

# АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ПРИМИТИВНЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ШИРИНЫ 4 И 5

С. Ю. ОРЕВКОВ

Аннотация. Пусть  $f(m, n)$  – число примитивных целочисленных триангуляций прямоугольника  $m \times n$ . Мы выражаем пределы  $\lim_n f(m, n)^{1/n}$  для  $m = 4$  и  $m = 5$  в терминах некоторых систем интегральных уравнений Фредгольма на производящие функции (случай  $m \leq 3$  был сделан в предыдущей статье). Решая численно эти уравнения, мы находим приближенные значения пределов с довольно высокой точностью.

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Настоящая статья продолжает работу [7]. *Целочисленная триангуляция* многоугольника в  $\mathbb{R}^2$  – это триангуляция с вершинами в  $\mathbb{Z}^2$ . Целочисленная триангуляция называется *примитивной* (или *унимодальной*), если каждый треугольник примитивен, т.е. имеет минимально возможную площадь, равную  $1/2$ . Обозначим число примитивных триангуляций прямоугольника  $m \times n$  через  $f(m, n)$  и положим

$$c_{m,n} = \frac{\log_2 f(m, n)}{mn}, \quad c_m = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{m,n}, \quad c = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,n}.$$

Существование пределов доказано в [3, предл. 3.6]. В [3] число  $c_{m,n}$  названо *емкостью* прямоугольника  $m \times n$ . Некоторые оценки чисел  $c_m$  и  $c$  получены в [1, 3, 5–7, 11] (см. подробнее в [7]). В частности, лучшей известной верхней оценкой для  $c$  является оценка  $c \leq 4 \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 2.777$ ; см. [11].

Легко показать, что  $f(1, n) = \binom{2n}{n}$ , следовательно,  $c_1 = 2$ ; см. [3, §2.1]. Точное значение  $c_2 = \frac{1}{2} \log_2 \frac{611+\sqrt{73}}{36}$  и 360 десятичных знаков  $c_3$  найдены в [7]. Здесь, используя тот же подход, мы вычисляем 65 знаков  $c_4$  и 15 знаков  $c_5$ , а именно,

$$\lim_n f(4, n)^{\frac{1}{4n}} = 4.29876675750096911161795913111746998157492178224986284763745615251,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(5, n)^{\frac{1}{5n}} = 4.34096161931753,$$

и, следовательно,

$$c_4 = 2.10392283469307790885509194765035290599163301991475089470275817980,$$

$$c \geq c_5 = 2.11801466703561.$$

В настоящее время это лучшая доказанная нижняя оценка для  $c$ .

Как и в [7], мы выражаем  $c_4$  (см. §2) и  $c_5$  (см. §3) в терминах решений систем интегральных уравнений и находим приближенные значения чисел  $c_4$  и  $c_5$ , решая системы обычных линейных уравнений, полученных заменой интегралов римановыми суммами. Однако вычисления сложнее, чем в [7].

Другое отличие от [7] состоит в следующем. В [7] мы свели задачу к одному классическому уравнению Фредгольма первого рода с аналитическим ядром, поэтому благодаря компактности интегрального оператора было легко доказать единственность решения и экспоненциальную скорость сходимости дискретизаций. В настоящей статье возникающие интегральные операторы некомпактны – неизвестные функции зависят от двух (для  $c_4$ ) или трех (для  $c_5$ ) переменных, в то время как операторы содержат интегрирование

только по одной переменной (т.е. интегральное ядро включает в себя дельта-функцию). В п. 2.6 обсуждается единственность решений и сходимост дискретизаций для таких систем интегральных уравнений.

В §4 мы приводим два простых наблюдения, позволяющих значительно улучшить сходимост. Они играют решающую роль в вычислении  $c_4$  и  $c_5$  со столь высокой точностью. Они также позволили вычислить  $c_3$  до 1100 знаков. В §5 мы приводим новые вычисленные точные значения чисел  $f(m, n)$ , а также эмпирические оценки для  $c_6, c_7$  и для субэкспоненциальных множителей асимптотики, полученные из найденных точных значений  $f(m, n)$  методом, предложенным С. К. Ландо и А. К. Звонкиным в [4, §6]. В §6 дана асимптотическая нижняя оценка числа всех (не только примитивных) целочисленных триангуляций.

**Благодарности.** Я признателен В. И. Богачеву и С. К. Ландо за полезные обсуждения.

## 2. Полосы ширины 4

В данном разделе мы выражаем  $c_4$  через решение некоторой системы интегральных уравнений на производящие функции. Ее численное решение позволяет найти  $c_4$  с точностью до 65 десятичных знаков.

### 2.1. Сведение к трапециям (понижающее размерность задачи). (Ср. [7, §4.1].)

Для  $a, e \geq 0$ , таких, что сумма  $a + e$  четна, обозначим через  $j_{a,e}^*$  число примитивных триангуляций трапеции  $T_4(a, e)$  с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(1+e, 4)$ ,  $(a, 0)$ . Положим  $j_{0,0}^* = 1$  и  $j_{a,e}^* = 0$ , если сумма  $a + e$  нечетна. Рассмотрим производящую функцию

$$J^*(x) = \sum_n j_n^* x^n = \sum_{a,e \geq 0} j_{a,e}^* x^{a+e} = 1 + 6x^2 + 750x^4 + 189121x^6 + \dots$$

Пусть  $j_{a,e}$  – число тех примитивных триангуляций трапеции  $T_4(a, e)$ , у которых нет внутреннего ребра вида  $[(k, 0), (l, 4)]$  (по соглашению,  $j_{0,0} = 0$ ), и пусть

$$J(x) = \sum_n j_n x^n = \sum_{a,e \geq 0} j_{a,e} x^{a+e} = 6x^2 + 714x^4 + 180337x^6 + \dots$$

Тогда имеют место равенства

$$J^*(x) = \frac{1}{1 - J(x)} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(4, n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (j_{2n}^*)^{1/n}$$

(см. [7, §4.1] и [7, лемма 3.1] соответственно). Следовательно,

$$c_4 = -\frac{1}{2} \log_2 \beta_4, \tag{2.1}$$

где  $\beta_4$  – первый вещественный корень уравнения  $J(x) = 1$ .

**2.2. Рекуррентные соотношения.** Введем обозначения, как в [7, §4]. Для целых  $a, b, c, d, e$ , таких, что  $a \geq -1$  и  $b, c, d, e \geq 0$ , обозначим через  $f_{a,b,c,d,e}$  число примитивных триангуляций многоугольника  $[(0, a), (1, b), (2, c), (3, d), (4, e), (4, 0), (0, -1)]$  (см. рис. 1) без внутренних ребер вида  $[(0, y_1), (4, y_2)]$  (ребра *от края до края*). Следуя [3], будем называть такие многоугольники *фигурами* (shapes). Аналогично определим  $g, h, j$  с верхними и нижними индексами в соответствии с рис. 1. Например, если  $a \geq -1$ ,  $\min(c, d, e) \geq 0$ , и  $c - a \equiv 1 \pmod{2}$ , то  $g_{a,c,d,e}^{(1)}$  есть число примитивных триангуляций без ребер от края до края для фигуры  $[(0, a), (2, c), (3, d), (4, e), (4, 0), (0, -1)]$ . Если указанные неравенства или сравнения не выполнены, соответствующие числа положим равными нулю. По соглашению,  $j_{-1,0}^{(1)} = 0$ ; в этом случае фигура вырождается в отрезок  $[(0, -1), (4, 0)]$ .

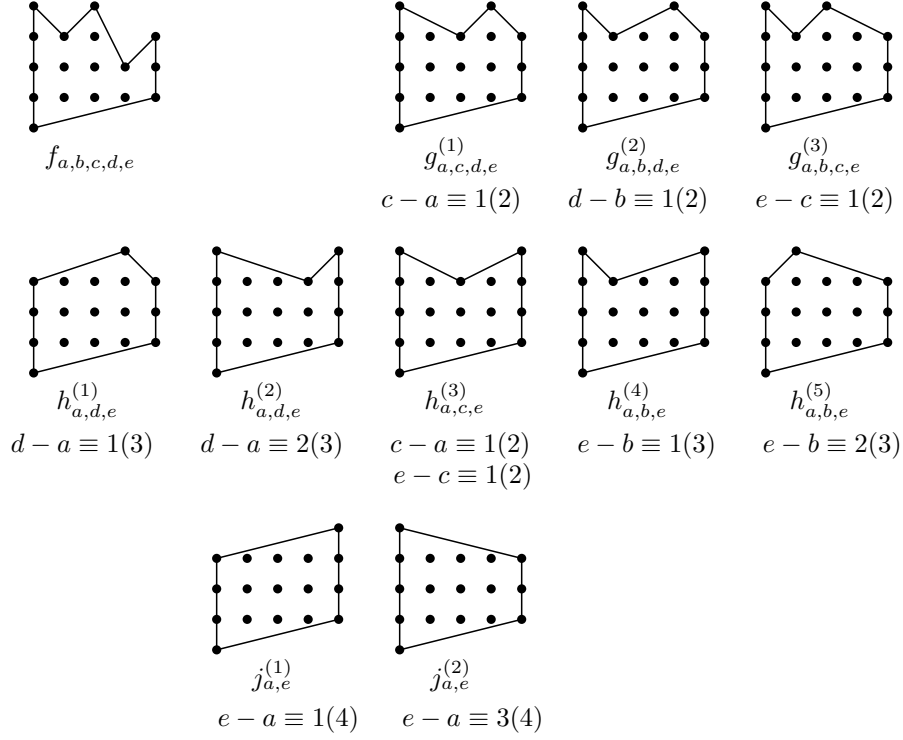


Рис. 1

Определим производящие функции для введенных чисел

$$F(x, y, z, w, v) = \sum_{a,b,c,d,e} f_{a,b,c,d,e} x^a y^b z^c w^d v^e, \quad J_k(x, v) = \sum_{a,e} j_{a,e}^{(k)} x^a v^e \quad (k = 1, 2),$$

$$G_1(x, z, w, v) = \sum_{a,c,d,e} g_{a,c,d,e}^{(1)} x^a z^c w^d v^e, \quad G_2(x, y, w, v) = \sum_{a,b,d,e} g_{a,b,d,e}^{(2)} x^a y^b w^d v^e,$$

$$G_3(x, y, z, v) = \sum_{a,b,c,e} g_{a,b,c,e}^{(3)} x^a y^b z^c v^e, \quad H_3(x, z, v) = \sum_{a,c,e} h_{a,c,e}^{(3)} x^a z^c v^e,$$

$$H_k(x, w, v) = \sum_{a,d,e} h_{a,d,e}^{(k)} x^a w^d v^e \quad (k = 1, 2), \quad H_k(x, y, v) = \sum_{a,b,e} h_{a,b,e}^{(k)} x^a y^b v^e \quad (k = 4, 5)$$

и их симметризации

$$\tilde{F}(x, y, z, w, v) = F(x, y, z, w, v) + F(v, w, z, y, x),$$

$$\tilde{G}_1(x, z, w, v) = G_1(x, z, w, v) + G_3(v, w, z, x),$$

$$\tilde{G}_2(x, y, w, v) = G_2(x, y, w, v) + G_2(v, w, y, x),$$

$$\tilde{H}_k(x, w, v) = H_k(x, w, v) + H_{6-k}(v, w, x), \quad k = 1, 2,$$

$$\tilde{H}_3(x, z, v) = H_3(x, z, v) + H_3(v, z, x),$$

$$\tilde{J}_1(x, v) = J_1(x, v) + J_2(v, x).$$

Мы будем обозначать через  $\mathbf{cf}_{\mathbf{m}} \mathcal{F}$  коэффициент при мономе  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(x_1, x_2, \dots)$  ряда Лорана  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots)$ . С введенными обозначениями рекуррентные соотношения из [7, лемма 2.2] принимают следующий вид (ср. с [7, §4.2]; мы опускаем промежуточный шаг, состоящий в выписывании соотношений между несимметризованными производящими функциями):

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, y, z, w, v)Q(x, y, z, w, v) &= y^{1/2}\tilde{G}_1(xy^{1/2}, y^{1/2}z, w, v)(1-w-v) \\ &\quad + z^{1/2}\tilde{G}_2(x, yz^{1/2}, z^{1/2}w, v)(1-x)(1-v) \\ &\quad + w^{1/2}\tilde{G}_1(vw^{1/2}, w^{1/2}z, y, x)(1-y-x) \\ &\quad - y^{1/2}w^{1/2}\tilde{H}_3(xy^{1/2}, y^{1/2}zw^{1/2}, w^{1/2}v), \end{aligned}$$

где  $Q(x, y, z, w, v) = 1 - x - y - z - w - v + xz + xw + xv + yw + yv + zv - xzv$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(x, z, w, v)(1-w-v) &= \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{F}\left(\frac{x}{\xi}, \xi^2, \frac{z}{\xi}, w, v\right)(1-w-v) \\ &\quad - w^{1/2} \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(vw^{1/2}, \frac{w^{1/2}z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right) \\ &\quad + z^{1/3}(1-v)\tilde{H}_1(xz^{1/3}, z^{2/3}w, v) \\ &\quad + w^{1/2}\tilde{H}_3(x, zw^{1/2}, w^{1/2}v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(x, y, w, v)(1-x)(1-v) &= \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{F}\left(x, \frac{y}{\xi}, \xi^2, \frac{w}{\xi}, v\right)(1-x)(1-v) \\ &\quad + y^{1/3}(1-v)\tilde{H}_2(xy^{2/3}, y^{1/3}w, v) \\ &\quad + w^{1/3}(1-x)\tilde{H}_2(vw^{2/3}, w^{1/3}y, x), \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_1(x, w, v)(1-v) = \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_2\left(\frac{x}{\xi^2}, \xi^3, \frac{w}{\xi}, v\right)(1-v) + \frac{1}{x},$$

$$\tilde{H}_2(x, w, v) = \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(\frac{x}{\xi}, \xi^3, \frac{w}{\xi^2}, v\right),$$

$$\tilde{H}_3(x, z, v) = \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(x, \frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{v}{\xi}\right) + \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(v, \frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right) - \mathbf{cf}_{\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}} \tilde{F}\left(\frac{x}{\xi_1}, \xi_1^2, \frac{z}{\xi_1\xi_2}, \xi_2^2, \frac{v}{\xi_2}\right),$$

$$\tilde{J}_1(x, v) = \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_2\left(\frac{v}{\xi}, \xi^4, \frac{x}{\xi^3}\right).$$

