SUR LE COEUR CONVEXE D'UNE VARIÉTÉ HYPERBOLIQUE DE DIMENSION 3

Jean-Pierre Otal

Si G est un groupe kleinien finiment engendré, on note $N(G)$ le *coeur de Nielsen* de la variété hyperbolique complète $\mathbf{H}^3/G$, c'est-à-dire le quotient par le groupe G de l'enveloppe convexe de l'ensemble limite de G. La *partie épaisse*, $N(G)^{ep}$ du coeur de Nielsen est le complémentaire dans $N(G)$ de la partie cuspidale de $\mathbf{H}^3/G$. D'après le théorème de finitude d'Ahlfors, le bord de $N(G)^{ep}$ est une réunion de surfaces compactes: chacune de ces surfaces est une réunion d'anneaux A_i, contenus dans le bord de la partie cuspidale, et de surfaces à bord incluses dans le bord de $N(G)$. Chacune de ces dernières surfaces est *plissée* le long d'une réunion de géodésiques, et ailleurs, totalement géodésique (cf [Thu1]).

On définit le *lieu de plissage* de G, que l'on note $P(G)$, comme la réunion de ces géodésiques et des courbes simples, âmes des anneaux A_i.

Dans la suite, H sera un bretzel de genre $g \geq 2$. Une *multi-courbe* est une collection γ de k courbes simples dans le bord ∂H, disjointes et deux à deux non homotopes.

Définition. Une *structure hyperbolique convexe* sur (H, γ) est la donnée d'un couple (G, ϕ), où G est un groupe kleinien géométriquement fini et où ϕ est un homéomorphisme entre H et $N(G)^{ep}$ tel que $\phi(\gamma)$ contienne $P(G)$. Deux structures convexes (G_1, ϕ_1) et (G_2, ϕ_2) sur (H, γ) sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe une isométrie $\mathcal{I}$ entre $N(G_1)$ et $N(G_2)$ telle que les homéomorphismes $\mathcal{I} \circ \phi_1$ et ϕ_2 soient isotopes. On note $\mathcal{C}(H, \gamma)$ l'espace des classes d'équivalence de structures hyperboliques convexes sur (H, γ).

On munit $\mathcal{C}(H, \gamma)$ d'une topologie en définissant deux classes (G_1, ϕ_2) et (G_2, ϕ_2) comme proches, lorsqu'il existe un homéomorphisme $\psi : N(G_1) \to N(G_2)$, proche d'une isométrie, tel qu'on ait: $\phi_2 = \psi \circ \phi_1$, à isotopie près.

Si $\sigma = (G, \phi)$ est une structure convexe dans $\mathcal{C}(H, \gamma)$, on pose $\Theta(\sigma) = (\theta_i)$ où $\theta_i \in [0, \pi]$ est l'angle diédral du coeur de Nielsen le long de la composante $\phi(\gamma_i)$ de $\phi(\gamma)$; on convient de poser $\theta_i = 0$ lorsque $\phi(\gamma_i)$ est parabolique. L'application de $\mathcal{C}(H, \gamma)$ dans $[0, \pi]^k$ ainsi obtenue est bien définie et continue d'après le choix de la topologie.

Le théorème d'hyperbolisation de Thurston ([Thu2]) donne une condition suffisante pour que $\mathcal{C}(H, \gamma)$ ne soit pas vide. Le but de cet article est de montrer que l'application Θ est un homéomorphisme sur son image et de décrire celle-ci. Nous allons commencer par préciser quelques propriétés vérifiées par cette image.

Rappelons d'abord quelques définitions.

UMPA, UMR 128 CNRS,ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon

Définitions. La multi-courbe γ est dite *incompressible* lorsque chaque composante connexe du complémentaire de γ dans ∂H est incompressible: c'est-à-dire lorsque tout disque proprement plongé dans H dont le bord est disjoint de γ est parallèle à un disque contenu dans $\partial H - \gamma$. Elle est dite *acylindrique* lorsque chaque anneau proprement plongé dans H, incompressible et disjoint de γ est parallèle au bord.

Remarque. Dans la suite, nous supposerons que la paire (H, γ) n'est pas homéomorphe au produit d'un disque à deux trous (ie un pantalon) par l'intervalle. Sous cette condition, on voit alors que si γ est une multi-courbe incompressible et acylindrique, alors toute application incompressible f d'un anneau A dans H telle que l'image du bord $f(\partial A)$ est contenue dans ∂H et est disjoint de γ peut être homotopée dans ∂H relativement au bord ∂A; ceci signifie que la multi-courbe γ est *homotopiquement* acylindrique dès qu'elle l'est *géometriquement*.

Remarque. Observons aussi que la condition vérifiée par γ d'être incompressible et acylindrique entraîne en particulier que chaque composante de γ représente un élément non nul et indivisible dans le groupe fondamental de H.

Proposition 1. *L'espace des structures hyperboliques convexes $\mathcal{C}(H, \gamma)$ n'est pas vide si et seulement si la multi-courbe γ est incompressible et acylindrique.*

Démonstration. Si $\gamma \subset \partial H$ est une multi-courbe incompressible et acylindrique, il existe $\sigma_c = (G, \phi) \in \mathcal{C}(H, \gamma)$ tel que $\Theta(G, \phi) = (0, .., 0)$ ([Mas], [Thu2]). Ainsi sous cette hypothèse, l'espace $\mathcal{C}(H, \gamma)$ n'est pas vide.

Réciproquement, si (G, ϕ) est une structure hyperbolique convexe, l'image par ϕ de chaque composante connexe du complémentaire de γ dans ∂H est totalement géodésique et en particulier incompressible; il n'existe donc pas de disques de compression pour H dont le bord soit disjoint de γ, ce qui signifie que la multi-courbe γ est incompressible.

Pour la même raison, si A est un anneau proprement plongé dans H, incompressible et dont le bord est disjoint de γ, chaque composante du bord de A peut être isotopée, soit sur une géodésique contenue dans le bord de $N(G)$, soit sur une courbe dans la partie cuspidale $N(G)^{ep}$. Si ces deux courbes sont des géodésiques, alors elles sont contenues dans l'adhérence d'une même composante connexe de $\partial H - \gamma$ et sont donc égales: l'anneau A est parallèle au bord. Si l'une des deux courbes est dans la partie cuspidale, il en est de même pour l'autre et l'anneau A est encore parallèle au bord. $\square$

Une propriété vérifiée par l'image $\Theta(\mathcal{C}(H, \gamma))$.

Dans toute la suite, la multi-courbe γ sera supposée incompressible et acylindrique.

Rappellons pour commencer la définition du nombre d'intersection $i(\gamma, \gamma')$ entre deux multi-courbes γ et γ' sur un surface S; chacune des multi-courbes est isotope à une collection de géodésiques $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}'$ pour une métrique hyperbolique (arbitraire) sur S; le nombre de points d'intersection transverses de $\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}'$ est alors égal à $i(\gamma, \gamma')$. On montre facilement que ce nombre ne dépend pas de la métrique hyperbolique choisie sur S.

Soit m un *disque méridien* de H, c'est-à-dire un disque proprement plongé dans H dont le bord est une courbe essentielle sur ∂H. Nous allons associer à m une forme affine sur $\mathbf{R}^k$. Supposons que le bord du disque m intersecte $\gamma = (\gamma_i)$ de façon minimale: il intersecte alors la composante γ_i en $i(\gamma_i, \partial m)$ points.

On pose:

$$\chi_m(\theta) = \sum_1^k i(\gamma_i, m)(\pi - \theta_i).$$

De même, si a est un anneau essentiel, c'est-à-dire un anneau proprement plongé dans H, incompressible et non parallèle au bord, isotopons-le de sorte que son bord intersecte transversalement chaque composante γ_i en $i(\gamma_i, \partial a)$ points et posons: $\chi_a(\theta) = \sum_1^k i(\gamma_i, \partial a)(\pi - \theta_i)$.

Définition. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des classes d'isotopie de méridiens, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des classes d'isotopie d'anneaux incompressibles essentiels dans H.

