p, q]$ avec la mesure de Liouville $\mu(m)$.*

D'après cette proposition, il nous suffit, pour démontrer le théorème 1 de prouver que l'on peut reconstruire la métrique m à partir de la donnée des nombres d'intersection de sa mesure de Liouville $\mu(m)$ avec les masses de Dirac $[p, q]$.

Nous allons commencer par établir que l'on peut reconstruire la mesure de Liouville $\mu(m)$ à partir de ses nombres d'intersection avec les masses de Dirac. C'est un cas particulier du résultat suivant.

PROPOSITION 6. *Soient μ et μ' deux éléments de $C(D)$ tels que pour tout couple de points distincts p et q , on a: $i(\mu, [p, q]) = i(\mu', [p, q])$. Alors les mesures μ et μ' sont égales.*

PREUVE PAR A. DOUADY: Soient p, p', q, q' , 4 points distincts apparaissant dans cet ordre sur le cercle ∂D . On peut supposer puisque μ est une mesure de Radon que la masse des géodésiques dont une extrémité est l'un de ces points est nulle. On a alors, si F désigne l'ensemble des géodésiques dont une extrémité est dans l'intervalle $[p, p']$ et l'autre dans l'intervalle $[q, q']$:

$$\mu(F) = i(\mu, [p, q]) + i(\mu, [p', q']) - i(\mu, [p, p']) - i(\mu, [q, q']).$$

On en déduit la proposition. □

Soient maintenant m et m' deux métriques riemanniennes sur le disque telle que les distances d_m et $d_{m'}$ qui leurs sont respectivement associées sont isométriques. Soit ϕ l'application de ∂D dans lui-même qui réalise l'isométrie en question. On déduit des propositions 5 et 6 que l'homéomorphisme de $\mathcal{M}(D)$, $\tilde{\phi} = \phi \times \phi$ transporte la mesure de Liouville $\mu(m)$ sur la mesure $\mu'(m)$. En particulier cet homéomorphisme envoie le support de la première mesure sur le support de la deuxième.

Une autre conclusion est que la longueur de ∂D pour les deux métriques est la même: en effet, cette longueur n'est autre que la masse totale de la mesure de Liouville $\mu(m)$.

Finalement remarquons aussi que le volume total de D pour ces deux métriques est le même: le volume n'est autre en effet, à une constante

près, que le nombre d'intersection de la mesure $\mu(m)$ avec elle-même, à une constante près.

§2. Une obstruction à prolonger un homéomorphisme de ∂D par une homographie.

Définition. Soient m et m' deux métriques de courbure négative sur D . Une *homographie* du disque riemannien D_m vers le disque riemannien $D_{m'}$ est un homéomorphisme qui transporte les géodésiques de la métrique riemannienne m sur les géodésiques de la métrique riemannienne m' .

L'existence d'une homographie entre deux métriques riemanniennes est un phénomène très rare. Nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de G. Darboux sur les surfaces (troisième partie) dans lequel le problème de l'existence d'homographies C^2 entre deux surfaces riemanniennes est traitée en détail.

Soit ϕ un homéomorphisme de ∂D dans lui-même. Nous allons définir une obstruction à prolonger l'homéomorphisme ϕ en une homographie de D_m dans $D_{m'}$.

Soit T_m^1 le fibré unitaire du disque D_m . Soit v un vecteur et soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0, \pi[$. Notons $\theta.v$ le vecteur défini en tournant v dans sa fibre d'un angle θ . Il correspond aux vecteurs v et $\theta.v$ deux géodésiques droites de la métrique m , donc deux paires de points dans le cercle ∂D . A ces deux paires de points, l'homéomorphisme ϕ associe deux nouvelles paires de points de ∂D , qui ont la propriété de se croiser (i.e. une paire n'est pas entièrement contenue dans une composante connexe du complémentaire de l'autre). Considérons alors les deux géodésiques γ'_v et $\gamma'_{\theta.v}$ de la distance $d_{m'}$ que ces nouvelles paires définissent. Ces géodésiques ont une intersection non-vide. On définit la fonction $\theta'(v, \theta)$ comme l'angle qui fait passer de la géodésique $\gamma'(v)$ à la géodésique $\gamma'(\theta.v)$: on a besoin pour cela d'une orientation sur le disque D_m , l'orientation sur le disque $D_{m'}$ étant alors choisie de sorte que l'application ϕ respecte l'orientation induite sur ∂D .