Заметим (см. определение функции  $J(x)$  в п. 2.1), что

$$J(x) = x\tilde{J}_1(x, x). \quad (2.2)$$

**2.3. Замена переменных.** Положим

$$\begin{aligned} f(t, s, u) &= \tilde{F}\left(\frac{x}{t}, \frac{x^2t^2}{s}, \frac{x^2s^2}{tu}, \frac{x^2u^2}{s}, \frac{x}{u}\right), & q(t, s, u) &= Q\left(\frac{x}{t}, \frac{x^2t^2}{s}, \frac{x^2s^2}{tu}, \frac{x^2u^2}{s}, \frac{x}{u}\right), \\ g_1(s, u) &= \frac{1}{s^{1/2}} \tilde{G}_1\left(\frac{x^2}{s^{1/2}}, \frac{x^3s^{3/2}}{u}, \frac{x^2u^2}{s}, \frac{x}{u}\right), & g_2(t, u) &= \frac{1}{(tu)^{1/2}} \tilde{G}_2\left(\frac{x}{t}, \frac{x^3t^{3/2}}{u^{1/2}}, \frac{x^3u^{3/2}}{t^{1/2}}, \frac{x}{u}\right), \\ h_k(u) &= \frac{1}{u^{k/3}} \tilde{H}_k\left(\frac{x^3}{u^{1/3}}, x^4u^{4/3}, \frac{x}{u}\right) \quad (k=1,2), & h_3(s) &= \tilde{H}_3\left(\frac{x^2}{s^{1/2}}, x^4s, \frac{x^2}{s^{1/2}}\right), \\ j_1(x) &= \tilde{J}_1(x^4, x^4), & p(s, u) &= 1 - \frac{x^2u^2}{s} - \frac{x}{u}, & r(t, u) &= \left(1 - \frac{x}{t}\right)\left(1 - \frac{x}{u}\right). \end{aligned}$$

Ряды Лорана  $f, g_k, h_k, j_1$  имеют следующий комбинаторный смысл. Пусть  $S$  – фигура, дающая вклад в коэффициент при мономе  $\mathbf{m}$  одного из этих рядов. Тогда степень, в которой  $x$  входит в  $\mathbf{m}$ , равна  $2 \int_0^4 \varphi(x) dx$ , где  $y = \varphi(x)$  – уравнение верхней части границы фигуры  $S$ . Переменные  $t, s, u$  отвечают вертикальным прямым  $x = 1, x = 2, x = 3$  соответственно. Если  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  – три последовательные вершины на верхней части границы фигуры  $S$ , то степень переменной, отвечающей вертикальной прямой  $x = x_1$ , равна целой части разности наклонов прилегающих отрезков, т.е. равна

$$\left\lfloor \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right\rfloor.$$

В частности,  $\mathbf{m}$  и сравнения на рис. 1 однозначно определяют верхнюю границу  $S$  с точностью до автоморфизма решетки  $\mathbb{Z}^2$  вида  $(x, y) \mapsto (x, y + ax + b)$ . Например, фигуры для  $f_{3,2,3,1,2}$  и  $g_{3,2,3,2}^{(1)}$ , изображенные на рис. 1, дают вклад в коэффициенты мономов  $x^{17}t^{-1}s^3u^{-3}$  и  $x^{20}s^{-2}u^2$  рядов  $f$  и  $g_1$  соответственно.

Из вышесказанного следует, что  $f, g_k, h_k, j_1$  – элементы кольца

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}, u^{\pm 1}]((x))$$

формальных степенных рядов от  $x$ , коэффициенты которых являются многочленами Лорана от  $t, s, u$ . Деление таких рядов мы будем понимать как деление в этом кольце.

Применяя соотношения из п. 2.2, получаем

$$\begin{aligned} f(t, s, u) q(t, s, u) &= \frac{xt}{s^{1/2}} \tilde{G}_1 \left( \frac{x}{t} \frac{xt}{s^{1/2}}, \frac{xt}{s^{1/2}} \frac{x^2 s^2}{tu}, \frac{x^2 u^2}{s}, \frac{x}{u} \right) p(s, u) \\ &+ \frac{xs}{(tu)^{1/2}} \tilde{G}_2 \left( \frac{x}{t}, \frac{x^2 t^2}{s} \frac{xs}{(tu)^{1/2}}, \frac{xs}{(tu)^{1/2}} \frac{x^2 u^2}{s}, \frac{x}{u} \right) r(t, u) \\ &+ \frac{xu}{s^{1/2}} \tilde{G}_1 \left( \frac{x}{u} \frac{xu}{s^{1/2}}, \frac{xu}{s^{1/2}} \frac{x^2 s^2}{tu}, \frac{x^2 t^2}{s}, \frac{x}{t} \right) p(s, t) \\ &- \frac{xt}{s^{1/2}} \frac{xu}{s^{1/2}} \tilde{H}_3 \left( \frac{x}{t} \frac{xt}{s^{1/2}}, \frac{xt}{s^{1/2}} \frac{x^2 s^2}{tu} \frac{xu}{s^{1/2}}, \frac{xu}{s^{1/2}} \frac{x}{u} \right). \end{aligned}$$

Для любого ряда Лорана  $\mathcal{F}(\xi, x_1, x_2, \dots)$ , монома  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(x_1, x_2, \dots)$  и новой переменной  $t$  имеет место тождество (ср. [7, уравнение (9)])

$$\mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \mathcal{F}(\xi, x_1, x_2, \dots) = \mathbf{m} \mathbf{cf}_{t^{-1}} t^{\alpha-1} \mathcal{F}(t^\alpha \mathbf{m}, x_1, x_2, \dots). \quad (2.3)$$

Используя (2.3) и подстановки  $\xi = xt/s^{1/2}$  (в  $g_1$ ),  $\xi = xs/(tu)^{1/2}$  (в  $g_2$ ),  $\xi = xt^{1/2}/u^{1/6}$  (в  $h_1$ ),  $\xi = xs^{1/2}/u^{1/3}$  (в  $h_2$ ),  $\xi_1 = xt/s^{1/2}$ ,  $\xi = \xi_2 = xu/s^{1/2}$  (в  $h_3$ ) и  $\xi = xu^{1/3}$  (в  $j_1$ ), получаем

$$\begin{aligned} g_1(s, u) p(s, u) &= \frac{1}{s^{1/2}} \left\{ p(s, u) \frac{x}{s^{1/2}} \mathbf{cf}_{t^{-1}} \tilde{F} \left( \frac{x^2}{s^{1/2}} \frac{s^{1/2}}{xt}, \frac{x^2 t^2}{s}, \frac{s^{1/2}}{xt} \frac{x^3 s^{3/2}}{u}, \frac{x^2 u^2}{s}, \frac{x}{u} \right) \right. \\ &- \frac{xu}{s^{1/2}} \frac{x}{s^{1/2}} \mathbf{cf}_{t^{-1}} \tilde{G}_1 \left( \frac{x}{u} \frac{xu}{s^{1/2}}, \frac{xu}{s^{1/2}} \frac{x^3 s^{3/2}}{u} \frac{s^{1/2}}{xt}, \frac{x^2 t^2}{s}, \frac{s^{1/2}}{xt} \frac{x^2}{s^{1/2}} \right) \\ &+ \frac{x s^{1/2}}{u^{1/3}} \left( 1 - \frac{x}{u} \right) \tilde{H}_1 \left( \frac{x^2}{s^{1/2}} \frac{x s^{1/2}}{u^{1/3}}, \frac{x^2 s}{u^{2/3}} \frac{x^2 u^2}{s}, \frac{x}{u} \right) \\ &\left. + \frac{xu}{s^{1/2}} \tilde{H}_3 \left( \frac{x^2}{s^{1/2}}, \frac{x^3 s^{3/2}}{u} \frac{xu}{s^{1/2}}, \frac{xu}{s^{1/2}} \frac{x}{u} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$g_2(t, u)r(t, u) = \frac{1}{(tu)^{1/2}} \left\{ r(t, u) \frac{x}{(tu)^{1/2}} \mathbf{cf}_{s^{-1}} \tilde{F} \left( \frac{x}{t}, \frac{x^3 t^{3/2}}{u^{1/2}} \frac{(tu)^{1/2}}{xs}, \frac{x^2 s^2}{tu}, \frac{(tu)^{1/2}}{xs} \frac{x^3 u^{3/2}}{t^{1/2}}, \frac{x}{u} \right) \right. \\ \left. + \frac{xt^{1/2}}{u^{1/6}} \left( 1 - \frac{x}{u} \right) \tilde{H}_2 \left( \frac{x}{t} \frac{x^2 t}{u^{1/3}}, \frac{xt^{1/2}}{u^{1/6}} \frac{x^3 u^{3/2}}{t^{1/2}}, \frac{x}{u} \right) \right. \\ \left. + \frac{xu^{1/2}}{t^{1/6}} \left( 1 - \frac{x}{t} \right) \tilde{H}_2 \left( \frac{x}{u} \frac{x^2 u}{t^{1/3}}, \frac{xu^{1/2}}{t^{1/6}} \frac{x^3 t^{3/2}}{u^{1/2}}, \frac{x}{t} \right) \right\},$$

$$h_1(u) = \frac{1}{u^{1/3}} \left\{ \frac{x}{u^{1/6}} \mathbf{cf}_{t^{-1}} \frac{1}{t^{1/2}} \tilde{G}_2 \left( \frac{x^3}{u^{1/3}} \frac{u^{1/3}}{x^2 t}, \frac{x^3 t^{1/3}}{u^{1/2}}, \frac{u^{1/6}}{xt^{1/2}} x^4 u^{4/3}, \frac{x}{u} \right) + \frac{u^{1/3}}{x^3(1-x/u)} \right\},$$

$$h_2(u) = \frac{1}{u^{2/3}} \left\{ \frac{x}{u^{1/3}} \mathbf{cf}_{s^{-1}} \frac{1}{s^{1/2}} \tilde{G}_1 \left( \frac{x^3}{u^{1/3}} \frac{u^{1/3}}{xs^{1/2}}, \frac{x^3 s^{3/2}}{u}, \frac{u^{2/3}}{x^2 s} x^4 u^{4/3}, \frac{x}{u} \right) \right\},$$

$$h_3(s) = \frac{2x}{s^{1/2}} \mathbf{cf}_{u^{-1}} \tilde{G}_1 \left( \frac{x^2}{s^{1/2}}, x^4 s \frac{s^{1/2}}{xu}, \frac{x^2 u^2}{s}, \frac{s^{1/2}}{xu} \frac{x^2}{s^{1/2}} \right) \\ - \frac{x^2}{s} \mathbf{cf}_{t^{-1}u^{-1}} \tilde{F} \left( \frac{x^2}{s^{1/2}} \frac{s^{1/2}}{xt}, \frac{x^2 t^2}{s}, \frac{s^{1/2}}{xt} x^4 s \frac{s^{1/2}}{xu}, \frac{x^2 u^2}{s}, \frac{s^{1/2}}{xu} \frac{x^2}{s^{1/2}} \right),$$

$$j_1(x) = x \mathbf{cf}_{u^{-1}} \frac{1}{u^{2/3}} \tilde{H}_2 \left( x^4 \frac{1}{xu^{1/3}}, x^4 u^{4/3}, \frac{1}{x^3 u} x^4 \right).$$

Таким образом,

$$f(t, s, u) q(t, s, u) = xt g_1(s, u) p(s, u) + xs g_2(t, u) r(t, u) + xu g_1(s, t) p(s, t) - \frac{x^2 tu}{s} h_3(s), \quad (2.4)$$

$$g_1(s, u) p(s, u) = \frac{x}{s} p(s, u) \mathbf{cf}_{t^{-1}} f(t, s, u) - \frac{x^2 u}{s} \mathbf{cf}_{t^{-1}} g_1(s, t) + \frac{x(u-x)}{u} h_1(u) + \frac{xu}{s} h_3(s), \quad (2.5)$$

$$g_2(t, u) = \frac{x}{tu} \mathbf{cf}_{s^{-1}} f(t, s, u) + \frac{xt}{t-x} h_2(u) + \frac{xu}{u-x} h_2(t), \quad (2.6)$$

$$h_1(u) = x \mathbf{cf}_{t^{-1}} g_2(t, u) + \frac{u}{x^3(u-x)}, \quad (2.7)$$

$$h_2(u) = \frac{x}{u} \mathbf{cf}_{s^{-1}} g_1(s, u), \quad (2.8)$$

$$h_3(s) = 2x \mathbf{cf}_{u^{-1}} g_1(s, u) - \frac{x^2}{s} \mathbf{cf}_{t^{-1}u^{-1}} f(t, s, u), \quad (2.9)$$

$$j_1(x) = x \mathbf{cf}_{u^{-1}} h_2(u). \quad (2.10)$$

2.4. **Исключение  $f$ ,  $h_1$  и  $h_2$ .** Положим

$$\Phi_1(s, u) = \mathbf{cf}_{t^{-1}} \frac{t}{q(t, s, u)}, \quad \Psi_1(s, u) = 1 - \frac{x^2}{s} p(s, u) \Phi_1(s, u),$$

$$\Phi_2(t, u) = \mathbf{cf}_{s^{-1}} \frac{s}{q(t, s, u)}, \quad \Psi_2(t, u) = 1 - \frac{x^2}{tu} r(t, u) \Phi_2(t, u),$$

$$\Phi_3(s) = \mathbf{cf}_{t^{-1}u^{-1}} \frac{tu}{q(t, s, u)}, \quad \Psi_3(s) = 1 - \frac{x^4}{s^2} \Phi_3(s).$$

**Замечание 1.** Код на языке Wolfram Mathematica, проверяющий нижеприведенные тождества (2.11) – (2.14) с точностью до  $O(x^n)$ , доступен по ссылке

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~orevkv/tr45.html>.