Pour chaque élément $m \in \mathcal{M}$ ou $a \in \mathcal{A}$, nous avons introduit ci-dessus une fonctionnelle sur $\mathbf{R}^k$, notée selon le cas, χ_m ou χ_a.

Soit $\mathcal{H}_m = \{\theta \in [0, \pi]^k / \chi_m(\theta) > 2\pi\}$ et $H_a = \{\theta \in [0, \pi]^k / \chi_a(\theta) > 0\}$. On définit le convexe $\mathcal{H} \subset [0, \pi]^k$ comme l'intersection des convexes $\mathcal{H}_s$ lorsque s appartient à $\mathcal{M} \cup \mathcal{A}$.

Remarque. On peut déjà remarquer que le convexe ainsi défini n'est pas vide; il contient en effet le point $(0, ..., 0)$ (les hypothèses faites sur γ entraînent que tout méridien intersecte γ en au moins trois points). D'autre part, on voit facilement que l'adhérence de $\mathcal{H}$ dans $[0, \pi]^k$ ne contient pas le point $(\pi, ..., \pi)$.

Nous commençons par observer le résultat suivant:

Proposition 2. *L'image $\Theta(\mathcal{C}(H, \gamma))$ est contenue dans le convexe $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Soit $m \in \mathcal{M}$ et $\sigma = (G, \phi) \in \mathcal{C}(H, \gamma)$. Supposons dans un premier temps qu'aucune des coordonnées du vecteur $\Theta(\sigma)$ n'est nulle; le bord du cœur de Nielsen $N(G)$ est alors une surface compacte.

On peut isotoper l'application $\phi : m \to N(G)$ en une application *plissée*, c'est-à-dire telle que l'image $\phi(m)$ soit une réunion de triangles géodésiques. Pour cela, on commence par isotoper ϕ de sorte que le bord soit une géodésique de $\partial N(G)$; on choisit ensuite un point p dans l'intersection $\phi(\gamma) \cap \phi(\partial m)$ et on prend le cône depuis p sur $\phi(m)$. On obtient alors un nouveau disque bordé par $\phi(\gamma)$ qui est, par construction, une réunion de triangles totalement géodésiques. La métrique induite sur m par l'application ϕ est de courbure constante -1; le bord de m est géodésique par morceaux, les coins étant contenus dans l'intersection $\gamma \cap m$. L'angle au point $\gamma_i \cap m$ est supérieur à θ_i (cf [Bo, lemme 1.8] pour l'argument dans une situation analogue). La formule de Gauss-Bonnet donne donc:

$$\sum_{\gamma_i \cap m} (\pi - \theta_i) > 2\pi.$$

Puisque les courbes $\phi(\partial m)$ et $\phi(\gamma)$ sont des géodésiques de la métrique hyperbolique induite sur $\partial N(G)$, les intersections entre ces deux courbes sont minimales; donc, le point $\Theta(\sigma) \in]0, \pi]^k$ vérifie $\chi_m(\Theta(\sigma)) > 2\pi$.

Lorsque certaines coordonnées du vecteur $\Theta(\sigma)$ sont nulles, on note $\delta \subset \gamma$ la réunion des composantes de γ représentées par des éléments paraboliques dans $N(G)$. Alors, on commence par isotoper l'homéomorphisme $\phi : H \to N(G)^{ep} \subset N(G)$ en un homéomorphisme propre de $H - \delta$ vers $N(G)$. Après une nouvelle isotopie, on obtient que l'image du "disque" $m - \delta \cap m$ est une réunion de triangles totalement géodésiques, éventuellement non compacts; la formule de Gauss-Bonnet donne encore: $\chi_m(\Theta(\sigma)) > 2\pi$.

Soit maintenant a un anneau essentiel. D'après la formule qui définit χ_a, on a $\chi_a(\sigma) \geq 0$, avec égalité si et seulement si, pour toute composante γ_i de γ qui intersecte ∂a, l'angle θ_i est égal à π. Dans cette situation, si on note $\bar{\gamma}$ la réunion des composantes de γ qui ne rencontrent pas ∂A, on voit que la structure hyperbolique convexe sur (H, γ) induit une structure hyperbolique convexe sur $(H, \bar{\gamma})$. Alors, d'après la proposition 1, l'anneau a est parallèle au bord, contrairement à l'hypothèse. $\square$

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 3. *Soit $\gamma \subset \partial H$ une multi-courbe incompressible et acylindrique; alors, l'application $\Theta : \mathcal{C}(H, \gamma) \to \mathcal{H}$ est un homéomorphisme.*

L'énoncé ci-dessus signifie d'une part qu'une métrique convexe sur H dont le lieu de plissage est γ est déterminée par sa mesure de plissage; d'autre part, il décrit l'ensemble des mesures de plissage qui peuvent apparaître comme égal au convexe $\mathcal{H}$.

Son énoncé se rapproche donc de celui du théorème d'Andreev ([A]) et plus particulièrement de la généralisation qu'en ont donnée C. Hodgson et I. Rivin dans [HoR] (voir aussi [R] et [Thu1]). Cette généralisation montre qu'un polyèdre hyperbolique convexe dans $\mathbf{H}^3$ est déterminé à isométrie près par sa structure combinatoire et par ses angles dièdres, et décrit les angles qui peuvent apparaître (toutefois l'espace de ceux-ci n'est pas en général un convexe).

On peut aussi comparer la partie *injectivité* du théorème 3 aux travaux de Linda Keen et de Caroline Series qui montrent que la mesure de plissage pour certaines variétés géométriquement finies détermine la variété à isométrie près ([KS]).

L'article est organisé de la manière suivante. Dans la première section, on commence par établir quelques lemmes topologiques que nous utiliserons par la suite: la proposition 5 donne un résultat de finitude à isotopie près pour les méridiens du bretzel H en position tendue par rapport à une collection de courbes sur le bord ∂H. Nous montrerons aussi que le convexe $\mathcal{H}$ est en fait un polyèdre moins certaines faces du bord.

Dans la deuxième, on montre que l'application Θ est propre. En utilisant un résultat récent de C. Hodgson et S. Kerckhoff, on prouve alors que Θ est un homéomorphisme local (§3).

En combinant les résultats de ces deux sections, on montre le théorème 3 dans la section §4.

Je remercie les rapporteurs pour leurs nombreux commentaires sur ce travail.

§1. La géométrie du convexe $\mathcal{H}$.

Proposition 4. *Le convexe $\mathcal{H}$ est l'intersection avec le cube $[0, \pi]^k$ d'un nombre fini de demi-espaces $\chi_a(\theta) > 0$, $\chi_m(\theta) > 2\pi$, pour $m \in \mathcal{M}$ et $a \in \mathcal{A}$.*

Démonstration. Pour montrer ce résultat, considérons le convexe compact $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ égal à l'ensemble des points du cube $[0, \pi]^k$ dans l'intersection des demi-espaces fermés $\overline{\mathcal{H}_m}$, lorsque m décrit l'ensemble $\mathcal{M}$.

Affirmation 4.1. *Soit $\gamma \subset \partial H$ une multi-courbe. Alors, le convexe $\mathcal{H}_M$ est un polyèdre.*

Démonstration. Les équations qui définissent $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ ont des coefficients entiers, éléments de $\mathbb{N}^k$. Si on munit $\mathbb{N}^k$ de l'ordre produit, l'ensemble des coefficients des formes χ_m, pour $m \in \mathcal{M}$, ne possède qu'un nombre fini d'éléments minimaux. Si ces éléments minimaux sont les coefficients des formes χ_{m_i}, pour $i = 1, ..., p$, on en déduit que le convexe $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ est égal à l'ensemble des points du cube qui satisfont aux p équations $\chi_{m_i}(\theta) \geq 2\pi$. Donc, le convexe $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ est un polyèdre compact. $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition 4, il suffit d'observer que le convexe $\mathcal{H}$ est égal à l'intersection de l'intérieur de $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ dans $[0, \pi]^k$ avec les demi-espaces $\mathcal{H}_a$ pour $a \in \mathcal{A}$. Or, la trace d'un tel demi-espace sur le cube $[0, \pi]^k$ est formée des points dont certaines coordonnées sont différentes de π. Donc le convexe $\mathcal{H}$ est défini par un nombre fini d'inégalités. $\square$

La proposition 4 est rassurante sur l'allure du convexe $\mathcal{H}$. En fait, on peut dire un peu plus sur les méridiens qui interviennent dans les équations des faces de sa frontière. Le résultat suivant n'est pas vraiment nécessaire pour la suite de l'article et on le verra apparaître d'une autre façon au cours de la démonstration du théorème 3.

