

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ: УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА В КОМБИНАТОРИКЕ

С. Ю. ОРЕВКОВ

А н н о т а ц и я . Пусть $f(m, n)$ — число примитивных целочисленных триангуляций прямоугольника $m \times n$. Мы вычисляем пределы $\lim_n f(m, n)^{1/n}$ при $m = 2$ и 3 . При $m = 2$ мы находим точное значение предела, равное $(611 + \sqrt{73})/36$. При $m = 3$ мы находим предел в терминах интегрального уравнения Фредгольма на некоторые производящие функции. Это дает алгоритм, вычисляющий значение предела с любой точностью за полиномиальное время (полиномиальное относительно количества найденных цифр).

1. ВВЕДЕНИЕ

Целочисленная триангуляция (lattice triangulation) многоугольника в \mathbb{R}^2 — это триангуляция с вершинами в \mathbb{Z}^2 . Как показано в [3], целочисленные триангуляции играют важную роль в алгебраической геометрии (см. также [9]). Целочисленная триангуляция называется *примитивной* (или *унимодулярной*), если каждый ее треугольник примитивен, т. е. имеет минимально возможную площадь $1/2$ (является сдвигом треугольника $[(0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)]$, где $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1$). Обозначим число примитивных целочисленных триангуляций прямоугольника $m \times n$ через $f(m, n)$. Пусть

$$c(m, n) = \frac{\log_2 f(m, n)}{mn}, \quad c_m = \sup_n c(m, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(m, n),$$
$$c = \sup_m c_m = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m = \sup_n c(n, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(n, n).$$

Существование пределов доказано в [4; предложение 3.6]. Число $c(m, n)$ названо в [4] *емкостью* прямоугольника $m \times n$. В [8] я получил верхнюю оценку $c < 6$ (которая автоматически улучшается до $c < \log_2 27 = 4.755$: достаточно просто не различать случаи $v_j = 1$ и $v_j = 2$ в обозначениях из [8]). В дальнейшем намного лучшую оценку $c < 3$, а также $c_m < 3 - 1/m$, доказал Анклин [1]. Еще лучшая оценка $c < 4 \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \log_2 6.854 = 2.777$ получена в [7] и анонсирована в [12] (я не видел рукописи [7], но профессор Велцль любезно прислал мне слайды своего доклада [13], в которых ясно изложено доказательство этой оценки).

Легко видеть, что

$$f(1, n) = C_{2n}^n, \quad \text{откуда следует } c_1 = 2, \quad (1)$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

что дает нижнюю оценку $c \geq 2$. В [4] также вычислено, что $c \geq c_4 \geq c(4, 32) = 2.055702$. В [4; §2.1] написано: «Для $f(2, n)$ у нас нет явной формулы и мы не умеем точно вычислять асимптотику». У нас по-прежнему нет явной формулы для $f(2, n)$, но мы приводим главный член асимптотики:

Теорема 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2, n)^{\frac{1}{2^n}} = \sqrt{\alpha} = 4.148440\dots$, где

$$\alpha = \frac{611 + \sqrt{73}}{36}, \quad \text{следовательно,} \quad c_2 = \frac{1}{2} \log_2 \alpha = 2.05256897$$

Точное значение c_3 в некотором смысле дано в предложении 4.5, где мы выражаем c_3 в терминах решения уравнения Фредгольма на производящие функции. В частности, предложение 4.5 дает алгоритм, позволяющий вычислить c_3 с точностью до n знаков за время, полиномиальное по n . Код на языке Mathematica, реализующий основной шаг этого алгоритма, приведен на рис. 7 в конце §4.

Теорема 2. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(3, n)^{\frac{1}{3^n}}$ с точностью до 360 знаков равен

4.239369481548025671877625742045235772100695711251795499830801
 687833358238276728987837054831763341276708855553395893005289
 580195934799338289257489707990192054275721787374165246347114
 466096241741151814326914780021501337938335813142441896953051
 597942032082556780952912032761797534112146994900056374798271
 988378451540168358202181556482461979420039542105330977266751

и значит, $c_3 = 2.0838497\dots$

Мы вычислили значение c_3 с такой высокой точностью в надежде найти для него алгебраическое уравнение или связать его с какими-нибудь известными константами. Этого сделать пока не удалось.

В §2.2 приведены результаты вычисления точных значений чисел $f(m, n)$ для некоторых m и n . В частности, они дают оценку $c \geq c(5, 115) = 2.10449551\dots$

В §6 приведена асимптотическая верхняя оценка числа всех (необязательно примитивных) целочисленных триангуляций. Скорее всего она далека от оптимальной.

Остальная часть статьи (всё, кроме §2.2 и §6) посвящена доказательству теорем 1 и 2. А именно, в §2.1 приведены рекуррентные формулы для примитивных триангуляций многоугольников, лежащих в полосе фиксированной ширины. Они похожи на формулы в [4], но по нашему мнению проще и эффективнее. Теоремы 1 и 2 доказываются в §3 и §4 соответственно с использованием соотношений на производящие функции, отвечающих рекурсии из §2.1. Как было сказано выше, c_3 выражается через решение интегрального уравнения Фредгольма на интегралы Коши от производящих функций. В §5 оценивается ошибка приближения для самого простого численного метода решения уравнения Фредгольма с аналитическим ядром.

Я благодарю рецензента за исправления и ценные замечания.

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛОСЫ ФИКСИРОВАННОЙ ШИРИНЫ

2.1. Рекуррентные соотношения. Для многоугольника $P \subset \mathbb{R}^2$ назовем *верхней частью* его границы множество $\{(x, y) \in P \mid y' > y \Rightarrow (x, y') \notin P\}$, а *вертикальной стороной* назовем сторону, лежащую на некоторой прямой вида $\{x = x_0\}$. Пусть \mathcal{T} — триангуляция многоугольника P в \mathbb{R}^2 . Будем говорить, что Q есть *элемент замощения* (tile) для \mathcal{T} в следующих трех случаях:

- (1) Q — треугольник из \mathcal{T} без вертикальных сторон;
- (2) Q — треугольник из \mathcal{T} с вертикальной стороной, лежащей на границе многоугольника P ;
- (3) Q — объединение двух треугольников из \mathcal{T} с общей вертикальной стороной.

Назовем многоугольник *y-выпуклым*, если его пересечение с любой прямой $x = \text{const}$ либо пусто, либо является точкой или отрезком.

Лемма 2.1. Пусть \mathcal{T} — триангуляция *y-выпуклого* многоугольника P в \mathbb{R}^2 . Тогда существует Q — элемент замощения для \mathcal{T} — такой, что вся верхняя часть его границы лежит на границе многоугольника P .

Proof. Пусть Γ_P — верхняя часть границы P . Пусть Q_1, \dots, Q_n — все элементы замощения для \mathcal{T} , у которых хотя бы одна сторона лежит на Γ_P . Пусть Γ_i — объединение сторон элемента Q_i , лежащих на Γ_P . Ясно, что Γ_i — либо сторона Q_i , либо объединение двух его смежных сторон. Ясно также, что проекции множеств Γ_i на ось x имеют попарно непересекающиеся внутренности, следовательно, мы можем предполагать, что $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ занумерованы слева направо. Скажем, что элемент Q_i *заслонен слева* (соотв. *заслонен справа*), если верхняя часть его границы содержит отрезок I такой, что $I \not\subset \Gamma_P$ и I лежит слева (соотв. справа) от Γ_i ; см. рис 1. Ясно, что ни один из элементов Q_1, \dots, Q_n не может быть заслонен и справа, и слева одновременно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что хотя бы один из элементов замощения не заслонен справа. Пусть i_0 — минимальное число такое, что Q_{i_0} не заслонен справа. Тогда Q_{i_0} — искомый элемент, у которого верхняя часть границы лежит в Γ_P . В самом деле, по определению он не заслонен справа. Он также не может быть заслонен слева, поскольку иначе Q_{i_0-1} не был бы заслонен справа, что противоречило бы минимальности числа i_0 . \square

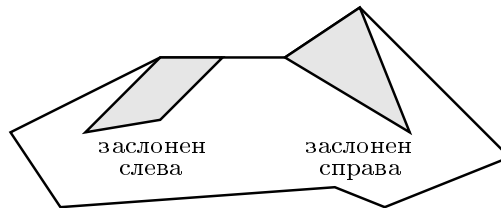


Рис. 1

Фиксируем теперь целое число $m > 0$ и будем рассматривать примитивные целочисленные триангуляции многоугольников, расположенных в вертикальной полосе $\{0 \leq x \leq m\}$ и ограниченных графиками непрерывных кусочно-линейных функций.

По аналогии с терминологией, введенной в [4, §2.2], будем говорить, что функция $\varphi : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$ *допустима*, если она непрерывна, кусочно-линейна и ее график является объединением отрезков с концами в \mathbb{Z}^2 . Фиксируем допустимую функцию φ_0 . Функцию $\varphi : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$ назовем φ_0 -*допустимой*, если она допустима и $\varphi(x) \geq \varphi_0(x)$ при всех $x \in [0, m]$. Назовем φ_0 -*допустимой фигурой* (φ_0 -admissible shape) многоугольник S вида $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq m, \varphi_0(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$ для некоторой φ_0 -допустимой функции φ .

По аналогии с вышеприведенным определением элемента замощения для триангуляции будем говорить, что Q есть *примитивный целочисленный элемент замощения*, в следующих трех случаях:

- (1) Q — примитивный целочисленный треугольник без вертикальных сторон;
- (2) Q — примитивный целочисленный треугольник с вертикальной стороной на границе полосы $0 \leq x \leq m$;
- (3) $Q = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где Δ_1 и Δ_2 — примитивные целочисленные треугольники такие, что $\Delta_1 \cap \Delta_2$ — их общая вертикальная сторона.

Примитивный целочисленный элемент замощения Q назовем P -*максимальным* для многоугольника P , если $Q \subset P$ и верхняя часть границы Q лежит в верхней части границы P . Скажем, что S' является φ_0 -*допустимой подфигурой* φ_0 -допустимой фигуры S , если S' — замыкание множества $S \setminus (Q_1 \cup \dots \cup Q_n)$, где Q_1, \dots, Q_n суть S -максимальные примитивные целочисленные элементы замощения с попарно непересекающимися внутренностями. Следуя [4], положим в этом случае $\#(S', S) = n$. Заметим, что отношение быть допустимой подфигурой нетранзитивно.

Обозначим число примитивных целочисленных триангуляций многоугольника P через $f^*(P)$. Когда P лежит в полосе $\{0 \leq x \leq m\}$, обозначим также через $f(P)$ число тех примитивных целочисленных триангуляций многоугольника P , у которых нет внутреннего ребра, проекция которого на ось x совпадает с отрезком $[0, m]$ (мы выбрали более простое обозначение для более сложного понятия, так как числа $f(P)$ будут использоваться чаще, чем числа $f^*(P)$).

Следующая лемма — это формула включений-исключений для данной ситуации. Доказательство то же, что и для [4, лемма 2.2].

Лемма 2.2. *Для любой φ_0 -допустимой фигуры S имеют место равенства*

$$f^*(S) = \sum_{S'} (-1)^{\#(S', S)-1} f^*(S') \quad \text{и} \quad f(S) = \sum_{S'} (-1)^{\#(S', S)-1} f(S'),$$

где левая сумма берется по всем собственным φ_0 -допустимым подфигурам фигуры S , а правая сумма — по тем собственным φ_0 -допустимым подфигурам фигуры S , верхняя часть границы которых содержит точку из $\mathbb{Z}^2 \cap \{0 < x < m\}$.