Исключим  $f, h_1, h_2$  из уравнений (2.4)–(2.9), подставляя (2.4), (2.7), (2.8) в (2.5), (2.6), (2.9). После упрощений получаем следующую систему уравнений на  $g_1, g_2$  и  $h_3$ :

$$\begin{aligned} \Psi_1(s, u)g_1(s, u) &= \frac{x^2 u}{s} \text{cf}_{t-1} \left( \frac{p(s, t)}{q(t, s, u)} - \frac{1}{p(s, u)} \right) g_1(s, t) \\ &+ \frac{x^2(u-x)}{u} \text{cf}_{t-1} \left( \frac{t-x}{tq(t, s, u)} + \frac{1}{p(s, u)} \right) g_2(t, u) \\ &+ \frac{xu\Psi_1(s, u)}{sp(s, u)} h_3(s) + \frac{1}{x^2 p(s, u)}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(t, u)g_2(t, u) &= \frac{x^2}{u} \text{cf}_{s-1} \left( \frac{p(s, u)}{q(t, s, u)} + \frac{t}{t-x} \right) g_1(s, u) \\ &+ \frac{x^2}{t} \text{cf}_{s-1} \left( \frac{p(s, t)}{q(t, s, u)} + \frac{u}{u-x} \right) g_1(s, t) - \text{cf}_{s-1} \frac{x^3 h_3(s)}{sq(t, s, u)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Psi_3(s)h_3(s) = 2x \text{cf}_{u-1} \Psi_1(s, u)g_1(s, u) - x^3 \text{cf}_{t-1u-1} \frac{r(t, u)}{q(t, s, u)} g_2(t, u). \quad (2.13)$$

Затем, исключая  $h_2(u)$  из (2.8) и (2.10), выразим  $j_1$  через  $g_1$ :

$$j_1(x) = x^2 \text{cf}_{s-1u-1} \frac{g_1(s, u)}{u}. \quad (2.14)$$

**2.5. Оценки радиусов сходимости.** Обозначим через  $\mathbb{T}$  единичную окружность в  $\mathbb{C}$  с центром в 0. Для ряда  $\mathcal{F} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, s^{\pm 1}, u^{\pm 1}]((x))$  определим его  $x$ -радиус сходимости  $R_x(\mathcal{F})$  как супремум чисел  $x_0$ , таких, что  $\mathcal{F}$  сходится в окрестности множества  $[0, x_0] \times \mathbb{T}^3$  в  $\mathbb{C}^4$ . Если все коэффициенты ряда  $\mathcal{F}$  положительны, то  $R_x(\mathcal{F})$  совпадает с радиусом сходимости ряда  $\mathcal{F}(x, 1, 1, 1)$ .

**Лемма 2.1.** *Все коэффициенты рядов  $f, g_k, h_k, j_1, \Phi_k, 1/q, 1/p, 1/r, 1/(p\Psi_1), 1/(r\Psi_2), 1/\Psi_3$  положительны, и  $R_x(1/q) = 1/2, R_x(1/p) = (-1 + \sqrt{5})/2 \approx 0.618, R_x(1/r) = 1$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\text{Pos}(\mathcal{F})$  означает “все коэффициенты ряда  $\mathcal{F}$  положительны”. Достаточно доказать  $\text{Pos}(1/q), \text{Pos}(1/(p\Psi_1))$  и  $\text{Pos}(1/(r\Psi_2))$ , так как  $\text{Pos}(1/q) \Rightarrow \text{Pos}(\Phi_k), \text{Pos}(\Phi_3) \Rightarrow \text{Pos}(1/\Psi_3)$ , а утверждение леммы для остальных рядов очевидно.

$\text{Pos}(1/q)$ . Зададим  $F_0(x, y, z, w, v)$  так же, как  $F$ , но будем учитывать только те примитивные триангуляции, для которых длина проекции любого невертикального ребра на горизонтальную прямую равна 1, и при этом основанием фигуры является отрезок  $[(0, 0), (4, 0)]$ . Пусть  $f_0$  получено из  $F_0$  заменами из п. 2.3. Тогда (см. [7, пример 2.3]) мы имеем  $F_0 = 1/Q$ . Следовательно, все коэффициенты ряда  $1/q = f_0$  положительны. Поскольку  $q(1, 1, 1) = (1-2x)(1-2x^2)$ , мы получаем  $R_x(1/q) = 1/2$ .

$\text{Pos}(1/(p\Psi_1))$ . Зададим  $F_1$  и  $G_{11}$  так же, как  $F$  и  $G_1$ , но будем учитывать только те примитивные триангуляции, для которых проекция любого невертикального ребра на горизонтальную прямую есть отрезок  $[0, 2]$  или отрезок длины 1, и при этом основанием фигуры является объединение отрезков  $[(0, -1), (2, 0)] \cup [(2, 0), (4, 0)]$ . Тогда (см. п. 2.2)

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z, w, v)Q(x, y, z, w, v) &= y^{1/2}G_{11}(xy^{1/2}, y^{1/2}z, w, v)(1-w-v), \\ G_{11}(x, z, w, v)(1-w-v) &= \text{cf}_{\xi-1} F_1\left(\frac{x}{\xi}, \xi^2, \frac{z}{\xi}, w, v\right)(1-w-v) + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Пусть  $f_1$  и  $g_{11}$  получены из  $F_1$  и  $G_{11}$  заменами из п. 2.3. Тогда аналог уравнения (2.11) принимает вид  $p\Psi_1 g_{11} = 1/x^2$ , а значит, коэффициенты ряда  $1/(p\Psi_1)$  положительны.

$\text{Pos}(1/(r\Psi_2))$ . Зададим  $F_2$  и  $G_{22}$  так же, как  $F$  и  $G_2$ , но будем учитывать только те примитивные триангуляции, для которых проекция любого невертикального ребра на горизонтальную прямую есть отрезок  $[1, 3]$  или отрезок длины 1, и при этом основанием фигуры является ломаная  $[(0, -1), (1, 0), (3, 1), (4, 1)]$ . Пусть  $f_2$  и  $g_{22}$  получены из  $F_2$  и  $G_{22}$  заменами из п. 2.3. Действуя, как в пп. 2.2–2.3, получаем  $r\Psi_2 g_{22} = x^3$ , что завершает доказательство леммы.  $\square$

**Замечание 2.** Коэффициенты рядов  $1 - \Psi_k$  и  $1/\Psi_k$ , которые удалось вычислить, тоже все положительны.

**Лемма 2.2.** (а). Для любого  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  функция  $q(t, s, u)$  не обращается в нуль на  $\mathbb{T}^3$ .

(б). Для любых фиксированных  $(x, s, u) \in (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{T}^2$  уравнение  $q(t, s, u) = 0$  имеет два корня  $t_1(x, s, u), t_2(x, s, u)$  в диске  $|t| < 1$  и два корня вне его.

Для любых фиксированных  $(x, t, u) \in (0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{T}^2$  уравнение  $q(t, s, u) = 0$  имеет два корня  $s_1(x, t, u), s_2(x, t, u)$  в диске  $|s| < 1$  и два корня вне его.

(с). Имеют место равенства

$$\begin{aligned}\Phi_1(s, u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{t dt}{q(t, s, u)} = \frac{t_1}{q'_t(t_1, s, u)} + \frac{t_2}{q'_t(t_2, s, u)}, \\ \Phi_2(t, u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{s ds}{q(t, s, u)} = \frac{s_1}{q'_s(t, s_1, u)} + \frac{s_2}{q'_s(t, s_2, u)}, \\ \Phi_3(s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{T}^2} \frac{tu dt du}{q(t, s, u)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \Phi_1(s, u) u du.\end{aligned}$$

*Доказательство.* (а). Следует из леммы 2.1.

(б). В силу (а) число корней в единичном диске постоянно на  $[0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{T}^2$ , и при этом легко убедиться, что оно равно двум в точке  $(x, 1, 1)$  при малых  $x$ .

(с). Следует из (б) по формуле вычетов для интегралов Коши.  $\square$

**Замечание 3.** Такие же рассуждения дают доказательство леммы 4.1 работы [7], не требующее компьютерных вычислений.

Напомним, что  $R_x(J^*)$  обозначен в п. 2.1 через  $\beta_4$ .

**Лемма 2.3.** (а).  $x$ -радиусы сходимости рядов  $f, g_k, h_k, j_1$  больше, чем  $\beta_4^{1/4}$ , и при этом  $\beta_4 > 0$ .

(б). Имеют место равенства  $R_x(\Phi_1) = R_x(\Phi_2) = R_x(\Phi_3) = 1$  и

$$R_x(\Psi_1) = 0.495375\dots, \quad R_x(\Psi_2) = 0.495455\dots, \quad R_x(\Psi_3) = 0.499999\dots \quad (2.15)$$

*Доказательство.* (а). Неравенство  $\beta_4 > 0$  следует из экспоненциальной верхней оценки  $f(m, n) < 8^{mn}$ . Рассуждая, как в [7, лемма 3.2], легко показать, что радиус сходимости каждого из рядов  $f(1, 1, 1), g_k(1, 1), h_k(1), j_1$  тот же, что у ряда  $J(x^4)$ , а значит, он больше, чем  $\beta_4^{1/4}$ . То же самое верно для  $x$ -радиусов сходимости рядов  $f, g_k, h_k, j_1$ , так как все их коэффициенты положительны

(б). Лемма 2.1 влечет  $R_x(\Phi_k) \geq R_x(1/q) \geq 1/2$ . Анализируя поведение интегралов в лемме 2.2(с) при  $x \rightarrow 1/2$ , можно показать, что  $\Phi_k(1, 1) \sim C_k(1 - 2x)^{-1/2}$ ,  $k = 1, 2$ , и  $\Phi_3(1) \sim C_3 \log(1 - 2x)$  для некоторых констант  $C_k$ . Мы опускаем подробности, так как на самом деле нам требуются только нижние оценки радиусов сходимости.

Функции  $r\Psi_1, r\Psi_2, \Psi_3$  при  $t = s = u = 1$  убывают на интервале  $[0, 1/2)$  по лемме 2.1, и их можно вычислить с любой точностью, используя лемму 2.2(с). Поэтому легко найти ноль каждой из них на этом интервале; см. также рис. 2.  $\square$

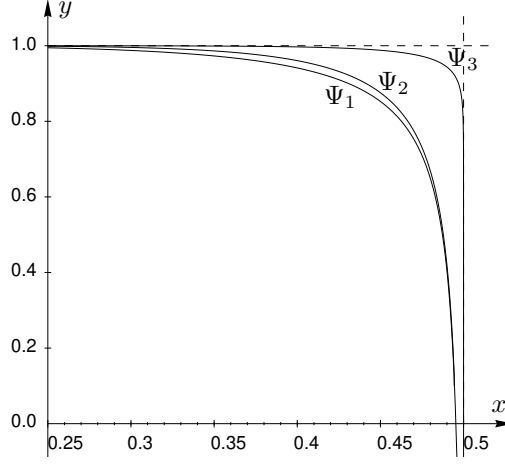


Рис. 2. Графики функций  $\Psi_1(x; 1, 1)$ ,  $\Psi_2(x; 1, 1)$ ,  $\Psi_3(x; 1)$  на  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ .

**2.6. Система интегральных уравнений и ее дискретизация.** Напомним, что  $\beta_4$  – первый вещественный корень уравнения  $J(x) = 1$  (см. п. 2.1). Значение  $c_4$ , анонсированное во введении, соответствует  $\beta_4 = 0.054114\dots$ , однако наша цель – обосновать это вычисление, поэтому мы пока не предполагаем что  $\beta_4$  близко к этому значению. Положим  $\beta_4^+ = 0.05414$  (см. рис. 3),  $x_0 = \beta_4^{1/4}$  и  $x_0^+ = (\beta_4^+)^{1/4} \approx 0.482369$ .

В предыдущем пункте мы показали, что ряды, входящие в уравнения (2.11)–(2.13), сходятся в окрестности множества  $\{x\} \times \mathbb{T}^3$  при  $x < \min(x_0, x_0^+)$ . Следовательно, для таких  $x$  можно заменить  $\text{cf}_{\xi^{-1}}(\dots)$  на  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} (\dots) d\xi$  (здесь  $\xi$  заменяет  $t, s$  или  $u$ ). Тогда при всех  $x$  мы получим систему из трех интегральных уравнений на ограничения функций  $g_1, g_2$  и  $h_3$  на  $\mathbb{T}^2$  и  $\mathbb{T}$ .