L'angle $\theta'(v, \theta)$ est aussi défini lorsque les géodésiques $\gamma'(v)$ et $\gamma'(\theta.v)$ n'ont pas une intersection transverse: toutefois il est facile de voir, puisque les géodésiques de la distance d_m sont C^1 , que l'angle de la rotation qui fait passer de $\gamma'(v)$ à $\gamma'(\theta.v)$ aux extrémités de leur intervalle d'intersection est toujours 0 ou π .

On a alors le résultat suivant:

AFFIRMATION 7. *On a:*

- (1) *pour θ fixé, la fonction $\theta'(v, \theta)$ est mesurable;*
- (2) *soit $\Theta'(\theta)$ la valeur moyenne de la fonction $\theta'(v, \theta)$ pour la mesure de Lebesgue sur le fibré unitaire T_m^1 . Alors, la fonction Θ' est une fonction continue de θ .*

PREUVE: Considérons tout d'abord l'application qui associe à un vecteur de T_m^1 le point $e^+(v)$ défini comme le premier point d'intersection de la géodésique issue du vecteur v avec le cercle ∂D . L'ensemble des vecteurs v tels que la géodésique issue de v est transverse au point $e^+(v)$ à la courbe ∂D est un ouvert du fibré unitaire T_m^1 du disque D . D'après la démonstration de l'affirmation 4, cet ouvert est de mesure pleine pour la mesure de Lebesgue sur la fibre de T_m^1 au point p . Ceci est encore vrai pour l'ouvert défini de la même façon mais en considérant l'autre extrémité $e^-(v)$ de la géodésique issue du vecteur v . Donc, d'après Fubini, l'ensemble des vecteurs v tels que la géodésique issue de v est transverse en ses deux extrémités au bord ∂D est un ouvert de mesure pleine du fibré unitaire T_m^1 .

Fixons maintenant un angle θ dans l'intervalle $[0, \pi]$. L'ensemble des vecteurs v tels que les géodésiques issues de v et de $\theta.v$ sont transverses au bord ∂D en leurs extrémités est encore un ouvert O_θ de mesure pleine. L'application $\theta'(v, \theta)$ est en ces points une fonction continue du vecteur v . Ceci démontre la première partie de l'affirmation 7.

Soit maintenant (θ_i) est une suite tendant vers θ . On a pour $v \in O_\theta$ convergence de la suite $(\theta'(v, \theta_i))$ vers $\theta'(v, \theta)$. Donc du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit la continuité de la fonction Θ' au point θ . \square

La propriété essentielle de la fonction Θ' est la suivante.

PROPOSITION 8. *L'application Θ' est une application continue croissante de $[0, \pi]$ dans lui-même telle que:*

(1) Θ' est symétrique en $\pi - \theta$:

$$\forall \theta, \Theta'(\pi - \theta) = \pi - \Theta'(\theta);$$

(2) Θ' est une application sur-additive:

$$\forall \theta_1, \theta_2 \text{ tels que } \theta_1 + \theta_2 \in [0, \pi], \text{ on a: } \Theta'(\theta_1 + \theta_2) \geq \Theta'(\theta_1) + \Theta'(\theta_2).$$

PREUVE: Le fait que l'application Θ' est croissante résultera de la sur-additivité, puisque Θ' prend des valeurs positives.

Montrons la première assertion. D'après Fubini, si dA désigne la mesure de Lebesgue sur la surface S_m et si $d'v$ désigne la mesure de Lebesgue sur chaque fibre f de T_m^1 , on a:

$$\Theta'(\theta) = \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{S_m} \int_f \theta'(v, \theta) d'v dA.$$

Soit f une fibre du fibré unitaire tangent T_m^1 . On a alors, pour tout θ , si $v \in f$:

$$\theta'(v, \theta) + \theta'(\theta.v, \pi - \theta) = \pi.$$

Intégrons cette égalité pour la mesure $d'v$, on obtient en utilisant l'invariance de la mesure $d'v$ par la rotation d'angle θ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_f \theta'(v, \theta) d'v + \frac{1}{2\pi} \int_f \theta'(v, \pi - \theta) d'v = \pi.$$

Si on intègre maintenant cette égalité sur le disque D_m , on obtient la symétrie en $\pi - \theta$ de Θ' .