Пример 2.3. Пусть $m = 2$ и $\varphi_0 = 0$. Для целых неотрицательных a, b, c через $S_{a,b,c}$ обозначим φ_0 -допустимую фигуру, ограниченную сверху отрезками $[(0, a), (1, b)]$ и $[(1, b), (2, c)]$. Пусть $f_{a,b,c} = f(S_{a,b,c})$. Положим также $f_{a,b,c} = 0$ при $\min(a, b, c) < 0$. Тогда (см. рис. 2) рекуррентная формула из леммы 2.2 принимает вид

$$f_{a,b,c} = \begin{cases} f_{a-1,b,c} + f_{a,b-1,c} + f_{a,b,c-1} - f_{a-1,b,c-1}, & (a, b, c) \neq (0, 0, 0), \\ 1, & (a, b, c) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Пусть $F(x, y, z) = \sum_{a,b,c} f_{a,b,c} x^a y^b z^c$ — производящая функция. Тогда, суммируя рекуррентное соотношение по всем тройкам $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, получим

$$\begin{aligned} F(x, y, z) - 1 &= \sum f_{a-1,b,c} x^a y^b z^c + \sum f_{a,b-1,c} x^a y^b z^c + \dots \\ &= \sum f_{a,b,c} x^{a+1} y^b z^c + \sum f_{a,b,c} x^a y^{b+1} z^c + \dots \\ &= F(x, y, z)(x + y + z - xz), \end{aligned}$$

откуда $F(x, y, z) = 1/(1 - x - y - z + xz)$.

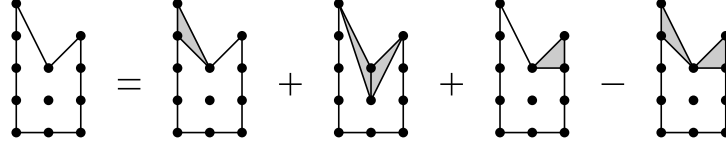


Рис. 2

Пример 2.4. Пусть φ_0 и $S_{a,b,c}$ будут, как в примере 2.3. Для неотрицательных a, c разной четности через $S'_{a,c}$ обозначим φ_0 -допустимую фигуру, ограниченную сверху отрезком $[(0, a), (2, c)]$. Положим $f_{a,b,c}^* = f^*(S_{a,b,c})$ и $g_{a,c}^* = f^*(S'_{a,c})$. Положим также $f_{a,b,c}^* = 0$ при $\min(a, b, c) < 0$ и $g_{a,c}^* = 0$ при $\min(a, c) < 0$ или $a \equiv c \pmod 2$. Тогда при $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ рекуррентное соотношение из леммы 2.2, примененное к $S_{a,b,c}$, имеет вид

$$f_{a,b,c}^* = f_{a-1,b,c}^* + f_{a,b-1,c}^* + f_{a,b,c-1}^* - f_{a-1,b,c-1}^* + \chi_{a,b,c} g_{a,c}^*,$$

где $\chi_{a,b,c} = 1$ при $2b = a + c + 1$ и $\chi_{a,b,c} = 0$ иначе. Обозначим через $F^*(x, y, z)$ и $G^*(x, z)$ соответствующие производящие функции. Тогда (ср. с примером 2.3)

$$F^*(x, y, z) - 1 = F^*(x, y, z)(x + y + z - xz) + \sum \chi_{a,b,c} g_{a,c}^* x^a y^b z^c,$$

и при этом сумма в правой части равна

$$\sum_{a,c} g_{a,c}^* x^a y^{(a+c+1)/2} z^c = y^{1/2} \sum_{a,c} g_{a,c}^* (xy^{1/2})^a (y^{1/2}z)^c = y^{1/2} G^*(xy^{1/2}, y^{1/2}z),$$

что дает соотношение

$$F^*(x, y, z)(1 - x - y - z + xz) = 1 + y^{1/2} G^*(xy^{1/2}, y^{1/2}z).$$

Применим теперь рекуррентное соотношение к $S'_{a,c}$. Единственной допустимой подфигурой фигуры $S'_{a,c}$ является $S_{a,(a+c-1)/2,c}$, следовательно, соотношение для $S'_{a,c}$ имеет вид $g_{a,c}^* = f_{a,(a+c-1)/2,c}^*$. В терминах производящих функций это означает

$$\begin{aligned} G^*(x, z) &= \sum_{a,c} f_{a,(a+c-1)/2,c}^* x^a z^c = \text{coef}_{u^0} \left[\sum_{a,b,c} f_{a,b,c}^* x^a u^{2b-a-c+1} z^c \right] \\ &= \text{coef}_{u^0} \left[u \sum_{a,b,c} f_{a,b,c}^* (x/u)^a (u^2)^b (z/u)^c \right] = \text{coef}_{u^0} (u F^*(x/u, u^2, z/u)). \end{aligned}$$

2.2. Некоторые точные значения $f(m, n)$.

Рекуррентные соотношения леммы 2.2 дают алгоритм вычисления $f(m, n)$ для малых m и n , аналогичный алгоритму, описанному в [4, §2.2]. Мы произвели вычисления по этому алгоритму, и можно видеть из таблицы 1, что нам удалось продвинуться намного дальше по сравнению с [4]. Этому есть три причины, влияние которых более или менее сопоставимо.

Таблица 1

Емкости из [4]		Емкости из данной статьи		
$c_1 = 2.0000$	$c_{4,32} = 2.0557$	$c_1 = 2.0000$	$c_{4,200} = 2.0946$	$c_{7,20} = 2.0813$
$c_{2,375} = 2.0441$	$c_{5,12} = 2.0175$	$c_2 = 2.0526$	$c_{5,115} = 2.1045$	$c_{8,13} = 2.0669$
$c_{3,60} = 2.0275$	$c_{6,7} = 1.9841$	$c_3 = 2.0838$	$c_{6,50} = 2.1024$	$c_{9,9} = 2.0490$

Первая причина (очевидная) в том, что компьютеры стали более мощными. Вторая причина в том, что мы использовали другое определение допустимой фигуры, что позволило в 3^{m-1} раз сократить используемую память, а это довольно существенно при $m = 9$ (как справедливо отмечено в [4], для алгоритмов такого рода «узкое место (*bottleneck*) в вычислениях — это всегда память»). Третья причина в том, что вместо длинной арифметики мы использовали вычисления по модулю различных простых чисел с последующим восстановлением результата при помощи китайской теоремы об остатках. Этот прием позволил «конвертировать» память во время, нехватка которого была не столь критична.

Мы вычислили $f(3, n)$ до $n = 600$ и $f(4, n)$ до $n = 200$. Точное значение $f(3, 600)$ имеет 1127 цифр и оно дает $c_{3,600} = 2.07966\dots$ Сравнивая эту величину с пределом $c_3 = 2.08385$, мы видим, что сходимость очень медленная. Для $m = 4$ последнее найденное точное значение равно

$$\begin{aligned}
 f(4, 200) = & 262199334303965073140522141167072596609151907003573304927487 \\
 & 419128543906730659218480439253346584137204205604500628092962 \\
 & 697997426095545403404830271634194339979807927812812142668569 \\
 & 097560203843935394728621308903256950859658838687531965864231 \\
 & 570521446370439565640979852878302993978768696718322811686043 \\
 & 307749541067654061321020767838164602474781629699981105797912 \\
 & 385346265396601164596410043968216134349971638142523003353406 \\
 & 530183843913302635663917084864069175263416748948835535483336 \\
 & 4717309018125451550646500; \quad c(4, 200) = 2.09455\dots
 \end{aligned}$$

В таблицах 2–6 представлены некоторые другие результаты вычислений в том же виде, что и в [4]. Все вычисленные точные значения доступны на веб-странице <https://www.math.univ-toulouse.fr/~orevkv/tr.html>

Таблица 2

n	число примитивных триангуляций прямоугольника $5 \times n$	$c(5, n)$
1	252	1.5954
2	182132	1.7474
3	182881520	1.8297
4	208902766788	1.8802
5	260420548144996	1.9155
6	341816489625522032	1.9415
7	464476385680935656240	1.9615
8	645855159466371391947660	1.9773
9	913036902513499041820702784	1.9902
10	1306520849733616781789190513820	2.0008
11	1887591165891651253904039432371172	2.0098
12	2747848427721241461905176361078147168	2.0174
13	4024758386310801427793602374466243714608	2.0240
14	5924744736041718687622958191829471010847132	2.0298
15	8757956199571261116690226598764501142088496860	2.0348
16	12991215957916577635251095613859465176216530106080	2.0394
17	19327902156972014645215931908930612218954616366464668	2.0434
18	28828843648796117963238681180919362090157971920576213992	2.0470
\vdots	\vdots	\vdots
115	18700706608364882730712710491937598381242505216572196 74626658766824095096227084981348969054292582022965697 97536209347455134357618461876316197344892595460029612 59669310339853198410108464789290118181041289819323068 31435995596306245022821112218622320544399050742600358 31426475886050757674088153732325783413307209633451618 73035677107305109076541667755690839416820326596	2.1044

2.3. Гипотеза выпуклости для чисел $f(m, n)$. Следующая гипотеза подтверждается всеми вычисленными точными значениями чисел $f(m, n)$ (по соглашению $f(m, 0) = 1$).

Гипотеза 2.5. При всех $m, n \geq 1$ имеет место $f(m, n - 1)f(m, n + 1) \geq f(m, n)^2$.

Предложение 2.6. Если верна гипотеза 2.5, то $c_m \geq (n + 1)c(m, n + 1) - nc(m, n)$ при всех $m, n \geq 1$. В частности, из гипотезы 2.5 следовало бы, что $c \geq c_{115} \geq 5c(115, 5) - 4c(115, 4) = 2.1684837 \dots$

Доказательство. Положим $d(m, n) = \log_2 f(m, n + 1) - \log_2 f(m, n)$. Тогда из гипотезы 2.5 следует $d(m, n) \leq d(m, n + 1) \leq d(m, n + 2) \leq \dots$, откуда $\log_2 f(m, n + k) - \log_2 f(m, n) \geq kd(m, n)$. Деля это неравенство на km и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем $c_m \geq d(m, n)/m = (n + 1)c(m, n + 1) - nc(m, n)$. \square

Таблица 3

n	число примитивных триангуляций прямоугольника $6 \times n$	$c(6, n)$
1	924	1.6419
2	2801708	1.7848
3	12244184472	1.8617
4	61756221742966	1.9088
5	341816489625522032	1.9415
6	1999206934751133055518	1.9655
7	12169409954141988707186052	1.9840
8	76083336332947513655554918994	1.9987
9	484772512167266688498399632918196	2.0107
10	3131521959869770128138491287826065904	2.0206
11	20443767611927599823217291769468449488548	2.0289
12	134558550368400096364589064704536849131736024	2.0360
13	891513898740246853038326950483812868791208442016	2.0421
14	5938780824869668513059568892370775952933721743377354	2.0474
15	39738456660509411434285642370153959115525603844258515860	2.0521
⋮	⋮	⋮
50	733088849377871573475229677373109896289395791929 288892292779893207423013116473882328714681504398 803902969400882970235141773360945092837017232937 1864995986534063127990363531908201551410584718	2.1023

Таблица 4

n	число примитивных триангуляций прямоугольника $7 \times n$	$c(7, n)$
1	3432	1.6778
2	43936824	1.8134
3	839660660268	1.8862
4	18792896208387012	1.9307
5	464476385680935656240	1.9615
6	12169409954141988707186052	1.9840
7	332633840844113103751597995920	2.0014
8	9369363517501208819530429967280708	2.0152
9	269621109753732518252493257828413137272	2.0264
10	7880009979020501614060394747170100093057300	2.0357
11	233031642883906149386619647304562977586311372556	2.0435
12	6953609830304518024125545674642770582274167760568260	2.0501
13	208980994833103266855771653608680330159883854051275967612	2.0559
⋮	⋮	⋮
20	52066212145180734892042606757684021681422119 85233630730198914071476153736678384063983252	2.0813