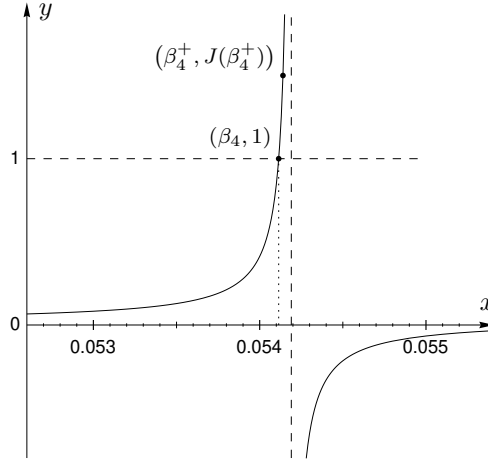
Мы докажем, что эта система имеет единственное решение при любом фиксированном  $x \in [0, x_0^+]$ , и что решение аналитически зависит от  $x$ . Тогда из теоремы единственности для аналитических функций будет следовать, что ряды  $g_1, g_2, h_3$  сходятся на этом интервале, а значит, заменяя интегралы римановыми суммами, можно вычислить  $g_1$  в любой точке, численно решая систему линейных уравнений. Это позволит нам найти  $J(x^4)$  (из (2.14) и (2.2)) для любого  $x \in [0, x_0^+]$  и тем самым, поскольку функция  $J$  монотонна, численно решить уравнение  $J(x) = 1$ .

В пространстве операторов, действующих на аналитических функциях в окрестности тора  $\mathbb{T}^2$ , рассмотрим следующие подпространства  $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ :

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{F} &\Leftrightarrow (Tg)(t, s) = \int_{\mathbb{T}^2} K(t, s; u, v) g(u, v) du dv, \\ \hat{T} \in \mathcal{F}_1 &\Leftrightarrow (\hat{T}g)(t, s) = \int_{\mathbb{T}} \hat{K}(t, s; u) g(u, s) du, \\ \hat{T} \in \mathcal{F}_2 &\Leftrightarrow (\hat{T}g)(t, s) = \int_{\mathbb{T}} \hat{K}(t, s; v) g(t, v) dv, \end{aligned}$$

где  $K$  и  $\hat{K}$  – некоторые аналитические функции. Положим также

$$\mathcal{F}'_j = \{\sigma \circ \hat{T} \mid \hat{T} \in \mathcal{F}_j\} \quad (j = 1, 2), \quad \text{где } (\sigma g)(t, s) = g(s, t).$$

Рис. 3. График функции  $J(x)$ .

Согласно теории Фредгольма каждый оператор  $T \in \mathcal{F}$  компактен и если оператор  $I - T$  обратим, то  $(I - T)^{-1} = I + S$  для некоторого  $S \in \mathcal{F}$ .

Если  $\widehat{T} \in \mathcal{F}_1$ , то оператор  $\widehat{T}$  уже не компактен. Однако  $\widehat{T}$  можно рассматривать как аналитическое семейство классических операторов Фредгольма  $\{\widehat{T}_s\}_{s \in \mathbb{T}}$ , действующих на функциях от  $t$ . Поэтому если  $I - \widehat{T}_s$  обратим при всех  $s \in \mathbb{T}$ , то  $(I - \widehat{T}_s)^{-1}$  – оператор того же вида, аналитически зависящий от  $s$  (см., например, [9, гл. VI], [7, §5.4]), и значит,  $I - \widehat{T}$  обратим и

$$(I - \widehat{T})^{-1} = I + \widehat{S}, \quad \widehat{S} \in \mathcal{F}_1. \quad (2.16)$$

Ясно, что  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}_j$  замкнуты относительно композиции и для  $T \in \mathcal{F}$ ,  $\widehat{T}_j \in \mathcal{F}_j$  имеет место

$$T\widehat{T}_j, \widehat{T}_j T, \widehat{T}_j \widehat{T}_{3-j} \in \mathcal{F}, \quad \sigma T_j \sigma \in \mathcal{F}_{3-j}. \quad (2.17)$$

Исключая  $h_3$  из (2.12) и (2.13), мы получаем систему из двух уравнений на неизвестные функции  $g_1, g_2$  на  $\mathbb{T}^2$ . Согласно (2.17) она имеет вид

$$g_1 = \widehat{T}_{11} g_1 + (\widehat{T}_{12} + T_{12}) g_2 + \phi, \quad (2.18)$$

$$g_2 = (\widehat{T}_{21} + \widehat{T}'_{21} + T_{21}) g_1 + T_{22} g_2, \quad (2.19)$$

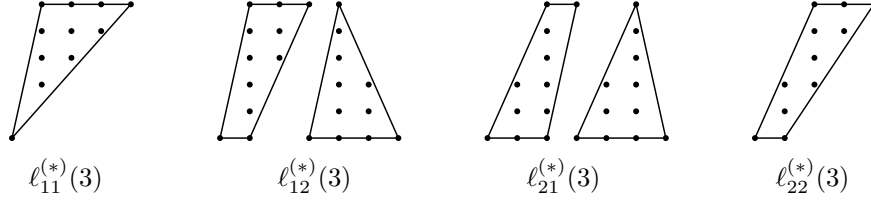
где  $\phi = 1/(x^2 p \Psi_1)$ ,  $T_{ij} \in \mathcal{F}$ , и  $\widehat{T}_{11}, \widehat{T}_{12}, \widehat{T}_{21}, \widehat{T}'_{21}$  принадлежат пространствам  $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}'_1$  соответственно. Мы будем обозначать интегральные ядра так же, как операторы, но с заменой  $T$  на  $K$ .

Можно численно проверить, что  $\|K_{22}\|_2 < 0.06$  при  $x < x_0^+$ , а значит, оператор  $I - T_{22}$  обратим и обратный оператор имеет вид  $I + \widetilde{T}_{22}$ , где  $\widetilde{T}_{22} \in \mathcal{F}$ . При этом интегральное ядро  $\widetilde{K}_{22}$  можно вычислить в любой точке с любой точностью. Разрешая уравнение (2.19) относительно  $g_2$  и подставляя результат в (2.18), получаем уравнение вида

$$(I - \widehat{T}_1 - \widehat{T}_2 - T) g_1 = \phi, \quad (2.20)$$

где  $\widehat{T}_1 = \widehat{T}_{12} \widehat{T}_{21} \in \mathcal{F}_1$ ,  $\widehat{T}_2 = \widehat{T}_{11} \in \mathcal{F}_2$  и  $T \in \mathcal{F}$  в силу (2.17). Вычисление показывает, что  $\|\widehat{K}_1|_{\mathbb{T} \times \{t\}}\|_2 \leq 0.83$  и  $\|\widehat{K}_2|_{\{t\} \times \mathbb{T}}\|_2 \leq 0.53$  при любом  $x \in [0, x_0^+]$  и при любом фиксированном  $t \in \mathbb{T}$ . Поэтому (см. (2.16)) операторы  $\widehat{T}_j$  обратимы и, в силу (2.17),

$$(I - \widehat{T}_1)^{-1} (I - \widehat{T}_2)^{-1} (I - \widehat{T}_1 - \widehat{T}_2 - T) = I + \widetilde{T}, \quad \widetilde{T} \in \mathcal{F}.$$


 Рис. 4. Трапеции, дающие вклад в  $\ell_{\lambda\mu}^*(3)$  и  $\ell_{\lambda\mu}(3)$ .

Вычисление также показывает, что  $\|\tilde{T}^{64}\|_2 \leq 0.7$  (мы последовательно вычисляли  $\tilde{T}^2$ ,  $\tilde{T}^4$ ,  $\tilde{T}^8, \dots$ ), следовательно, оператор в (2.20) обратим и решение уравнения (2.20), а значит, и исходной системы, аналитически зависит от  $x$ . Следовательно, оно совпадает с  $g_1$  при всех  $x \in [0, x_0^+]$ .

Если все интегралы заменить на  $n$ -ые римановы суммы, то интегральные уравнения на каждом шаге превратятся в системы обычных линейных уравнений на значения искомого функций в точках, все координаты которых являются корнями  $n$ -й степени из единицы (см. в [7, §5.2] оценки ошибки приближения). Дискретизация уравнений (2.20) эквивалентна дискретизации системы (2.11)–(2.13). При вычислении  $c_4$  мы использовали систему (2.11)–(2.13), потому что матрица ее дискретизации разрежена (у нее только  $O(n^3)$  ненулевых элементов), но разреженность теряется после исключения  $h_3$ . В п. 4.2 приведены некоторые детали программной реализации.

### 3. Полосы ширины 5

В этом разделе мы выражаем  $c_5$  через решение некоторой системы интегральных уравнений на производящие функции, что дает возможность вычислить  $c_5$  до 15 десятичных знаков. Вычисления и доказательства примерно такие же, как в §2, поэтому мы их излагаем менее подробно.

**3.1. Сведение к трапециям.** Пусть  $\lambda, \mu \in \{1, 2\}$  и  $a_0, a_5$  – положительные числа, такие, что  $a_0 - \lambda \equiv a_5 \pm \mu \pmod{5}$ . Определим  $\ell_{\lambda\mu}^*(a_0, a_5)$  как число примитивных триангуляций трапеции  $T_{5,\lambda}(a_0, a_5)$  с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(\lambda, 5)$ ,  $(\lambda + a_5, 5)$ ,  $(a_0, 0)$ , и пусть  $\ell_{\lambda\mu}(a_0, a_5)$  – число ее примитивных триангуляций без ребер от края до края (т.е. без ребер вида  $[(k_0, 0), (k_5, 5)]$ ). Положим  $\ell_{\lambda\mu}^*(0, 0) = 1$ ,  $\ell_{\lambda\mu}(0, 0) = 0$  и  $\ell_{\lambda\mu}^*(a_0, a_5) = \ell_{\lambda\mu}(a_0, a_5) = 0$  при  $a_0 - \lambda \not\equiv a_5 \pm \mu \pmod{5}$ . Рассмотрим производящие функции (см. рис. 4)

$$L_{\lambda\mu}(x) = \sum_{n \geq 0} \ell_{\lambda\mu}(n) x^n = \sum_{a_0, a_5 \geq 0} \ell_{\lambda\mu}(a_0, a_5) x^{a_0 + a_5},$$

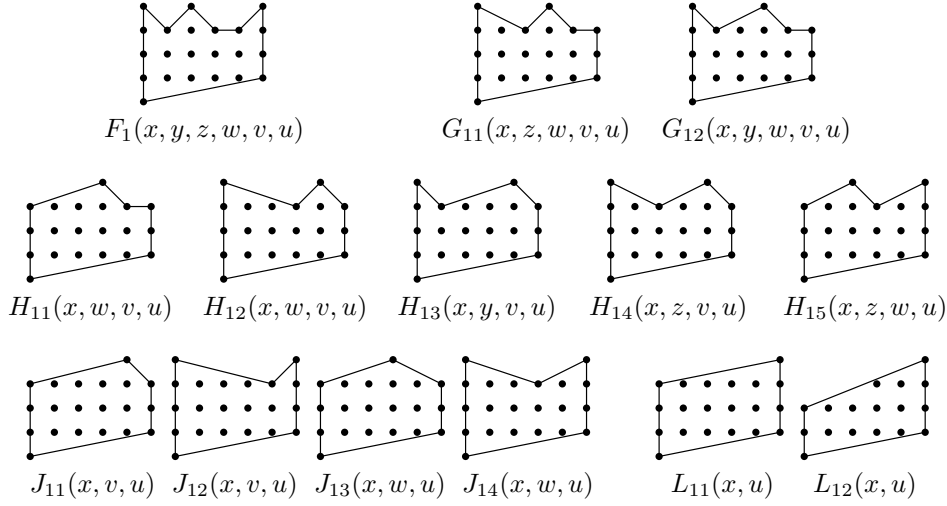
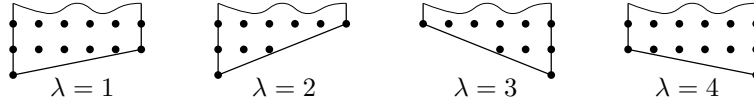
$$L_{\lambda\mu}^*(x) = \sum_{n \geq 0} \ell_{\lambda\mu}^*(n) x^n = \sum_{a_0, a_5 \geq 0} \ell_{\lambda\mu}^*(a_0, a_5) x^{a_0 + a_5}.$$

Тогда матрицы

$$\mathbf{L}(x) = \begin{pmatrix} L_{11}(x) & L_{12}(x) \\ L_{21}(x) & L_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}^*(x) = \begin{pmatrix} L_{11}^*(x) & L_{12}^*(x) \\ L_{21}^*(x) & L_{22}^*(x) \end{pmatrix}$$

симметричны и связаны соотношением (через  $\mathbf{I}$  обозначена единичная матрица)

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^3 + \dots = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1}.$$

Рис. 5. Фигуры для  $F_1, G_{1\nu}, H_{1\nu}, J_{1\nu}, L_{1\nu}$ .Рис. 6. Основания фигур для  $F_\lambda, G_{\lambda\nu}, H_{\lambda\nu}, J_{\lambda\nu}, L_{\lambda\nu}$ .

Мы имеем

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2x^2 + 79x^3 + 1075x^4 + \dots & x + 5x^2 + 84x^3 + 2104x^4 + \dots \\ x + 5x^2 + 84x^3 + 2104x^4 + \dots & x + 8x^2 + 111x^3 + 3419x^4 + \dots \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 3x^2 + 90x^3 + 1296x^4 + \dots & x + 6x^2 + 101x^3 + 2469x^4 + \dots \\ x + 6x^2 + 101x^3 + 2469x^4 + \dots & x + 10x^2 + 140x^3 + 3965x^4 + \dots \end{pmatrix}.$$

Как и в [7] и в §2, при любых  $\lambda, \mu$  мы имеем  $\lim_n f(5, n)^{1/n} = \lim_n \ell_{\lambda\mu}^*(2n)^{1/n}$ , что дает

$$c_5 = -\frac{2}{5} \log_2 \beta_5, \quad (3.1)$$

где  $\beta_5$  – первый вещественный корень уравнения  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(x)) = 0$ .