Démontrons maintenant la deuxième assertion. Rappelons d'abord l'inégalité de Gauss-Bonnet appliquée à un triangle T contenu dans $D_{m'}$ dont chaque côté du bord a une courbure géodésique négative ou nulle. Puisque la métrique m' a une courbure strictement négative, la somme des angles intérieurs de T est inférieure à π , avec égalité si et seulement si le triangle T a une aire nulle, c'est-à-dire si et seulement si triangle T est réduit à un point ou à un intervalle.

Soient alors f une fibre de T_m^1 , v un vecteur contenu dans cette fibre, et θ_1 et θ_2 deux angles dans l'intervalle $[0, \pi]$ vérifiant $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$. Considérons les images par la conjugaison ϕ des trois géodésiques γ_v , $\gamma_{\theta_1.v}$ et $\gamma_{(\theta_1+\theta_2).v}$. Les trois géodésiques images définissent un triangle T de $\tilde{D}_{m'}$, éventuellement réduit à un point ou à un intervalle contenu dans ∂D . Les angles intérieurs du triangle T sont: $\theta'(v, \theta_1)$, $\theta'(\theta_1.v, \theta_2)$, et $\pi - \theta'(v, \theta_1 + \theta_2)$. On a donc d'après Gauss-Bonnet:

$$\theta'(v, \theta_1) + \theta'(\theta_1.v, \theta_2) \leq \theta'(v, \theta_1 + \theta_2).$$

Intégrons d'abord cette inégalité sur la fibre f , pour la mesure de Lebesgue $d'v$, en utilisant l'invariance de la mesure $d'v$ par la rotation d'angle θ_1 , puis intégrons l'inégalité obtenue sur la surface D_m . On en déduit la sur-additivité de la fonction Θ' .

Ceci termine la démonstration de la proposition 8. □

THÉORÈME 9. *L'homéomorphisme ϕ se prolonge en une homographie de D_m dans $D_{m'}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

- (1) *l'application Θ' est égale à l'identité;*
- (2) *l'application $\hat{\phi}$ induit une bijection entre les géodésiques droites de D_m et les géodésiques droites de $D_{m'}$.*

PREUVE: La nécessité de la deuxième condition est claire; pour la première, remarquons seulement que l'application Θ' est alors une fonction continue et additive de l'intervalle dans lui-même.

Considérons maintenant la réciproque. Si l'application Θ' est l'identité, en particulier, elle est additive. D'après sa définition, l'application Θ' est la moyenne des applications Θ'_p , où $\Theta'_p(\theta)$ est défini comme la moyenne

sur la fibre au point p de la fonction $\theta'(v, \theta)$. Maintenant, le même raisonnement que celui effectué dans la démonstration de la continuité et de la sur-additivité de l'application Θ' montre que chaque application Θ'_p est continue croissante, et sur-additive. D'autre part si la suite (p_i) converge vers le point p , la suite d'applications (Θ'_{p_i}) converge simplement vers la fonction Θ'_p , d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Puisque cette dernière application est croissante et continue, un théorème de Dini dit alors que la convergence des fonctions Θ'_{p_i} vers la fonction Θ'_p est uniforme. Donc la fonction Θ' est la moyenne pour la mesure de Lebesgue du disque D_m de la fonction Θ'_p continue en p . Ainsi, pour que Θ' soit l'identité, il est nécessaire que chaque fonction Θ'_p soit l'identité.

Fixons un point p dans le disque D et considérons la fibre f du fibré unitaire T_m^1 en ce point. L'image de chaque géodésique droite issue d'un vecteur $v \in f$ est une géodésique droite par hypothèse. Montrons que maintenant que si v_1, v_2, v_3 sont trois vecteurs deux à deux distincts de la fibre f , les trois géodésiques droites $\tilde{\phi}(\gamma_{v_i})$ passent par le même point de l'intérieur du disque $D_{m'}$.

L'application qui a un vecteur v associe ses extrémités dans $\mathcal{M}(D)$ est continue sauf en un nombre dénombrable de points de f . En effet l'application $v \rightarrow e^+(v)$ est monotone et il en est de même de l'application $v \rightarrow e^-(v)$. De plus chacune des applications $e^+(v)$ et $e^-(v)$ est continue à droite ou à gauche en tout point.

Supposons dans un premier temps que les trois vecteurs v_i sont contenus dans l'ouvert $O \cap f$; dans la preuve de l'affirmation 4, on a vu que l'ouvert $O \cap f$ était de mesure pleine, donc en particulier, dense.