Таблица 5

n	число примитивных триангуляций прямоугольника $8 \times n$	$c(8, b)$
1	12870	1.7064
2	698607816	1.8362
3	58591381296256	1.9056
4	5831528022482629710	1.9480
5	645855159466371391947660	1.9773
6	76083336332947513655554918994	1.9987
7	9369363517501208819530429967280708	2.0152
8	1191064812882685539785713745400934044308	2.0282
9	155023302820254133629368881178138076738462112	2.0388
10	20527337238769032315796332007167102984745417344046	2.0476
11	2753810232976351788081274786378733309236298426977203848	2.0550
12	373119178357778061717948099980013460229206030805799398500854	2.0613
13	509513267535377736964009580351904	
	45392087069512323700346738258636	2.0668

Таблица 6

n	число примитивных триангуляций прямоугольника $9 \times n$	$c(9, n)$
1	48620	1.7299
2	11224598424	1.8547
3	4140106747178292	1.9214
4	1835933384812941453312	1.9621
5	913036902513499041820702784	1.9902
6	484772512167266688498399632918196	2.0107
7	269621109753732518252493257828413137272	2.0264
8	155023302820254133629368881178138076738462112	2.0388
9	91376512409462235694151119897052344522006298310908	2.0489

3. ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ c_2 (ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1)

При $a, c \geq 0$, $a \equiv c \pmod{2}$, обозначим через $g_{a,c}^*$ число примитивных целочисленных триангуляций трапеции $T(a, c)$ с вершинами $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(1, 2)$, $(1 + c, 2)$ (если $a = 0$ или $c = 0$, то $T(a, c)$ вырождается в треугольник). При $a \not\equiv c \pmod{2}$ положим $g_{a,c}^* = 0$. Положим также $g_{0,0}^* = 1$. Обозначим через $G^*(x, z)$ производящую функцию для $g_{a,c}^*$:

$$\begin{aligned} G^*(x, z) &= \sum_{a,c \geq 0} g_{a,c}^* x^a z^c \\ &= 1 + (x^2 + xz + z^2) + (6x^4 + 10x^3z + 12x^2z^2 + 10xz^3 + 6z^4) + \dots \end{aligned}$$

(здесь $g_{a,c}^*$ и G^* определяются иначе, чем в примере 2.4). Обозначим через g_n^* коэффициент при x^{2n} в степенном ряде $G^*(x, x) = \sum_{n \geq 0} g_n^* x^{2n}$, т. е.

$$g_n^* = g_{0,2n}^* + g_{1,2n-1}^* + g_{2,2n-2}^* + \dots + g_{2n,0}^*.$$

Тогда теорема 1 непосредственно вытекает из лемм 3.1 и 3.2.

Лемма 3.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2, n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n^*)^{1/n}$.

Доказательство. Прямоугольник $2 \times (n - 1)$ можно поместить в $T(n, n)$, значит, $f(2, n - 1) < g_n^*$. С другой стороны, объединение $T(a, c)$ со своим образом при центральной симметрии относительно $(\frac{1}{2}(a + c + 1), 1)$ является трапецией $T(a + c, a + c)$, причем ее можно поместить в прямоугольник $2 \times (a + c + 1)$, следовательно, $(g_{a,c}^*)^2 < f(2, a + c + 1)$. Поэтому

$$\frac{g_n^*}{2n} = \sum_{a+c=2n} \frac{g_{a,c}^*}{2n} \leq \max_{a+c=2n} g_{a,c}^* \leq f(2, 2n + 1)^{1/2} \leq (g_{2n+2}^*)^{1/2},$$

откуда $\frac{1}{n}(\log g_n^* - \log(2n)) \leq \frac{1}{2n} \log f(2, 2n + 1) \leq \frac{1}{2n} \log g_{2n+2}^*$, что дает требуемый результат, так как $\frac{1}{n} \log(2n) \rightarrow 0$. \square

Лемма 3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (g_n^*)^{1/n} = \alpha$, где α такое, как в теореме 1.

Доказательство. При $a, c \geq 0$, $a \equiv c \pmod{2}$, пусть $g_{a,c}$ — число тех примитивных целочисленных триангуляций трапеции $T(a, c)$, у которых нет внутренних ребер вида $[(k, 0), (l, 2)]$, другими словами, примитивных целочисленных триангуляций, согласованных с изображенным на рис. 3(слева) разбиением трапеции $T(a, c)$ на два треугольника и две трапеции. Если $a + c$ нечетно, положим $g_{a,c} = 0$. По соглашению $g_{0,0} = 0$. Пусть $G(x, z) = \sum_{a,c \geq 0} g_{a,c} x^a z^c$ — производящая функция.

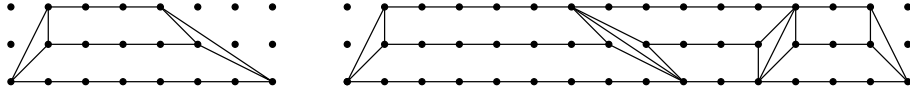


Рис. 3

Ребра вида $[(k, 0), (l, 2)]$ делят $T(a, c)$ на меньшие трапеции. Их можно преобразовать в трапеции $T(a_i, c_i)$, для которых $\sum a_i = a$ и $\sum c_i = c$, однозначно определенными автоморфизмами целочисленной решетки вида $(x, y) \mapsto (x + p_i y + q_i, y)$, где $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 3). Поэтому

$$g_{a,c}^* = \sum_{\substack{a_1 + \dots + a_k = a \\ c_1 + \dots + c_k = c}} \prod_{j=1}^k g_{a_j, c_j}, \quad \text{значит,} \quad G^*(x, z) = \frac{1}{1 - G(x, z)}. \quad (2)$$

Легко видеть (ср. с (1)), что числа примитивных целочисленных триангуляций узких (т. е. ширины 1) трапеций на рис. 3 — это биномиальные коэффициенты, следовательно, $G(x, z) = (x^2 + xz + z^2) + (5x^4 + 8x^3z + 9x^2z^2 + 8xz^3 + 5z^4) + \dots$

Легко также проверить, что $g_{a,c} = f_{a, (a+c)/2-1, c}$, где $f_{a,b,c} = f(S_{a,b,c})$ — числа, обсуждавшиеся в примере 2.3. Поэтому (ср. с примером 2.4)

$$\begin{aligned} G(x, z) &= \sum_{a,c} f_{a, (a+c)/2-1, c} x^a z^c = \text{coef}_{u^0} \left[\sum_{a,b,c} f_{a,b,c} x^a u^{2b-a-c+2} z^c \right] \\ &= \text{coef}_{u^0} \left[u^2 \sum_{a,b,c} f_{a,b,c} (x/u)^a u^{2b} (z/u)^c \right] = \text{coef}_{u^{-1}} \left[uF(x/u, u^2, z/u) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку функция $1/(1-x-y-z+xz) = 1/((1-x)(1-z)-y)$ аналитична в области $\max(|x|, |2y|, |z|) < 1/2$, ее степенной ряд $\sum f_{a,b,c} x^a y^b z^c$ (см. пример 2.3) сходится к ней в этой области. Поэтому при $0 < \varepsilon \ll r < 1/2$ ряд Лорана функции $F(x/u, u^2, z/u)$ сходится в области $\max(|x|, |z|) < \varepsilon, r-\varepsilon < |u| < r+\varepsilon$. Следовательно, при достаточно малых x имеем

$$G(x, x) = \text{coef}_{u^{-1}} [F(x/u, u^2, x/u)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=r} \frac{u du}{(1-x/u)^2 - u^2}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{u}{(1-x/u)^2 - u^2} &= -\frac{u}{2(u^2 + u - x)} - \frac{u}{2(u^2 - u + x)} \\ &= \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2(u_j^+ - u_j^-)} \left(\frac{u_j^+}{u - u_j^+} + \frac{u_j^-}{u - u_j^-} \right), \end{aligned}$$

где при достаточно малом $|x|$

$$u_1^\pm = -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4x}), \quad u_2^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4x}); \quad |u_j^+| > r, \quad |u_j^-| < r.$$

Таким образом,

$$G(x, x) = \sum_{j=1}^2 \text{Res}_{u=u_j^-} (\dots) = \sum_{j=1}^2 \frac{u_j^-}{2(u_j^+ - u_j^-)} = \frac{1}{4\sqrt{1-4x}} + \frac{1}{4\sqrt{1+4x}} - \frac{1}{2}.$$

График функции $y = G(x, x)$ лежит на алгебраической кривой

$$(2y+1)^2(16x^2-1)(4x^2+(y^2+y)(16x^2-1))+x^2=0.$$

В силу (2) полюсы функции $G^*(x, x)$ — это x -координаты пересечения этой кривой с прямой $y = 1$, т. е. корни многочлена $5184x^4 - 611x^2 + 18$, меньший из которых равен $\pm\sqrt{1/\alpha}$, а ветвление эта функция имеет в точках $\pm 1/4$. Следовательно, радиус сходимости ряда $G^*(x, x) = \sum g_n^* x^{2n}$ равен $\sqrt{1/\alpha}$, откуда $\lim_{n \rightarrow \infty} (g_n^*)^{1/n} = \alpha$. \square

4. Вычисление c_3 (доказательство теоремы 2)

4.1. Подготовка. Для $a, d \geq 0$ таких, что $a \not\equiv d+1 \pmod 3$, обозначим через $h_{a,d}^*$ число примитивных целочисленных триангуляций трапеции $T_3(a, d)$ с вершинами $(0, 0), (1, 3), (1+d, 3), (a, 3)$. Положим $h_{0,0}^* = 1$ и $h_{a,d}^* = 0$ при $a \equiv d+1 \pmod 3$ и рассмотрим производящую функцию

$$H^*(x) = \sum_n h_n^* x^n = \sum_{a,d \geq 0} h_{a,d}^* x^{a+d} = 1 + x + 3x^2 + 19x^3 + 125x^4 + \dots$$

Как и в начале доказательства леммы 3.2, определим $h_{a,d}$ как число примитивных триангуляций трапеции $T_3(a, d)$, не имеющих ребер вида $[(k, 0), (l, 3)]$, и рассмотрим производящую функцию

$$H(x) = \sum_n h_n x^n = \sum_{a,b \geq 0} h_{a,d} x^{a+d} = x + 2x^2 + 14x^3 + 86x^4 + 712x^5 + \dots$$

Эти функции удовлетворяют соотношению, аналогичному специализации соотношения (2) для $x = z$:

$$H^*(x) = 1/(1 - H(x)).$$

Действительно, ребра вида $[(k, 0), (l, 3)]$ разбивают $T_3(a, d)$ на меньшие трапеции. Каждая из них отображается на стандартную единственным автоморфизмом решетки вида $(x, y) \mapsto (x + py + q, y$ или $3 - y)$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ (в отличие от §2, здесь верхнее и нижнее основание трапеции могут меняться местами, из-за чего нет аналога соотношения (2) для производящих функций от двух переменных). На рис. 4 проиллюстрировано соотношение

$$h_3^* = h_{03}^* + h_{12}^* + h_{30}^* = h_{01}^3 + 2h_{01}(h_{11} + h_{20}) + (h_{03} + h_{12} + h_{30}) = h_1^3 + 2h_1 h_2 + h_3.$$

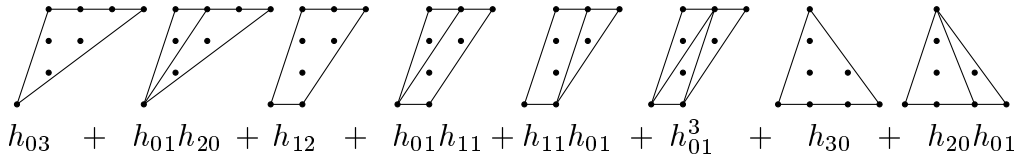


Рис. 4

Как и в лемме 3.1, мы имеем $\lim_n f(3, n)^{1/n} = \lim_n (h_{2n}^*)^{1/n} = 1/\beta^2$, где β — первый вещественный корень уравнения $H(x) = 1$, следовательно, $c_3 = -\frac{2}{3} \log_2 \beta$.