Définition. Soit s un méridien ou un anneau s qui minimise le nombre de points d'intersection avec γ dans sa classe d'isotopie. Alors s est dit *en position tendue* par rapport à γ si l'inclusion $(s, s \cap \gamma) \subset (H, \gamma)$ est incompressible vers le bord.

Affirmation 4.2. *Le convexe $\mathcal{H}_{\mathcal{M}}$ est égal à l'intersection avec le cube $[0, \pi]^k$ d'un nombre fini de demi-espaces $\chi_{m_i}(\theta) \geq 2\pi$, où les m_i sont des méridiens en position tendue par rapport à γ.*

Démonstration. L'une des inclusions est évidente. Supposons maintenant que m est un méridien compressible vers le bord dans (H, γ): il existe alors un disque δ dont le bord est la réunion d'un arc contenu dans $H - \gamma$ et d'un arc contenu dans m. Par chirurgie du disque m le long de δ, on obtient deux nouveaux méridiens m_1 et m_2. Chacun de ces méridiens vérifie: $i(\partial m_i, \gamma) < i(\partial m, \gamma)$. On a d'autre part:

$$\chi_m(\theta) = \sum_{\gamma \cap m} (\pi - \theta_i) \geq \sum_{\gamma \cap m_1} (\pi - \theta_i) + \sum_{\gamma \cap m_2} (\pi - \theta_i) \geq \chi_{m_1}(\theta) + \chi_{m_2}(\theta).$$

Donc, on a: $\mathcal{H}_{m_1} \cap \mathcal{H}_{m_2} \subset \mathcal{H}_m$. Par récurrence sur le nombre d'intersection de ∂m et γ, on en déduit que $\mathcal{H}_m$ contient l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces $\mathcal{H}_{m_i}$, où (m_i) est une famille finie de méridiens en position tendue par rapport à γ. La partie concernant la finitude dans l'énoncé découle alors de l'affirmation 4.1. $\square$

Donc, les équations des faces de la frontière du polyèdre $\mathcal{H}$ sont, soit de la forme $\chi_m(\theta) = 2\pi$ où m est un méridien en position tendue, soit de la forme $\chi_a(\theta) = 0$.

Le résultat suivant de nature topologique sera utilisé dans la prochaine section.

Proposition 5. *Soit γ une multi-courbe incompressible et acylindrique; soit $\bar{\gamma}$ une multi-courbe contenant γ. Alors, pour tout entier C, il n'existe qu'un nombre fini de classes* *d'isotopie de méridiens en position tendue par rapport à $\bar{\gamma}$ qui intersectent γ en moins de C points.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde; il existe alors une suite infinie de méridiens m_i comme dans l'énoncé ci-dessus.

Pour simplifier certains arguments dans la démonstration, nous utiliserons une métrique particulière sur la surface ∂H, construite de la manière suivante. Puisque la multi-courbe $\bar{\gamma}$ est incompressible et acylindrique, l'image de l'application Θ contient un voisinage de $(0, ..., 0)$. Ce résultat sera établi dans la proposition 7, dans un cadre plus général, grâce au théorème de rigidité locale de Hodgson-Kerckhoff; dans notre cas particulier, il découle, du théorème de la chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston (cf. [Thu1]).

Donc, on peut choisir une structure hyperbolique convexe (G, ϕ) sur $(H, \bar{\gamma})$ dont aucun des angles n'est nul. Alors, le revêtement planaire $\partial\tilde{H}$ s'identifie isométriquement au bord du revêtement universel de H, qui est aussi l'enveloppe convexe de l'ensemble limite de G.

Représentons alors les courbes ∂m_i par des géodésiques de cette métrique sur ∂H: sous notre hypothèse, la longueur des géodésiques ∂m_i tend vers l'infini. Soit λ une valeur d'adhérence de cette suite dans l'espace des laminations géodésiques de ∂H muni de la topologie de Hausdorf. On notera $d(.,.)$ la distance riemannienne sur le revêtement planaire $\partial\tilde{H}$ de ∂H, bord du revêtement universel de H. Soit finalement $\tilde{\lambda}$ la préimage de la lamination géodésique λ dans $\partial\tilde{H}$.

Le résultat suivant, qui a été observé par A. Casson, traduit le fait que la lamination géodésique λ est une limite de méridiens pour la topologie de Hausdorf (cf [CL] pour un cas particulier, [O]):

Lemme 5.1. *Il existe une feuille $l \subset \tilde{\lambda}$ et deux suites de points (x_i) et (y_i) sur cette feuille tels que la distance entre ces deux points mesurée sur la feuille l tend vers l'infini alors que la distance $d(x_i, y_i)$ reste bornée.*

Démonstration. Chaque courbe ∂m_i se relève homéomorphiquement dans $\partial\tilde{H}$; donc la longueur de ces relevés pour la métrique de $\partial\tilde{H}$ tend vers l'infini.

On distingue maintenant deux cas, selon que le diamètre des relevés des courbes ∂m_i est borné ou pas.

Si ces diamètres sont majorés par une même constante, la lamination $\tilde{\lambda}$ a une feuille non compacte dont le diamètre dans $\partial\tilde{H}$ est borné: les conclusions du lemme 5.1 5.1 sont alors satisfaites.

Supposons maintenant que le diamètre des relevés des courbes ∂m_i tend vers l'infini et que la lamination $\tilde{\lambda}$ n'a pas de feuilles contenues dans un compact de $\partial\tilde{H}$. On a alors:

Affirmation 5.2. *Pour tout $n > 0$, il existe une constante $c(n)$, telle que, pour tout i suffisamment grand, chaque relevé de ∂m_i contient un arc k_i avec les propriétés suivantes:*

(1) *la distance entre les extrémités de l'arc k_i est bornée, indépendamment de i et de n;*
(2) *la longueur de l'arc k_i est comprise entre n et $c(n)$.*

Démonstration. Soient a_i et b_i deux points d'un relevé de ∂m_i qui réalisent le diamètre. Choisissons un système complet de méridiens m pour H, c'est-à-dire une famille maximale de méridiens, disjoints et deux à deux non isotopes; la réunion de ces méridiens découpe alors H en une réunion de boules. Pour i suffisamment grand, chaque courbe ∂m_i intersecte ces méridiens. D'autre part, tout relevé chacun de ces méridiens disconnecte $\tilde{H}$. Considérons ceux de ces relevés qui séparent les points a_i et b_i; pour i suffisamment grand, l'un de ces relevés découpe la courbe $\tilde{\partial} m_i$ en une réunion d'arcs, dont l'un, k_i, contient b_i et tel que la distance de b aux extrémités de k_i est comprise entre n et $n + C$, où la constante C ne dépend que de la géométrie du système complet de méridiens m.

Les extrémités de l'arc k_i sont sur un méridien du système complet m; donc elles vérifient (1).

Pour montrer (2), il nous suffit de voir que la longueur de l'arc k_i reste bornée. Puisque les points a_i et b_i réalisent le diamètre du relevé de ∂m_i, le diamètre de l'arc k_i est inférieur à $2n + 2C$. Puisque le groupe $\pi_1(H)$ agit sur $\partial \tilde{H}$ avec un domaine fondamental compact, il existe des conjugués de k_i qui sont contenus dans un même compact de $\partial \tilde{H}$; si la longueur de k_i n'était pas bornée, la lamination $\tilde{\lambda}$ possèderait alors une feuille non compacte contenue dans ce même compact. Donc, il existe une constante $c(n)$ qui majore la longueur des arcs k_i. $\square$

Considérons maintenant, une constante n étant fixée, les projections des arcs k_i sur la surface ∂H. La longueur de ces arcs est inférieure à $c(n)$, donc, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que ces arcs convergent vers un arc contenu dans une feuille de λ; un relevé de cette feuille contient deux points, qui sont à distance supérieure à n le long de la feuille mais à distance inférieure au diamètre de ∂H dans le revêtement planaire. Puisque les feuilles de $\tilde{\lambda}$ qui sont isolées d'un côté sont denses dans $\tilde{\lambda}$, on peut trouver, proches de ces deux points, deux points avec les mêmes propriétés mais situés sur une même feuille de $\tilde{\lambda}$, isolée d'un côté. Pour terminer la démonstration du lemme 5.1, il suffit alors d'observer que les feuilles qui sont isolées d'un côté sont en nombre fini, modulo l'action du groupe $\pi_1(H)$ et que celui-ci agit isométriquement sur $\partial \tilde{H}$. $\square$

La feuille l fournie par le lemme 5.1 est nécessairement distincte d'une feuille de la préimage de la multi-courbe γ.