Raisonnons alors par l'absurde et reprenons la démonstration de la proposition 8: l'image par $\tilde{\phi}$ des trois géodésiques γ_{v_i} est formée de trois géodésiques deux à deux transverses et l'intersection de deux quelconques d'entr'elles est contenue dans l'intérieur du disque D . Si ces trois géodésiques ne sont pas concourrantes, le triangle qu'elles définissent a une aire non nulle et donc l'inégalité de Gauss-Bonnet est stricte. Elle est stricte aussi pour des angles voisins des angles (v_i) , car les vecteurs v_i sont supposés appartenir à l'ouvert $O \cap f$, où l'application $v \rightarrow \gamma_v$ est continue. Donc d'après la démonstration de la proposition 8, la fonction Θ'_p est différente de l'identité.

On en déduit donc que chaque géodésique de l'ouvert $O \cap f$ a pour image une géodésique qui passe par le même point $\psi(p)$ de l'intérieur du disque $D_{m'}$.

Nous allons maintenant montrer que *toutes* les géodésiques droites passant par p ont pour image une géodésique droite passant par $\psi(p)$. Pour cela, soit v un vecteur dans la fibre f , et soit (v_i) une suite de vecteurs dans $O \cap f$ qui l'approxime, choisie de sorte que (v_i) l'approxime par la droite ou par la gauche selon que la fonction $v \rightarrow e^+(v)$ est continue

à droite ou à gauche. Alors les images par $\tilde{\phi}$ des géodésiques γ_{v_i} sont des géodésiques droites et la suite de géodésiques g_i converge vers une géodésique de la distance $d_{m'}$ contenant les points $\phi(e^+(v))$ et $\psi(p)$.

Si cette géodésique a son intérieur contenu dans $D_{m'}$, alors ses extrémités sont $\phi(e^+(v))$ et $\phi(e^-(v))$ et on a bien que la géodésique γ_v a pour image une géodésique droite passant par $\psi(p)$.

Sinon, considérons la géodésique droite dont une extrémité est $\phi(e^+(v))$ et l'autre $\phi(\alpha)$. Cette géodésique contient le point $\psi(p)$ dans son intérieur. Donc, d'après notre hypothèse sur ϕ la géodésique joignant les points α et $e^+(v)$ est droite et intersecte toutes les géodésiques passant par le point p dans des directions contenues dans l'ouvert $O \cap f$. Ceci n'est possible que si *toutes* les géodésiques passant par le point p rencontrent la géodésique joignant α à $e^+(v)$, auquel cas, on voit alors facilement que le point p lui-même est contenu dans cette géodésique. Mais ceci entraîne que $\alpha = e^-(v)$. Donc la géodésique droite issue de p dans la direction v a pour image une géodésique droite passant par $\psi(p)$.

Donc l'application de l'intérieur du disque D_m dans le disque $D_{m'}$ définie par $\psi(p)$ a la propriété que l'image de toute géodésique est contenue dans une géodésique.

Il nous reste à montrer que cette application se prolonge en fait en un homéomorphisme du disque D_m dans le disque $D_{m'}$. Pour cela, remarquons tout d'abord que la restriction de ψ à chaque géodésique droite est un homéomorphisme sur son image. Soit p un point situé dans l'intérieur d'une telle géodésique g et soient (p_i) une suite de points contenus dans g qui converge vers p . Choisissons une géodésique γ transverse à g au point p qui est transverse en ses extrémités au bord ∂D et soit γ_i la géodésique issue de p_i dans la direction faisant le même angle avec g que γ . Alors les géodésiques images de γ et de γ_i sont proches (leurs bouts sont proches) et transverses (car ce sont des géodésiques droites) à la géodésique image de g . Donc la suite de points $(\psi(p_i))$ converge vers $\psi(p)$.

On montre maintenant que la restriction de ψ à l'intérieur d'une géodésique g est strictement monotone. Un point p situé entre deux points a et b sur cette géodésique a une image située entre les deux points $\psi(a)$ et $\psi(b)$. Soit en effet h une géodésique droite passant par p qui sépare les deux points a et b dans le disque D_m ; l'image de cette géodésique est une géodésique qui sépare les deux points $\psi(a)$ et $\psi(b)$ (considérer deux géodésiques droites passant par a et b respectivement, chacune étant disjointe de h).