4.2. Рекуррентные соотношения. В обозначениях из §2 положим $m = 3$, $\varphi_0(x) = \frac{1}{3}x - 1$ и

$$F(x, y, z, w) = \sum_{a,b,c,d} f_{a,b,c,d} x^a y^b z^c w^d,$$

$$G_1(x, z, w) = \sum_{a,c,d} g_{a,c,d}^{(1)} x^a z^c w^d, \quad G_2(x, y, w) = \sum_{a,b,d} g_{a,b,d}^{(2)} x^a y^b w^d$$

$$H_k(x, w) = \sum_{a,d} h_{a,d}^{(k)} x^a w^d, \quad (k = 1, 2),$$

где все коэффициенты имеют вид $f(S)$ (см. §2) для φ_0 -допустимых фигур на рис. 5, причем $(0, a)$, $(1, b)$, $(2, c)$ и $(3, d)$ (если присутствуют) — координаты целых точек на верхней части границы фигуры S . Нижние вершины S — это точки $(0, -1)$ и $(3, 0)$. Если не выполнены сравнения, указанные на рис. 5, то соответствующие числа равны

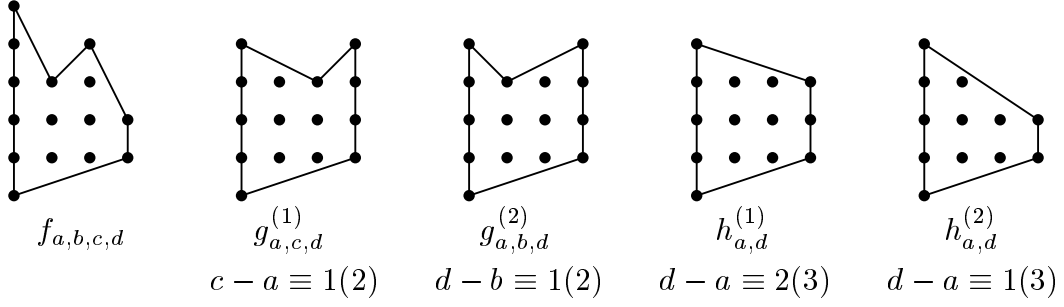


FIGURE 5

нулю. Если $\min(a+1, b, c, d) < 0$, они тоже равны нулю (этот случай не отвечает никакой φ_0 -допустимой фигуре). По соглашению $h_{-1,0}^{(2)} = 0$ (случай вырождения фигуры S в отрезок).

В терминах производящих функций рекуррентные соотношения из леммы 2.2 принимают вид (ср. с примерами 2.3 и 2.4):

$$\begin{aligned} F(x, y, z, w)(1 - x - y - z - w + xz + yw + xw) \\ = y^{1/2}(1 - w)G_1(xy^{1/2}, y^{1/2}z, w) + z^{1/2}(1 - x)G_2(x, yz^{1/2}, z^{1/2}w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1(x, z, w)(1 - w) &= \text{coef}_{u^{-1}} [F(x/u, u^2, z/u, w)(1 - w)] + x^{-1}, \\ G_2(x, y, w)(1 - x) &= \text{coef}_{u^{-1}} [F(x, y/u, u^2, w/u)(1 - x)] \end{aligned}$$

(асимметрия между G_1 и G_2 вызвана асимметричностью функции φ_0),

$$\begin{aligned} H_1(x, w) &= \text{coef}_{u^{-1}} [G_1(x/u, u^3, w/u^2)], \\ H_2(x, w) &= \text{coef}_{u^{-1}} [G_2(x/u^2, u^3, w/u)]. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом подразделе производящие функции понимаются как формальные степенные ряды. Рассмотрим симметризованные производящие функции

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, y, z, w) &= F(x, y, z, w) + F(w, z, y, x), \\ \tilde{G}(x, z, w) &= G_1(x, z, w) + G_2(w, z, x), \\ \tilde{H}(x, w) &= H_1(x, w) + H_2(w, x). \end{aligned}$$

Из вышеприведенных соотношений для F, G_1, G_2, H_1, H_2 непосредственно вытекает:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, y, z, w)(1 - x - y - z - w + xz + yw + xw) \\ = y^{1/2}(1 - w)\tilde{G}(xy^{1/2}, y^{1/2}z, w) + z^{1/2}(1 - x)\tilde{G}(x, yz^{1/2}, z^{1/2}w), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\tilde{G}(x, z, w)(1 - w) = \text{coef}_{u^{-1}} [\tilde{F}(x/u, u^2, z/u, w)(1 - w)] + x^{-1} \quad (4)$$

$$\tilde{H}(x, w) = \text{coef}_{u^{-1}} [\tilde{G}(x/u, u^3, w/u^2)]. \quad (5)$$

4.3. Уравнение. Мы собираемся получить уравнение на $\tilde{G}(xt^{-1/2}, t^{3/2}, t^{-1}x)$, выразив \tilde{F} через \tilde{G} из (3) и подставив результат в (4). Для этого нам потребуется делить степенные ряды на многочлены. Однако, если степени каких-то переменных меняются от $-\infty$ до $+\infty$, смысл такого деления требует уточнения. Поясним возможную неоднозначность на примере. Рассмотрим выражение $\text{coef}_{u^{-1}} [1/(x-uy)]$. Его можно понимать либо как

$$\text{coef}_{u^{-1}} \left[\frac{x^{-1}}{1-uyx^{-1}} \right] = \frac{1}{x} \text{coef}_{u^{-1}} \left[1 + \frac{uy}{x} + \frac{u^2y^2}{x^2} + \dots \right] = 0,$$

либо как

$$\text{coef}_{u^{-1}} \left[-\frac{(uy)^{-1}}{1-x(uy)^{-1}} \right] = -\text{coef}_{u^{-1}} \left[\frac{1}{uy} \left(1 + \frac{x}{uy} + \frac{x^2}{u^2y^2} + \dots \right) \right] = -\frac{1}{y}.$$

Во избежание неоднозначностей такого рода мы введем новую формальную переменную q и рассмотрим формальные ряды

$$\begin{aligned} F_q(x, y, z, w) &= F(xq, yq^2, zq^2, wq), \\ G_{1,q}(x, z, w) &= G_1(xq^2, zq^3, wq), \\ G_{2,q}(x, y, w) &= G_2(xq, yq^3, wq^2), \\ H_{k,q}(x, w) &= H_k(xq^3, wq^3), \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

которые будем понимать как элементы кольца

$$\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1/2}, z^{\pm 1/2}, w^{\pm 1}, u^{\pm 1/2}, t^{\pm 1/2}]((q))$$

формальных степенных рядов от q (возможно, начинающихся с отрицательных степеней), коэффициенты которых являются многочленами Лорана от $x, y^{1/2}, \dots$

Геометрический смысл показателя степени переменной q — это удвоенная площадь φ_0 -допустимой фигуры, соответствующей данному моному, т. е. $2 \int_0^3 \varphi(x) dx$, где φ — функция, график которой задает верхний край фигуры. Несложно проверить вручную, что

$$\begin{aligned} F_q &= (xq)^{-1} + (1 + x^{-1}w) + (x + w + x^{-1}y + x^{-1}z + x^{-1}w^2)q + \dots \\ G_{1,q} &= x^{-1}q^{-2} + w(xq)^{-1} + w^2x^{-1} + w^3x^{-1}q + (x + w^4x^{-1})q^2 + \dots \\ G_{2,q} &= x^{-1}wq + (w + yx^{-1})q^2 + (wx + 2y)q^3 + (wx^2 + 4xy)q^4 + \dots \\ H_{1,q} &= wx^{-1} + xq^3 + 4w^2q^6 + (30wx^2 + 24w^4x^{-1})q^9 + \dots \\ H_{2,q} &= wq^3 + 5(x^2 + w^3x^{-1})q^6 + 32w^2xq^9 + \dots \end{aligned}$$

Далее, зададим $\tilde{F}_q, \tilde{G}_q, \tilde{H}_q$ теми же формулами, что и в §4.2, но с добавленным повсюду индексом q . Например,

$$\tilde{G}_q(x, z, w) = \frac{1}{xq^2} + \frac{w}{xq} + \frac{w^2}{x} + \left(\frac{w^3}{x} + \frac{x}{w} \right) q + \left(2x + \frac{w^4}{x} + \frac{z}{w} \right) q^2 + \dots$$

Тогда соотношения (3)–(5) принимают вид

$$\tilde{F}_q = \frac{qy^{1/2}(1-wq)\tilde{G}_q(xy^{1/2}, y^{1/2}z, w) + qz^{1/2}(1-xq)\tilde{G}_q(wz^{1/2}, z^{1/2}y, x)}{1-xq-yq^2-zq^2-wq+xzq^3+ywq^3+xwq^2}, \quad (6)$$

$$\tilde{G}_q(x, z, w) = \text{coef}_{u^{-1}} [q\tilde{F}_q(x/u, u^2, z/u, w)] + \frac{1}{x(1-wq)q^2}, \quad (7)$$

$$\tilde{H}_q(x, w) = \text{coef}_{u^{-1}} [q\tilde{G}_q(x/u, u^3, w/u^2)]. \quad (8)$$

Положим

$$\begin{aligned} g_q(x, t) &= t^{1/2}x^2q^2\tilde{G}_q(x^2t^{-1/2}, x^3t^{3/2}, xt^{-1}) \\ &= t + xq + t^{-1}x^2q^2 + (t^{-2} + t)x^3q^3 + (t^{-3} + 2 + t^3)x^4q^4 + \dots \end{aligned}$$

Условие четности для индексов ненулевых коэффициентов рядов G_1 и G_2 (см. рис. 5) обеспечивает отсутствие дробных степеней в ряде $g_q(x, t)$. Более того, x и q входят в каждый моном ряда g_q с одинаковыми степенями, тем самым $g_q(x, t) = g(xq, t)$ для некоторого формального ряда $g(x, t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]((x))$.