D'autre part, chaque méridien ∂m_i se relève homéomorphiquement dans le revêtement $\tilde{\partial} H$; donc chaque relevé de ∂m_i intersecte la préimage de $\bar{\gamma}$ en moins de C points. Par continuité, chaque feuille de $\tilde{\lambda}$ intersecte la préimage de $\bar{\gamma}$ en moins de C points; c'est en particulier le cas de la feuille l. Celle-ci contient donc deux demi-feuilles disjointes l^+ et l^-, chacune contenue dans une composante connexe de la préimage de $\partial H - \bar{\gamma}$: notons S^+ et S^- ces composantes connexes. La préimage de chaque composante connexe de $\partial H - \bar{\gamma}$ est totalement géodésique dans le bord du revêtement universel $\tilde{H} \subset \mathbf{H}^3$; les demi-géodésiques l^+, l^- sont donc propres et la propriété (2) de la feuille l entraîne qu'elles ont le même bout, qui est donc un point du bord $\partial \mathbf{H}^3$, commun aux adhérences de S^+ et de S^-. On distingue maintenant deux cas:

1er cas: $S^+ \neq S^-$. On a alors:

Affirmation 5.3. *Les adhérences de S^+ et S^- dans $\mathbf{H}^3 \cup \partial \mathbf{H}^3$ ou bien sont disjointes, ou bien s'intersectent le long d'une composante de la préimage de $\bar{\gamma}$.*

Démonstration. Puisque les surfaces S^+ et S^- sont des convexes contenus dans des plans totalement géodésiques, l'intersection de leurs adhérences est ou bien vide, ou bien formée d'un seul point, ou bien égale à une géodésique. Dans ce dernier cas, on voit facilement que c'est une composante de la préimage de $\bar{\gamma}$.

Supposons donc que l'intersection de ces adhérences est formée d'un seul point dans $\partial\mathbf{H}^3$. On peut alors approcher ce point par une suite $(p_i) \in S^+$ et par une suite $(q_i) \in S^-$ de sorte que la distance $d(p_i, q_i)$ (mesurée dans $\mathbf{H}^3$) tende vers 0. Le stabilisateur Γ de S^+ dans G agit sur S^+ de façon cocompacte; donc, quitte à extraire une sous-suite, il existe des éléments $\gamma_i \in \Gamma$ tels que la suite $(\gamma_i(p_i))$ converge vers un point p de S^+. La suite $(\gamma_i(q_i))$ converge alors vers le même point; donc le point p est dans une géodésique $\tilde{\gamma}$ de la préimage de $\bar{\gamma}$. Pour i suffisamment grand, la composante $\gamma_i(S^-)$ est donc égale à la composante, distincte de S^+, qui contient $\tilde{\gamma}$ dans sa frontière. Comme γ_i stabilise S^-, il permute les géodésiques dans sa frontière; ceci entraîne que les adhérences de S^- et de S^+ s'intersectent le long d'une géodésique, contrairement à l'hypothèse. $\square$

Reprenons la démonstration. Si les demi-géodésiques l^+ et l^- ont un point en commun, celui-ci est nécessairement point fixe d'un élément qui stabilise une géodésique de la préimage de $\bar{\gamma}$. Donc, la projection de la feuille l sur la surface ∂H a ses deux bouts qui spiralent dans la même direction autour d'une composante de $\bar{\gamma}$, les deux demi-feuilles étant situées sur des côtés différents de cette composante. On voit facilement qu'une telle situation est impossible pour une limite géométrique de courbes simples.

2e cas: $S^+ = S^-$. La caractérisation suivante des méridiens en position tendue par rapport à une multi-courbe se déduit du théorème du lacet (cf [He, p.47]).

Lemme 5.4. *Soit $\gamma \subset \partial H$ une multi-courbe incompressible et soit $m \in \mathcal{M}$ un méridien dont le bord est transverse à γ. Alors, m est en position tendue par rapport à γ si et seulement si pour toute composante connexe F de $\partial\tilde{H} - \tilde{\gamma}$, et pour toute composante $\partial\tilde{m}$ de la préimage de ∂m, l'intersection $F \cap \partial\tilde{m}$ est ou bien vide, ou bien un arc qui joint deux composantes distinctes de la préimage de γ.*

Notons que la multi-courbe γ est incompressible et acylindrique, puisque $\bar{\gamma}$ l'est. Par continuité, il découle du lemme ci-dessus que chaque feuille de $\tilde{\lambda}$ intersecte au plus une fois chaque composante connexe de la préimage de γ.

La surface S^+ est isométrique au revêtement universel d'une surface compacte à bord géodésique et les géodésiques de la préimage de $\gamma - \bar{\gamma}$ contenues dans S^+ découpent S^+ en deux composantes connexes. Les demi-géodésiques l^+ et l^- sont asymptotes dans S^+ et la feuille l intersecte au plus une fois chaque géodésique de la préimage de γ; on en déduit que les demi-géodésiques l^+ et l^- contiennent des demi-géodésiques (toujours notées l^+, l^-) disjointes de la préimage de γ. Ces deux demi-géodésiques sont contenues dans des composantes $\bar{S}^+$, $\bar{S}^-$ de la préimage de $\partial H - \gamma$.

Lorsque $\bar{S}^+$ est différente de $\bar{S}^-$, le raisonnement du premier cas s'applique. Sinon, l^+ et l^- sont asymptotes sur $\bar{S}^+$ par exemple. Soient k^+ et k^- les composantes non compactes de l'intersection de l^+ et l^- avec $\bar{S}^+$. La géodésique l est contenue dans la limite de Hausdorf de courbes dans la préimage de ∂m_i. Une courbe qui approxime suffisamment près les géodésiques l^+ et l^- aura alors une intersection avec $\bar{S}^+$ qui n'est pas connexe. D'après le lemme 5.4, ceci contredit que les méridiens m_i sont en position tendue par rapport à γ.

Cette contradiction termine la démonstration de la proposition 5. $\square$

§2. La dégénérescence des structures convexes dans $\mathcal{C}(H,\gamma)$.

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant:

Théorème 6. *L'application $\Theta : \mathcal{C}(H,\gamma) \to \mathcal{H}$ est propre.*

Démonstration. Soit $(\sigma_i = (G_i, \phi_i))$ une suite dans $\mathcal{C}(H,\gamma)$; nous allons montrer que, quitte à la remplacer par une sous-suite, ou bien elle converge, ou bien la suite $(\Theta(\sigma_i))$ tend vers une face dans la frontière de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire qu'il existe un méridien m (resp. un anneau a) tel que $\chi_m(\Theta(\sigma_i))$ tend vers 2π (resp. $\chi_a(\Theta(\sigma_i))$ tend vers 0).

Comme nous l'avons rappelé dans la preuve de la proposition 1, il existe un élément $\sigma_c = (G_0, \phi_0)$ tel que $\Theta(\sigma_c) = (0, ..., 0)$. Soit $\mathcal{R}(G_0)$ l'espace des représentations du groupe libre G_0 dans $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$ et $\mathcal{X}(G_0)$ le quotient de $\mathcal{R}(G_0)$ sous l'action de $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$ par conjugaison. On a une projection naturelle $\mathcal{P}$ de $\mathcal{C}(H,\gamma)$ dans $\mathcal{X}(G_0)$ qui associe à une structure hyperbolique convexe $\sigma = (G, \phi)$ la représentation $G_0 \to G$ induite par l'action de l'homéomorphisme $\phi \circ \phi_0^{-1}$ sur le groupe fondamental. Cette application est bien définie sur l'espace $\mathcal{C}(H,\gamma)$ d'après le définition de la relation d'équivalence sur l'espace des structures hyperboliques convexes.