Donc l'image de l'intérieur de la géodésique g est contenu dans l'intérieur de la géodésique $g' = \tilde{\phi}(g)$. Supposons que cette image n'est pas exactement l'intérieur de g ; alors, par un point du complémentaire de $\psi(g)$ dans g' considérons une géodésique droite transverse à g' . Son image réciproque est une géodésique droite (d'après les hypothèses sur

\circ) qui intersecte (donc transversalement) la géodésique droite g . Ainsi, l'image de ce point d'intersection est contenu dans $\psi(g)$, ce qui est la contradiction cherchée.

Ceci entraîne tout d'abord que la restriction de ψ à chaque géodésique droite est un homéomorphisme sur une géodésique droite qui est égal sur le bord à l'homéomorphisme ϕ .

Montrons maintenant la continuité de ψ . Montrons la continuité en un point de l'intérieur de D_m , la continuité en un point du bord se démontrant de manière exactement analogue. Soit p un point de l'intérieur de D_m et soient γ et γ' deux géodésiques passant par p , transverses entr'elles et transverses en leurs extrémités à ∂D . Notons γ_+ , γ_- , (resp. γ'_+ et γ'_-) des géodésiques transverses à γ' (resp. γ) faisant avec cette géodésique le même angle que γ (resp. γ'), et situées à distance ϵ de part et d'autre du point p . Si ϵ est suffisamment petit, les images de ces géodésiques seront quatre géodésiques, les deux premières transverses à $\psi(\gamma')$ et faisant avec celle-ci un angle voisin de celui que fait $\psi(\gamma)$, les deux dernières transverses à $\psi(\gamma)$ et faisant avec celle-ci un angle voisin de celui que fait $\psi(\gamma')$. Donc ces quatre géodésiques définissent un rectangle dans $D_{m'}$ de petit diamètre qui contient l'image par ψ du rectangle, voisinage de p , défini par les quatre géodésiques dans D_m . Donc ψ est continue au point p .

L'application ψ est donc un homéomorphisme de D_m dans $D_{m'}$, qui envoie les géodésiques de la métrique riemannienne m sur les géodésiques de la métrique riemannienne m' . C'est donc une homographie. □

Remarque. Tout d'abord, notons que si le bord ∂D pour la métrique m est convexe, la deuxième hypothèse de l'énoncé du théorème 9 est superflue.

En outre, on peut se demander si elle n'est pas toujours superflue.

§3. Preuve du théorème 1.

Nous allons d'abord montrer que si on a un homéomorphisme \circ de ∂D qui est une isométrie de la distance d_m vers la distance $d_{m'}$, il vérifie les hypothèses du théorème 9.

Vérifions tout d'abord la deuxième hypothèse. Remarquons qu'une géodésique de la distance $d_{m'}$ qui joint les points p et q n'est pas droite si et seulement si il existe un point r sur ∂D , distinct de p et de q tel que $d_{m'}(p, q) = d_{m'}(p, r) + d_{m'}(r, q)$. Donc si un homéomorphisme \circ induit une isométrie de la distance d_m vers la distance $d_{m'}$, l'image d'une paire de points joints par une géodésique droite est une paire de points du même type.

Donc il nous suffit de montrer que l'homéomorphisme Θ' est l'identité.

Soit F une fonction continue convexe sur l'intervalle $[0, \pi]$ à valeurs réelles. D'après l'inégalité de Jensen, on a, pour tout θ dans l'intervalle $[0, \pi]$:

$$F(\Theta'(\theta)) \leq \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} F(\theta'(v, \theta)) dv.$$

Remarquons que le second membre de cette inégalité est une fonction continue de θ d'après l'affirmation 7 et intégrons cette inégalité sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour la mesure $\sin \theta d\theta$. Il vient, après application de Fubini:

$$\int_0^\pi F(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} \left(\int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta \right) dv.$$

Posons $F'(v) = \int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta$. Ainsi le second membre de l'inégalité ci-dessus est la moyenne sur T_m^1 de la fonction (continue) F' .

PROPOSITION 10. *Supposons que $\tilde{\phi}$ envoie la mesure de Liouville μ_m sur la mesure de Liouville $\mu_{m'}$. Alors, pour toute fonction convexe F comme ci-dessus, on a:*

$$\int_0^\pi F(\Theta'(\theta)) \sin \theta d\theta \leq \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta.$$