Подставляя (3) в (4), обозначая знаменатель в (6) через $Q_q(x, y, z, w)$ и замечая, что

$$\text{coef}_{u^{-1}} [\mathcal{F}(x, t, u)] = \text{coef}_{u^{-1}} [xt^{-1/2}\mathcal{F}(x, t, uxt^{-1/2})] \quad (9)$$

для любого формального ряда по u , получаем

$$\begin{aligned} g_q(x, t) &\stackrel{(7)}{=} \text{coef}_{u^{-1}} \left[t^{1/2}x^2q^3\tilde{F}_q \left(\frac{x^2}{ut^{1/2}}, u^2, \frac{x^3t^{3/2}}{u}, \frac{x}{t} \right) \right] + \frac{t^2}{t-xq} \\ &\stackrel{(9)}{=} \text{coef}_{u^{-1}} \left[x^3q^3\tilde{F}_q \left(\frac{x}{u}, \frac{x^2u^2}{t}, \frac{x^2t^2}{u}, \frac{x}{t} \right) \right] + \frac{t^2}{t-xq} \\ &\stackrel{(6)}{=} x^2q^2 \text{coef}_{u^{-1}} \left[\frac{\frac{u}{t}(1-\frac{xq}{t})g_q(x, t) + \frac{t}{u}(1-\frac{xq}{u})g_q(x, u)}{Q_q(x/u, x^2u^2/t, x^2t^2/u, x/t)} \right] + \frac{t^2}{t-xq} \\ &= x^2q^2 \text{coef}_{u^{-1}} \left[\frac{u^3(t-xq)g_q(x, t) + t^3(u-xq)g_q(x, u)}{P(xq, t, u)} \right] + \frac{t^2}{t-xq}, \end{aligned}$$

где

$$P(x, t, u) = u^2t^2 - (u+t)utx + (1-t^3-u^3)utx^2 + (t^4+u^4)x^3. \quad (10)$$

Мы видим, что переменные x и q «синхронизированны» в правой части полученного уравнения: они входят в одинаковых степенях в каждый моном каждого степенного ряда в этом выражении. Это значит, что мы получили следующее тождество в кольце $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, u^{\pm 1}]((x))$:

$$g(x, t)\Psi(x, t) = \frac{t^2}{t-x} + \text{coef}_{u^{-1}} \left[\frac{t^3x^2(u-x)g(x, u)}{P(x, t, u)} \right], \quad (11)$$

где

$$\Psi(x, t) = 1 - x^2(t - x)\Phi(x, t), \quad \Phi(x, t) = \text{coef}_{u^{-1}}[u^3/P(x, t, u)].$$

Вот несколько начальных членов этих рядов:¹

$$\Phi(x, t) = t^{-2}x^2 + (t^{-3} + 1)x^3 + (t^{-4} + 2t^{-1} + t^2)x^4 + (t^{-5} + 3t^{-2} + 3t)x^6 + \dots$$

$$\Psi(x, t) = 1 - t^{-1}x^4 - tx^5 - (1 + t^3)x^6 - (t^{-1} + 2t^2)x^7 - (6t^{-2} + 3t)x^8 - \dots \quad (12)$$

Найдя g из уравнения (11), можно вычислить и $\tilde{H}(x, x)$. Действительно, в силу (5) мы имеем

$$x\tilde{H}_q(x^3, x^3) = \text{coef}_{t^0}[tx\tilde{G}_q(x^3/t, t^3, x^3/t^2)] = \text{coef}_{t^0}[t^{1/2}x\tilde{G}_q(x^3/t^{1/2}, t^{3/2}, x^3/t)].$$

Заменяя t на x^2t (ср. с (9)) и полагая $q = 1$, получаем

$$x\tilde{H}(x^3, x^3) = \text{coef}_{t^0}[g(x, t)]. \quad (13)$$

4.4. Вычисление. В этом подразделе мы исследуем аналитические функции, задаваемые рядами, обсуждавшимися в предыдущем подразделе.

Согласно §4.1, нам требуется найти наименьший положительный полюс функции $H^*(x)$, т. е. наименьший положительный нуль β функции $1 - H(x)$. Можно проверить, что

$$H(x) = x\tilde{H}(x, x). \quad (14)$$

Будучи суммой степенного ряда с положительными коэффициентами, функция $x\tilde{H}(x, x)$ возрастает при $x > 0$, значит, нам достаточно научиться вычислять значения функции $\tilde{H}(x, x)$ для любого x из некоторого интервала, содержащего точку β . В силу (13) для этого можно численно проинтегрировать функцию $g(x^{1/3}, t)$ по некоторому контуру Γ_x (ср. с доказательством леммы 3.2). Таким образом, нам надо уметь вычислять $g(x, t)$ при любых $x \in [0, x_0^+]$ и $t \in \Gamma_x$ для некоторого $x_0^+ > x_0 = \beta^{1/3}$. Это возможно, так как при фиксированном x , заменив $\text{coef}_{u^{-1}}[\dots]$ на $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} (\dots) du$, мы из уравнения (11) получим уравнение Фредгольма на функцию g , ограниченную на Γ_x . Перейдем теперь к более подробному изложению.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x, t, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2 \mid 0 < x < 1/2, |t| = |u| = 1\}, \\ \Gamma' &= \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid 0 < x < 1/2, |t| = 1\}. \end{aligned}$$

¹Все коэффициенты рядов Φ и $1 - \Psi$, которые мне удалось вычислить, положительны. Если они и в самом деле все положительны, было бы интересно выяснить их комбинаторный смысл.

Лемма 4.1. *Многочлен $P(x, t, u)$, определенный в (10), не обращается в ноль на Γ . При любых фиксированных $(x, t) \in \Gamma'$ многочлен $P(x, t, u)$ имеет два простых корня $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$, в единичном круге $|u| < 1$ и два простых корня вне единичного круга.*

Доказательство. Первое утверждение можно проверить при помощи любой системы символьных вычислений, например, следующим образом. Обозначим через S^1 единичную окружность в \mathbb{C} . Тогда $\Gamma = (0, 1/2) \times S^1 \times S^1$. отождествим S^1 с \mathbb{RP}^1 посредством некоторой рациональной параметризации. Тогда $\operatorname{Re} P$ и $\operatorname{Im} P$ станут вещественными рациональными функциями на алгебраическом многообразии Γ и, вычисляя результаты, дискриминанты, и т. д., можно убедиться в том, что вещественная кривая, заданная уравнениями $\operatorname{Re} P = \operatorname{Im} P = 0$ лежит вне слоя $0 < r < 1/2$. Опишем это вычисление более подробно. Пусть $p(x, T, U)$ и $q(x, T, U)$ — вещественные многочлены такие, что

$$P(x, \zeta(T), \zeta(U)) = \frac{p(x, T, U) + iq(x, T, U)}{(i + T)^4(i + U)^4}, \quad \zeta(X) = \frac{i - X}{i + X}.$$

Заметим, что $\zeta(\mathbb{R}) = S^1 \setminus \{-1\}$, значит, (x, T, U) — координаты на аффинной карте $\Gamma \setminus \{(t+1)(u+1) = 0\}$ многообразия Γ . Проекция вещественной алгебраической кривой $\Gamma \cap \{P = 0\}$ на плоскость (x, T) задается уравнением $R(x, T) = 0$, где $R(x, T)$ — результат многочленов p и q по переменной U . Чтобы доказать, что кривая $R(x, T) = 0$ не имеет вещественных точек в полосе $0 < x < 1/2$, достаточно найти на этом интервале все вещественные корни уравнения $D(x) = 0$, где $D(x)$ — дискриминант многочлена R по переменной T , а затем проверить, что уравнение $R(x_k, T) = 0$ при каждом $k = 1, \dots, 2n + 1$ не имеет вещественных корней, где $0 < x_1 < \dots < x_{2n+1} < 1/2$ и числа x_k при четных k — все вещественные корни многочлена $D(x)$ на интервале $0 < x < 1/2$. Это вычисление показывает, что $P(x, u, t) \neq 0$ при $(x, u, t) \in \Gamma$ и $(t + 1)(u + 1) \neq 0$. Затем надо проверить, что $P(x, \zeta(T), -1) \neq 0$, $P(x, -1, \zeta(U)) \neq 0$ и $P(x, -1, -1) \neq 0$ при $0 < x < 1/2$, $T \in \mathbb{R}$.

Похожим образом можно проверить, что при любых фиксированных $(x, t) \in \Gamma'$ дискриминант многочлена P по переменной u не обращается в ноль, а значит, при $(x, t) \in \Gamma'$ все четыре корня многочлена P (рассматриваемого как многочлен от u) попарно различны.

В силу вышесказанного число корней многочлена P в диске $|u| < 1$ постоянно. Таким образом, для доказательства второго утверждения леммы достаточно его проверить для одного конкретного выбора значений переменных x и t , например, для $t = 1$ и очень малого x . \square

Лемма 4.2. (a). *Формальный степенной ряд $1/P(x, t, u) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, u^{\pm 1}]((x))$ сходится к функции $1/P(x, t, u)$ в некоторой окрестности множества $\Gamma \cap \{x < \frac{1}{4}\}$.*

(b). *Формальный степенной ряд $\Phi(x, t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]((x))$ сходится к аналитической функции (которую мы тоже обозначим $\Phi(x, t)$) в некоторой окрестности множества $\Gamma' \cap \{x < \frac{1}{4}\}$. Функция $\Phi(x, t)$ аналитически продолжается в окрестность множества*

Γ' посредством интеграла Коши

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=1} \frac{u^3 du}{P(x, t, u)} = \sum_{k=1}^2 \frac{u_k(x, t)^3}{P'_u(x, t, u_k(x, t))}, \quad (15)$$

где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — корни P в единичном круге $|u| < 1$; см. лемму 4.1.

Доказательство. Степенной ряд $1/P(x, t, u)$, участвующий в определении функции $\Phi(x, t)$, это разложение по переменной x , следовательно, $1/P = a_0^{-1}(1 + X + X^2 + \dots)$, где $X = (a_1 + a_2 + a_3)/a_0$ и $a_k = x^k \text{coef}_{x^k}[P]$. Если $(x, t, u) \in \Gamma$, то $|a_0| = 1$, $|a_1| \leq 2x$, $|a_2| \leq 3x^2$, $|a_3| \leq 2x^3$, и значит, $|X| \leq 2x + 3x^2 + 2x^3$. Поэтому $|X| < 1$ при $x < 1/4$, из чего следует сходимость ряда $1/P$ в требуемой области. Этот факт в сочетании с леммой 4.1 влечет все остальные утверждения доказываемой леммы. \square

Функция Psi на языке программы Mathematica, приведенная на рис. 7, вычисляет $\Psi(x, t)$ при $(x, t) \in \Gamma'$ с любой заданной точностью.

Заметим, что одна из функций $u_1(x, t)$ или $u_2(x, t)$ имеет точку ветвления при $(x, t) = (1/2, 1)$, и значит, Φ и Ψ тоже ветвятся в этой точке. Разложение Лорана-Пуэизё функции $\Psi(x, 1)$ по степеням $s = \sqrt{1/2 - x}$ имеет вид

$$\Psi(x, 1) = -\frac{1}{4\sqrt{6}}s^{-1} + \frac{12-\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{8\sqrt{6}}s - \frac{3}{8\sqrt{2}}s^2 + \frac{103}{96\sqrt{6}}s^3 - \frac{87}{32\sqrt{2}}s^4 + \frac{2635}{192\sqrt{6}}s^5 + \dots$$

Пусть $x_0^- = \frac{16}{33}$ и $x_0^+ = \frac{17}{35}$. Мы вскоре увидим, что $x_0 \in [x_0^-, x_0^+]$; числа x_0^\pm задаются начальными отрезками цепной дроби для x_0 .

Используя разложение Ψ в $(\frac{1}{2}, 1)$ и вычисляя значения $\Psi(x, t)$ (при помощи программы на рис. 7) на достаточно мелкой сетке на Γ' , можно проверить, что Ψ не обращается в ноль на $\Gamma' \cap \{x < x_0^+\}$ и

$$\min_{0 \leq x \leq x_0^+, |t|=1} |\Psi(x, t)| = \min_{0 \leq x \leq x_0^+, |t|=1} \text{Re } \Psi(x, t) = \Psi(x_0^+, 1) = 0.44768\dots; \quad (16)$$

см. линии уровня функции $\text{Re } \Psi$ на рис. 6; мы опускаем подробности оценивания ошибки.