**Замечание 4.** Аналог уравнений (2.1) и (3.1) для прямоугольников произвольной фиксированной ширины  $m \geq 3$  имеет вид  $c_m = -\frac{2}{m} \log_2 \beta_m$ , где  $\beta_m$  – первый вещественный корень уравнения  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(x)) = 0$  и  $\mathbf{L}(x)$  – квадратная матрица размера  $\varphi(m)/2$ , заданная аналогичным образом ( $\varphi$  – функция Эйлера).

**3.2. Рекуррентные соотношения.** Зададим производящие функции  $F_1, G_{11}, G_{12}, \dots$ , как в п. 2.2, но в соответствии с рис. 5. Заменяя основания фигур, как показано на рис. 6, зададим  $F_\lambda, G_{\lambda 1}, G_{\lambda 2}, \dots$  (с теми же аргументами) для  $\lambda = 1, 2, 3, 4$ . Симметризации  $\tilde{F}_\lambda, \tilde{G}_{\lambda 1}, \tilde{G}_{\lambda 2}, \dots$  ( $\lambda = 1, 2$ ) можно эквивалентно определить, положив

$$\tilde{F}_\lambda = F_\lambda + F_{5-\lambda}, \quad \tilde{X}_{\lambda,\nu} = X_{\lambda,\nu} + X_{5-\lambda,\nu}, \quad X = G, H, J, L, \quad \lambda = 1, 2,$$

с теми же аргументами. Заметим, что

$$L_{\lambda\mu}(x) = x^{2-\lambda}\tilde{L}_{\lambda\mu}(x, x) \quad (3.2)$$

(см. в п. 3.1 определение рядов  $L_{\lambda\mu}(x)$ ).

Поскольку бóльшая часть вычислений не зависит от  $\lambda$ , мы будем опускать первый нижний индекс, а в тех редких случаях, когда они зависят от  $\lambda$ , будем использовать символ Кронекера  $\delta_{\lambda\mu}$ . В этих обозначениях рекуррентные соотношения из [7, §2.1] (ср. с п. 2.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, \dots, u)Q(x, \dots, u) &= y^{1/2}\tilde{G}_1(xy^{1/2}, y^{1/2}z, w, v, u)P_1(w, v, u) \\ &+ z^{1/2}\tilde{G}_2(x, yz^{1/2}, z^{1/2}w, v, u)P_2(x, v, u) \\ &+ w^{1/2}\tilde{G}_2(u, vw^{1/2}, w^{1/2}z, y, x)P_2(u, y, x) \\ &+ v^{1/2}\tilde{G}_1(uv^{1/2}, v^{1/2}w, z, y, x)P_1(z, y, x) \\ &- y^{1/2}w^{1/2}\tilde{H}_4(xy^{1/2}, y^{1/2}zw^{1/2}, w^{1/2}v, u)(1-u) \\ &- y^{1/2}v^{1/2}\tilde{H}_5(xy^{1/2}, y^{1/2}z, wv^{1/2}, v^{1/2}u) \\ &- z^{1/2}v^{1/2}\tilde{H}_4(uv^{1/2}, v^{1/2}wz^{1/2}, z^{1/2}y, x)(1-x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q(x, y, z, w, v, u) &= 1 - x - y - z - w - v - u \\ &+ xz + xw + xv + xu + yw + yv + yu + zv + zu + wu \\ &- xzv - xzu - xwu - ywu, \end{aligned}$$

$$P_1(w, v, u) = 1 - w - v - u + wu, \quad P_2(x, v, u) = (1-x)(1-v-u),$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(x, z, w, v, u)P_1(w, v, u) &= \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{F}\left(\frac{x}{\xi}, \xi^2, \frac{z}{\xi}, w, v, u\right)P_1(w, v, u) \\ &+ z^{1/3}\tilde{H}_1(xz^{1/3}, z^{2/3}w, v, u)(1-u-v) \\ &+ w^{1/2}\tilde{H}_4(x, zw^{1/2}, w^{1/2}v, u)(1-u) \\ &+ v^{1/2}\tilde{H}_5(x, z, wv^{1/2}, v^{1/2}u) \\ &- w^{1/2} \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_2\left(u, vw^{1/2}, w^{1/2}\frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right)(1-u) \\ &- v^{1/2} \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(uv^{1/2}, v^{1/2}w, \frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right) \\ &- z^{1/3}v^{1/2}\tilde{J}_3(xz^{1/3}, z^{2/3}wv^{1/2}, v^{1/2}u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(x, y, w, v, u)P_2(x, v, u) &= \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{F}\left(x, \frac{y}{\xi}, \xi^2, \frac{w}{\xi}, v, u\right)P_2(x, v, u) \\ &+ y^{1/3}\tilde{H}_2(xy^{2/3}, y^{1/3}w, v, u)(1-v-u) \\ &+ w^{1/3}\tilde{H}_3(x, yw^{1/3}, w^{2/3}v, u)(1-x)(1-u) \\ &+ v^{1/2}\tilde{H}_4(uv^{1/2}, v^{1/2}w, y, x)(1-x) \\ &- y^{1/3}v^{1/2}\tilde{J}_4(xy^{2/3}, y^{1/3}wv^{1/2}, v^{1/2}u) \\ &- v^{1/2} \mathbf{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(uv^{1/2}, v^{1/2}\frac{w}{\xi}, \xi^2, \frac{y}{\xi}, x\right)(1-x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_1(x, w, v, u)(1 - v - u) &= \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_2\left(\frac{x}{\xi^2}, \xi^3, \frac{w}{\xi}, v, u\right)(1 - v - u) \\ &\quad + w^{1/4} \tilde{J}_1(xw^{1/4}, w^{3/4}v, u)(1 - u) \\ &\quad + v^{1/2} \tilde{J}_3(x, wv^{1/2}, v^{1/2}u) \\ &\quad - v^{1/2} \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_4\left(uv^{1/2}, v^{1/2}\frac{w}{\xi}, \xi^3, \frac{x}{\xi^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_2(x, w, v, u)(1 - v - u) &= \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(\frac{x}{\xi}, \xi^3, \frac{w}{\xi^2}, v, u\right)(1 - v - u) \\ &\quad + v^{1/2} \tilde{J}_4(x, wv^{1/2}, v^{1/2}u) \\ &\quad - v^{1/2} \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_5\left(\frac{x}{\xi}, \xi^3, \frac{w}{\xi^2}v^{1/2}, v^{1/2}u\right),\end{aligned}$$

$$\tilde{H}_3(x, y, v, u) = \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_2\left(u, \frac{v}{\xi}, \xi^3, \frac{y}{\xi^2}, x\right) + \frac{v^{1/4}}{1 - u} \tilde{J}_2(uv^{3/4}, v^{1/4}y, x),$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_4(x, z, v, u) &= \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(x, \frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{v}{\xi}, u\right) + \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_2\left(u, v, \frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right) \\ &\quad + \frac{v^{1/3}}{1 - u} \left\{ \tilde{J}_4(uv^{2/3}, v^{1/3}z, x) - \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_2\left(uv^{2/3}, v^{1/3}\frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right) \right\} \\ &\quad - \text{cf}_{\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}} \tilde{F}\left(\frac{x}{\xi_1}, \xi_1^2, \frac{z}{\xi_1\xi_2}, \xi_2^2, \frac{v}{\xi_2}, u\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{H}_5(x, z, w, u) &= \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(x, z, \frac{w}{\xi}, \xi^2, \frac{u}{\xi}\right) + \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{G}_1\left(u, w, \frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right) \\ &\quad + z^{1/3} \tilde{J}_3(xz^{1/3}, z^{2/3}w, u) + w^{1/3} \tilde{J}_3(uw^{1/3}, w^{2/3}z, x) \\ &\quad - z^{1/3} \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_1\left(xz^{1/3}, z^{2/3}\frac{w}{\xi}, \xi^2, \frac{u}{\xi}\right) - w^{1/3} \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_1\left(uw^{1/3}, w^{2/3}\frac{z}{\xi}, \xi^2, \frac{x}{\xi}\right) \\ &\quad - \text{cf}_{\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}} \tilde{F}\left(\frac{x}{\xi_1}, \xi_1^2, \frac{z}{\xi_1}, \frac{w}{\xi_2}, \xi_2^2, \frac{u}{\xi_2}\right),\end{aligned}$$

$$\tilde{J}_1(x, v, u) = \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_3\left(\frac{x}{\xi^3}, \xi^4, \frac{v}{\xi}, u\right) + \frac{\delta_{\lambda,1}}{x(1 - u)},$$

$$\tilde{J}_2(x, v, u) = \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_2\left(\frac{x}{\xi}, \xi^4, \frac{v}{\xi^3}, u\right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_3(x, w, u) &= \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_1\left(x, \frac{w}{\xi}, \xi^2, \frac{u}{\xi}\right) + \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_4\left(u, \frac{w}{\xi}, \xi^3, \frac{x}{\xi^2}\right) \\ &\quad - \text{cf}_{\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}} \tilde{G}_2\left(\frac{x}{\xi_1^2}, \xi_1^3, \frac{w}{\xi_1\xi_2}, \xi_2^2, \frac{u}{\xi_2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}_4(x, w, u) &= \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_2\left(x, \frac{w}{\xi}, \xi^2, \frac{u}{\xi}\right) + \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{H}_5\left(u, \frac{w}{\xi^2}, \xi^3, \frac{x}{\xi}\right) \\ &\quad - \text{cf}_{\xi_1^{-1}\xi_2^{-1}} \tilde{G}_1\left(\frac{x}{\xi_1}, \xi_1^3, \frac{w}{\xi_1^2\xi_2}, \xi_2^2, \frac{u}{\xi_2}\right) + \frac{x\delta_{\lambda,2}}{u},\end{aligned}$$

$$\tilde{L}_1(x, u) = \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{J}_2\left(\frac{u}{\xi}, \xi^5, \frac{x}{\xi^4}\right), \quad \tilde{L}_2(x, u) = \text{cf}_{\xi^{-1}} \tilde{J}_3\left(\frac{x}{\xi^2}, \xi^5, \frac{u}{\xi^3}\right).$$

**3.3. Замена переменных.** Положим

$$\begin{aligned}
 f(t, s, u, v) &= \tilde{F}\left(\frac{x}{t}, \frac{x^2 t^2}{s}, \frac{x^2 s^2}{tu}, \frac{x^2 u^2}{sv}, \frac{x^2 v^2}{u}, \frac{x}{v}\right), \\
 g_1(s, u, v) &= \frac{1}{s^{1/2}} \tilde{G}_1\left(\frac{x^2}{s^{1/2}}, \frac{x^3 s^{3/2}}{u}, \frac{x^2 u^2}{sv}, \frac{x^2 v^2}{u}, \frac{x}{v}\right), \\
 g_2(t, u, v) &= \frac{1}{(tu)^{1/2}} \tilde{G}_2\left(\frac{x}{t}, \frac{x^3 t^{3/2}}{u^{1/2}}, \frac{x^3 u^{3/2}}{t^{1/2} v}, \frac{x^2 v^2}{u}, \frac{x}{v}\right), \\
 h_k(u, v) &= \frac{1}{u^{k/3}} \tilde{H}_k\left(\frac{x^3}{u^{1/3}}, \frac{x^4 u^{4/3}}{v}, \frac{x^2 v^2}{u}, \frac{x}{v}\right), \quad k = 1, 2, \\
 h_3(t, v) &= \frac{1}{t^{2/3} v^{1/3}} \tilde{H}_3\left(\frac{x}{t}, \frac{x^4 t^{4/3}}{v^{1/3}}, \frac{x^4 v^{4/3}}{t^{1/3}}, \frac{x}{v}\right), \\
 h_4(s, v) &= \frac{1}{sv^{1/2}} \tilde{H}_4\left(\frac{x^2}{s^{1/2}}, \frac{x^4 s}{v^{1/2}}, \frac{x^3 v^{3/2}}{s^{1/2}}, \frac{x}{v}\right), \\
 h_5(s, u) &= \frac{1}{(su)^{1/2}} \tilde{H}_5\left(\frac{x^2}{s^{1/2}}, \frac{x^3 s^{3/2}}{u}, \frac{x^3 u^{3/2}}{s}, \frac{x^2}{u^{1/2}}\right), \\
 j_1(v) &= \frac{1}{v^{1/4}} \tilde{J}_1\left(\frac{x^4}{v^{1/4}}, x^5 v^{5/4}, \frac{x}{v}\right), \quad j_3(u) = \frac{1}{v^{5/6}} \tilde{J}_3\left(\frac{x^3}{v^{1/3}}, x^5 u^{5/6}, \frac{x^2}{u^{1/2}}\right), \\
 j_2(v) &= \frac{1}{v^{3/4}} \tilde{J}_2\left(\frac{x^4}{v^{1/4}}, x^5 v^{5/4}, \frac{x}{v}\right), \quad j_4(u) = \frac{1}{v^{1/6}} \tilde{J}_4\left(\frac{x^3}{v^{1/3}}, x^5 u^{5/6}, \frac{x^2}{u^{1/2}}\right), \\
 l_1(x) &= \tilde{L}_1(x^5, x^5), \quad l_2(x) = \tilde{L}_2(x^5, x^5).
 \end{aligned}$$

Положим также

$$\begin{aligned}
 q(t, s, u, v) &= Q\left(\frac{x}{t}, \frac{x^2 t^2}{s}, \frac{x^2 s^2}{tu}, \frac{x^2 u^2}{sv}, \frac{x^2 v^2}{u}, \frac{x}{v}\right), \\
 p_1(s, u, v) &= P_1\left(\frac{x^2 u^2}{sv}, \frac{x^2 v^2}{u}, \frac{x}{v}\right), \quad p_2(t, u, v) = P_2\left(\frac{x}{t}, \frac{x^2 v^2}{u}, \frac{x}{v}\right), \\
 r_1(u, v) &= 1 - \frac{x^2 v^2}{u} - \frac{x}{v}, \quad r_2(t, v) = \left(1 - \frac{x}{t}\right) \left(1 - \frac{x}{v}\right).
 \end{aligned}$$

Тогда рекуррентные соотношения из п. 3.2 принимают следующий вид (ср. с п. 2.3):

$$\begin{aligned}
 f(t, s, u, v)q(t, s, u, v) &= xt p_1(s, u, v)g_1(s, u, v) + xs p_2(t, u, v)g_2(t, u, v) \\
 &\quad + xv p_1(u, s, t)g_1(u, s, t) + xu p_2(v, s, t)g_2(v, s, t) \\
 &\quad - x^2 tu \left(1 - \frac{x}{v}\right) h_4(s, v) - x^2 sv \left(1 - \frac{x}{t}\right) h_4(u, t) - x^2 tv h_5(s, u),
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 g_1(s, u, v)p_1(s, u, v) &= \frac{x}{s} p_1(s, u, v) \mathbf{cf}_{t-1} f(t, s, u, v) \\
 &\quad + x r_1(u, v) h_1(u, v) + xu \left(1 - \frac{x}{v}\right) h_4(s, v) + xv h_5(s, u) \\
 &\quad - \frac{x^2 u}{s} \left(1 - \frac{x}{v}\right) \mathbf{cf}_{t-1} g_2(v, s, t) - \frac{x^2 v}{s} \mathbf{cf}_{t-1} g_1(u, s, t) - x^2 v j_3(u),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 g_2(t, u, v)p_2(t, u, v) &= \frac{x}{tu} p_2(t, u, v) \mathbf{cf}_{s-1} f(t, s, u, v) \\
 &\quad + x r_1(u, v) h_2(u, v) + x r_2(t, v) h_3(t, v) + xv \left(1 - \frac{x}{t}\right) h_4(u, t) \\
 &\quad - \frac{x^2 v}{u} j_4(u) - \frac{x^2 v}{ut} \left(1 - \frac{x}{t}\right) \mathbf{cf}_{s-1} g_1(u, s, t),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$h_1(u, v)r_1(u, v) = x r_1(u, v) \mathbf{cf}_{t-1} g_2(t, u, v) + x \left(1 - \frac{x}{v}\right) j_1(v) + xv j_3(u) - x^2 v \mathbf{cf}_{t-1} h_4(u, t), \quad (3.6)$$

$$h_2(u, v)r_1(u, v) = \frac{x}{u} r_1(u, v) \mathbf{cf}_{s-1} g_1(s, u, v) + \frac{xv}{u} j_4(u) - \frac{x^2 v}{u} \mathbf{cf}_{s-1} h_5(s, u), \quad (3.7)$$

$$h_3(t, v) = \frac{x}{t} \mathbf{cf}_{s-1} g_2(v, s, t) + \frac{vx}{v-x} j_2(t), \quad (3.8)$$

$$h_4(s, v) = \frac{x}{sv} \mathbf{cf}_{u-1} g_1(s, u, v) + \frac{x}{s} \mathbf{cf}_{t-1} g_2(v, s, t) + \frac{xv}{s(v-x)} j_4(s) - \frac{x^2}{s^2 v} \mathbf{cf}_{t-1 u-1} f(t, s, u, v) - \frac{x^2 v}{s(v-x)} \mathbf{cf}_{t-1} h_2(s, t), \quad (3.9)$$

$$h_5(s, u) = \frac{x}{u} \mathbf{cf}_{v-1} g_1(s, u, v) + \frac{x}{s} \mathbf{cf}_{t-1} g_1(u, s, t) + x j_3(u) + x j_3(s) - \frac{x^2}{u} \mathbf{cf}_{v-1} h_1(u, v) - \frac{x^2}{s} \mathbf{cf}_{t-1} h_1(s, t) - \frac{x^2}{su} \mathbf{cf}_{t-1 v-1} f(t, s, u, v), \quad (3.10)$$

$$j_1(v) = x \mathbf{cf}_{t-1} h_3(t, v) + \frac{v \delta_{\lambda, 1}}{x^4 (v-x)}, \quad (3.11)$$

$$j_2(v) = \frac{x}{v} \mathbf{cf}_{u-1} h_2(u, v), \quad (3.12)$$

$$j_3(u) = \frac{x}{u} \mathbf{cf}_{v-1} h_1(u, v) + x \mathbf{cf}_{t-1} h_4(u, t) - \frac{x^2}{u} \mathbf{cf}_{t-1 v-1} g_2(t, u, v), \quad (3.13)$$

$$j_4(u) = x \mathbf{cf}_{v-1} h_2(u, v) + x \mathbf{cf}_{s-1} h_5(u, s) - \frac{x^2}{u} \mathbf{cf}_{s-1 v-1} g_1(s, u, v) + x \delta_{\lambda, 2}, \quad (3.14)$$

$$l_1(x) = x \mathbf{cf}_{v-1} j_2(v), \quad l_2(x) = x \mathbf{cf}_{u-1} j_3(u). \quad (3.15)$$

**3.4. Исключение  $f, h_1, h_2, j_1, j_2, j_4$ .** Пусть

$$\Phi_1(s, u, v) = \mathbf{cf}_{t-1} \frac{t}{q(t, s, u, v)}, \quad \Psi_1(s, u, v) = 1 - \frac{x^2}{s} p_1(s, u, v) \Phi_1(s, u, v),$$

$$\Phi_2(t, u, v) = \mathbf{cf}_{s-1} \frac{s}{q(t, s, u, v)}, \quad \Psi_2(t, u, v) = 1 - \frac{x^2}{tu} p_2(t, u, v) \Phi_2(t, u, v),$$

$$\Phi_{13}(s, v) = \mathbf{cf}_{t-1 u-1} \frac{tu}{q(t, s, u, v)}, \quad \Psi_{13}(s, v) = 1 - \frac{x^4 (v-x)}{s^2 v^2} \Phi_{13}(s, v),$$

$$\Phi_{14}(s, u) = \mathbf{cf}_{t-1 v-1} \frac{tv}{q(t, s, u, v)}, \quad \Psi_{14}(s, u) = 1 - \frac{x^4}{su} \Phi_{14}(s, u),$$

$$\Phi_0(u) = \mathbf{cf}_{v-1} \frac{v}{r_1(u, v)}, \quad \Psi_0(u) = 1 - \frac{x^2}{u} \Phi_0(u).$$

**Замечание 5.** Имеет место равенство (см. OEIS [10], A025174)

$$\frac{x^2}{u} \Phi_0(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n-1}{n-1} \frac{x^{4n}}{u^n}.$$

**Лемма 3.1.** *Имеет место равенство*

$$h_2(u, v) = \frac{x}{u} \mathbf{cf}_{s-1} g_1(s, u, v) + \frac{x^2 v \delta_{\lambda, 2}}{u r_1(u, v) \Psi_0(u)}. \quad (3.16)$$

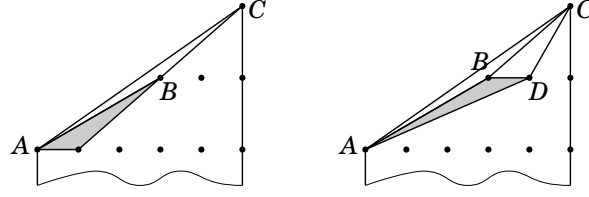


Рис. 7. К доказательству леммы 3.2.

*Доказательство.* Исключая  $j_4(u)$  из (3.7) и (3.14), получаем уравнение

$$\chi(u, v) = \frac{x^2 v}{u r_1(u, v)} (\delta_{\lambda, 2} + \mathbf{cf}_{w-1} \chi(u, w)), \quad (3.17)$$

где

$$\chi(u, v) = h_2(u, v) - \frac{x}{u} \mathbf{cf}_{s-1} g_1(s, u, v).$$

Приравнивая коэффициенты при  $v^{-1}$  в обеих частях (3.17), получаем

$$\mathbf{cf}_{v-1} \chi(u, v) = \frac{x^2}{u} \Phi_0(u) (\delta_{\lambda, 2} + \mathbf{cf}_{w-1} \chi(u, w)). \quad (3.18)$$

Замечая, что  $\mathbf{cf}_{v-1} \chi(u, v) = \mathbf{cf}_{w-1} \chi(u, w)$ , находим  $\mathbf{cf}_{w-1} \chi(u, w)$  из (3.18) и подставляем в (3.17), что после упрощения дает (3.16). Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 3.2.** *Имеет место равенство*

$$l_2(x) = x^2 \mathbf{cf}_{t-1} h_4(u, t) + x^3 \mathbf{cf}_{v-1} j_1(v) \quad (3.19)$$

*Доказательство.* В любой примитивной триангуляции, дающей вклад в  $l_2(x)$ , есть треугольник  $ABC$ , как на рис. 7. Есть ровно две возможности для треугольника, примыкающего снизу к ребру  $AB$  – серые треугольники на рис. 7. Во втором случае мы обязательно имеем также ребро  $CD$ . В терминах производящих функций эти наблюдения означают (3.19). Лемма доказана.  $\square$

**Замечание 6.** Код на языке Wolfram Mathematica, проверяющий нижеприведенные тождества (3.20) – (3.25) с точностью до  $O(x^n)$ , доступен по ссылке

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~orevkv/tr45.html>.

Подставляя (3.3), (3.6), а затем (3.11), в (3.4), получаем

$$\begin{aligned} \Psi_1(s, u, v) g_1(s, u, v) &= \frac{\delta_{\lambda, 1}}{x^2 p_1(s, u, v)} + \frac{x \Psi_1(s, u, v)}{v p_1(s, u, v)} \{u(v-x) h_4(s, v) + v^2 h_5(s, u)\} \\ &+ \mathbf{cf}_{t-1} \left\{ \frac{x^2 v}{s} \left( \frac{p_1(u, s, t)}{q(t, s, u, v)} - \frac{1}{p_1(s, u, v)} \right) g_1(u, s, t) + \frac{x^3 (v-x)}{v p_1(s, u, v)} h_3(t, v) \right\} \\ &+ \frac{x^2 u (v-x)}{sv} \mathbf{cf}_{t-1} \left( \frac{r_1(s, t)}{q(t, s, u, v)} - \frac{1}{p_1(s, u, v)} \right) g_2(v, s, t) \\ &+ \mathbf{cf}_{t-1} \left( \frac{x^2 (t-x)}{t q(t, s, u, v)} + \frac{x^2}{p_1(s, u, v)} \right) \{r_1(u, v) g_2(t, u, v) - xv h_4(u, t)\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя (3.3) и (3.7) в (3.5), получаем

$$\begin{aligned}
\Psi_2(t, u, v)g_2(t, u, v) &= \frac{x(v-x)}{v r_1(u, v)}h_3(t, v) + \frac{xv\Psi_2(t, u, v)}{r_1(u, v)}h_4(u, t) \\
&+ \mathbf{cf}_{s-1} \left\{ \frac{x^2 v}{tu} \left( \frac{p_1(u, s, t)}{q(t, s, u, v)} - \frac{1}{r_1(u, v)} \right) g_1(u, s, t) + \frac{x^2 p_2(v, s, t)}{t q(t, s, u, v)} g_2(v, s, t) \right\} \\
&+ \frac{x^2}{u} \mathbf{cf}_{s-1} \left( \frac{p_1(s, u, v)}{q(t, s, u, v)} + \frac{t}{t-x} \right) g_1(s, u, v) - \frac{x^3(v-x)}{v} \mathbf{cf}_{s-1} \frac{h_4(s, v)}{q(t, s, u, v)} \\
&- \frac{x^3 v}{u} \mathbf{cf}_{s-1} \left( \frac{1}{q(t, s, u, v)} + \frac{1}{p_2(t, u, v)} \right) h_5(s, u).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Подставляя (3.3) и (3.14) (где  $t, s, u, v$  заменены на  $v, u, s, t$  соответственно) в (3.9), получаем

$$\begin{aligned}
\Psi_{13}(s, v)h_4(s, v) &= \frac{x^2 v \delta_{\lambda, 2}}{s(v-x)} + \frac{x}{sv} \mathbf{cf}_{u-1} \Psi_1(s, u, v)g_1(s, u, v) + \frac{x}{s} \mathbf{cf}_{t-1} \Psi_2(v, s, t)g_2(v, s, t) \\
&- \frac{x^3}{s} \mathbf{cf}_{t-1 u-1} \left\{ \left( \frac{v}{s(v-x)} + \frac{p_1(u, s, t)}{s q(t, s, u, v)} \right) g_1(u, s, t) + \frac{p_2(t, u, v)}{v q(t, s, u, v)} g_2(t, u, v) \right\} \\
&+ \mathbf{cf}_{u-1} \left( \frac{x^2 v}{s(v-x)} + \frac{x^4}{s^2} \Phi_1(s, u, v) \right) h_5(s, u) + \mathbf{cf}_{t-1 u-1} \frac{x^4(t-x)}{t s q(t, s, u, v)} h_4(u, t).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Подставляя (3.3), (3.13) и (3.13), где  $t, s, u, v$  заменены на  $v, u, s, t$ , в (3.10), получаем

$$\begin{aligned}
\Psi_{14}(s, u)h_5(s, u) &= \frac{x}{u} \mathbf{cf}_{v-1} \Psi_1(s, u, v)g_1(s, u, v) + \frac{x}{s} \mathbf{cf}_{t-1} \Psi_1(u, s, t)g_1(u, s, t) \\
&+ \mathbf{cf}_{v-1} \left( x^2 + \frac{x^4(v-x)}{sv} \Phi_1(s, u, v) \right) h_4(s, v) + \mathbf{cf}_{t-1} \left( x^2 + \frac{x^4(t-x)}{tu} \Phi_1(u, s, t) \right) h_4(u, t) \\
&- \mathbf{cf}_{t-1 v-1} \left\{ \frac{x^3}{u} \left( 1 + \frac{p_2(t, u, v)}{q(t, s, u, v)} \right) g_2(t, u, v) + \frac{x^3}{s} \left( 1 + \frac{p_2(v, s, t)}{q(t, s, u, v)} \right) g_2(v, s, t) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Исключая  $h_2(u, v)$  из (3.12) и (3.16), получаем

$$j_2(v) = \mathbf{cf}_{s-1 u-1} \frac{x^2}{uv} g_1(s, u, v) + \mathbf{cf}_{u-1} \frac{x^3 \delta_{\lambda, 2}}{u r_1(u, v) \Psi_0(u)}. \tag{3.24}$$

Тогда (3.8) и (3.20)–(3.24) является системой из 6 уравнений на  $g_1, g_2, h_3, h_4, h_5, j_2$ . Наша конечная цель – это  $l_1$  и  $l_2$ . Ряд  $l_1$  уже выражен через  $j_2$  в (3.15). Исключая  $j_1$  из (3.19) и (3.11), можно выразить  $l_2$  через  $h_3$  и  $h_4$ . Таким образом,

$$l_1 = x \mathbf{cf}_{v-1} j_2(v), \quad l_2 = x^4 \mathbf{cf}_{t-1 v-1} h_3(t, v) + x^2 \mathbf{cf}_{s-1 v-1} h_4(s, v) + \delta_{\lambda, 1}. \tag{3.25}$$

Заметим также, что (3.24) в сочетании с (3.25) дает

$$l_1 = \mathbf{cf}_{(suv)-1} \frac{x^3}{uv} g_1(s, u, v) + x^5 \delta_{\lambda, 2}.$$

**3.5. Вычисление  $c_5$ .** Вычисление  $c_5$ , как и его обоснование, такое же, как в пп. 2.5 и 2.6, и мы его изложим вкратце, опуская детали. Для фиксированного  $x \in [0, \beta_5^{1/5} + \varepsilon]$  мы заменяем “ $\mathbf{cf}$ ” на интегралы Коши в (3.8) и (3.20)–(3.24), дискретизируем получившуюся систему интегральных уравнений, решаем ее, подставляем решение в (3.19) и (3.11) и находим  $\mathbf{L}$  из (3.2). Этим способом мы численно решаем уравнение  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{L}(x)) = 0$ , после чего вычисляем  $c_5$  по формуле (3.1).

## 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

**4.1. Повышение скорости сходимости римановых сумм.** Пусть  $f$  – аналитическая функция на  $\mathbb{T}$ . Скорость сходимости римановых сумм к интегралу Коши

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(e^{2\pi i k/n}) \longrightarrow \int_0^1 f(e^{2\pi i t}) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z} dz$$

зависит от ширины кольца вида  $1/r < |z| < r$ , на которое аналитически продолжается  $f$ ; см. [7, лемма 5.1]. Поэтому если  $\mu$  – дробно-линейное преобразование, такое, что  $\mu(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$  и функция  $f \circ \mu$  продолжится в более широкое кольцо такого вида, то после замены переменных  $z = \mu(\zeta)$  сходимость улучшается. Точность вычисления функций  $H(x)$  (в [7, §4.4]),  $J(x)$  (в §2) и  $L_{\lambda\mu}(x)$  (в §3) возросла почти вдвое после замены

$$z = (\zeta + b)/(b\zeta + 1) \quad (4.1)$$

при  $b = 1/3$ , примененной на всех этапах вычисления; см. средний столбец таблицы 1.

**Замечание 7.** Удивительным образом верхние оценки  $L^2$ -нормы интегральных ядер в п. 2.6 ухудшаются после замены (4.1) при  $b > 0$ , но улучшаются при  $b < 0$ .

Другой простой способ улучшить сходимость (мы назовем его  $1/4$ -сдвигом) основан на том, что все рассматриваемые ряды имеют вещественные коэффициенты. А именно, пусть  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m z^m$  – ряд Лорана функции  $f$ . Поскольку  $f$  аналитична в окрестности  $\mathbb{T}$ , имеет место оценка  $|c_m| = o(r^{|m|})$ ,  $0 < r < 1$ . Положим  $\omega = e^{2\pi i/n}$ . Тогда ошибка приближения для римановой суммы по узлам  $\omega^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , равна

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(e^{2\pi i t}) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\omega^k) &= c_0 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\omega^k) = c_0 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \omega^{km} \\ &= c_0 - \frac{1}{n} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \sum_{k=1}^n \omega^{km} = c_0 - \sum_{m \equiv 0(n)} c_m = o(r^n), \end{aligned}$$

а если все коэффициенты  $c_m$  вещественны, то ошибка приближения вещественной части римановой суммы по сдвинутым узлам  $\omega_0 \omega^k$ , где  $\omega_0 = e^{2\pi i/4n}$  (и значит,  $\omega_0^n = i$ ), равна

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(e^{2\pi i t}) dt - \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n f(\omega_0 \omega^k) &= c_0 - \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n f(\omega_0 \omega^k) \\ &= c_0 - \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \omega_0^m \omega^{km} = c_0 - \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \omega_0^m \sum_{k=1}^n \omega^{km} \\ &= -\operatorname{Re}(\dots + ic_{-3n} - c_{-2n} - ic_{-n} + ic_n - c_{2n} - ic_{3n} + \dots) = o(r^{2n}). \end{aligned}$$

Покажем эффективность этих улучшений на следующем примере. В [7, рис. 7] приведена функция  $H$  на языке *Wolfram Mathematica*, вычисляющая  $n$ -е приближение числа  $H(x)$  для заданного  $x$ , где  $H$  – функция, для которой первый вещественный корень  $x_0$  уравнения  $H(x) = 1$  определяет  $c_3$  по формуле  $c_3 = -\frac{2}{3} \log_2 x_0$ . В [7, табл. 7] приведены результаты вычисления этой программой разности  $H(x_0) - 1$  для  $n = 100, 200, \dots, 1200$ . Они воспроизведены в левом столбце таблицы 1 настоящей статьи.

На рис. 8 приведена модификация кода из [7], реализующая вышеуказанные улучшения сходимости. Как видно из таблицы 1, эффект от обеих модификаций существенен. В среднем столбце приведены результаты программы на рис. 8 без  $1/4$ -сдвига, т.е. с заменой “omega0=...” на “omega0=1” (мы использовали  $x_0$ , вычисленное до 1100 знаков).

```

P = u^2*t^2-(u+t)u*t*x+(1-t^3-u^3)u*t*x^2+(t^4+u^4)x^3;
Psi = Function[{x0,t0,prec},Module[{P0,u0,i},
  P0=P/.{x->x0,t->t0}; u0 = NRoots[0==P0,u,prec];
  u0=Sort[Table[{Abs[u0[[i,2]]],u0[[i,2]]},{i,4}]];
  1-x0^2(t0-x0)Sum[(u^3/D[P0,u])/u->u0[[i,2]},{i,2}]];

H2 = Function[{x3,n,prec}, Module[
{x0,z,P0,Id,K,F,G,j,k,Tj,Uk,PsiTj,Pjk,dTj,dUk,b=1/3,zeta,omega0},
x0=N[x3^(1/3),prec]; b=1/3;
zeta=N[Exp[2Pi*I/n],prec]; omega0=N[Exp[Pi*I/2/n],prec];
K=Id=IdentityMatrix[n]; F=K[[1]]; P0=P/.x->x0;
Do[ z=omega0*zeta^j; Tj=(z+b)/(z*b+1); PsiTj=Psi[x0,Tj,prec];
  F[[j]] = Tj^2/(Tj-x0)/PsiTj;
  Do[ z=omega0*zeta^k; Uk = (z+b)/(z*b+1);
    dUk = z(1-b^2)/(b*z+1)^2; Pjk=P0/.{t->Tj,u->Uk};
    K[[j,k]] = x0^2*Tj^3(Uk-x0)dUk/Pjk/PsiTj/n,
    {k,n}],
  {j,n}];
G = Inverse[Id-K].F;
Re[x0^2*Sum[z=omega0*zeta^k;G[[k]]z(1-b^2)/(b*z+1)/(z+b),{k,n}]/n]
]];

```

Рис. 8. Код из [7], улучшенный с помощью (4.1) и  $\frac{1}{4}$ -сдвига.

Таблица 1. Приближения разности  $H(x_0) - 1$ .  
 $b$  из (4.1);  $t_H$  и  $t_{H2}$  - время выполнения для H и H2.

$n$	H из [7]	$b = \frac{1}{3}$ , без $\frac{1}{4}$ -сдвига	H2 на рис. 8	$t_{H2}/t_H$
100	$1.44 \times 10^{-10}$	$-4.05 \times 10^{-21}$	$7.96 \times 10^{-30}$	1.19
200	$5.01 \times 10^{-22}$	$-6.95 \times 10^{-42}$	$3.60 \times 10^{-60}$	1.22
300	$1.73 \times 10^{-33}$	$-8.63 \times 10^{-63}$	$1.79 \times 10^{-90}$	1.31
400	$6.02 \times 10^{-45}$	$-9.56 \times 10^{-84}$	$9.35 \times 10^{-121}$	1.33
500	$2.09 \times 10^{-56}$	$-9.92 \times 10^{-105}$	$4.99 \times 10^{-151}$	1.37
600	$7.26 \times 10^{-68}$	$-9.88 \times 10^{-126}$	$2.71 \times 10^{-181}$	1.41
700	$2.52 \times 10^{-79}$	$-9.58 \times 10^{-147}$	$1.49 \times 10^{-211}$	1.47
800	$8.78 \times 10^{-91}$	$-9.09 \times 10^{-168}$	$8.25 \times 10^{-242}$	1.57
900	$3.06 \times 10^{-102}$	$-8.49 \times 10^{-189}$	$4.61 \times 10^{-272}$	1.66
1000	$1.06 \times 10^{-113}$	$-7.84 \times 10^{-210}$	$2.59 \times 10^{-302}$	2.01
1100	$3.72 \times 10^{-125}$	$-7.16 \times 10^{-231}$	$1.45 \times 10^{-332}$	2.01
1200	$1.29 \times 10^{-136}$	$-6.49 \times 10^{-252}$	$8.27 \times 10^{-363}$	2.03

**4.2. Программные средства, использовавшиеся для решения больших систем линейных уравнений.** Системы линейных уравнений в [7] были не очень большими, и для их решения использовалась Wolfram Mathematica (см. [7, рис. 7] и рис. 8). Размер систем из настоящей статьи превышает возможности пакета Mathematica, и мы использовали MATLAB. Тексты программ (а также 1100 знаков числа  $c_3$ ) доступны по ссылке

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~orevkv/tr45.html>.

Для вычислений в §3 хватало стандартной разрядности, так как в любом случае было невозможно вычислить  $c_5$  с более высокой точностью из-за слишком быстрого роста числа уравнений. Что касается вычислений в §2, то, поскольку у нас не было доступа к версии MATLAB с неограниченной разрядностью, использовались совместно MATLAB и Mathematica. А именно, для решения матричного уравнения  $AX = B$  вычислялись последовательные приближения решения  $X_0, X_1, X_2, \dots$ , где  $X_0 = 0$ ,  $X_{k+1} = X_k + x_k$  и  $x_k$  – решение уравнения  $AX = B_k$ , найденное MATLAB'ом, а  $B_k$  – это разность  $B - AX_k$ , которую Mathematica вычисляла с требуемой высокой точностью.

При вычислении  $B_k$  не требовалось сохранять в памяти элементы матрицы  $A$  большой разрядности, так как каждый элемент использовался только один раз. Поскольку система уравнений (2.11)–(2.13) разреженная (размерность порядка  $n^2$ , а количество ненулевых элементов – порядка  $n^3$ ), Mathematica вычисляла  $B_k$  за приемлемое время.

## 5. ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

**5.1. Точные значения.** В [7, §2.2] мы сообщали о некоторых вычисленных точных значениях чисел  $f(m, n)$ . С тех пор мы доработали использовавшуюся для их вычисления программу на языке Си, а именно, оптимизировали распределение памяти (храня в большинстве случаев 32-битные смещения вместо 64-битных указателей) и распараллелили вычисления с помощью библиотеки pthread. Это позволило вычислить  $f(6, n)$  для  $n = 51, \dots, 74$ ,  $f(7, n)$  для  $n = 21, \dots, 38$ ,  $f(8, n)$  для  $n = 14, \dots, 22$ ,  $f(9, n)$  для  $n = 10, \dots, 14$  и  $f(10, 10)$ . В частности,

$$f(10, 10) = 149618279149336063611470297684372482142966337895951090699398812$$

(самое ресурсоемкое вычисление) и

$$\begin{aligned} f(6, 74) = & 11003439126736826379022902097610783003781798654205692030019324180445118 \\ & 30333800021120430306017131753558876942975300335453133989087039447873894 \\ & 00069135251552234037734742405444996579954965774712177539373757147267542 \\ & 4020011731373405247672299081300738745960922639298730311421288165457168, \end{aligned}$$

что дает  $c_{6,74} \approx 2.11018$ . Это наибольшая вычисленная емкость прямоугольника, но она меньше, чем  $c_5 \approx 2.11801$ . Программа на Си и все найденные точные значения доступны по ссылке

<https://www.math.univ-toulouse.fr/~orevkov/tr.html>.

(некоторые из них можно найти на сайте OEIS [10]: A082640, A296165, A351484–A351488).

**5.2. Эмпирические оценки.** В этом пункте мы обсуждаем эмпирические оценки чисел  $c_m$  на основании известных значений  $f(m, n)$ . Мы пользуемся методом, предложенным в [4, §6]. Для данного  $m$ , для которого известны значения  $f(m, 1), \dots, f(m, 2k + 2)$ , мы находим  $A$ ,  $a_1, \dots, a_k$  и  $b_1, \dots, b_k$ , такие, что

$$\frac{f(m, n + 1)}{f(m, n)} = A \frac{n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k}{n^k + b_1 n^{k-1} + \dots + b_k} \quad (5.1)$$

при  $n = 1, \dots, 2k + 1$ , и предполагаем, что (5.1) – хорошее приближение отношения  $f(m, n + 1)/f(m, n)$  при всех  $n$ . Если  $a_1 \neq b_1$ , из этого вытекает (см. [4, §6]), что

$$f(m, n) \sim \text{const} \cdot A^n n^\alpha, \quad \alpha = a_1 - b_1.$$

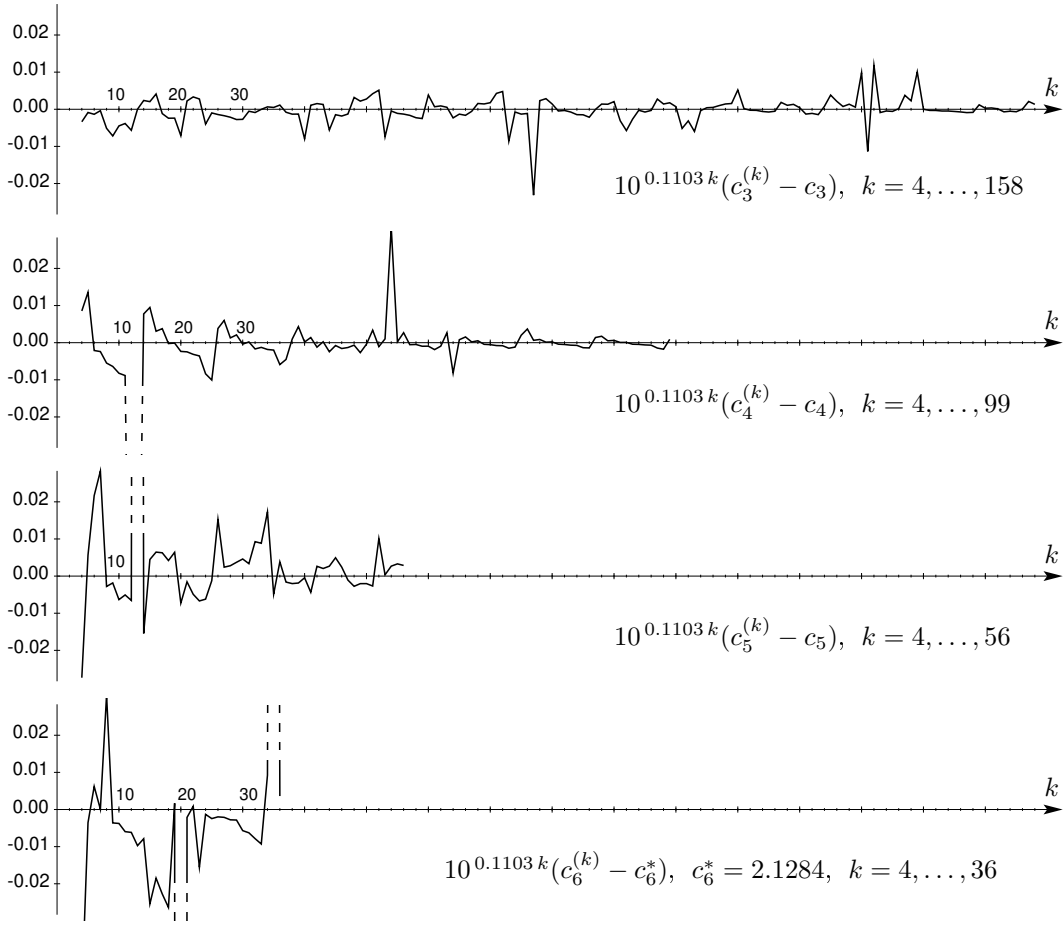


Рис. 9. Сходимость эмпирических оценок к  $c_3, c_4, c_5, c_6^*$ .

Обозначим через  $A_m^{(k)}$  и  $\alpha_m^{(k)}$  константы  $A$  и  $\alpha$ , найденные этим способом для данных  $m$  и  $k$ , и пусть  $c_m^{(k)} = \frac{1}{m} \log_2 A_m^{(k)}$ . Мы имеем

$$\begin{aligned}
 |c_3^{(399)} - c_3| &\approx 10^{-40}, & |c_4^{(99)} - c_4| &\approx 10^{-12}, & |c_5^{(56)} - c_5| &\approx 10^{-8}, \\
 |\alpha_3^{(399)} + 0.5| &\approx 10^{-35}, & |\alpha_4^{(99)} + 0.5| &\approx 10^{-8}, & |\alpha_5^{(56)} + 0.5| &\approx 10^{-5}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

На рис. 9 графически представлена разность  $c_m^{(k)} - c_m$  для  $m = 3, 4, 5$ . Мы видим, что для большинства значений  $k$  она не превышает  $10^{-2-0.11k}$ , хотя имеются редкие исключения, например,  $c_4^{(12)} = 2.0927$ ,  $c_5^{(13)} = 2.1725$ ,  $c_6^{(20)} = 2.0714$  и  $c_6^{(35)} = 2.1288$  (см. пунктирные линии на рис. 9). На основании этих данных, можно ожидать, что  $c_6^* = 2.1284$  и  $c_7^* = 2.136$  являются хорошими приближениями  $c_6$  и  $c_7$  (см. рис. 9 и таблицы 2 и 3). Экстраполяция с помощью (5.1) найденных значений и эмпирических оценок величин  $\lim_n f(m, n)^{1/n}$  для  $m = 0, \dots, 7$  (а также для  $m = 1, \dots, 6$  и  $m = 2, \dots, 7$ ), дает основания ожидать, что  $2.2 < c < 2.3$ .

Таблица 2. Эмпирические оценки для  $c_6$ .

$k$	$c_6^{(k)}$	$k$	$c_6^{(k)}$	$k$	$c_6^{(k)}$	$k$	$c_6^{(k)}$
5	2.127148	13	2.127743	21	2.1283724	29	2.1283929
6	2.130178	14	2.127968	22	2.1284091	30	2.1283885
7	2.128419	15	2.127263	23	2.1282670	31	2.1283897
8	2.134234	16	2.127728	24	2.1283909	32	2.1283895
9	2.127842	17	2.127728	25	2.1283861	33	2.1283899
10	2.127929	18	2.127766	26	2.1283909	34	2.1284081
11	2.127791	19	2.128433	27	2.1283921	35	2.1287987
12	2.127888	20	2.071426	28	2.1283915	36	2.1284021

Таблица 3. Эмпирические оценки для  $c_7$ .

$k$	$c_7^{(k)}$	$k$	$c_7^{(k)}$	$k$	$c_7^{(k)}$	$k$	$c_7^{(k)}$	$k$	$c_7^{(k)}$
4	2.13722	7	2.13348	10	2.12209	13	2.13657	16	2.13628
5	2.14004	8	2.15126	11	2.13562	14	2.13599	17	2.13629
6	2.14037	9	2.12815	12	2.13597	15	2.13657	18	2.13646

Вторая строка в (5.2) дает основание предположить, что  $f(m, n) \sim \text{const} \cdot 2^{c_m m n} / \sqrt{n}$  при всех  $m$ . Вычисления показывают, что сходимость  $\alpha_m^{(k)}$  к  $-1/2$  не хуже сходимости чисел  $c_m^{(k)}$ . При  $m = 1$  данная асимптотика следует из формулы Стирлинга:  $f(1, n) = \binom{2n}{n} \sim 4^n / \sqrt{\pi n}$ .

Отметим, что обычно такая асимптотика указывает на то, что первая вещественная особенность  $x = x_0$  производящей функции есть точка ветвления, в которой ряд Лорана – Пуанкаре начинается с члена  $C(x - x_0)^{-1/2}$  (см., например, [2, рис. VII.24], [8, стр. 596]).

Множитель  $n^{-1/2}$  может также означать, что имеет место какой-то вариант центральной предельной теоремы для чисел  $j_{a,n-a}^*$  (см. п. 2.1) и их аналогов для  $m > 4$ .

**5.3. Гипотеза выпуклости.** В [7, §2.3] мы сформулировали следующую гипотезу выпуклости:  $f(m, n - 1)f(m, n + 1) \geq f(m, n)^2$  для всех  $m, n \geq 1$ . Из нее следует оценка

$$c_m \geq (n + 1)c_{m,n+1} - nc_{m,n} \tag{5.3}$$

для всех  $m, n$ , в частности,  $c \geq c_{115} \geq 5c_{115,5} - 4c_{115,4} \approx 2.16848$ . Новые вычисленные точные значения чисел  $f(m, n)$  также подтверждают эту гипотезу.

Переходя к пределу в (5.3), получаем  $c \geq (n + 1)c_{n+1} - nc_n$ . Для найденных значений чисел  $c_2, \dots, c_5$  это дает гипотетические нижние оценки

$$c \geq 3c_3 - 2c_2 \approx 2.14641, \quad c \geq 4c_4 - 3c_3 \approx 2.16413, \quad c \geq 5c_5 - 4c_4 \approx 2.17436,$$

и  $c \geq 6c_6^* - 5c_5 \approx 2.1803$  (см. п. 5.2), которые согласуются с ожидаемыми оценками  $2.2 < c < 2.3$  из п. 5.2 (напомним, что лучшие доказанные оценки – это  $2.118 < c < 2.777$ ).

## 6. НЕПРИМИТИВНЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Обозначим число всех (не только примитивных) целочисленных триангуляций прямоугольника  $m \times n$  через  $f^{\text{np}}(m, n)$ . В [7, §6] для этих чисел дана (довольно грубая)

верхняя оценка. В этом пункте мы докажем для них асимптотическую нижнюю оценку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\text{np}}(n, n)^{1/n^2} \geq 5. \quad (6.1)$$

Действительно, для фиксированных  $n$  и  $k \leq n$  рассмотрим триангуляции прямоугольника  $[0, n]^2$ , такие, что каждый вертикальный отрезок  $\{m\} \times [0, n]$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , является объединением  $k$  ребер триангуляции. Имеется  $\binom{n}{k-1}$  способов выбрать вершины на каждой вертикальной прямой, и для каждого выбора вершин есть  $\binom{2k}{k}$  триангуляций каждой вертикальной полосы; см. [3, уравнение (2.1)]. Таким образом, суммарное число таких триангуляций равно  $\binom{n}{k-1}^{n+1} \binom{2k}{k}^n$ . При  $k = \lfloor xn \rfloor$ ,  $x \in [0, 1]$ , обозначим это число через  $f_x(n, n)$ . По формуле Стирлинга получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln f_x(n, n)^{1/n^2} = x \ln 4 - x \ln x - (1-x) \ln(1-x).$$

Первые две производные правой части равны  $\ln(4-4x) - \ln x$  и  $1/(x-x^2)$ , следовательно, ее максимум достигается при  $x = 4/5$  и он равен  $\ln 5$ , откуда вытекает (6.1).

Несложно проверить, что предел будет тем же, если рассматривать все целочисленные триангуляции прямоугольника  $[0, n]^2$ , у которых каждая вертикальная полоса ширины 1 является объединением треугольников.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. E. Anclin, *An upper bound for the number of planar lattice triangulations*, J. Combin. Theory Ser. A, **103**:2 (2003), 383–386.
- [2] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009
- [3] V. Kaibel and G. M. Ziegler, *Counting lattice triangulations*, Surveys in combinatorics 2003 (Univ. of Wales, Bangor, UK 2003), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 307, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2003, pp. 277–307.
- [4] S. Lando and A. Zvonkin, *Meanders*, Selecta Math. Soviet., **11**:2 (1992), 117–144.
- [5] J. Matoušek, P. Valtr and E. Welzl, *On two encodings of lattice triangulations*, Manuscript, 2006.
- [6] S. Yu. Orevkov, *Asymptotic number of triangulations with vertices in  $\mathbb{Z}^2$* , J. Combin. Theory Ser. A, **86**:1 (1999), 200–203.
- [7] С. Ю. Оревкин, *Перечисление целочисленных триангуляций: уравнения Фредгольма в комбинаторике*, Матем. сб., **213**:11 (2022), 50–78.
- [8] R. Otter, *The Number of Trees*, Ann. Math., **49** (1948), 582–599.
- [9] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики 1. Функциональный анализ*, М., Мир, 1977.
- [10] N. J. A. Sloane, *The Online Encyclopedia of Integer Sequences*, <https://oeis.org>.
- [11] E. Welzl, *The number of triangulations on planar point sets*, Graph drawing, Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4372, Springer, Berlin 2007, pp. 1–4.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН, МОСКВА, РОССИЯ;

IMT, L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE, TOULOUSE, FRANCE.

*Email address:* `stepan.orevkv@math.univ-toulouse.fr`