PREUVE: Il nous suffit de montrer que pour toute fonction continue F , si on définit la fonction F' sur T_m^1 par: $F'(v) = \int_0^\pi F(\theta'(v, \theta)) \sin \theta d\theta$, alors on a:

$$\frac{1}{\mathcal{V}(T_m^1)} \int_{T_m^1} F'(v) dv = \int_0^\pi F(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Pour prendre la moyenne d'une fonction sur le fibré unitaire T_m^1 pour la mesure dv , il nous suffit de faire la moyenne sur l'espace des géodésiques la moyenne de cette fonction sur les géodésiques. La mesure de Liouville peut être approximée dans la topologie vague (comme toute mesure de Radon) par une combinaison linéaire finie de masses de Dirac. Donc il nous suffit de montrer la proposition ci-dessus dans le cas particulier où la mesure sur l'espace des géodésiques est une masse de Dirac. Dans ce cas, un changement de variable donne immédiatement le résultat cherché (cf [O, Proposition 7]). \square

L'homéomorphisme Θ' vérifie alors les hypothèses du lemme 8 de [O]; on en déduit que Θ' est l'identité.

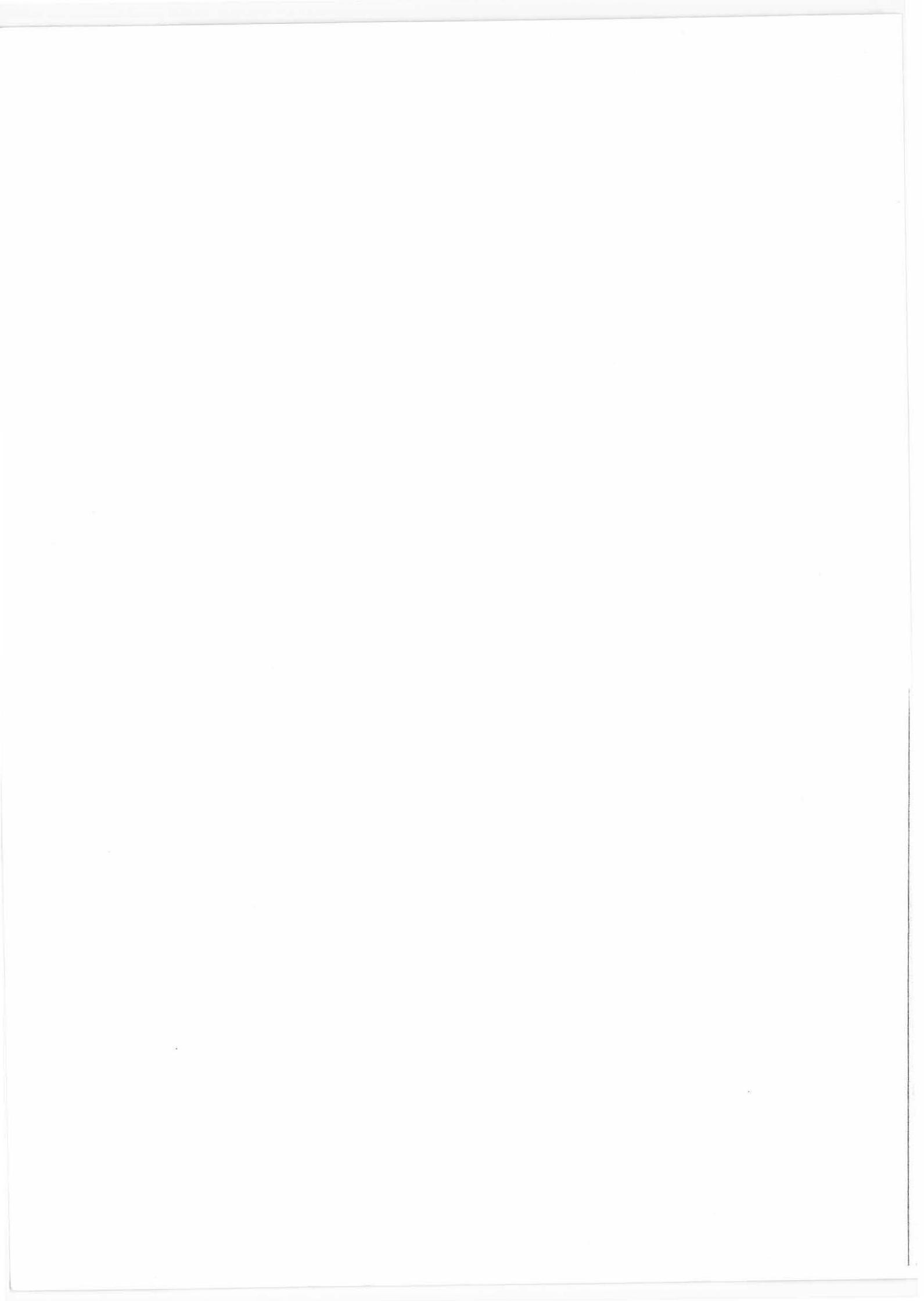
Donc il existe une homographie ψ entre les disques D_m et $D_{m'}$. Montrons que ψ est en fait une isométrie. Pour cela, considérons deux points