Применяя к функции $|P(x/4, e^{i\tau}, e^{i\theta})|^2$ лемму 5.2 с должным образом выбранным h , находим

$$\min_{0 \leq x \leq x_0^+, |t|=|u|=1} |P| = P(x_0^+, 1, 1) = 0.02183\dots \quad (17)$$

(мы здесь масштабировали x , чтобы уравновесить частные производные). Вычисление можно ускорить, выбирая разный шаг сетки в разных зонах множества Γ . Мы варьировали шаг от $h = 1/300$ возле точки минимума до $h = 1/20$ вдали от нее. Для оценки погрешности мы использовали очевидные грубые оценки четвертых производных, а затем с их помощью получали более точные оценки вторых производных в каждой зоне, опять-таки используя лемму 5.2.

Лемма 4.3. Формальный ряд $g(x, t)$ (введенный в §4.2) сходится в некоторой окрестности множества $\Gamma' \cap \{|x| < 2^{-3/2}\}$.

Доказательство. По теореме Анклина [1] число примитивных целочисленных триангуляций целочисленного многоугольника Π ограничено сверху величиной 2^N для $N =$

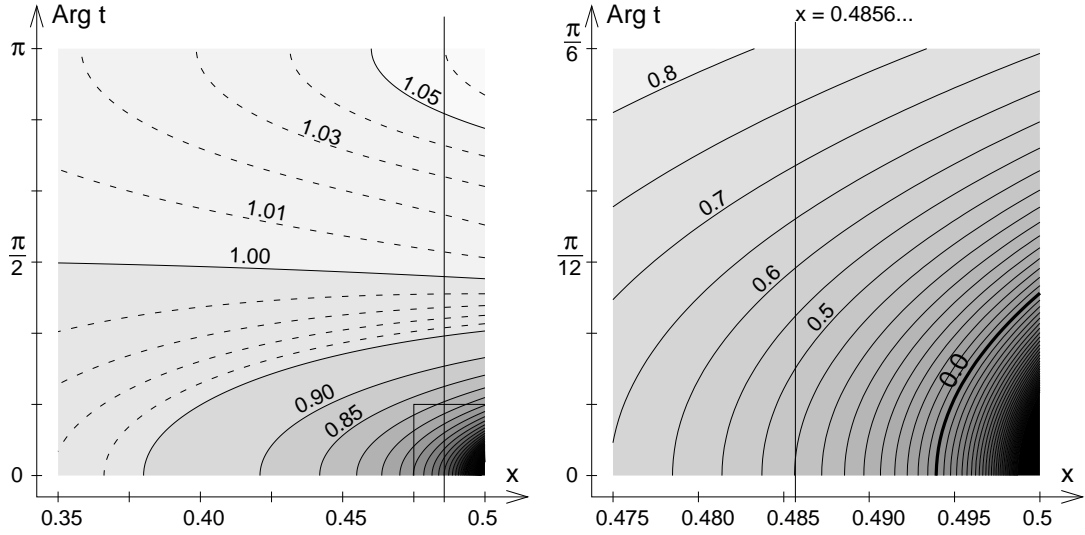


Рис. 6. Линии уровня $\operatorname{Re} \Psi(x, t)$ при $|t| = 1$. Изображенная вертикальная линия – это $x = x_0$ или $x = x_0^+$ (нет разницы при таком разрешении).

$\#(\Pi \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}^2))$, причем из формулы Пика легко вывести, что $N < 3\operatorname{Area}(\Pi) - 3/2$. Площадь фигуры, отвечающей коэффициенту $g_{a,c,d}^{(k)}$, равна $(2a + 3c + d + 3)/2$. Следовательно, $\tilde{g}_{a,c,d} < c_0 2^{3(2a+3c+d)/2}$ для некоторой константы c_0 , и значит, при $|t| = 1$ мы получаем

$$\begin{aligned} |g(x, t)| &\leq x^2 \sum_{a,c,d} |\tilde{g}_{a,c,d} x^{2a} x^{3c} x^d| \\ &\leq c_0 x^2 \sum_{a,c,d} |2^{3(2a+3c+d)/2} x^{2a+3c+d}| = c_0 x^2 \sum_n 2^{3/2n} A_n x^n, \end{aligned}$$

где $A_n = \#\{(a, c, d) \in \mathbb{Z}_+^3 \mid 2a + 3c + d = n\}$. Поскольку числа A_n ограничены полиномиальной функцией от n , ряд сходится при $x < 2^{-3/2}$. \square

Из лемм 4.2 и 4.3 в сочетании с (11) и (16) следует, что функция $g(x, t)$ аналитична в окрестности множества $\Gamma' \cap \{x < 2^{-3/2}\}$ и удовлетворяет там условию

$$g(x, t) = \frac{t^2}{(t-x)\Psi(x, t)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|u|=1} \frac{x^2 t^3 (u-x)g(x, u) du}{P(x, t, u)\Psi(x, t)}. \quad (18)$$

При любом фиксированном x это уравнение Фредгольма второго рода на функцию $g(x, t)$, рассматриваемую как функция от t .

Лемма 4.4. Функция $g(x, t)$ аналитически продолжается в окрестность множества $\Gamma' \cap \{x < x_0^+\}$ и удовлетворяет уравнению (18) в этой области.

Доказательство. Перепишем (18) в более привычном виде:

$$\varphi_g(x, \tau) = f(x, \tau) + \int_0^1 K(x, \tau, \theta) \varphi_g(x, \theta) d\theta, \quad (19)$$

где мы полагаем $t = e^{2\pi i\tau}$, $u = e^{2\pi i\theta}$ и

$$\varphi_g(x, \tau) = g(x, t), \quad f(x, \tau) = \frac{t^2}{(t-x)\Psi(x, t)}, \quad K(x, \tau, \theta) = \frac{x^2 t^3 u(u-x)}{P(x, t, u)\Psi(x, t)}.$$

Как мы отметили выше, g удовлетворяет (18), и значит, φ_g удовлетворяет (19), при малых x . Таким образом, в силу теоремы единственности для аналитических функций достаточно показать, что при всех $x \in [0, x_0^+]$ существует единственное решение уравнения (19) и что оно аналитично по (x, τ) . По лемме 5.6 для этого достаточно убедиться в том, что 1 не является собственным значением оператора \mathcal{K}_x при всех $x \in [0, x_0^+]$, где $\mathcal{K}_x : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ — интегральный оператор Фредгольма, который функции $\varphi(\tau)$ сопоставляет $\psi(\tau) = \int_0^1 K(x, \tau, \theta)\varphi(\theta) d\theta$. Это в свою очередь следует из оценки

$$\max_{0 \leq x \leq x_0^+} \mathcal{N}_2(x) = \mathcal{N}_2(x_0^+) = 0.88525,$$

где $\mathcal{N}_2(x) = \int_{[0,1]^2} |K(x, \tau, \theta)|^2 d\tau d\theta$. Она получена численным интегрированием. Чтобы оценить погрешность приближения, нужны верхние оценки частных производных ядра K . Их несложно получить из нижних оценок (16) и (17) функций $|\Psi|$ и $|P|$ в совокупности с верхними оценками производных функции Ψ , полученных из ее интегрального представления в (15). В качестве верхних оценок производных от многочленов, участвующих в определении K , можно просто брать суммы верхних оценок мономов. \square

Заменяя интегралы интегральными суммами, уравнение (18) можно решить с любой точностью. Затем из (13) и (14) можно численно найти $H(x)$, воспользовавшись интегралом Коши

$$H(x^3) = \frac{x^2}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{g(x, t) dt}{t} = x^2 \int_0^1 \varphi_g(x, \tau) d\tau \quad (20)$$

(напомним, что $\varphi_g(x, \tau) := g(x, e^{2\pi i\tau})$; см. (19)). Изложенное в данном разделе можно подытожить следующим образом (напомним, что $f(m, n)$ — это число примитивных целочисленных триангуляций прямоугольника $m \times n$).

Предложение 4.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(3, n)^{1/n} = 1/x_0^2$, где:

- x_0 — единственное решение уравнения $H(x^3) = 1$ на отрезке $[0, x_0^+]$, $x_0^+ = \frac{17}{35}$;
- функция $H(x)$ выражается через $g(x, t)$ формулой (20), и она монотонна на $[0, x_0^+]$;
- $g(x, t)$ является решением уравнения Фредгольма (18), в котором P задается формулой (10), а Ψ задается как $\Psi(x, t) = 1 - x^2(t-x)\Phi(x, t)$ с функцией Φ , заданной формулой (15); при всех $x \in [0, x_0^+]$ уравнение (18) имеет единственное решение.

На рис. 7 мы приводим функцию H на языке Mathematica, которая вычисляет $H(x)$ с любой заданной точностью. Ошибку приближения можно оценить с помощью

```

P = u^2*t^2-(u+t)u*t*x+(1-t^3-u^3)u*t*x^2+(t^4+u^4)x^3;
Psi = Function[{x0,t0,prec},Module[{P0,u0,i},
  P0=P/.{x->x0,t->t0}; u0 = NRoots[0==P0,u,prec];
  u0=Sort[Table[{Abs[u0[[i,2]]],u0[[i,2]]},{i,4}]];
  1-x0^2(t0-x0)Sum[(u^3/D[P0,u])/u->u0[[i,2]],[i,2] ]];
H = Function[{x3,n,prec},
  Module[{x0,z,P0,Id,K,F,G,j,k,Tj,Uk,PsiTj,Pjk},
    x0=N[x3^(1/3),prec]; z=N[Exp[2Pi*I/n],prec];
    K=Id=IdentityMatrix[n]; F=K[[1]]; P0=P/.x->x0;
    Do[ Tj = z^j; PsiTj=Psi[x0,Tj,prec];
      F[[j]] = Tj^2/(Tj-x0)/PsiTj;
      Do[ Uk = z^k; Pjk=P0/.{t->Tj,u->Uk};
        K[[j,k]] = x0^2*Tj^3(Uk-x0)Uk/Pjk/PsiTj/n,
        {k,n}],
      {j,n}];
  G = Inverse[Id-K].F; x0^2*(Plus@@G)/n ]];

```

Рис. 7. Код на языке Mathematica, вычисляющий $H(x)$

леммы 5.4. Можно проверить, что функции $P(x, t, u)$ и $\Psi(x, t)$ не обращаются в ноль при $x < x_0^+$, $|u| = 1$ и $\frac{10}{13} < |t| < \frac{13}{10}$ (на рис. 8 и 9 изображен образ кольцевой области $\frac{10}{13} < |t| < \frac{13}{10}$ при отображении $t \mapsto \Psi(x_0, t)$). Поэтому можно применить оценку ошибки (27), положив $r = 10/13$, и значит, $a = -\frac{\log r}{2\pi} = 0.04176$. Оценивая $H(x)$ при $x \approx x_0$, в (27) можно положить

$$C \leq 1; \quad \frac{1}{n}\|B\|_1 \leq 3.05; \quad M \leq 3910; \quad M' \leq 94.6; \quad M_f \leq 258.$$

Это дает оценку погрешности, приведенную в последнем столбце таблицы 7. Мы видим, что она достаточно близка к фактической погрешности, приведенной в четвертом столбце.

5. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ

5.1. Оценка ошибки. Некоторые общие факты. Обозначения в этом разделе независимы от обозначений в остальных частях статьи.

Леммы 5.1. Пусть f — голоморфная функция в окрестности кольца $R_1 < |z| < R_2$, и пусть $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ — ее ряд Лорана. Тогда при $R_1 < r < R_2$ и при всех $n > 0$

$$\left| c_0 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(r\omega^k) \right| = \left| \int_0^1 f(re^{2\pi it}) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(r\omega^k) \right| \leq \frac{M_1 q_1^n}{1 - q_1^n} + \frac{M_2 q_2^n}{1 - q_2^n}, \quad (21)$$

где $\omega = e^{2\pi i/n}$, $q_1 = R_1/r$, $q_2 = r/R_2$ и $M_j = \max_{|z|=R_j} |f(z)|$ при $j = 1, 2$.

