# О КОММУТАНТАХ ГРУПП АРТИНА

С. Ю. Оревков

В [1; §2] Е. А. Горин и В. Я. Лин нашли конечное копредставление для коммутанта группы кос, а в [2] В. М. Зинде, частично используя вычисления из [1], нашла копредставления (не все из них конечные) для коммутантов остальных групп Артина (в современной терминологии — групп Артина – Титса сферического типа). Как и в [2], мы будем обозначать группы Артина типа $A_n$, $B_n, \dots$ через $A_n$, $B_n, \dots$, а коммутант группы $G$ — через $G'$. В п. 1 мы даем отсутствующее в [2] конечное копредствление для $H_3'$. Это частный случай копредставления (см. предложение 1) группы $\ker(e : G \to \mathbb{Z})$, где $G$ — однородная гарсайдова группа (см. [3, 4]), а $e$ — гомоморфизм, отображающий все атомы в 1. В п. 2 мы исправляем две неточности в [2] для групп серии $B$ и даем наброски отсутствующих в [2] доказательств.

После исправлений и дополнений к [2], сделанных в настоящей заметке, ситуация с конечной порожденностью/определенностью коммутантов групп Артина такова: $I_2(2k)'$, $k \ge 2$ (в том числе $B_2'$ и $G_2'$) — свободные группы со счетным множеством образующих; группы $B_3'$ и $F_4'$ конечно порождены, но вопрос об их конечной определенности открыт; коммутанты остальных неприводимых групп Артина ($B_n'$ при $n \ge 4$, $I_2(2k+1)'$, $A_n'$, $D_n'$, $E_n'$, $H_n'$) конечно определены.

В п. 3 мы обсуждаем вопрос о существовании эпиморфизмов коммутантов групп Артина на нетривиальные свободные группы. Группы $I_2(p)'$ при $p \ge 3$ (включая $A_2'$, $B_2'$, $H_2'$ и $G_2'$) сами свободны. Каждая из групп $A_3'$, $B_3'$, $B_4'$, $D_4'$ эпиморфно отображается на свободную группу с двумя образующими. Для остальных неприводимых групп Артина $G$ имеет место $G'' = G'$, т. е. $G'$ не имеет эпиморфизмов ни на какую нетривиальную абелеву группу, а значит, и ни на какую нетривиальную свободную.

**1.** Пусть $G$ — гарсайдова группа конечного типа, т. е. группа частных гарсайдова моноида $P$ с элементом Гарсайда $\Delta$ и (конечным) множеством атомов $A$ (см. определения в [3]). Тогда $\tau(P) = P$ и $\tau(A) = A$, где $\tau(x) = \Delta^{-1}x\Delta$. Предположим, что существует гомоморфизм $e : G \to \mathbb{Z}$, такой что $e(A) = \{1\}$ — в этом случае $G$ называется *однородной* гарсайдовой группой (таковы, например, группы Артина). Для $p \in P$ обозначим $e(p)$ через $|p|$. Пусть $K = \ker e$. Если $G$ — группа Артина, для которой $G/G' = \mathbb{Z}$ (т.е. $A_n$, $D_n$, $E_n$, $H_n$ или $I_2(2k+1)$), то $K = G'$.

Тот факт, что группа $K$ конечно определена, очевиден. Действительно, пусть $m = |\Delta|$. Тогда $K$ задается образующими $s_p = \Delta^{-1}p$, где $p \in P$, $|p| = m$, и соотношениями $s_\Delta = 1$ и $s_p s_q = s_{p'} s_{q'}$ при $p\tau(q) = p'\tau(q')$. Это копредставление очень велико. Например, для $G = H_3$ в нем более тысячи образующих и более миллиона соотношений. Однако, комбинируя гарсайдовский подход с методом Рейдемейстера – Шрейера, можно получить более компактное копредставление. Пусть

$\langle a, b, \dots \mid R = R', S = S', \dots \rangle$ — копредставление моноида $P$, такое что $\{a, b, \dots\} = A$ — множество атомов (тогда однородность влечет $|R| = |R'|$, $|S| = |S'|, \dots$). Выберем $\{a^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в качестве системы шрейеровских представителей смежных классов (все нижеследующее легко переносится на любой другой выбор). Тогда $K$ задается образующими $\{a_k, b_k, \dots\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и соотношениями $a_k = 1$, $R_k = R'_k$, $S_k = S'_k, \dots$, $k \in \mathbb{Z}$, где для слова $T = uvw\dots$ через $T_k$ обозначено слово $u_k v_{k+1} w_{k+2} \dots$ (это копредставление Рейдемейстера – Шрейера).

**Предложение 1.** *Группа $K$ задается образующими $a_k, b_k, \dots$ $(0 \le k \le m + l - 2)$, где $l = \max(|R|, |S|, \dots)$, и соотношениями $a_k = 1$ $(0 \le k \le m + l - 2)$, $U_k = U'_k$ $(0 \le k \le m + l - |U| - 1, U = R, S, \dots)$.*

*Доказательство.* Фиксируем некоторое положительное слово, представляющее $\Delta$ (мы будем его тоже обозначать через $\Delta$). Поскольку $\Delta$ — элемент Гарсайда, можно выбрать слово вида $\Gamma a$. Добавим к соотношениям Рейдемейстера – Шрейера соотношения $\mathfrak{R}_k : \Delta_k \tau(x)_{k+m} = x_k \Delta_{k+1}$, $x = a, b, \dots$; $k \in \mathbb{Z}$. С их помощью любое соотношение вида $U_{k+m} = U'_{k+m}$, $U \in \{R, S, \dots\}$, можно свести к соотношениям вида $W_j = W'_j$, где $W \in \{R, S, \dots\}$, $k \le j \le k + |U| - |W|$. Действительно, заменяя каждую букву $x_{j+m}$ в $U_{k+m}$ и в $U'_{k+m}$ при помощи $\mathfrak{R}_j$ на $(\Delta_j)^{-1}\tau^{-1}(x)_j\Delta_{j+1}$, мы получим $(\Delta_k)^{-1}V_k\Delta_{k+|U|} = (\Delta_k)^{-1}V'_k\Delta_{k+|U|}$, где $\tau(V) = U$ и $\tau(V') = U'$. Поскольку тождество $V = V'$ выполнено в моноиде $P$, то $V'$ получается из $V$ заменами подслов $W \leftrightarrow W'$, $W \in \{R, S, \dots\}$, а значит, $V'_k$ из $V_k$ получается заменами $W_j \leftrightarrow W'_j$, где $k \le j \le k + |U| - |W|$. Так можно исключить все соотношения вида $U_k = U'_k$ с индексами, бо́льшими, чем требуется. В силу соотношения $a_{k+m} = 1$, можно $\mathfrak{R}_k$ заменить на соотношение $\Delta_k\tau(x)_{k+m} = x_k\Gamma_{k+1}$, которое выражает $\tau(x)_{k+m}$ через образующие с меньшими индексами.

Аналогично, выбрав слово для $\Delta$ в виде $a\Gamma$, можно исключить образующие и соотношения с отрицательными индексами. $\square$

В частности, $H'_3$ задается образующими $a = \sigma_1\sigma_3^{-1}$, $p_k = \sigma_3^k\sigma_2\sigma_3^{-(k+1)}$ $(0 \le k \le 18)$ и соотношениями $p_kp_{k+2}p_{k+4} = p_{k+1}p_{k+3}$ $(0 \le k \le 14)$, $p_kap_{k+2} = ap_{k+1}a$ $(0 \le k \le 16)$.

**2.** *Группа $B'_3$* (в [2] ошибочно утверждается, что эта группа свободна). Если выбрать $\{\sigma_1^k\sigma_3^j\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ в качестве шрейеровской системы представителей, то метод Рейдемейстера – Шрейера дает образующие $p_{j,k} = \sigma_3^j\sigma_1^k\sigma_2\sigma_1^{-(k+1)}\sigma_3^{-j}$ и соотношения (1) $p_{j,k}p_{j,k+2} = p_{j,k+1}$ и (2) $p_{j,k}p_{j+1,k+1} = p_{j+1,k}p_{j+2,k+1}$ $(j, k \in \mathbb{Z})$. Введем новые соотношения (3) $[p_{j,k}, p_{j+1,k}^{-1}] = [p_{j,k+1}, p_{j+1,k+1}^{-1}]$. Пользуясь соотношениями $(1)_{j,k-2}$, $(1)_{j,k-1}$, $(1)_{j+1,k}$, $(1)_{j+1,k+1}$ и (2), несложно доказать эквивалентности $(1)_{j-1,k-2} \Leftrightarrow (3)_{j,k} \Leftrightarrow (1)_{j+2,k+1}$. Поэтому $B'_3$ задается образующими $p_{j,k}$ и соотношениями $(1)_{j=0,1}$, (2) и (3). С помощью $(1)_{j=0,1}$ и (2) все образующие можно выразить через $p_k = p_{0,k}$, $q_k = p_{1,k}$, $k = 0, 1$, и тогда останутся образующие $p_0$, $p_1$, $q_0$, $q_1$ и соотношения, полученные из (3) при всех $j, k \in \mathbb{Z}$.

*Группы $B'_n$, $n \ge 5$.* Похоже, что в результате опечатки в [2] пропущены соотношения $(*)$ $p_0x = xp_1$, $p_1x = xp_0^{-1}p_1$ для $x = q_4, \dots, q_{n-2}, t_0, t_1$. Если их добавить, то доказать, что копредставление задает $B'_n$, можно так: преобразованием Титце образующую $d$ и содержащие ее соотношения заменим на образующую $t_2$ и соотношения

$t_0t_1 = t_1t_2$, $t_2q_{n-2}t_2 = q_{n-2}t_2q_{n-2}$. Используя [4; лемма 2.9], добавим образующие $t_i$ ($i \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,2\}$) и соотношения $t_{t-1}t_i = t_it_{i+1}$, $t_iq_{n-2}t_i = q_{n-2}t_iq_{n-2}$, $t_iq_j = q_jt_i$ и $(*)$ для $x = t_i$ ($i \in \mathbb{Z}, 3 \le j \le n-3$). В результате мы получим копредставление, в которое преобразуется копредставление Рейдемейстера – Шрейера группы $B'_n$ (относительно шрейеровской системы представителей $\{\sigma_1^k\sigma_n^j\}$) способом, описанным в [1; §2].

*Группа* $B'_4$. Доказательство того, что $B'_4$ задается копредставлением из [2], почти такое же как и для $B'_n$, $n \ge 5$, только сначала к копредставлению Рейдемейстера – Шрейера надо применить лемму 2.9 из [4] (должным образом видоизмененную), а затем преобразование из [1].

*Группа* $D'_4$. При выборе $\{\sigma_3^k\}$ в качестве шрейеровской системы представителей (предполагается, что $\sigma_2$ отвечает центральной вершине графа Коксетера) метод Горина – Лина [1; §2] дает копредставление с образующими $p_0 = \sigma_2\sigma_3^{-1}$, $p_1 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3^{-2}$, $q_i = \sigma_i\sigma_3^{-1}$, $d_i = \sigma_2\sigma_i\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$ $(i = 1,4)$ и соотношениями $q_1q_4 = q_4q_1$ и

$$p_0q_ip_0^{-1} = d_i,\ p_0d_ip_0^{-1} = d_i^2q_i^{-1}d_i,\ p_1q_ip_1^{-1} = q_i^{-1}d_i,\ p_1d_ip_1^{-1} = (q_i^{-1}d_i)^3q_i^{-2}d_i \quad (i = 1,4).$$

Выражая друг через друга эти образующие и образующие из [2] по формулам $a_0 = q_1$, $a_1 = d_1$, $b_0 = q_4$, $b_1 = d_4$, $c_0 = p_0^{-1}$, $c_1 = p_0p_1^{-1}p_0^{-1}$, $p_0 = c_0^{-1}$, $p_1 = c_0c_1^{-1}c_0^{-1}$, легко проверить эквивалентность этих двух копредставлений.

Остальные копредставления в [2] получаются либо непосредственно методом Рейдемейстера – Шрейера, либо несложной адаптацией копредставления из [1] группы $A'_n$.

*Замечание.* Найденное в [2] копредставление для $D'_4$ при отождествлении $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, отвечающем стандартному эпиморфизму $D_4 \to A_3$, дает следующее копредставление группы $A'_3$. Образующие: $a_0 = \sigma_3\sigma_1^{-1}$, $a_1 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2$, $c_0 = \sigma_1\sigma_2^{-1}$, $c_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-2}$. Соотношения: $c_0^{-1}a_0c_0 = a_1$, $c_0^{-1}a_1c_0 = a_1^2a_0^{-1}a_1$, $c_1^{-1}a_0c_1 = a_0a_1^{-1}$, $c_1^{-1}a_1c_1 = a_1a_0^{-1}a_1$. Возможно, для некоторых задач это копредставление удобнее копредставления Горина – Лина (во всяком случае оно короче).

**3.** Согласно [1], у группы $A'_3$ есть нормальный ряд со свободными факторами, а именно, подгруппа $T$ группы $A'_3$, порожденная элементами $\sigma_3\sigma_1^{-1}$ и $\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$, свободно ими порождена, и фактор-группа $A'_3/T$ — тоже свободная группа с двумя образующими $\sigma_2\sigma_1^{-1}T$ и $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-2}T$.

В [2; теорема 2] утверждается, что группы $B'_4$ и $D'_4$ обладают нормальными рядами со свободными факторами. Как мне сообщила В. М. Зинде, о нормальных рядах было сказано по ошибке — имелось в виду существование эпиморфизма на нетривиальную свободную группу. Эпиморфизмы групп $B'_4$ и $D'_4$ на свободную группу с двумя образующими получаются добавлением соотношений $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 1$ к копредставлениям из [2].

Группа $B'_3$ также эпиморфно отображается на свободную группу с двумя образующими. Для этого к соотношениям из п. 2 надо добавить соотношения $p_{j,k} = p_{j+1,k}$, $j,k \in \mathbb{Z}$. В результате получится свободная группа с образующими $p_0 = q_0$ и $p_1 = q_1$.

Несложно убедиться в том, что ядра определенных выше эпиморфизмов групп $B'_3$, $B'_4$, $D'_4$ на свободную группу не свободны.

## Список литературы

1. Е. А. Горин, В. Я. Лин, *Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос*, Мат. сборник **78(120):4** (1969), 579–610.
2. В. М. Зинде, *Коммутанты групп Артина*, УМН **30:5** (1975), 207–208.
3. P. Dehornoy, *Groupes de Garside*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **35** (2002), 267-306.
4. R. Corran, M. Picantin, *A new Garside structure for braid groups of type* $(e, e, r)$, J. London Math. Soc. (to appear); arxiv:0901.0645v2.

Математический институт РАН им. В. А. Стеклова. 119991 Москва, ул. Губкина, 8

Университет им. Поля Сабатье, Тулуза, Франция