p et q dans le disque D_m . Leur distance, pour la distance par chemin associée à la métrique riemannienne m est, d'après la formule de Crofton la mesure de Liouville de l'ensemble des géodésiques droites qui les séparent. Or l'image par ψ d'une géodésique droite qui sépare p de q est une géodésique droite du disque $D_{m'}$ qui sépare $\psi(p)$ de $\psi(q)$. Donc, en réutilisant que $\tilde{\phi}$ envoie la mesure de Liouville μ_m sur la mesure de Liouville $\mu_{m'}$, on obtient bien que ψ respecte les distances.

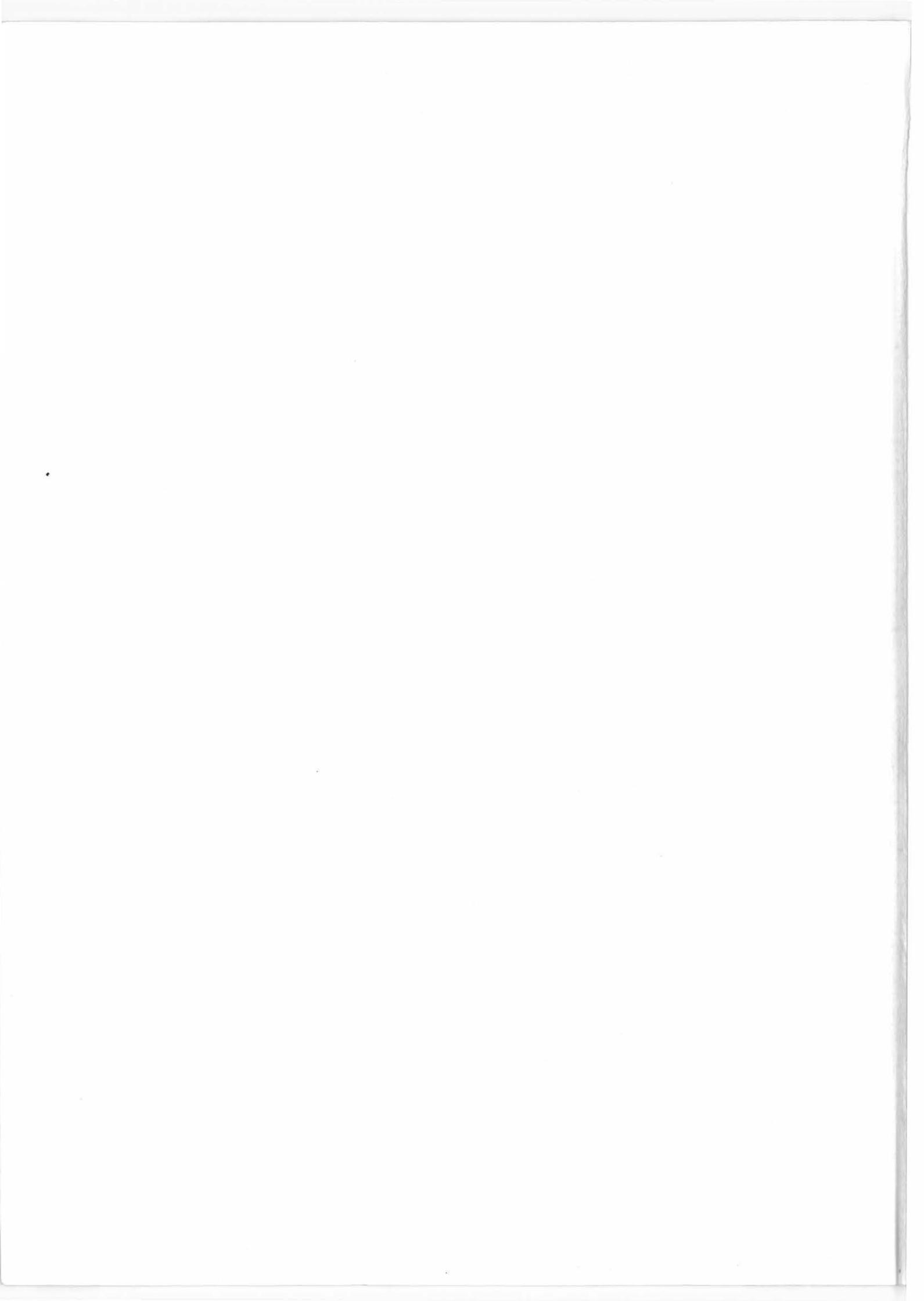
Ceci termine la démonstration du théorème 1.

REFERENCES

- [Gr] M. Gromov, *Filling riemannian manifolds*, Journal of Differential Geometry **18** (1983).
- [Mi] R. Michel, *Sur la rigidité imposée par la longueur des géodésiques*, Inv. Math. **65** (1981), 71.
- [Mu1] R.G. Muhometov, *The problem of recovery of a 2-dimensional Riemannian metric and integral geometry*, Soviet. Math. Dokl. **18** (1977), 27-31.
- [Mu2] R.G. Muhometov, *A problem of reconstructing a riemannian metric*, Siberian Math. J. **22** (1981), 420-433.
- [O] J.P. Otal, *Le spectre marqué des surfaces à courbure négative*, article 1988 à paraître dans Ann. of Maths..
- [Sa] L.A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Encyclopedia of Math. and its Applications (Addison Wesley) **1** (1976).



n° d'impression : 1035
2e trimestre 1989





Thèse de Doctorat d'Etat

Courants géodésiques et surfaces

Jean-Pierre OTAL

Résumé.

La première partie de ce travail porte sur des questions géométriques concernant les variétés compactes de dimension trois (les bretzels creux) obtenues en recollant des tores solides $D^2 \times S^1$ et des surfaces épaissies $\Sigma \times I$ à une boule B^3 le long de disques contenus dans le bord.

Dans le premier article, on définit un espace associé à un bretzel creux N : c'est le quotient d'un ouvert de l'espace des laminations mesurées sur la composante compressible S du bord de N par l'action d'un certain sous-groupe du groupe modulaire de S . Cet espace est muni d'une application naturelle dans l'espace des courants géodésiques $C(N)$ du groupe $\pi_1(N)$. Le résultat principal est que cette application est un homéomorphisme sur son image $L(N)$.

Le second article introduit quelques techniques dans le but de comprendre la frontière de $L(N)$ dans $C(N)$. On y considère le problème de caractériser les classes de conjugaison du groupe libre G à g générateurs qui peuvent être représentées par des courbes simples sur le bord d'un bretzel (i.e. la somme connexe le long du bord de g tores solides $S^1 \times D^2$). On étudie pour cela certaines relations d'équivalence sur l'espace des bouts du groupe libre G .

La seconde partie porte sur le problème de reconstruire une métrique riemannienne sur une surface à partir de données spectrales.

On montre dans le troisième article que deux métriques de courbure négative sur une surface fermée S qui donnent chacune la même longueur à toute classe d'homotopie de $\pi_1(S)$ sont isotopes.

Dans le quatrième article, on montre que deux métriques de courbure négative sur un disque compact D^2 qui induisent la même fonction distance sur le bord ∂D^2 , sont isotopes.

Abstract.

The first part of this work is concerned with some geometric questions about the 3-dimensional manifolds called "compression bodies".

In the first chapter, one defines a space associated to a compression body N : it is the quotient of an open subset of the space of measured laminations on the compressible component S of ∂N by the action of a certain subgroup of the modular group of S . This space carries a natural map to the space of geodesic currents $C(N)$ of the group $\pi_1(N)$. The main result is that this map is an homeomorphism on its image $L(N)$.

The second chapter introduces some technics to understand the frontier of $L(N)$ in $C(N)$. One considers there the problem of characterizing the conjugacy classes of the free group G on g generators which can be represented by an embedded loop on the boundary of an handlebody with fundamental group G . One studies therefore some equivalence relations on the space of ends of the free group G .

The second part is concerned with the problem of reconstructing Riemannian metric on a surface from some spectral data.

One shows in the third chapter that two negatively curved metrics on a closed surface S which give the same length to each homotopy class of $\pi_1(S)$ are isotopic.

In the fourth chapter, one shows that two negatively curved metrics on a compact disc D^2 which induce the same distance function on ∂D^2 are isotopic.

Mots-clés. Variétés de dimension 3, Géométrie hyperbolique, Bouts d'un groupe, Isométrie.

Code AMS : 57 M