On distingue deux cas selon que la suite $(\mathcal{P}(\sigma_i))$ converge ou diverge dans $\mathcal{X}(G_0)$.

1er cas: la suite $(\mathcal{P}(\sigma_i))$ converge dans $X(G_0)$.

Nous allons montrer alors que, quitte à extraire une sous-suite, ou bien les structures (σ_i) convergent dans $\mathcal{C}(H,\gamma)$ ou bien qu'il existe un anneau a tel que $\chi_a(\Theta(\sigma_i))$ tend vers 0.

Soit $G = \rho(G_0)$ la représentation limite des représentations $G_i = \rho_i(G_0)$; ρ est une représentation fidèle et discrète du groupe libre G_0 (cf [Chu]).

Supposons dans un premier temps que la représentation ρ est fuchsienne, c'est-à-dire conjuguée à une représentation dans $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{R})$. Soit $\delta \subset \gamma$ la réunion des composantes connexes de γ dont l'angle de plissage tend vers 0. Notons que δ n'est pas vide, puisque, le groupe G étant fuchsien, les angles de plissage ne peuvent tendre que vers 0 ou π et qu'il est impossible que tous les angles tendent vers π car l'adhérence du polyèdre $\mathcal{H}$ ne contient pas le point $(\pi, .., \pi)$ comme nous l'avons déjà remarqué.

En restriction à chaque composante connexe S de $\partial H - \delta$, les représentations ρ_i convergent vers une représentation *fuchsienne* de $\pi_1(S)$. On en déduit que $\partial H - \delta$ a exactement deux composantes connexes et que la variété (H, δ) est homéomorphe au produit d'une surface à bord par l'intervalle $[0, 1]$. On produit alors facilement un anneau $a \in \mathcal{A}$ pour lequel $\chi_a(\Theta(\sigma_i))$ tend vers 0.

Supposons maintenant que le groupe G n'est pas fuchsien: ceci entraîne que le coeur de Nielsen de la variété $\mathbf{H}^3/G$ est une variété de dimension 3.

Notons δ la réunion des composantes de γ le long desquelles la mesure de plissage tend vers 0. Observons que la longueur de chaque composante de δ tend vers 0 car sinon le groupe limite G serait fuchsien (en effet, par convexité, l'ensemble limite de G serait alors contenu dans un cercle de $\partial\mathbf{H}^3$). Donc pour chaque élément g de $\pi_1(H) \simeq G_0$ qui représente une courbe de δ, la suite $(\rho_i(g))$ tend vers un élément parabolique.

On a alors:

Lemme 6.1. *Le groupe G est géométriquement fini.*

Démonstration. Par hypothèse, la représentation ρ restreinte à chaque composante de $\partial H - \gamma$ converge vers une représentation fuchsienne.

Considérons une équivalence d'homotopie entre H et $\mathbf{H}^3/G$; on peut homotoper sa restriction à $H - \delta$ en une application propre f dont la restriction à chaque composante de $\partial H - \gamma$ est un plongement totalement géodésique.

Soit $\tilde{f}$ un relevé de f au revêtement universel de H. Soit F l'adhérence dans $\partial \tilde{H}$ d'une composante connexe de la préimage de $\partial H - \gamma$. L'image $\tilde{f}(F)$ est contenue dans un plan totalement géodésique: elle est égale à l'enveloppe convexe de l'ensemble limite du groupe fuchsien $\rho(\Gamma_F)$, où Γ_F est le stabilisateur dans $\pi_1(H) \simeq G_0$ de la composante connexe F; c'est aussi la limite des enveloppes convexes des ensembles limites de $\rho_i(\Gamma_F)$. Ces enveloppes convexes sont contenues dans le bord de l'enveloppe convexe de $\rho_i(G_0)$, donc par continuité chaque surface $\tilde{f}(F)$ est dans le bord de l'enveloppe convexe de G. Toujours par un argument de continuité, on voit que les images par $\tilde{f}$ de deux surfaces distinctes F et F' ne peuvent s'intersecter que si F et F' sont adjacentes le long d'une composante de la préimage de γ. On en déduit que l'application $\tilde{f}$ restreinte à la préimage de $\partial H - \delta$ dans $\tilde{H}$ est un plongement d'image convexe: soit C le convexe de $\mathbf{H}^3$ bordé par cette image. Chaque composante de δ définit une classe de conjugaison d'éléments paraboliques dans $\rho(G)$; soit g un élément parabolique de ce type. L'élément $\rho_i(g)$ stabilise deux faces totalement géodésiques dans l'enveloppe convexe du groupe $\rho_i(G_0)$ qui, à la limite, deviennent tangentes au point fixe p de $\rho(g)$. Le quotient de l'intersection avec C d'une horoboule centrée au point p par le groupe engendré par $\rho(g)$ est donc de volume fini. Comme la surface $f(\partial H - \delta)$ est homologue à 0 dans $\mathbf{H}^3/G$, on en déduit que le quotient de C/G est de volume fini. Donc G est un groupe géométriquement fini. □

D'après le raisonnement précédent, l'application f définit un homéomorphisme entre ∂H et le bord de $N(G)^{ep}/G$ qui se prolonge en une équivalence d'homotopie de H vers $N(G)^{ep}/G$; par des arguments classiques de topologie de dimension 3, cet homéomorphisme se prolonge en un homéomorphisme de H avec $N(G)^{ep}/G$ que nous noterons toujours f. Ainsi, (G, f) est une structure convexe sur (H, γ).

Il nous faut maintenant montrer que la classe de (G, f) dans $\mathcal{C}(H, \gamma)$ est bien la limite des classes σ_i. D'après [CEG], il existe une suite (f_i) telle que (G_i, f_i) converge vers (G, f) dans $\mathcal{C}(H, \gamma)$. Mais alors, le composé $\phi_i^{-1} \circ f_i$ est un homéomorphisme de la paire (H, γ) homotope à l'identité. Puisque γ est incompressible et acylindrique, un théorème de Johansonn ([Jo]) dit que $\phi_i^{-1} \circ f_i$ est isotope à l'identité. Donc (G_i, f_i) représente la classe σ_i dans $\mathcal{C}(H, \gamma)$.

Ceci établit le théorème 6 lorsque la suite $(\mathcal{P}(\sigma_i))$ converge dans $\mathcal{X}(G_0)$.

2e cas: la suite $(\mathcal{P}(\sigma_i))$ dégénère dans $X(G_0)$.

Le raisonnement distinguera deux cas selon que certaines coordonnées du vecteur $\Theta(\sigma_i)$ tendent vers π ou non.

1er sous-cas: il existe $\alpha > 0$ tel que $\Theta(\sigma_i) \in [0, \pi - \alpha]^k$ pour tout i.

Soit l_j^i la longueur dans la variété $\mathbf{H}^3/G_i$ de la géodésique représentant la composante γ_j de γ, en convenant que $l_j^i = 0$ si γ_j correspond à un élément parabolique dans G_i. Si la suite $(l_1^i, .., l_k^i)$ est bornée dans $\mathbf{R}^k$, puisque la multi-courbe γ est acylindrique et incompressible, le critère de compacité de Thurston pour les variétés apprêtées acylindriques ([Thu4], voir aussi [MS]) entraîne que $(\mathcal{P}(\sigma_i))$ contient une sous-suite convergente; ceci est contraire à l'hypothèse que la suite $(\mathcal{P}(\sigma_i))$ dégénère dans $X(G_0)$.

Donc, certaines composantes de γ ont une longueur qui tend vers l'infini: quitte à réindexer les éléments de γ, notons $(\gamma_1, .., \gamma_p)$ ces composantes. Notons $\delta \subset \gamma$ la réunion (éventuellement vide) des composantes de γ dont la longueur tend vers 0, et soit S une composante connexe du complémentaire de δ dans ∂H qui contient certaines des courbes γ_j, pour $j \leq p$. L'application ϕ_i induit sur S une métrique hyperbolique S_i telle que chaque composante du bord est soit homotope dans un cusp, soit une géodésique dont la longueur tend vers 0 quand i tend vers l'infini.

Puisque, pour $j \leq p$, la longueur des courbes γ_j contenues dans S tend vers l'infini, on a:

Lemme 6.2. *Pour tout entier n, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe dès que i est suffisamment grand, un segment géodésique $\tilde{\kappa}_i$ contenu dans le revêtement universel $\tilde{S}_i$ de S_i tel que:*

1. *$\tilde{\kappa}_i$ intersecte successivement en n points $\tilde{g}_s(0)$, pour $s = 1, ..., n$, des géodésiques $\tilde{g}_s$ dans la préimage de γ;*
2. *les paramétrages par longueur d'arc des géodésiques $\tilde{g}_s$ vérifient, pour $-1 \leq t \leq 1$: $d_{\tilde{S}_i}(\tilde{g}_s(t), \tilde{g}_1(t)) \leq \epsilon$.*

Démonstration. La réunion des courbes γ_j contenues dans S_i découpe S_i en une réunion de surfaces de volume fini à bord géodésique; soit Σ_i l'une de ces surfaces. La métrique de longueur induite sur Σ_i est de courbure constante -1 et la longueur de certaines composantes du bord de Σ_i tend vers l'infini.

Que le volume d'une surface hyperbolique à bord géodésique soit un invariant topologique entraîne le résultat suivant dont la démonstration est laissée au lecteur.

Sous-lemme 6.3. *Soit $\eta > 0$; pour toute constante $L' > 0$, il existe $L = L(L')$, tel que si Σ est une surface hyperbolique de volume fini à bord géodésique, et si k est un arc dans le revêtement universel $\partial\tilde{\Sigma}$ de longueur supérieure à L qui se plonge dans Σ, alors il existe un arc k' contenu dans une autre composante de $\partial\tilde{\Sigma}$ de longueur supérieure à L' tel que le paramétrage par longueur d'arc de k' soit à une distance inférieure à η du paramétrage par longueur d'arc d'un sous-arc de k. De plus, la constante $L(L')$ ne dépend que de L', de η et du type topologique de Σ.*

Pour démontrer le lemme 6.2, on applique le résultat ci-dessus. On observe d'abord qu'on peut trouver une constante $L(L')$ commune à toutes les composantes connexes de $S - \gamma$, puisque celles-ci ne peuvent avoir qu'un nombre fini de types topologiques. On pose alors $\eta = \epsilon/n$ et on applique de proche en proche le sous-lemme 6.3 en commençant par un arc k_i dans la préimage de γ dans le revêtement universel de S_i qui se projette injectivement dans S_i et de longueur supérieure à $L(L(L(L(...(3)))))$ (n itérations). Un tel arc k_i existe pour i suffisamment grand. On en déduit un arc géodésique κ_i qui vérifie les conclusions du lemme 6.2. □

Notons C_i l'enveloppe convexe de l'ensemble limite du groupe G_i. Remarquons que l'inclusion $\partial H \to H$ induit une projection au niveau des revêtements universels $\tilde{S}_i \to \tilde{H}$ qui prend valeurs dans le bord ∂C_i de C_i. Soit alors κ_i l'image de l'arc $\tilde{\kappa}_i$ dans ∂C_i.

L'arc κ_i intersecte successivement les géodésiques g_s, images des géodésiques $\tilde{g}_s$; observons toutefois que ces géodésiques g_s peuvent se répéter.

Soit P le plan géodésique de $\mathbf{H}^3$ orthogonal à la géodésique g_1 au point $p_1 = g_1(0)$.

Les quantités $c_1(\epsilon)$, $c_2(\epsilon)$,... qui apparaîtront dans la suite ne dépendent que de ϵ et tendent vers 0 avec lui.

Puisque la projection de $\tilde{S}_i$ dans $\mathbf{H}^3$ décroît les distances, les paramétrages des géodésiques g_s vérifient toujours: $d_{\mathbf{H}^3}(g_s(t), g_1(t)) \leq \epsilon$, pour $-1 \leq t \leq 1$. En particulier, pour la distance naturelle sur le fibré tangent à $\mathbf{H}^3$, les vecteurs unitaires tangents en l'origine aux géodésiques g_s sont à une distance inférieure à $c_1(\epsilon)$ du vecteur orthogonal à P au point p_1. Chaque géodésique g_s intersecte donc P en un point p_s dont la distance au point p_1 est inférieure à $c_2(\epsilon)$; sa direction tangente au point p_s fait un angle avec P qui diffère de $\pi/2$ d'au plus $c_3(\epsilon)$.

L'arc κ_i se projette sur P en un arc $\bar{\kappa}_i \subset P \cap \partial C_i$, qui est une réunion de segments géodésiques joignant p_s à p_{s+1}. L'arc $\bar{\kappa}_i$ est contenu dans une boule de rayon $c_2(\epsilon)$ autour du point p_1. Puisque l'angle de la géodésique g_s avec le plan P diffère de $\pi/2$ d'au plus $c_3(\epsilon)$, l'angle de $\bar{\kappa}_i$ en chaque sommet p_s diffère de θ_s^i d'au plus $c_4(\epsilon)$, où θ_s^i est l'angle de plissage du bord de l'enveloppe convexe C_i le long de la géodésique g_s. On a alors:

Lemme 6.4. *Si n est choisi assez grand, et ϵ assez petit, l'arc $\bar{\kappa}_i$ est une courbe fermée qui se projette sur ∂H en en une courbe simple, bord d'un méridien m_i en position tendue par rapport à γ. De plus, le nombre d'intersection de ∂m_i avec γ est majoré par une constante $C(\alpha)$.*

Démonstration. Tout d'abord, si ϵ est choisi suffisamment petit, tous les angles qui interviennent le long de l'arc polygonal $\bar{\kappa}_i$ sont majorés par $\pi - \alpha/2$. Supposons que cette condition est réalisée.

L'image de l'arc $\bar{\kappa}_i$ est contenue dans le convexe $P \cap C_i$. Elle est aussi contenue dans la boule de rayon $c_2(\epsilon)$ autour de p_1: on peut supposer que ϵ a été choisi suffisamment petit de sorte que cette boule ait une aire inférieure à π. Choisissons maintenant n supérieur à $8\pi/\alpha$. La formule de Gauss-Bonnet montre alors que l'image de $\bar{\kappa}_i$ est nécessairement une courbe fermée; d'après la même formule, le nombre de coins de cette courbe fermée est inférieur à $C(\alpha) = 4\pi/\alpha$.

L'image de la courbe $\bar{\kappa}_i$ est par construction une courbe fermée simple c_i sur ∂C_i. Pour montrer que cette courbe se projette sur une courbe simple dans ∂H, il suffit de voir qu'elle est disjointe de ses translatées par le groupe G_i. Raisonnons par l'absurde et soit $g_i \in G_i$ un élément non nul tel que les courbes $g_i(c_i)$ et c_i s'intersectent en un point q. Supposons que ϵ a été choisi assez petit de sorte que la courbe c_i ait une longueur inférieure à la constante de Margoulis $m(2)$ du plan hyperbolique (il suffit pour cela, d'après la formule de Crofton, que la longueur du cercle de rayon $c_2(\epsilon)$ soit inférieure à $m(2)$). Alors l'élément $g_i \in \pi_1(H, q)$ est l'image d'un lacet $d_i \in \pi_1(S_i, q)$ dont la longueur est inférieure à $m(2)$; par construction, le lacet c_i n'est pas nul dans $\pi_1(S_i, q)$ et sa longueur est aussi inférieure à $m(2)$. Puisque le lacet d_i n'est pas homotope à 0 dans H, alors que c_i l'est, le sous-groupe de $\pi(S_i, q)$ engendré par ces deux lacets n'est pas virtuellement abélien. Ceci contredit le lemme de Margoulis.

Donc la courbe c_i se projette sur une courbe simple de ∂H, qui est le bord d'un disque méridien m_i. Pour démontrer le lemme 6.4, il nous reste à voir que m_i est un méridien en position tendue par rapport à γ. On utilise la caractérisation donnée par le lemme 5.4. L'adhérence de chaque composante connexe de la préimage de $\partial H - \gamma$ dans ∂C_i est un convexe contenu dans un plan totalement géodésique; si cette composante intersecte le plan P, c'est donc le long d'un segment géodésique; les extrémités de ce segment sont forcément dans des composantes connexes différentes de la préimage de γ. Ceci entraîne que le méridien m_i est en position tendue par rapport à γ. $\square$

Maintenant, l'entier n vérifiant les conclusions du lemme 6.4, nous allons faire tendre ϵ vers 0. On obtient alors une suite de méridiens m_i qui bordent dans $\mathbf{H}^3$ des disques dont l'aire tend vers 0. Donc, d'après la formule de Gauss-Bonnet, la courbure géodésique du bord de ces méridiens tend vers 2π. Or, d'après les conclusions du lemme 6.4 et la proposition 5, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que les bords de ces disques sont tous dans la même classe d'isotopie $m \in \mathcal{M}$. Donc, $\chi_m(\Theta(\sigma_i))$ tend vers 2π, ce qui montre le théorème 6 dans ce cas.

2e sous-cas: certaines des coordonnées de $\Theta(\sigma_i)$ tendent vers π.

Notons $\bar{\gamma}$ la réunion des composantes γ_j de γ telles que l'angle θ_j ne tend pas vers π: nous savons qu'il en existe puisque, comme nous l'avons déjè remarqué, le point $(\pi, ..., \pi)$ n'est pas dans l'adhérence du convexe $\mathcal{H}$, qui contient l'image de Θ. Supposons que les angles de plissage le long des composantes de $\bar{\gamma}$ sont tous inférieurs à $\pi - \alpha$, pour un certain angle α non-nul, indépendant de i.

Si la multi-courbe $\bar{\gamma}$ n'est pas incompressible ou acylindrique, il existe alors un disque ou un anneau essentiel proprement plongé dans H, disjoint de $\bar{\gamma}$. D'après la proposition 2, ce ne peut être un disque méridien m. Donc, c'est nécessairement un anneau essentiel a et la limite des coordonnées du vecteur $\Theta(\sigma_i)$ est dans l'hyperplan $\chi_a^{-1}(0)$. Le théorème 6 est démontré dans ce cas aussi.

Donc, nous pouvons supposer que la multi-courbe $\bar{\gamma}$ est incompressible et acylindrique. Comme la suite $P(\sigma_i)$ ne contient pas de sous-suite convergente, le critère de compacité de Thurston entraîne comme précédemment que certaines composantes de $\bar{\gamma}$ ont une longueur qui tend vers l'infini.

Notons $\delta \subset \gamma$ la réunion des composantes connexes de γ dont la longueur tend vers 0 et S l'adhérence d'une composante connexe de $\partial H - \delta$ qui contient des éléments de $\bar{\gamma}$ dont la longueur tend vers l'infini. L'application ϕ_i fait de S une surface hyperbolique complète S_i pour laquelle chaque composante de bord est soit parabolique, soit une géodésique fermée dont la longueur tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini.

Puisque la longueur de certaines composantes de $\bar{\gamma}$ contenues dans S tend vers l'infini, le lemme 6.2 s'applique et fournit, pour tout ϵ et pour tout entier n, un arc géodésique $\tilde{\kappa}_i$, contenu dans le revêtement universel $\tilde{S}_i$ de la surface S_i qui intersecte n composantes distinctes $\tilde{g}_s$, $s = 1, .., n$, dans la préimage de $\bar{\gamma}$. Mais il est possible, dans notre cas, que l'arc κ_i intersecte aussi des composantes $\tilde{g}_r$ de la préimage de $\gamma - \bar{\gamma}$. Toutefois, d'après la convexité de la fonction distance dans la surface $\tilde{S}_i$, les paramétrages des géodésiques $\tilde{g}_s$ et $\tilde{g}_r$ seront ϵ-proches du paramétrage de $\tilde{g}_1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Le raisonnement du premier sous-cas fournit un arc $\bar{\kappa}_i$ dans l'intersection d'un plan totalement géodésique P passant par le point $g_1(0)$ et orthogonal à g_1, l'image de la géodésique $\tilde{g}_1$. Cet arc, contenu dans une boule de P de rayon $c_2(\epsilon)$, est une réunion de segments géodésiques; pour ϵ suffisamment petit, les angles aux coins qui correspondent aux points d'intersection avec les géodésiques $\tilde{g}_s$ sont majorés par $\pi-\alpha/2$; quant aux coins avec les géodésiques $\tilde{g}_r$, on peut seulement dire qu'ils sont inférieurs à π, par convexité.

Comme précédemment, la formule de Gauss-Bonnet entraîne que si n est choisi assez grand, l'image $\bar{\kappa}_i$ de cet arc sur la surface ∂H est une courbe fermée qui intersecte $\bar{\gamma}$ en moins de $C(\alpha)$ points. Par le même raisonnement, qu'alors, cette courbe fermée représente la classe d'isotopie du bord d'un méridien m_i dans $\mathcal{M}$ en position tendue avec γ.

Faisons tendre ϵ vers 0 comme précédemment. D'après la proposition 5, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que les bords des méridiens m_i sont tous dans la même classe d'isotopie m; en particulier, le nombre de points d'intersection de l'arc $\bar{\kappa}_i$ avec les géodésiques g_r est constant. La formule de Gauss-Bonnet donne alors que $\chi_m(\Theta(\sigma_i))$ tend vers 2π, ce qui montre le théorème 6 dans ce cas aussi. $\square$

§3. Comportement local de l'application Θ.

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant:

Proposition 7. *L'application Θ est un homéomorphisme local près de chaque point de $\mathcal{C}(H,\gamma)$.*

Démonstration. Considérons la variété DH obtenue en doublant le bretzel H le long de ∂H. Une structure hyperbolique convexe dans $\mathcal{C}(H,\gamma)$ fait de DH une variété hyperbolique à singularités coniques le long de γ (cf [Ho], [Z]). L'angle le long d'une composante du lieu conique est exactement le double de l'angle de plissage en la composante correspondante. Si $\sigma \in \mathcal{C}(H,\gamma)$, la structure conique construite précédemment sera dite obtenue *par doublage* à partir de la structure σ.

Posons $M = DH - \gamma$. Considérons l'espace $\mathcal{R}(M)$ des classes de conjugaison de représentations du groupe fondamental $\pi_1(M)$ dans $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$. Observons que $\mathcal{R}(M)$ porte l'action de la conjugaison complexe que nous noterons simplement $\rho \to \bar{\rho}$.

La variété DH possède une involution naturelle qui renverse l'orientation et fixe ∂H, en particulier la multi-courbe γ. On en déduit une involution sur l'espace des représentations $\rho \to \rho \circ i$, laquelle induit une action $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{R}(M)$.

Une structure conique sur (DH,γ) possède une *holonomie* qui est une représentation du groupe fondamental de $M = DH-\gamma$ dans $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$. Soit ρ la représentation d'holonomie d'une structure hyperbolique à singularités coniques, obtenue en doublant une structure convexe sur (H,γ). Alors, la représentation $\mathcal{I}(\rho)$ est l'holonomie d'une structure conique sur (DH,γ) qui est isométrique à la structure originale, mais par une isométrie renversant l'orientation. Pour une structure ρ de ce type, on a donc: $\mathcal{I}(\rho) = \bar{\rho}$.

Notons $\mathcal{C}(DH,\gamma)$ l'espace des structures coniques sur (DH,γ). L'application "holonomie" donne une inclusion: $\mathcal{C}(DH,\gamma) \subset \mathcal{R}(M)$. Si ρ est l'holonomie d'une structure conique, une représentation voisine de ρ est l'holonomie d'une structure conique dès que l'image de chaque méridien autour d'une composante de γ est un élément elliptique de $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$ (cf [Ho], [Z]).

On a une application $\Theta' : \mathcal{C}(DH,\gamma) \to [0,\infty[^k$, qui a la structure conique σ associe le k-uplet dont la i-ième composante est l'angle de la singularité de σ' le long de la i-ième composante de γ. Ainsi, pour une structure σ' obtenue en doublant une structure convexe $\sigma \in \mathcal{C}(H,\gamma)$, on a: $\Theta'(\sigma') = 2\Theta(\sigma)$.

Pour démontrer la proposition 7, nous utiliserons un résultat de rigidité locale pour les variétés hyperboliques à singularités coniques obtenu par C. Hodgson et S. Kerckhoff (cf [HoK]). Avec les notations précédentes, leur résultat s'énonce:

Théorème 8. *Soit $\sigma \in \mathcal{C}(DH, \gamma)$ une structure hyperbolique à singularités coniques telle que $\Theta'(\sigma) \in [0, 2\pi]^k$. Alors, l'application Θ' est un homéomorphisme local au voisinage de σ.*

Nous allons maintenant appliquer ce résultat à la preuve de la proposition 7. Soit $\sigma_0' \in \mathcal{C}(DH, \gamma)$ une structure obtenue par doublage d'une structure hyperbolique convexe σ_0. Alors, σ_0' ainsi que $\mathcal{I}(\sigma_0') = \overline{\sigma_0'}$ vérifient les hypothèses du théorème 8.

Il existe donc un voisinage suffisamment petit V_0 (resp. $\overline{V_0}$) de σ_0' (resp. de $\overline{\sigma_0'}$) dans $\mathcal{R}(M)$ en restriction auquel l'application Θ' soit un homéomorphisme sur un ouvert $\mathcal{W} \subset [0, 2\pi + \epsilon]^k$, voisinage de $2\Theta(\sigma_0)$. Choisissons un k-uplet $\theta' \in \mathcal{W} \cap [0, \pi]^k$ que nous écrivons sous la forme 2θ et soit $\sigma' \in V_o$ une structure conique telle que $\Theta'(\sigma') = \theta'$.

Quitte à restreindre le voisinage V_0, toutes les représentations dans $\mathcal{I}(V_0)$ sont les holonomies de structures coniques, et donc appartiennent à $\mathcal{C}(DH, \gamma)$. Donc, si $\mathcal{W}$ a été choisi assez petit, la représentation $\mathcal{I}(\sigma')$ appartient au voisinage $\overline{V_0}$ et vérifie: $\Theta'(\overline{\sigma'}) = \theta'$.

Donc d'après l'injectivité de l'application Θ' sur $\overline{V_0}$, on a: $\mathcal{I}(\sigma') = \overline{\sigma'}$.

Affirmation 7.1. *Avec les notations précédentes, la représentation obtenue par restriction de la représentation σ' au sous groupe G_0 est l'holonomie d'une structure hyperbolique convexe dans $\mathcal{C}(H, \gamma)$ d'angles θ'.*

Démonstration. Par construction, la représentation σ' est l'holonomie d'une structure hyperbolique à singularités coniques d'angles $2\theta'$. Comme $\mathcal{I}(\sigma') = \overline{\sigma'}$, pour toute composantes connexe S de $\partial H - \gamma$, la restriction de σ' au sous-groupe $\pi(S)$ est conjuguée dans $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$ à sa conjuguée complexe: c'est donc une représentation fuchsienne. La restriction de σ' à G_0 est une structure convexe sur (H, γ) d'angles (α_i). Toujours puisque $\mathcal{I}(\sigma') = \overline{\sigma'}$, la représentation $\mathcal{I}(\sigma')$ se restreint à G_0 en une structure convexe sur (H, γ) d'angles (α_i). On a donc: $(\alpha_i) = (\theta_i')$. □

Donc l'application Θ est un homéomorphisme local en chaque point de $\mathcal{C}(H, \gamma)$. □

§4. Démonstration du théorème 3.

L'application Θ est un homéomorphisme d'après la proposition 7; elle est propre d'après le théorème 6. C'est donc un revêtement du connexe $\mathcal{H}$.

Nous allons montrer que c'est un revêtement à un seul feuillet, ce qui démontrera le théorème 3. Soit $\sigma = (\rho, \phi) \in \mathcal{C}(H, \gamma)$ une structure hyperbolique convexe telle que $\Theta(\sigma) = \Theta(\sigma_c) = (0, ..., 0)$. Alors, la représentation ρ est une représentation de G_0 dans $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{C})$ qui préserve le lieu parabolique et qui définit par doublage une structure hyperbolique complète sur M. D'après le théorème de rigidité de Mostow ([Mo]), une telle structure est unique à isotopie près. Elle coïncide donc avec la structure obtenue en doublant σ_c; il en est de même pour sa restriction au sous-groupe G_0. On en déduit que les structures convexes σ et σ_c sont égales. Donc, la préimage du point $(0, ..., 0)$ dans $\mathcal{C}(H, \gamma)$ est réduite à un seul point.

Remarque.

Soit $\mathcal{X}(G)$ l'espace des caractères des représentations de G dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{C})$. Considérons la sous-variété définie par l'égalité des carrés des k traces $tr(\rho(\gamma_i))$; la composante irréductible de cette variété qui passe par le point σ_c est une courbe algébrique. Certains points à l'infini de cette courbe correspondent à une suite de dégénérescences dans $\mathcal{C}(H, \gamma)$ "à angle constant". D'après le théorème 3, cet angle est rationnel; en fait, la preuve de ce théorème donne la valeur exacte de cet angle. Soit en effet, m le méridien qui intersecte le moins la multi-courbe γ, disons en r points; alors l'angle limite θ vaut: $\pi - 2\pi/r$. Cette propriété est à rapprocher d'un travail de D. Cooper et al. ([CCGLS]).

References

[A] E. M. Andreev, *On convex polyhedra in Lobachevskii space*, Mah. USSR Sb. **12** (1970), 413–440.

[Bo] F. Bonahon, *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Ann.of Math. **124** (1986), 71–158.

[CEG] R. D. Canary, D. B. A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, London Mathematical Society lectures notes **111** (1987), 3–92.

[CL] A. Casson, D. Long, *Algorithmic compression of surface automorphisms*, Invent. math. (1985), 295–303.

[CCGLS] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long et P. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, Inventiones. math. **118** (1994), 47–84.

[Ch] V. Chuckrow, *On Schottky groups with applications to kleinian groups*, Ann. of Math. **88** (1968), 47–61.

[He] J. Hempel, *3-manifolds*, Annals of Math. Studies **86** (1976).

[Ho] C. Hodgson, *Geometric structures on 3-dimensional manifolds*, prépublication (1987).

[HK] C. Hodgson et S. Kerckhoff, *Rigidity for hyperbolic cone manifolds and hyperbolic Dehn surgery*, prépublication (1993).

[HoR] C. Hodgson et I. Rivin, *A characterization of compact polyhedra in hyperbolic 3-space*, Inventiones math. **111** (1993), 77–113.

[Jo] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics **761** (1979).

[KS] L. Keen et C. Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of punctured tori*, Topology **32** (1993), 719–749.

[Mar] A. Marden, *The geometry of finitely generated kleinian groups*, Ann. of Math. **99** (1974), 383–462.

[Mas] B. Maskit, *Parabolic elements in Kleinian groups*, Ann. of Math **117** (1983), 659–668.

[MS] J. Morgan et P. Shalen, *Degeneration of hyperbolic structures III: actions of 3-manifold groups on trees and Thurston's compactness theorem.*, Ann. of Math. **127** (1988), 457–519.

[Mos] G. D. Mostow, *Strong rigidity for locally symmetric spaces*, Annals of Math. studies **78**.

[O] J. P. Otal, *Courants géodésiques et produits libres*, Thèse d'Etat, Orsay (1989).

[R] I. Rivin, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Topology **32** (1992), 87–92.

[Thu1] W. P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Notes de cours (1977).

[Thu2] W. P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357-381.

[Thu3] W. P. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds II: surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, prépublication 1980.

[Thu4] W. P. Thurston, *Hyperbolic structures on 3-manifolds III: deformations of 3-manifolds with incompressible boundary*, prépublication 1986.

[Z] Qing Zhou, *3-dimensional geometric cone structures*, Thèse UCLA (1989).