Доказательство. Имеют место равенства

$$\sum_{k=1}^n f(r\omega^k) = \sum_{k=1}^n \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m (r\omega^k)^m \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \omega^{km} = \begin{cases} n, & n \text{ делит } m, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

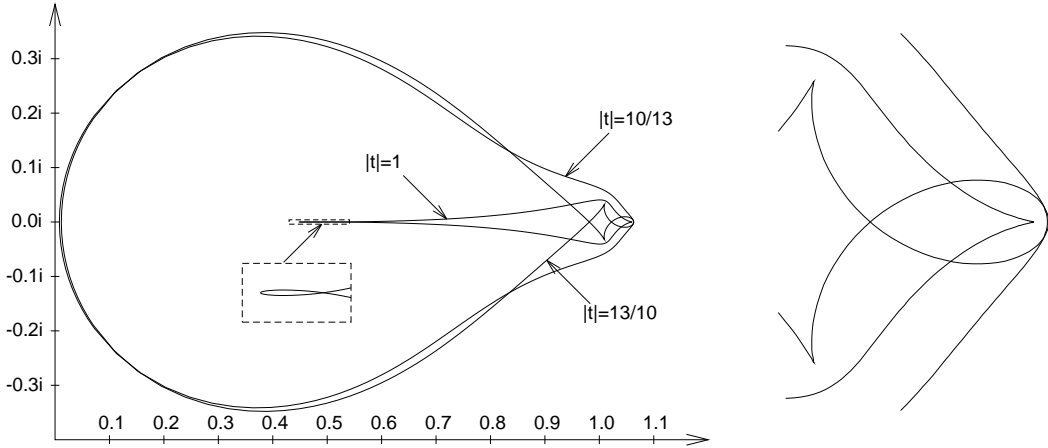


Рис. 8. Реалистичное изображение образа окружностей $|t| = \frac{10}{13}$, $|t| = 1$ и $|t| = \frac{13}{10}$ при отображении $t \mapsto \Psi(x_0, t)$. Левый зум растянут в вертикальном направлении.

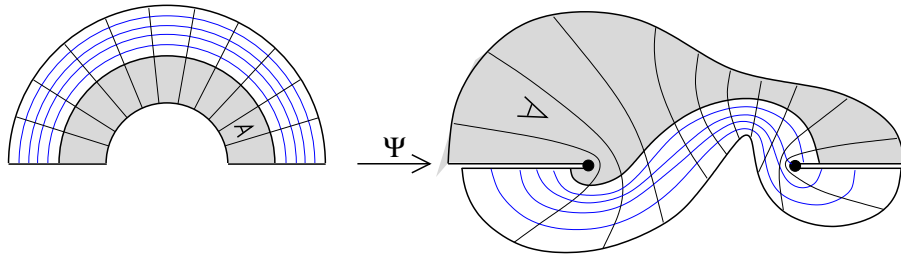


Рис. 9. Схематичное изображение образа верхнего полукольца $\{\frac{10}{13} \leq |t| \leq \frac{13}{10}, \text{Im } t \geq 0\}$ при отображении $t \mapsto \Psi(x_0, t)$. Нижнее полукольцо отображается симметрично. Серым цветом представлена область $|t| < 1$.

следовательно, левая часть в (21) равна $|\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_{pn} r^{pn}|$, и коэффициенты можно оценить через интеграл Коши. \square

Лемма 5.2. Пусть $h > 0$ и $D \subset \mathbb{R}^d$ — произведение отрезков $[0, n_1 h] \times \dots \times [0, n_d h]$ с целыми положительными n_1, \dots, n_d . Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса \mathcal{C}^2 и $M = \max_{i,j} \max_D |\partial_i \partial_j f|$. Тогда

$$\min_D f \geq \min_{h\mathbb{Z}^d} f - \frac{1}{8} M d^2 h^2,$$

где $h\mathbb{Z}^d = \{h\vec{n} \mid \vec{n} \in \mathbb{Z}^n\}$. Аналогичная оценка есть для $\max_D f$.

Доказательство. Индукция по d . Пусть минимум достигается в $x_0 \in D$. Если x_0 лежит внутри D , мы оценим $|f(x) - f(x_0)|$ для ближайшей к x_0 точки решетки x при помощи формулы Тейлора–Лагранжа для разложения второго порядка функции

Таблица 7

n	точность	время (сек.)	n -ое пригл. $H(x_0) - 1$	оценка погрешности
100	24	0.299391	1.44×10^{-10}	6.95×10^{-4}
200	36	6.759046	5.01×10^{-22}	5.60×10^{-15}
300	48	21.77949	1.73×10^{-33}	3.39×10^{-26}
400	60	51.22560	6.02×10^{-45}	1.82×10^{-37}
500	72	115.5499	2.09×10^{-56}	9.19×10^{-49}
600	84	231.5893	7.26×10^{-68}	4.45×10^{-60}
700	96	380.6020	2.52×10^{-79}	2.09×10^{-71}
800	108	608.9937	8.78×10^{-91}	9.65×10^{-83}
900	120	869.7188	3.06×10^{-102}	4.38×10^{-94}
1000	132	1072.923	1.06×10^{-113}	1.96×10^{-105}
1100	144	1456.021	3.72×10^{-125}	8.70×10^{-117}
1200	156	1852.763	1.29×10^{-136}	3.83×10^{-128}

$f(x_0 + t(x - x_0))$ в точке $t = 0$. Если x_0 лежит на границе области D , мы применим предположение индукции к ограничению функции f на грань области D , содержащую x_0 . \square

5.2. Ошибка погрешности приближенного решения уравнения Фредгольма.

Пусть $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное решение интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \int_0^1 K(x, y)\varphi(y) dy + f(x) \tag{22}$$

с аналитическими комплекснозначными функциями K и f , которые (би)периодичны с периодом 1, т. е. $K(x, y) = K(x + 1, y) = K(x, y + 1)$ и $f(x) = f(x + 1)$. Будем предполагать, что K и f продолжаются до комплексно аналитических функций в окрестности множества $(D \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times D_1)$ в \mathbb{C}^2 и в окрестности множества D в \mathbb{C} соответственно, где

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid -a \leq \text{Im } z \leq a\}, \quad D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid -a_1 \leq \text{Im } z \leq a_1\}, \quad 0 < a_1 < a.$$

Положим

$$C = \int_0^1 |\varphi(x)| dx, \quad M = \max_{D \times \mathbb{R}} |K|, \quad M'_1 = \max_{\mathbb{R} \times D_1} |K|, \quad M_f = \max_D |f|.$$

Лемма 5.3. Функция φ аналитически продолжается в окрестность множества D и

$$M_\varphi := \max_{D_1} |\varphi| \leq \frac{a(CM + M_f)}{a - a_1}. \tag{23}$$

Доказательство. При любом $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и любом n

$$|\partial_x^n K(x_0, y_0)| \leq \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z|=a} \frac{K(z, y_0) dz}{z^{n+1}} \right| \leq \frac{Mn!}{a^n}$$

и аналогично $|f^{(n)}(x_0)| \leq M_f n! / a^n$. Тогда, дифференцируя (22) n раз по x , получим

$$|\varphi^{(n)}(x_0)| = \left| \int_0^1 \partial_x^n K(x_0, y) \varphi(y) dy + f^{(n)}(x_0) \right| \leq \frac{(CM + M_f)n!}{a^n}. \quad (24)$$

Следовательно, ряд Тейлора функции φ в точке x_0 сходится в круге $|z - x_0| < a$, и при $|z - x_0| \leq a_1$ мы имеем

$$|\varphi(z)| = \left| \sum_{n \geq 0} \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} (z - x_0)^n \right| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{(CM + M_f)a_1^n}{a^n} = \frac{a(CM + M_f)}{a - a_1},$$

из чего вытекает требуемая оценка на M_φ . \square

Для целого положительного n посмотрим, что происходит при замене интеграла в (22) на n -ю интегральную сумму. А именно, рассмотрим векторы $\varphi^{[n]} = (\varphi_1^{[n]}, \dots, \varphi_n^{[n]})$, $f^{[n]} = (f_1^{[n]}, \dots, f_n^{[n]})$, а также $n \times n$ -матрицу $K^{[n]} = (K_{jk}^{[n]})_{jk}$, заданные как

$$\varphi_j^{[n]} = \varphi(j/n), \quad f_j^{[n]} = f(j/n), \quad K_{jk}^{[n]} = \frac{1}{n} K(j/n, k/n).$$

Пусть $\hat{\varphi}^{[n]} = (\hat{\varphi}_1^{[n]}, \dots, \hat{\varphi}_n^{[n]})$ — решение уравнения

$$\hat{\varphi}^{[n]} = K^{[n]} \hat{\varphi}^{[n]} + f^{[n]}. \quad (25)$$

Это уравнение является дискретизацией уравнения (22), поэтому естественно ожидать, что $\hat{\varphi}^{[n]}$ хорошо приближает φ . Используя подход из [5], оценим скорость сходимости. Наша конечная цель — найти хорошую верхнюю оценку для погрешности приближения

$$E_n := \left| \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\varphi}_j^{[n]} \right|.$$

Определим нормы $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, на \mathbb{C}^n обычным способом. Для квадратной матрицы $A = (a_{jk})_{jk}$ с комплексными коэффициентами положим

$$\|A\|_1 = \sum_{j,k} |a_{jk}|, \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{j,k} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2}.$$

Лемма 5.4. (а). Предположим, что матрица $A^{[n]} = I - K^{[n]}$ обратима, и обозначим обратную матрицу через $B^{[n]}$. Тогда

$$E_n \leq \frac{2a(CM + M_f)r_1^n}{(a - a_1)(1 - r_1^n)} \left(1 + \frac{1}{n} \|B^{[n]}\|_1 M'_1\right), \quad r_1 = e^{-2\pi a_1}. \quad (26)$$

Если K аналитически продолжается в окрестность множества $\mathbb{R} \times D$ и $M' = \max_{\mathbb{R} \times D} K$, то

$$E_n \leq 4\pi e(CM + M_f) \left(1 + \frac{1}{n} \|B^{[n]}\|_1 M'\right) \frac{nar^n}{1 - er^n}, \quad r = e^{-2\pi a}. \quad (27)$$

При $n > \alpha_n$ имеет место оценка

$$C \leq \frac{\|\hat{\varphi}^{[n]}\|_1 + \alpha_n M_f}{n - \alpha_n}, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \frac{2M'_1 a \|B^{[n]}\|_1 r_1^n}{(a - a_1)(1 - r_1^n)} + \frac{1}{4a}. \quad (28)$$

(b). Предположим, что $\|K^{[n]}\|_2 = M_2 < 1$. Тогда матрица $A^{[n]}$ обратима и $\frac{1}{n} \|B^{[n]}\|_1 \leq 1/(1 - M_2)$, из чего, в частности, следует, что $\alpha_n < \alpha_0$ для некоторой константы $\alpha_0 = \alpha_0(a, a_1, M, M'_1, M_2, M_f)$, и значит, C можно оценить при помощи (28) при $n > \alpha_0$.

Доказательство. (а). Пусть $J = \int_0^1 \varphi(x) dx$, $S = \frac{1}{n} \sum_j \varphi(j/n)$, $\hat{S} = \frac{1}{n} \sum_j \hat{\varphi}(j/n)$, $\rho = \varphi^{[n]} - \hat{\varphi}^{[n]}$ и $\sigma = A^{[n]}\rho$. В этих обозначениях $E_n = |J - \hat{S}|$. Мы имеем

$$\|\sigma\|_\infty = \|A^{[n]}\varphi^{[n]} - A^{[n]}\hat{\varphi}^{[n]}\|_\infty \stackrel{(25)}{=} \|A^{[n]}\varphi^{[n]} - f^{[n]}\|_\infty = \|K^{[n]}\varphi^{[n]} - (\varphi^{[n]} - f^{[n]})\|_\infty$$

и, в силу (22) мы имеем $\varphi_j^{[n]} - f_j^{[n]} = \int_0^1 K(j/n, y)\varphi(y) dy$, причем j -я компонента вектора $K^{[n]}\varphi^{[n]}$ есть n -я интегральная сумма для этого интеграла. Следовательно, применяя лемму 5.1 к функции $K(j/n, z(\zeta))\varphi(z(\zeta))$ после замены переменной $\zeta = e^{2\pi iz}$, мы получим $\|\sigma\|_\infty \leq M'_1 C_1$, где $C_1 = 2M_\varphi r_1^n / (1 - r_1^n)$, и тогда

$$\|\rho\|_1 = \|B^{[n]}\sigma\|_1 \leq \|B^{[n]}\|_1 \times \|\sigma\|_\infty \leq M'_1 C_1 \|B^{[n]}\|_1. \quad (30)$$

Лемма 5.1, примененная к $\varphi(z(\zeta))$, дает $|J - S| \leq C_1$. Далее, $|S - \hat{S}| \leq \frac{1}{n} \|\rho\|_1$, следовательно,

$$E_n = |J - \hat{S}| \leq |J - S| + |S - \hat{S}| \leq C_1 + \frac{1}{n} \|\rho\|_1 \leq C_1 + \frac{1}{n} M'_1 C_1 \|B^{[n]}\|_1,$$

что дает (26) после применения (23). Полагая $a_1 = a - \frac{1}{2\pi n}$ (и значит, $r_1 = e^{1/nr}$) и $M'_1 < M'$ в (26), получаем (27).

Докажем (28). Легко проверить, что

$$nC \leq \|\varphi^{[n]}\|_1 + \frac{1}{4} \max_{\mathbb{R}} |\varphi'| \leq \|\hat{\varphi}^{[n]}\|_1 + \|\rho\|_1 + \frac{1}{4} \max_{\mathbb{R}} |\varphi'|.$$

Используя оценки (30) и (24) при $\|\rho\|_1$ и $|\varphi'|$ соответственно, получаем

$$nC \leq \|\hat{\varphi}^{[n]}\|_1 + \frac{2M_1 M_\varphi \|B^{[n]}\|_1 r_1^n}{1 - r_1^n} + \frac{CM + M_f}{4a} \stackrel{(23)}{\leq} \|\hat{\varphi}^{[n]}\|_1 + (CM + M_f)\alpha_n.$$

(b). Предположим теперь, что $\|K^{[n]}\|_2 = M_2 < 1$. Тогда $\|B^{[n]}\|_2 = \|(I - K^{[n]})^{-1}\|_2 = \|I + K^{[n]} + (K^{[n]})^2 + \dots\|_2 \leq 1/(1 - M_2)$. По неравенству Коши-Буняковского $\|B^{[n]}\|_1 \leq n\|B^{[n]}\|_2$ □

5.3. Численный критерий существования и единственности решения. Здесь мы сохраняем все предположения о функциях $K(x, y)$ и $f(x)$ кроме того, что мы больше не предполагаем априори, что уравнение (22) имеет непрерывное решение φ . Обозначим через $\mathcal{K} : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(x, y)$, т. е. оператор $\varphi \mapsto \psi$, где $\psi(x) = \int_0^1 K(x, y)\varphi(y) dy$.

Лемма 5.5. (ср. с [5, гл. II, §1, уравн. (26)]). *Предположим, что существует n такое, что матрица $I - K^{[n]}$ обратима и $\alpha_n < n$, где α_n определено в (28) (заметим, что ни f , ни φ не используются в определении величины α_n). Тогда 1 не является собственным числом оператора \mathcal{K} , и следовательно, для любой непрерывной функции f уравнение (22) имеет единственное непрерывное решение φ .*

Доказательство. Пусть n таково, что $\alpha_n < n$. Применим лемму 5.4(а) для случая, когда $f = 0$ и тем самым $\hat{\varphi}^{[n]} = 0$. Тогда (28) принимает вид $C \leq 0$, из чего вытекает отсутствие ненулевых решений уравнения $\mathcal{K}\varphi = \varphi$, а это и значит, что 1 не является собственным числом оператора \mathcal{K} . По теореме Фредгольма [2] в этом случае (22) имеет единственное непрерывное решение для любой f . \square

5.4. Аналитичность решения по параметру. Пусть Λ — область в \mathbb{C} и $U = \{z \in \mathbb{C} \mid -a \leq \text{Im } z \leq a\}$, $a > 0$. Пусть $K(\lambda, x, y)$ — аналитическая функция в окрестности множества $\Lambda \times U^2$ в \mathbb{C}^3 , и пусть $f(\lambda, y)$ — аналитическая функция в окрестности множества $\Lambda \times U$ в \mathbb{C}^2 . Будем предполагать, что $K(\lambda_0, x, y)$ $(1, 1)$ -бипериодична и $f(\lambda_0, x)$ 1-периодична при любом фиксированном $\lambda_0 \in \Lambda$.

При $\lambda \in \Lambda$ обозначим через $\mathcal{K}_\lambda : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ интегральный оператор Фредгольма $\varphi \mapsto \psi$, $\psi(x) = \int_0^1 K(\lambda, x, y)\varphi(y)dy$. Следующая лемма непосредственно вытекает из результатов Фредгольма в его основополагающей статье [2] (более общий факт доказан в [11]).

Лемма 5.6. *Предположим, что 1 не является собственным числом оператора \mathcal{K}_λ при всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ существует единственное решение $\varphi(\lambda, x)$ уравнения*

$$\varphi(\lambda, x) = \int_0^1 K(\lambda, x, y)\varphi(\lambda, y) dy + f(\lambda, x) \quad (31)$$

и при этом функция $\varphi(\lambda, x)$ аналитична в окрестности множества $\Lambda \times U$.

Доказательство. В силу результатов Фредгольма [2] (см. также [6]) при всех $\lambda \in \Lambda$ решение $\varphi(\lambda, x)$ существует и единственно при наших предположениях, и его можно представить в виде

$$\varphi(\lambda, x) = f(\lambda, x) + \int_0^1 \frac{D(\lambda, x, y)}{D(\lambda)} f(\lambda, y) dy,$$

где

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A_n(\lambda)}{n!}, \quad D(\lambda, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(\lambda, x, y)}{n!}, \quad (32)$$

$$A_n(\lambda) = \int_{[0,1]^n} K(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad B_n(\lambda, x, y) = \int_{[0,1]^n} K(\lambda, x, \mathbf{x}, y, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$K(\lambda, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \det \left(K(\lambda, x_i, y_j) \right)_{i,j=1}^n.$$

Как показано в [2], $D(\lambda)$ не обращается в ноль на U (потому что 1 не является собственным числом оператора \mathcal{K}_λ при $\lambda \in \Lambda$). Ясно также, что функции A_n и B_n аналитичны в Λ и в $\Lambda \times U^2$ соответственно, и при этом из неравенства Адамара $|\det N| \leq n^{n/2} \max_{i,j} |N_{ij}|$ следует верхняя оценка (ср. с [2, стр. 368, строка 4]):

$$|A_n(\lambda)| \leq n^{n/2} M(\lambda)^n, \quad |B_{n-1}(\lambda, x, y)| \leq n^{n/2} M(\lambda)^n,$$

где $M(\lambda) = \sup_{(x,y) \in U^2} |K(\lambda, x, y)|$. Следовательно, ряды (32) сходятся к аналитическим функциям, из чего вытекает доказываемый результат. \square

6. НЕПРИМИТИВНЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Обозначим число всех (необязательно примитивных) целочисленных триангуляций прямоугольника $m \times n$ через $f^{\text{np}}(m, n)$ и положим

$$c^{\text{np}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 f^{\text{np}}(n, n)}{n^2}.$$

Предложение 6.1. $c^{\text{np}} \leq 4.735820221\dots$

Доказательство. Обозначим $N = n^2$. Любую целочисленную триангуляцию можно подразбить до примитивной. Следовательно, целочисленная триангуляция однозначно определяется выбором примитивной триангуляции и множеством ее ребер, подлежащих удалению. Обозначим через $f_k^{\text{np}}(n, n)$ число целочисленных триангуляций квадрата $n \times n$, имеющих k внутренних вершин, и значит, $\approx 3k$ ребер. Тогда

$$f_k^{\text{np}}(n, n) \leq 2^{cN} C_{3N}^{3k} \tag{33}$$

(напомним, что 2^{cN} — это оценка числа примитивных целочисленных триангуляций). С другой стороны, число триангуляций с вершинами в произвольном множестве из k точек на плоскости не превосходит 30^k (см. [10]), следовательно,

$$f_k^{\text{np}}(n, n) \leq 30^k C_N^k. \tag{34}$$

Оценки (33) и (34) в совокупности с формулой Стирлинга дают

$$c^{\text{np}} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \min (3h(x) + c, h(x) + x \log_2 30), \tag{35}$$

$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x).$$

Применяя оценку $c \leq 4 \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (см. [7], [12], [13]), получаем требуемый результат (максимум в (35) достигается при $x = 0.83206855$). \square

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. Anclin, *An upper bound for the number of planar lattice triangulations*, J. Combinatorial Theory, Ser. A **103** (2003), 383–386.
2. I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math. **27** (1903), 365–390.
3. I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994.
4. V. Kaibel, G. M. Ziegler, *Counting Lattice Triangulations*, in: C. D. Wensley (ed.) Surveys in combinatorics, 2003, Proc. of the 19th British combinatorial conf., Univ. of Wales, Bangor UK, June 29 – July 04, London Math. Soc. Lect. Notes, vol. 307, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, pp. 277–307.
5. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, Физматгиз, Москва, 1958.
6. Б. В. Хведелидзе, *Фредгольма уравнение*, в кн.: Математическая энциклопедия (И. М. Виноградов, ed.), Сов. Энциклопедия, Москва, 1977; English transl. Encyclopedia of Mathematics. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fredholm_equation&oldid=46977.
7. J. Matoušek, P. Valtr, E. Welzl, *On two encodings of lattice triangulations*, manuscript (2006).
8. S. Yu. Orevkov, *Asymptotic number of triangulations with vertices in \mathbb{Z}^2* , J. Combinatorial Theory, Ser. A **86** (1999), 200–203.
9. С. Ю. Оревков, В. М. Харламов, *Порядок роста числа классов вещественных плоских алгебраических кривых при возрастании степени*, Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 218–233; English translation: J. of Math. Sciences **113** (2003), no. 5, 666–674.
10. M. Sharir, A. Sheffer, *Counting triangulations of planar point sets*, Electron. J. Combin. **18** (2011), no. 1, P70:1–74.
11. J. D. Tamarkin, *On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter*, Ann. Math. **28** (1926–1927), 127–152.
12. E. Welzl, *The number of triangulations on planar point sets*, In: M. Kaufmann, D. Wagner (eds) Graph Drawing. GD 2006, Lecture Notes in Computer Science, vol 4372, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007, pp. 1–4.
13. E. Welzl (with J. Matušek and P. Valtr), *Lattice triangulations*, Talk in Freie Univ. Berlin, November 13, 2006.

МАТ ИН-Т ИМ. В. А. СТЕКЛОВА. УЛ. ГУБКИНА 8, МОСКВА, РФ

IMT, L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, TOULOUSE, FRANCE

ЛАБОРАТОРИЯ АГГА, МФТИ, РФ
E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr