

МУЛЬТИСИГНАТУРЫ ИТЕРИРОВАННЫХ ТОРИЧЕСКИХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

С. Ю. ОРЕВКОВ

А н н о т а ц и я . Мы вычисляем мультисигнатуры (multivariate signatures) зацеплений Зейферта (т.е. объединений слоев в гомологических сферах Зейферта), в частности, объединения торического зацепления с одной или с обеими осевыми окружностями. Мультисигнатуры таких зацеплений используются в формуле сращивания Дегтярева–Флоранса–Лекуоны для вычисления мультисигнатур обмотки зацепления вдоль его компоненты. Мы используем вычисление Неймана эквивариантных сигнатур таких зацеплений.

Для сигнатур торического зацепления с одной или с обеими осевыми окружностями мы интерпретируем формулу Неймана в терминах целых точек в некотором параллелограмме, аналогично формуле Хирцебруха, выражающей сигнатуры торических зацеплений (без осевых окружностей) в терминах целых точек в прямоугольнике.

1. ВВЕДЕНИЕ

Итерированное торическое зацепление в трехмерной сфере \mathbb{S}^3 — это зацепление, получающееся из тривиального узла последовательным применением операции обмотки с сохранением или с удалением основы (см. определение в §3). Наиболее важные примеры — это алгебраические зацепления (линки особенностей плоских комплексных аналитических кривых) и зацепления на бесконечности плоских аффинных алгебраических кривых.

Для итерированного торического узла K сигнатуры Левина–Тристрама $\sigma_\zeta(K)$ (определяемые как сигнатуры матриц $(1 - \zeta)V + (1 - \bar{\zeta})V^T$, где V — матрица Зейферта) можно рекуррентно вычислять, используя:

- формулу Хирцебруха (см. [1; §6], [13; §4]), выражающую сигнатуры торического узла $T(p, q)$ в терминах целых точек в прямоугольнике $p \times q$;
- формулу Лидерланда [12; Thm. 2], выражающую сигнатуры (p, q) -обмотки узла K через сигнатуры самого узла K и сигнатуры торического узла $T(p, q)$

Чтобы распространить этот подход на итерированные торические зацепления, представляется естественным рассматривать мультивариантное обобщение сигнатур Левина–Тристрама, изучавшееся в работах [3, 6, 10, 17]. Мы будем называть их *мультисигнатурами* (multivariate signatures). В статьях [6, 7] доказан аналог формулы Лидерланда для обмоток зацеплений, связывающий мультисигнатуры самого зацепления, его обмотки и зацепления (обозначаемого в §9 через $T_{m_1, m_2}(p, q)$, $m_1, m_2 \in \{0, 1\}$), которое является объединением торического зацепления с одной

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

или с двумя осевыми окружностями. Однако сигнатуры таких зацеплений не были известны.

Первоначальной целью настоящей работы было заполнить этот пробел и вычислить мультисигнатуры зацеплений $T_{m_1, m_2}(p, q)$. Это (и несколько больше) сделано в предложении 10.1, которое сводит вычисление мультисигнатур произвольного зацепления Зейферта (в частности, $T_{m_1, m_2}(p, q)$) к вычислению его сигнатурам Левина–Тристрама. Последние были вычислены Нейманом в работах [14], [15].

Говоря точнее, в предложении 10.1 для любого положительного n -компонентного зацепления Зейферта L (т.е. для объединения нескольких положительно ориентированных слоев на гомологической сфере Зейферта) доказано, что его мультисигнатура σ_L , рассматриваемая как функция на открытом кубе $]0, 1[^n$, постоянна на каждом представителе семейства параллельных гиперплоскостей, трансверсальных главной диагонали, и поэтому значения функции σ_L однозначно определяются ее диагональными значениями, которые в свою очередь совпадают с сигнатурами Левина–Тристрама с точностью до аддитивной константы. Доказательство предложения 10.1 основано на формуле сращивания (splice) для мультисигнатур (это основной результат работы [6]) в сочетании с тем наблюдением, что зацепления Зейферта допускают много разных способов сращивания.

В предложении 9.1 мы показываем, что для случая расширенного торического зацепления $T_{m_1, m_2}(p, q)$ формулу Неймана можно записать таким образом, что она станет почти идентичной формуле Хирцебруха, но только с заменой прямоугольника $p \times q$ параллелограммом, порожденным векторами $(p + m_1, m_2)$ и $(m_1, q + m_2)$.

В §§2–8 приведены необходимые определения и результаты из работ [6–8, 9, 13–15]; в §9 доказывается предложение 9.1; в §10 доказывается предложение 10.1; в §11 рассмотрены некоторые примеры и предложены вопросы для дальнейших исследований.

Благодарности. Я признателен Александру Дегтяреву и Венсану Флорансу за полезные обсуждения.

2. СРАЩИВАНИЯ И ДИАГРАММЫ СРАЩИВАНИЯ (ПО РАБОТАМ ЭЙЗЕНБУДА И НЕЙМАНА)

Пусть $(\Sigma', K' \cup L')$ и $(\Sigma'', K'' \cup L'')$ — два зацепления в целочисленных гомологических сферах. Здесь K' и K'' — компоненты соответственных зацеплений. Обозначим через $T(K')$ и $T(K'')$ их трубчатые окрестности, не пересекающиеся с L' и L'' соответственно.

Определение 2.1. *Сращивание* зацеплений $(\Sigma', K' \cup L')$ и $(\Sigma'', K'' \cup L'')$ вдоль K' и K'' определено в [9] (см. также [15], [6]) как $(\Sigma, L' \cup L'')$, где $\Sigma = (\Sigma' \setminus T(K')) \cup_{\varphi} (\Sigma'' \setminus T(K''))$ и $\varphi : T(K') \rightarrow T(K'')$ — гомеоморфизм, отождествляющий меридиан узла K' с параллелью узла K'' и наоборот.

Пусть a_1, \dots, a_n — положительные попарно взаимно простые целые числа. Следуя [9, 15], определим *зацепление Зейферта* $\text{Seif}(a_1, \dots, a_n)$ как $(\Sigma, S_1 \cup \dots \cup S_n)$, где $\Sigma = \Sigma(a_1, \dots, a_n)$ — единственная трехмерная гомологическая сфера Зейферта, имеющая слои S_1, \dots, S_n степеней a_1, \dots, a_n и не имеющая других слоев степени > 1 (см. подробное описание конструкции в [9, §7]). Ориентация Σ выбирается так, что

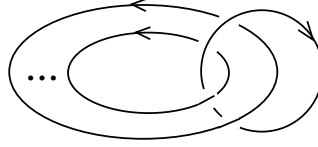


Рис. 1. $\mathfrak{Seif}(0, 1, \dots, 1)$ (в [6] — обобщенное зацепление Хопфа)

все индексы зацепления $\text{lk}(S_i, S_j)$, $i \neq j$, положительны. Это определение переносится на случай, когда a_1, \dots, a_n — произвольные попарно взаимно простые целые числа, полагая

$$\begin{aligned} \Sigma(a_1, \dots, -a_i, \dots, a_n) &= -\Sigma, \\ \mathfrak{Seif}(a_1, \dots, -a_i, \dots, a_n) &= (-\Sigma, S_1 \cup \dots \cup (-S_i) \cup \dots \cup S_n), \end{aligned}$$

и определяя $\mathfrak{Seif}(0, 1, \dots, 1)$ как зацепление на трехмерной сфере, изображенное на рис. 1. Наконец, положим

$$\mathfrak{Seif}(a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n) = (\Sigma, S_1 \cup \dots \cup S_k) \tag{1}$$

($\mathfrak{Seif}(a_1, \dots, a_n)$ без последних $n - k$ компонент).

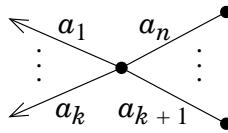


Рис.2. Диаграмма сращивания для $\mathfrak{Seif}(a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n)$.

Как показано в [9], любое граф-зацепление в *гомологической граф-сфере* (т.е. в граф-многообразии, являющемся гомологической сферой) можно получить сращиванием зацеплений Зейферта. Способ сращивания кодируется в [9] помеченными специальным образом деревьями (лесами), которые называются *диаграммами сращивания* (splice diagrams). Диаграмма сращивания для $\varepsilon \mathfrak{Seif}(a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n)$, $\varepsilon = \pm 1$, — это граф, изображенный на рис. 2, если $\varepsilon = +1$. Если $\varepsilon = -1$, мы будем использовать белый цвет для центральной вершины. При обращении ориентации одной из компонент соответствующая ей стрелка на диаграмме будет помечаться знаком минус (если знак не указан, подразумевается, что это плюс). Результат сращивания $(\Sigma', L' \cup K')$ с $(\Sigma'', L'' \cup K'')$ вдоль K' и K'' изображается диаграммой $\boxed{\Gamma'} \text{---} \boxed{\Gamma''}$, где $\boxed{\Gamma'} \text{---}$ и $\text{---} \boxed{\Gamma''}$ — диаграммы сращиваемых зацеплений, а изображенные стрелки отвечают компонентам K' и K'' . Несвязному объединению диаграмм соответствует несвязная сумма зацеплений, т.е. связанная сумма объемлющих многообразий вдоль шаров, не пересекающихся с зацеплениями.

Обозначим через $-\Gamma$ диаграмму Γ с противоположными знаками при всех стрелках.

Теорема 2.2. (См. [9, Thm. 8.1].) Две диаграммы сращивания определяют одно и то же зацепление тогда и только тогда, когда одну можно получить из другой последовательностью следующих эквивалентных преобразований:

(1) $\Gamma \approx -\Gamma$,

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

Предложение 2.3. (См. [9, §10].) Для $(\Sigma, S_1 \cup \dots \cup S_k)$ из (1), индексы зацепления равны $\text{lk}(S_i, S_j) = a_1 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_n$, $1 \leq i < j \leq k$ (как обычно, знак $\hat{}$ означает пропуск сомножителя).

На самом деле в [9, §10] индексы зацепления в терминах диаграмм сращивания вычислены для всех граф-зацеплений в трехмерных гомологических граф-сферах.

3. ОБМОТКИ И ИТЕРИРОВАННЫЕ ТОРИЧЕСКИЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Для ориентированного зацепления $L \cup K$ в гомологической сфере Σ , где K — узел, и для пары целых чисел $(p, q) \neq (0, 0)$ положим $d = \text{gcd}(p, q)$, $p_1 = p/d$, $q_1 = q/d$, и определим (p, q) -обмотку зацепления $L \cup K$ вдоль K с удалением основы (соответственно, с сохранением основы) как $L \cup L_{p,q}$ (соответственно, $L \cup K \cup L_{p,q}$), где $L_{p,q}$ есть объединение d непересекающихся узлов $K_1 \cup \dots \cup K_d$ таких, что для некоторой трубчатой окрестности T узла K , не пересекающейся с L , имеет место $K_j \subset \partial T$, $[K_j] = p_1[K] \in H_1(T)$ и $\text{lk}(K_j, K) = q_1$ для всех $j = 1, \dots, d$.

Итерированное торическое зацепление в сфере \mathbb{S}^3 определим как зацепление, полученное из тривиального узла последовательным применением этих операций. Заметим, что обращение ориентации одной из компонент эквивалентно взятию $(-1, 0)$ -обмотки с удалением основы.

Как показано в [9], (p, q) -обмотка зацепления $(\Sigma, L \cup K)$ вдоль K с сохранением (соответственно, с удалением) основы эквивалентна сращиванию $(\Sigma, L \cup K)$ с

$$\mathfrak{Seif}(q_1, \underbrace{1, \dots, 1}_d, p_1) \quad (\text{соответственно, с } \mathfrak{Seif}(q_1, \underbrace{1, \dots, 1}_d; p_1))$$

вдоль (K, S_1) , где S_1 — компонента, отвечающая весу q_1 (см. [9, Prop. 9.1] и следующий абзац там же).

4. МУЛЬТИСИГНАТУРЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Пусть L — ориентированное зацепление в гомологической сфере Σ . Для $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ обозначим через $\sigma_\zeta(L)$ сигнатуру Левина–Тристрама (см. введение), а через $\mathfrak{n}_\zeta(L)$ дефект (nullity) в точке ζ . В литературе имеются различные соглашения для дефекта. Мы определяем $\mathfrak{n}_\zeta(L)$ как дефект формы $(1-\zeta)V + (1-\bar{\zeta})V^T$, где V — форма Зейферта на **связной** поверхности Зейферта.

Обозначим через \mathbb{S}^1 единичную окружность в \mathbb{C} и положим $\mathcal{T} = \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in \mathbb{Q} \text{ и } 0 < \theta < 1\} \subset \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. Пусть L_1, \dots, L_μ — компоненты зацепления L . *Мульти­сиг­на­тура и мультидефект* зацепления L определены в [3, 6, 10] как некие функции $\sigma_L, \mathfrak{n}_L : \mathcal{T}^\mu \rightarrow \mathbb{Z}$. Мы будем опускать приставку *мульти-*, когда из контекста ясно, о чем идет речь. Как показано в [17] (см. также [5]), эти функции можно задать на $(\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})^\mu$. Удобно также продолжить их на $(\mathbb{S}^1)^\mu$, интерпретируя значение 1 для i -го аргумента как удаление L_i (см. [6, 7]).

Замечание 4.1. Мульти­сиг­на­туры определены в [3, 10, 17] для любого *крашеного зацепления*, т.е. для любого зацепления L с фиксированным представлением в виде несвязного объединения подзацеплений (необязательно связных) $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$. В этом случае i -й аргумент функций σ_L и \mathfrak{n}_L отвечает L_i . В настоящей статье мы рассматриваем только случай, когда все L_i связны. Однако случай общего крашеного зацепления всегда к нему сводится благодаря [3, Prop. 2.5].

Мы отсылаем читателя к [17], [5] или [8] за определением σ_L и \mathfrak{n}_L . Здесь мы только перечислим некоторые их свойства.

Предложение 4.2. (См. [3, Prop. 2.7].)

$$\begin{aligned} \sigma_L(u_1, \dots, u_\mu) &= \sigma_L(u_1^{-1}, \dots, u_\mu^{-1}), \\ \mathfrak{n}_L(u_1, \dots, u_\mu) &= \mathfrak{n}_L(u_1^{-1}, \dots, u_\mu^{-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Предложение 4.3. (См. [3, Prop. 2.8].) *Предположим, что L' получено из $L = L_1 \cup \dots \cup L_\mu$ обращением ориентации на L_i . Тогда $\sigma_L(u) = \sigma_{L'}(u')$ и $\mathfrak{n}_L(u) = \mathfrak{n}_{L'}(u')$, где $u = (u_1, \dots, u_\mu)$ и $u' = (u_1, \dots, u_i^{-1}, \dots, u_\mu)$.*

Предложение 4.4. (См. [3, Prop. 2.5].) *Пусть $\lambda \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. Тогда*

$$\sigma_\lambda(L) = \sigma_L(\lambda, \dots, \lambda) - \sum_{1 \leq i < j \leq \mu} \text{lk}(L_i, L_j), \quad \mathfrak{n}_\lambda(L) = \mathfrak{n}_L(\lambda, \dots, \lambda).$$

Следующий факт доказан в [3] только для зацеплений в \mathbb{S}^3 , но его доказательство можно перенести (приложив некоторые усилия) на зацепления в любой гомологической сфере.

Предложение 4.5. (См. [3].) Существует матрица $A = A(t_1, \dots, t_\mu)$, элементами которой являются многочлены Лорана, такая, что:

- многочлен Александера от многих переменных $\Delta_L(t_1, \dots, t_n)$ равен $\det A$ с точностью до множителей вида $\pm t_i^{\pm 1}$ и $\pm(t_i - 1)$;
- для всех $u \in (\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})^\mu$ сигнатура и дефект матрицы $A(u)$ равны $\sigma_L(u)$ и $\nu_L(u)$ соответственно.

Следствие 4.6. Если многочлен Александера от многих переменных $\Delta_L(t_1, \dots, t_\mu)$ не равен тождественно нулю, то σ_L постоянна на каждой компоненте связности дополнения к множеству нулей многочлена Δ_L в $(\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})^\mu$.

Я полагаю, что следующий факт должен быть хорошо известен (в любом случае его легко доказать).

Лемма 4.7. Пусть $A(t) = (a_{ij}(t))$, $t \in \mathbb{R}$, — эрмитова матрица такая, что $\operatorname{Re} a_{ij}$ и $\operatorname{Im} a_{ij}$ — вещественные аналитические функции от t . Предположим, что $\det A(t)$ имеет простой корень при $t = t_0$ и не имеет других корней на интервале $(t_0 - 2\varepsilon, t_0 + 2\varepsilon)$. Обозначим через s_0 и s_\pm сигнатуру матрицы $A(t)$ в $t = t_0$ и $t = t_0 \pm \varepsilon$ соответственно. Тогда $|s_+ - s_-| = 2$, $s_0 = (s_+ + s_-)/2$, и дефект $A(t_0)$ равен 1. \square

Из этой леммы и предложения 4.5 получаем:

Следствие 4.8. Пусть $u = (u_1, \dots, u_\mu) \in (\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})^\mu$. Предположим, что градиент функции $\Delta_L(t_1, \dots, t_\mu)$ в точке u не равен нулю. Тогда для малой окрестности $U \subset (\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})^\mu$ точки u ограничения $\sigma_L|_U$ и $\nu_L|_U$ зависят только от знака Δ_L , причем $|s_1 - s_{-1}| = 2$, $s_0 = (s_1 + s_{-1})/2$, $n_{\pm 1} = 0$, и $n_0 = 1$, где $s_t = \sigma_L|_{U_t}$ и $n_t = \nu_L|_{U_t}$ для $U_t = U \cap \{\operatorname{sign} \Delta_L = t\}$, $t = -1, 0, 1$.

5. МУЛЬТИСИГНАТУРЫ СРАЩИВАНИЙ (ПО РАБОТАМ ДЕГТЯРЕВА, ФЛОРАНСА И ЛЕКУОНЫ)

Для $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_\mu) \in \mathbb{Z}^\mu$ определим *поправочную функцию* $\delta_\ell : (\mathbb{S}^1)^\mu \rightarrow \mathbb{Z}$ как

$$\delta_\ell(u_1, \dots, u_\mu) = \operatorname{ind} \left(\sum \ell_i \operatorname{Log} u_i \right) - \sum \ell_i \operatorname{ind}(\operatorname{Log} u_i)$$

(см. рис. 3), где $\operatorname{Log} : \mathbb{S}^1 \rightarrow [0, 1[$ и $\operatorname{ind} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ заданы как

$$\operatorname{Log}(e^{2\pi i t}) = t, \quad \operatorname{ind}(x) = [x] - [-x].$$

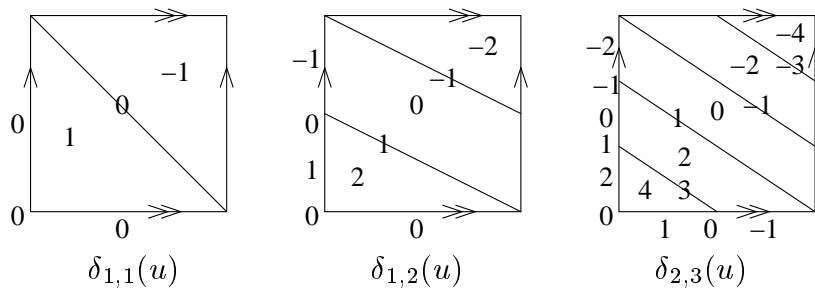


FIGURE 3. Значения δ_ℓ на $(\mathbb{S}^1)^2$ при $\ell = (1, 1)$, $(1, 2)$ и $(2, 3)$.

Пусть $(\Sigma, L' \cup L'')$ — сращивание $(\Sigma', K' \cup L')$ и $(\Sigma'', K'' \cup L'')$ вдоль K' и K'' (см. определение 2.1). Обозначим через $L'_1, \dots, L'_{\mu'}$ и $L''_1, \dots, L''_{\mu''}$ компоненты L' и L'' соответственно, а через ℓ' и ℓ'' — векторы индексов зацепления

$$\ell' = (\text{lk}(K', L'_1), \dots, \text{lk}(K', L'_{\mu'})), \quad \ell'' = (\text{lk}(K'', L''_1), \dots, \text{lk}(K'', L''_{\mu''})).$$

Теорема 5.1. (a). (См. [6, Thm. 2.2], [7, Thm. 5.2].) *Предположим, что L' и L'' непусты. Пусть $u' \in (\mathbb{S}^1)^{\mu'}$ и $u'' \in (\mathbb{S}^1)^{\mu''}$ таковы, что $(v', v'') \neq (1, 1)$, где $v' = (u')^{\ell'}$ и $v'' = (u'')^{\ell''}$. Тогда*

$$\begin{aligned} \sigma_{L' \cup L''}(u', u'') &= \sigma_{K' \cup L'}(v'', u') + \sigma_{K'' \cup L''}(v', u'') + \delta_{\ell'}(u') \delta_{\ell''}(u''), \\ \mathfrak{n}_{L' \cup L''}(u', u'') &= \mathfrak{n}_{K' \cup L'}(v'', u') + \mathfrak{n}_{K'' \cup L''}(v', u''). \end{aligned}$$

(b). (См. [6, Addendum 2.7].) *Предположим, что $L' = \emptyset$ и $L'' \neq \emptyset$. Тогда для любого $u \in (\mathbb{S}^1)^{\mu''}$ имеет место*

$$\begin{aligned} \sigma_{(\Sigma, L'')}(u) &= \sigma_{K'}(u^{\lambda''}) + \sigma_{K'' \cup L''}(u), \\ \mathfrak{n}_{(\Sigma, L'')}(u) &= \mathfrak{n}_{K'}(u^{\lambda''}) + \mathfrak{n}_{K'' \cup L''}(u). \end{aligned}$$

В случае, когда $(v', v'') = (1, 1)$, теорема 5.1(a) неприменима, но тем не менее, мультисигнатуры сращиваний часто можно вычислить по тем же формулам, но с еще одним поправочным членом, принимающим значения от -2 до 2 . Он выражается через значения некоторого инварианта на сращиваемых зацеплениях (*наклон зацепления*), см. подробнее в [7, 8] (см. также вопрос 11.1 ниже).

6. ЭКВИВАРИАНТНЫЕ СИГНАТУРЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

Другой тип сигнатур, рассматриваемый в настоящей статье, — это *эквивариантные сигнатуры* σ_{λ}^{\pm} . Мы определим их только для расслоенных зацеплений, хотя это определение можно распространить и на общий случай (см. обзоры [4], [11]). Итак, пусть L — расслоенное зацепление, F — слой (в частности, $\partial F = L$), и $h : H_1(F) \rightarrow H_1(F)$ — оператор монодромии. В этом случае многочлен Александера от одной переменной $\Delta_L(t)$ совпадает с характеристическим многочленом h . Положим $H = H_1(F) \otimes \mathbb{C}$, и пусть $H = \bigoplus_{\lambda} H_{\lambda}$ — разложение пространства H по собственным числам оператора h . Пусть l — форма Зейферта на $H_1(F)$, продолженная до полуторолинейной формы на H . Тогда σ_{λ}^+ (соответственно, σ_{λ}^-) определяется как сигнатура эрмитовой формы $l + l^*$ (соответственно, $i(l - l^*)$), ограниченной на H_{λ} .

Предложение 6.1. (См. [13], [14].) *Для любого расслоенного зацепления*

- (a). $\sigma_{\lambda}^+ = \sigma_{\bar{\lambda}}^+$ и $\sigma_{\bar{\lambda}}^- = (\text{sign Im } \lambda) \sigma_{\lambda}^+$, в частности, $\sigma_{\bar{\lambda}}^- = -\sigma_{\bar{\lambda}}^-$ и $\sigma_{\pm 1}^- = 0$;
- (b). если $|\lambda| \neq 1$ или λ не корень многочлена Александера, то $\sigma_{\lambda}^+ = \sigma_{\bar{\lambda}}^- = 0$;
- (c). для $\omega = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi \leq \pi$, если h — полупростой оператор или ω не корень $\Delta_L(t)$, то сигнатура и дефект Левина–Тристрама имеют вид

$$\sigma_{\omega}(L) = \sigma_{\omega}^+ + 2 \sum_{\substack{0 \leq \theta < \varphi \\ \lambda = e^{i\theta}}} \sigma_{\lambda}^+ \quad \text{и} \quad \mathfrak{n}_{\omega}(L) = \dim H_{\omega},$$

т.е., $\rho_\omega(L)$ — кратность ω как корня $\Delta_L(t)$.

Замечание 6.2. Соглашения об ориентации в [13] и в [14, 15] различны. В [13] они таковы, что $l^*h = l$, а в [14, 15] — таковы, что $lh = l^*$. По этой причине знаки σ_λ^- в этих источниках различаются. Мы пользуемся соглашениями из [13], которые представляются более общепринятыми в наше время.

7. ПИЛООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И ОДНО ТОЖДЕСТВО ДЛЯ НЕЕ

Положим

$$((x)) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x + [x], & x \notin \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

где $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ — целая часть числа x . Для любого множества Ω обозначим

$$\mathbf{1}_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Лемма 7.1. Пусть $x, y, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$. Предположим, что $x + y + z_1 + \dots + z_n = s \in \mathbb{Z}$ и $0 < z_i < 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$((x)) + ((y)) + ((z_1)) + \dots + ((z_n)) = n/2 - \#(\mathbb{Z} \cap]x, s - y[) - \frac{1}{2}\mathbf{1}_\mathbb{Z}(x) - \frac{1}{2}\mathbf{1}_\mathbb{Z}(y).$$

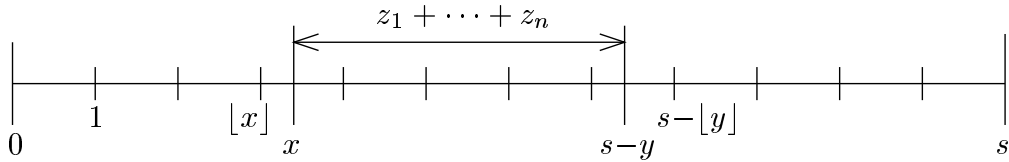


Рис. 4

Доказательство. Мы рассмотрим случай $x, y \notin \mathbb{Z}$, а другие случаи оставим читателю. Поскольку $[z_1] = \dots = [z_n] = 0$, левая часть равна

$$\frac{n+2}{2} - (x - [x]) - (y - [y]) - \sum z_i = \frac{n+2}{2} - s + [x] + [y],$$

и мы получаем $1 + \#(\mathbb{Z} \cap]x, s - y[) = (s - [y]) - [x]$ (см. рис. 4). \square

8. ФОРМУЛА НЕЙМАНА ДЛЯ ЭКВИВАРИАНТНЫХ СИГНАТУР ЗАЦЕПЛЕНИЙ ЗЕЙФЕРТА

Пусть $L = \mathfrak{S}\mathfrak{e}\mathfrak{i}\mathfrak{f}(a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n)$ с положительными a_1, \dots, a_n . Положим

$$m_j = \begin{cases} 1, & j \leq k, \\ 0, & j > k, \end{cases} \quad a'_j = (a_1 \dots a_n)/a_j, \quad m = \sum_{j=1}^n m_j a'_j. \quad (3)$$

Выберем b_1, \dots, b_n так, что $b_j a'_j \equiv 1 \pmod{a_j}$ для всех $j = 1, \dots, n$, и пусть

$$s_j = (m_j - b_j m)/a_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Теорема 8.1. (Нейман [14, 15].) *Зацепление L расслоенное, его оператор монодромии полупростой, и имеют место следующие равенства: $\sigma_1^+(L) = 1 - k$, $\sigma_{-1}^+(L) = 0$ и, при $\lambda \neq 1$,*

$$\sigma_\lambda^-(L) = \begin{cases} -2 \sum_{j=1}^n ((s_j k / m)) & \text{если } \lambda = \exp(2\pi i k / m), k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $((\dots))$ — пилообразная функция, определенная в §7.

Напомним, что знак σ_λ^- в [14, 15] противоположный, см. замечание 6.2.

Следствие 8.2. *Для $\omega = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi \leq \pi$, имеем*

$$\sigma_\omega(L) = 1 - k + \sigma_\omega^-(L) + 2 \sum_{\substack{0 < \theta < \varphi \\ \lambda = e^{i\theta}}} \sigma_\lambda^-(L)$$

и $n_\omega(L)$ равняется кратности ω в качестве корня многочлена $\Delta_L(t)$.

По [9, Thm. 12.1], если $k \geq 2$, многочлен Александера от многих переменных зацепления L имеет вид

$$\Delta_L(t_1, \dots, t_k) = (t_1^{a'_1} \dots t_k^{a'_k} - 1)^{n-2} \prod_{j=k+1}^n (t_1^{a'_1/a_j} \dots t_k^{a'_k/a_j} - 1)^{-1}, \quad (4)$$

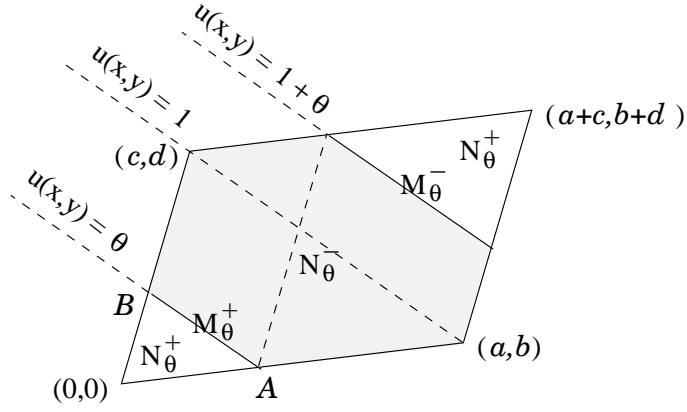
и значит многочлен Александера от одной переменной равен $\Delta_L(t) = (t-1)\Delta_L(t, \dots, t)$. (При $k = 1$ правую часть (4) надо умножить на $t_1 - 1$.) Формула (4) — это специализация общей формулы из [9] для многочлена Александера любого мульти-зацепления в гомологической граф-сфере.

Замечание 8.3. На самом деле результаты в [15, Thms. 5.1–5.3] намного сильнее, чем теорема 8.1: для любого алгебраического зацепления (а не только для положительных зацеплений Зейферта) там вычислено разложение эрмитовой изометрической структуры на неприводимые компоненты, что, в частности, включает в себя нахождение формы Зейферта с точностью до подобия над \mathbb{C} (в [15, Thm. 5.3] есть опечатка: множитель i должен быть опущен в зейфертовской составляющей Λ_λ^2).

9. ФОРМУЛА ДЛЯ СИГНАТУР ТОРИЧЕСКОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ОСЕВЫМИ ОКРУЖНОСТЯМИ АНАЛОГИЧНАЯ ФОРМУЛЕ ХИРЦЕВРУХА

Для целых чисел a, b, c, d , удовлетворяющих условию $ad - bc > 0$, обозначим **открытый** параллелограмм в \mathbb{R}^2 , порожденный векторами (a, b) и (c, d) , через $\Pi = \Pi(a, b, c, d)$, т.е.

$$\Pi(a, b, c, d) = \{s(a, b) + t(c, d) \mid 0 < s < 1 \text{ и } 0 < t < 1\}.$$

Рис. 5. Определение N_θ^\pm и M_θ^\pm

Пусть $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная функция, для которой $u(a, b) = u(c, d) = 1$. При $0 \leq \theta < 1$ положим (см. рис. 5):

$$\begin{aligned} N_\theta^- &= N_\theta^-(a, b, c, d) = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \cap \Pi \mid \theta < u(x, y) < \theta + 1\}, \\ N_\theta^+ &= N_\theta^+(a, b, c, d) = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \cap \Pi \mid u(x, y) < \theta \text{ или } \theta + 1 < u(x, y)\}, \\ M_\theta^- &= M_\theta^-(a, b, c, d) = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \cap \Pi \mid u(x, y) = \theta + 1\}, \\ M_\theta^+ &= M_\theta^+(a, b, c, d) = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \cap \Pi \mid u(x, y) = \theta\}. \end{aligned}$$

Пусть p и q — целые положительные числа (необязательно взаимно простые) и $m_1, m_2 \in \{0, 1\}$. Определим расширенное торическое зацепление $T_{m_1, m_2}(p, q)$ как пересечение единичной сферы в \mathbb{C}^2 с алгебраической кривой $\{(z_1, z_2) \mid z_1^{m_1} z_2^{m_2} (z_1^p - z_2^q) = 0\}$, наделенной граничной ориентацией, индуцированной с той части кривой, которая лежит в единичном шаре; в этом случае индекс зацепления любых двух компонент положителен. Если $m_1 = m_2 = 0$, это обычное торическое зацепление $T(p, q)$.

Предложение 9.1. Пусть $(a, b) = (p, 0) + (m_1, m_2)$ и $(c, d) = (0, q) + (m_1, m_2)$. Тогда для эквивариантной сигнатуры, а также для сигнатуры и дефекта Левина–Тристрама зацепления $T_{m_1, m_2}(p, q)$ в точке $\lambda = e^{2\pi i \theta}$ при $0 < \theta < 1$ имеют место равенства

$$\sigma_\lambda^- = M_\theta^+ - M_\theta^-, \quad \sigma_\lambda = N_\theta^+ - N_\theta^- - m_1 - m_2, \quad \nu_\lambda = M_\theta^+ + M_\theta^-,$$

где $N_\theta^\pm = N_\theta^\pm(a, b, c, d)$ и $M_\theta^\pm = M_\theta^\pm(a, b, c, d)$.

Замечание 9.2. В случае $m_1 = m_2 = 0$ это формула Хирцебруха (см. [1; §6] для $\theta = 1/2$ и [13; §4] для произвольного θ).

Замечание 9.3. В [16; Глор. 8.1] я привел следующие формулы для сигнатуры и дефекта зацепления, представимого косой Δ^n с $2k + 1$ нитями:

$$\sigma(L) = \sigma_{-1}(L) = \begin{cases} -nk(k+1) + (-1)^{(n-1)/2} & \text{при } k \equiv n \equiv 1 \pmod{2}, \\ -nk(k+1) & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$n(L) = n_{-1}(L) = \begin{cases} 2k & \text{при } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Вместо доказательства я дал ссылку на [15]. Теперь предложение 9.1 дает недостающие делала вычисления, так как данное зацепление есть $T_{0,1}(nk, 2k)$.

Замечание 9.4. Для произвольных неотрицательных целых чисел m_1 и m_2 определим зацепление $T_{m_1, m_2}(p, q)$ теми же формулами, что и выше, но будем рассматривать его как мульти-зацепление в смысле [9, 15]. В этом случае равенство $\sigma_{\lambda}^- = M_{\theta}^+ - M_{\theta}^-$ и его доказательство остаются в силе.

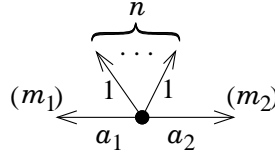


Рис. 6. Диаграмма сращивания для $T_{m_1, m_2}(na_1, na_2)$

Доказательство предложения 9.1. Положим $p = a_1n$ и $q = a_2n$, где $n = \gcd(p, q)$. Тогда диаграмма сращивания для (мульти-)зацепления $T_{m_1, m_2}(p, q)$ такая, как показано на рис. 6. Мы имеем $M_0^+ = n - 1$, $M_0^- = 0$, и при этом число компонент зацепления равно $n + m_1 + m_2 = (M_0^+ - M_0^-) + 1 + m_1 + m_2$. Легко также проверить, что

$$N_{\varphi}^+ - N_{\varphi}^- = (M_{\varphi}^+ - M_{\varphi}^-) + 2 \sum_{0 \leq \theta < \varphi} (M_{\theta}^+ - M_{\theta}^-).$$

Таким образом, по следствию 8.2 вычисление σ_{λ} сводится к вычислению σ_{λ}^- . Для вычисления σ_{λ}^- применим теорему 8.1 при $a_j = m_j = 1$ для $j = 3, \dots, n + 2$. Пусть a'_j , b_j и s_j будут, как в §8, с надлежащим образом выбранной областью изменения индексов. Тогда $a'_1 = a_2$, $a'_2 = a_1$, и $a'_j = a_1a_2$ при $j \geq 3$, откуда получаем

$$m = m_1a_2 + m_2a_1 + na_1a_2.$$

Следовательно, линейная функция из определения чисел M_{θ}^{\pm} , N_{θ}^{\pm} принимает вид $u(x, y) = (a_2x + a_1y)/m$. Таким образом, $M_{\theta}^+ - M_{\theta}^- = 0 - 0 = \sigma_{\theta}^-$ при $m\theta \notin \mathbb{Z}$. Фиксируем $\theta = k/m$, где $k \in \mathbb{Z}$, $0 < k < m$. Тогда из теоремы 8.1 следует, что $\sigma_{\theta}^- = -2 \sum ((x_j))$, где $x_j = s_j k/m$, $j = 1, \dots, n + 2$.

Выберем b_1 и b_2 так, что $a_1b_2 + a_2b_1 = 1$ и положим $b_j = 0$ при $j \geq 3$. Тогда $\sum b_j a'_j = 1$, значит

$$a_1 \dots a_{n+2} \sum s_j = \sum (m_j - b_j m) a'_j = m - m \sum b_j a'_j = 0,$$

и мы получаем $\sum x_j = \sum s_j k/m = 0$. К тому же, $0 < x_j = k/m < 1$ при $j \geq 3$. Поэтому лемма 7.1 влечет

$$\sigma_{\lambda}^- = -n + 2\#\{l \in \mathbb{Z} \mid x_1 < l < -x_2\} + \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}(x_1) + \mathbf{1}_{\mathbb{Z}}(x_2). \quad (5)$$

Неравенства $x_1 < l < -x_2$ в (5) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 < l &\Leftrightarrow (m_1 - b_1 m)k/m < a_1 l &\Leftrightarrow b_1 k + a_1 l > m_1 k/m, \\ l < -x_2 &\Leftrightarrow (m_1 - b_2 m)k/m < -a_2 l &\Leftrightarrow b_2 k - a_2 l > m_2 k/m. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi : t \mapsto (b_1 k + a_1 t, b_2 k - a_2 t)$ есть параметризация прямой $\{u = \theta\}$ такая, что $\varphi(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2 \cap \{u = \theta\}$, и поскольку $\varphi(m_1 k/m) = A$ и $\varphi(m_2 k/m) = B$ — это точки пересечения прямой $\{u = \theta\}$ с $\partial\Pi$ (см. рис. 5), можно преобразовать (5) к виду

$$\sigma_\lambda^- = -n + 2M_\theta^+ + \partial M_\theta^+,$$

где ∂M_θ^+ означает $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}^2}(A) + \mathbf{1}_{\mathbb{Z}^2}(B)$. Из этих равенств вместе с

$$n = M_0^- + \frac{1}{2}\partial M_0^- = M_\theta^- + M_\theta^+ + \frac{1}{2}(\partial M_\theta^- + \partial M_\theta^+) \quad \text{и} \quad \partial M_\theta^+ = \partial M_\theta^-, \quad (6)$$

вытекает желаемое выражение для σ_λ^- .

Воспользуемся теперь следствием 8.2 для вычисления \mathfrak{n}_λ . Согласно (4),

$$\Delta_L(t) = \frac{(t-1)(t^m-1)^{n+m_1+m_2-2}}{(t^{m/a_1}-1)^{1-m_1}(t^{m/a_2}-1)^{1-m_2}},$$

а по (6) мы имеем $M_\theta^+ + M_\theta^- = n - \partial M_\theta^+$. В случае $(m_1, m_2) = (1, 1)$ из этого сразу следует, что $M_\theta^+ + M_\theta^-$ есть кратность числа $e^{2\pi i\theta}$ как корня $\Delta_L(t)$. Мы оставляем читателю случаи $(m_1, m_2) = (1, 0)$ и $(m_1, m_2) = (0, 0)$. \square

10. МУЛЬТИСИГНАТУРЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ЗЕЙФЕРТА

В этом разделе мы вычислим мультисигнатуры и дефекты любого зацепления Зейферта с любыми ориентациями его компонент. Предложение 10.1 вместе со следствием 8.2 позволяет вычислить σ_L и \mathfrak{n}_L для всех положительных зацеплений Зейферта $L = \mathfrak{Seif}(a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n)$, $a_i \geq 0$, а теорема 2.2(2) в сочетании с предложением 4.3 к этому случаю сводит общий случай. Заметим, что обращение ориентации объемлющего многообразия $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$ (изменение цвета центральной вершины в диаграмме сращивания) меняет знак σ_L .

Отметим, что в большинстве случаев вычисление σ_L и \mathfrak{n}_L для положительного зацепления Зейферта непосредственно вытекает из фактов, приведенных в предыдущих разделах. В самом деле, введем координаты $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ на $(\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})^n$, $u_j = e^{2\pi i\theta_j}$. Тогда ограничение функций σ_L и \mathfrak{n}_L на главную диагональ $\theta_1 = \dots = \theta_n$ определяется теоремой 8.1 и предложением 4.4. Согласно (4), множество нулей многочлена Александра от многих переменных есть объединение параллельных гиперплоскостей, трансверсальных главной диагонали. Поэтому продолжение σ_L и \mathfrak{n}_L с главной диагонали на $(\mathbb{S}^1 \setminus \{1\})^n$ однозначно определено по следствию 4.8 всюду, кроме гиперплоскостей, отвечающих кратным нулям Δ_L . Таким образом, единственное, что остается сделать, это продолжить σ_L и \mathfrak{n}_L на кратные компоненты множества $\{\Delta_L = 0\}$. Мы это сделаем, пользуясь формулой сращивания из теоремы 5.1 и тем наблюдением, что многие зацепления Зейферта допускают разные способы сращивания. Дадим теперь точную формулировку и подробное доказательство.

Предложение 10.1. Пусть $L = L_1 \cup \dots \cup L_k = \mathfrak{S}\text{cif}(a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n)$ с неотрицательными a_1, \dots, a_n . Пусть $u = (u_1, \dots, u_k)$, где $u_j = \exp(2\pi\theta_j)$, $0 < \theta_j < 1$. Тогда $\sigma_L(u)$ и $\mathfrak{n}_L(u)$ зависят только от суммы $\sum_{j=1}^k a'_j \theta_j$ (числа a'_j такие, как в (3)) тем самым

$$\sigma_L(u) = \sigma_L(\lambda, \dots, \lambda) = \sigma_\lambda(L) + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \text{lk}(L_i, L_j)$$

и $\mathfrak{n}_L(u) = \mathfrak{n}_L(\lambda, \dots, \lambda) = \mathfrak{n}_\lambda(L)$ при

$$\lambda = \exp(2\pi i \theta), \quad \theta = \frac{a'_1 \theta_1 + \dots + a'_k \theta_k}{a'_1 + \dots + a'_k}.$$

Доказательство. Если $a_j = 0$ для некоторого j , то (a_1, \dots, a_n) есть перестановка чисел $(0, 1, \dots, 1)$, следовательно, либо L тривиальное k -компонентное зацепление (при $j > k$; см. теорему 2.2(4)), либо L — это зацепление на рис. 1, и тогда результат следует из [6; Thm. 2.10]. Поэтому мы будем предполагать, что все a_j положительны.

При $n = 2$ доказываемое утверждение очевидно, так как L — либо тривиальный узел, либо двухкомпонентное зацепление Хопфа. При $n = 3$ доказываемое утверждение вытекает из следствия 4.8, потому что тогда многочлен Александра от многих переменных имеет вид (см. (4))

$$\Delta_L(t_1, \dots, t_k) = f(t_1^{a'_1} \dots t_k^{a'_k} - 1),$$

где $f(t)$ — многочлен без кратных корней. Если рассматривать Δ_L как аналитическую функцию от $\theta_1, \dots, \theta_k$, то ее множество нулей есть объединение параллельных гиперплоскостей трансверсальных главной диагонали, причем градиент Δ_L на них не обращается в ноль.

Если $k = 2$, мы рассмотрим сращивание на рис. 7. Получающееся зацепление совпадает с L согласно свойству стягивания ребер (теорема 2.2(6)). Поэтому доказываемое утверждение следует из теоремы 5.1(b) и из уже разобранных случаев $n = 3$.

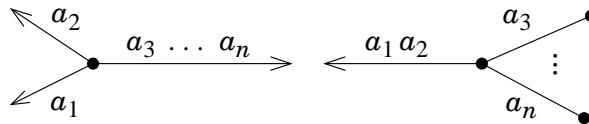


Рис. 7. Сращивание при $k = 2$ в доказательстве предложения 10.1.

Теперь предположим, что $k \geq 3$. Нам требуется доказать, что σ_L и \mathfrak{n}_L , рассматриваемые как функции от $\theta_1, \dots, \theta_k$, локально постоянны на каждом открытом $(k - 1)$ -мерном многограннике вида $P_c = \{a'_1 \theta_1 + \dots + a'_k \theta_k = c\} \cap]0, 1[^k$. Для этого достаточно показать, что они постоянны на любом открытом интервале в P_c , заданном тем условием, что из чисел θ_k фиксированы все, кроме двух. Более того, достаточно установить постоянство данных функций на таких интервалах некоторой сколь угодно малой, но фиксированной, длины. Таким образом, задача сводится к доказательству следующего утверждения.

Пусть $k \geq 3$, и пусть $\tilde{\theta}_2$ и $\tilde{\theta}_3$ удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < \frac{\tilde{\theta}_2 - \theta_2}{a_2} = \frac{\theta_3 - \tilde{\theta}_3}{a_3} < \frac{1}{a_1}, \quad 0 < \tilde{\theta}_2 < 1, \quad 0 < \tilde{\theta}_3 < 1. \quad (7)$$

Тогда $\sigma_L(u) = \sigma_L(u_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, u_4, \dots, u_k)$, где $\tilde{u}_j = \exp(2\pi i \tilde{\theta}_j)$, $j = 2, 3$.

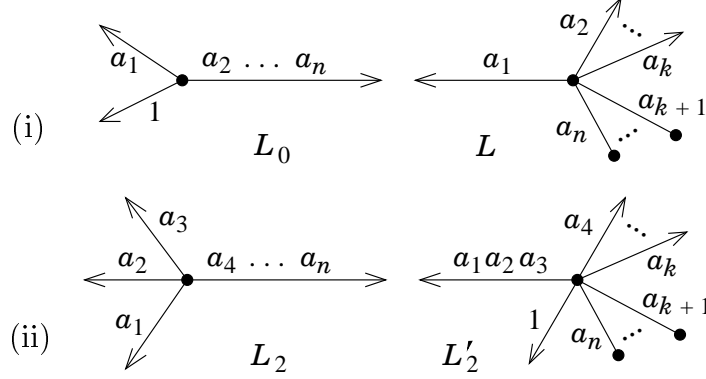


Рис. 8. Два сращивания L_1 в доказательстве предложения 10.1.

Докажем это. Пусть L_1 — результат сращивания, как на рис. 8(i). Тогда $L_1 = \mathfrak{S}eif(1, a_1, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n)$ в силу свойства стягивания ребер (теорема 2.2(6)). По той же причине L_1 допускает сращивание, как на рис. 8(ii).

Положим $A_j = a_j a_{j+1} \dots a_n$ и $u_{\vec{j}} = (u_j, \dots, u_k)$, в частности, $u_{\vec{1}} = u$. Благодаря сращиванию на рис. 8(i), для любого u_0 теорема 5.1(a) влечет:

$$\sigma_L(u) = \sigma_{L_1}(u_0, u_1^*, u_{\vec{2}}) - \sigma_{L_0}(v, u_0, u_1^*) - \delta_L(u) \delta_{L_0}(v, u_0, u_1^*), \quad (8)$$

где $u_1^* = u_1 u_0^{-a_1}$ и $v = \prod_{j=2}^k u_j^{A_2/a_j}$ (обозначения δ_L и δ_{L_0} должны быть понятны из контекста). Эта формула применима, когда $(u_1, v) \neq (1, 1)$, что имеет место в нашем случае, так как $u_1 \neq 1$.

Аналогично, если $(v_2, v'_2) \neq (1, 1)$, сращивание на рис. 8(ii) дает

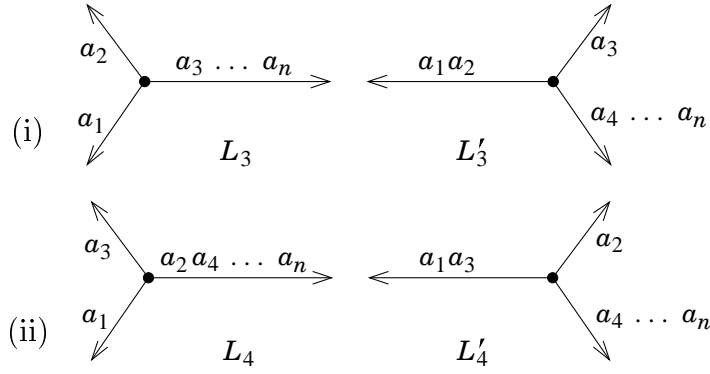
$$\sigma_{L_1}(u_0, u_1^*, u_{\vec{2}}) = \sigma_{L_2}(v'_2, u_1^*, u_2, u_3) + \sigma_{L'_2}(v_2, u_0, u_{\vec{4}}) + \delta_{L_2}(u_1^*, u_2, u_3) \delta_{L'_2}(u_0, u_{\vec{4}}), \quad (9)$$

где $v'_2 = u_0^{A_4} \prod_{j=4}^k u_j^{A_4/a_j}$ и $v_2 = (u_1^*)^{a_2 a_3} u_2^{a_1 a_3} u_3^{a_1 a_2}$.

Далее, для зацепления L_2 (на рис. 8(ii) слева) рассмотрим два сращивания, изображенных на рис. 9. Тогда, если $(v_3, v'_3) \neq (1, 1) \neq (v_4, v'_4)$, мы имеем

$$\sigma_{L_2}(v'_2, u_1^*, u_2, u_3) = \sigma_{L_3}(v'_3, u_1^*, u_2) + \sigma_{L'_3}(v_3, u_3, v'_2) + \delta_{L_3}(u_1^*, u_2) \delta_{L'_3}(u_3, v'_2), \quad (10)$$

$$\sigma_{L_2}(v'_2, u_1^*, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = \sigma_{L_4}(v'_4, u_1^*, \tilde{u}_3) + \sigma_{L'_4}(v_4, \tilde{u}_2, v'_2) + \delta_{L_4}(u_1^*, \tilde{u}_3) \delta_{L'_4}(\tilde{u}_2, v'_2), \quad (11)$$


 Рис. 9. Два сращивания L_2 в доказательстве предложения 10.1.

где $v_3 = (u_1^*)^{a_2} u_2^{a_1}$, $v'_3 = (v'_2)^{a_3} u_3^{A_4}$, $v_4 = (u_1^*)^{a_3} \tilde{u}_3^{a_1}$, $v'_4 = (v'_2)^{a_2} \tilde{u}_2^{A_4}$.

Пусть $\theta_1^* \in]0, 1[$ такое, что $u_1^* = e^{2\pi i \theta_1^*}$ (напомним, что $u_1^* = u_1 u_0^{-a_1}$). Выберем u_0 так, чтобы было $v_j \neq 1$ при $j = 2, 3, 4$ (тогда условия (8)–(11) выполнены), и чтобы при этом θ_1^* удовлетворяло условию

$$0 < \tilde{\theta}_1 < \theta_1^* < 1, \quad \text{где } \tilde{\theta}_1 \text{ такое, что } \frac{\theta_1^* - \tilde{\theta}_1}{a_1} = \frac{\tilde{\theta}_2 - \theta_2}{a_2} = \frac{\theta_3 - \tilde{\theta}_3}{a_3}. \quad (12)$$

Такое число u_0 существует в силу (7). По аналогии с (10) и (11), при $\tilde{u}_1 = e^{2\pi i \tilde{\theta}_1}$ мы имеем

$$\sigma_{L_2}(v'_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, u_3) = \sigma_{L_3}(v'_3, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2) + \sigma_{L'_3}(v_3, u_3, v'_2) + \delta_{L_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \delta_{L'_3}(u_3, v'_2), \quad (13)$$

$$\sigma_{L_2}(v'_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, u_3) = \sigma_{L_4}(v'_4, \tilde{u}_1, u_3) + \sigma_{L'_4}(v_4, \tilde{u}_2, v'_2) + \delta_{L_4}(\tilde{u}_1, u_3) \delta_{L'_4}(\tilde{u}_2, v'_2). \quad (14)$$

Поскольку случай $n = 3$ уже сделан, условие (12) влечет

$$\begin{aligned} \sigma_{L_3}(v'_3, u_1^*, u_2) &= \sigma_{L_3}(v'_3, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2), & \delta_{L_3}(u_1^*, u_2) &= \delta_{L_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2), \\ \sigma_{L_4}(v'_4, u_1^*, \tilde{u}_2) &= \sigma_{L_4}(v'_4, \tilde{u}_1, u_2), & \delta_{L_4}(u_1^*, \tilde{u}_2) &= \delta_{L_4}(\tilde{u}_1, u_2). \end{aligned}$$

Следовательно, все слагаемые в правых частях (10) и (11) равны соответствующим слагаемым в (13) и (14). Поэтому левые части тоже равны, и мы заключаем, что

$$\sigma_{L_2}(v'_2, u_1^*, u_2, u_3) \stackrel{(10),(13)}{=} \sigma_{L_2}(v'_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, u_3) \stackrel{(11),(14)}{=} \sigma_{L_2}(v'_2, u_1^*, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3).$$

Таким образом, правая часть (9) не меняется при замене u_2 и u_3 на \tilde{u}_2 и \tilde{u}_3 , а значит, тоже самое верно и для (8). Это завершает доказательство для сигнатур. Для дефектов доказательство аналогично. \square

11. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

11.1. Линк особенности для двух трансверсальных каспов. Мы начнем с примера, рассмотренного в [15, §7]. Пусть L — зацепление, высекаемое кривой

$$(x^3 - y^2)(x^2 - y^3) = 0 \quad (15)$$

на достаточно малой сфере в \mathbb{C}^2 с центром в начале координат. Тогда L получается из зацепления Хопфа применением $(2, 3)$ -обмотки вдоль обеих компонент. Это соответствует сращиванию на рис. 10, где именами переменных помечены соответствующие стрелки. Сращиваемые зацепления имеют вид $L_j \cup K_j$, $j = 1, 2$, где L_j — узел-трилистник и K_j — одна из его осевых окружностей.

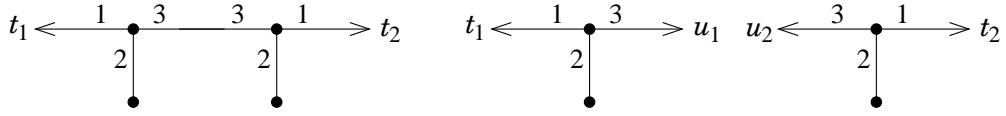


Рис. 10. Диаграмма сращивания и сращиваемые компоненты для зацепления из §11.1

Многочлены Александера рассматриваемых зацеплений равны

$$\Delta_L(t_1, t_2) = \frac{(t_1^6 t_2^4 - 1)(t_1^4 t_2^6 - 1)}{(t_1^3 t_2^2 - 1)(t_1^2 t_2^3 - 1)} = (t_1^3 t_2^2 + 1)(t_1^2 t_2^3 + 1),$$

$t_1^3 u_1 + 1$ и $t_2^3 u_2 + 1$ соответственно.

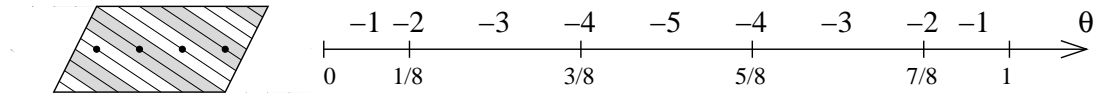


Рис. 11. $\Pi(3+1, 0, 1, 2)$ и значения функции $\sigma_\lambda(K_j \cup L_j)$, $\lambda = e^{2\pi i \theta}$

По предложению 9.1, сигнатуры Левина–Тристрама сращиваемых зацеплений такие, как показано на рис. 11. Следовательно, по предложению 10.1, сигнатуры $\sigma_{K_j \cup L_j}(t_j, u_j)$ для $t_j = e^{2\pi i \theta_j}$, $u_j = e^{2\pi i \varphi_j}$ такие, как на рис. 12 слева. Дефект $n_{K_j \cup L_j}$ равен $1 - |\text{sign}(\Delta_{L_j})|$, за двумя исключениями: $n_{K_j \cup L_j}(-1, 1) = n_{K_j \cup L_j}(1, -1) = 0$ (белые кружки на рис. 12).

По теореме 5.1, для $(t_1, t_2) \in (\mathbb{S}^1)^2$ мы имеем

$$\sigma_L(t_1, t_2) = \sigma_{K_1 \cup L_1}(t_2^2, t_1) + \sigma_{K_2 \cup L_2}(t_1^2, t_2) + \delta_{(2)}(t_1) \delta_{(2)}(t_2) \quad (16)$$

кроме тех случаев, когда $(t_1^2, t_2^2) = (1, 1)$. На рис. 13 показаны значения двух из трех слагаемых в левой части (16) (картинки для $\sigma_{K_1 \cup L_1}(t_2^2, t_1)$ и для $\sigma_{K_2 \cup L_2}(t_1^2, t_2)$ симметричны относительно диагонали $\theta_1 = \theta_2$). Суммируя, мы получаем значения σ_L , показанные на рис. 13. Значения функции σ_L на отрезках, составляющих множество $\Delta_L = 0$ не указаны, так как по лемме 4.7 они равны полусумме значений по обе стороны от отрезка.

Вообще говоря, из теоремы 5.1 следует, что σ_L такая, как на рис. 13, только при $(t_1, t_2) \neq (\pm 1, \pm 1)$. Однако поправочный член $\Delta\sigma$ можно найти, используя [7, Thm. 5.3], и он окажется равным нулю. В нижеследующем вычислении $\Delta\sigma$ мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из [7]. Мы ограничимся только случаем

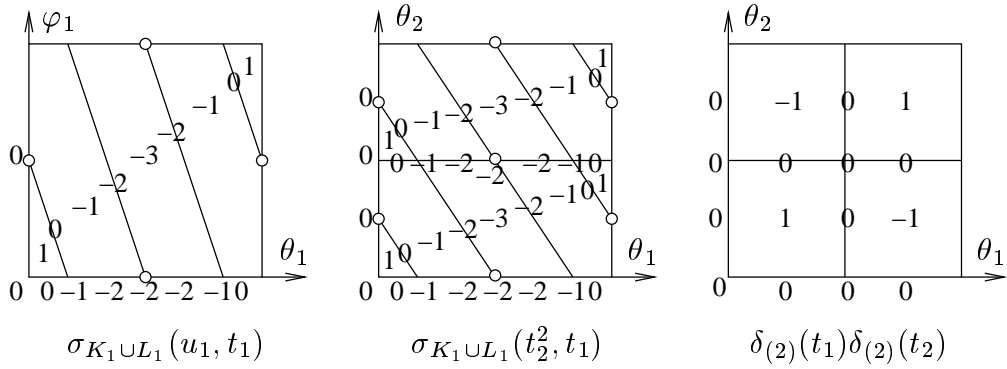


Рис. 12. Значения слагаемых в правой части (16)

$(t_1, t_2) = (-1, -1)$. Потенциальные функции Конвея для $K_j \cup L_j$ и для трилистника K_j имеют вид

$$\nabla_{K_j \cup L_j}(u_j, t_j) = t_j^3 u_j + t_j^{-3} u_j^{-1}, \quad \nabla_{K_j}(t_j) = (t_j^2 - 1 + t_j^{-2}) / (t - t^{-1})$$

(см. [2]), что дает значения наклонов $\kappa_j = (L_j / K_j)(-1) = -(\nabla_{K_j \cup L_j})'_{u_j}(1, i) / 2\nabla_{K_j}(i) = 2/3, j = 1, 2$ (см. [7, Thm. 3.21]). Отсюда $\Delta\sigma = 0$ (см. [7, Thm. 5.3 и Rem. 5.4]).

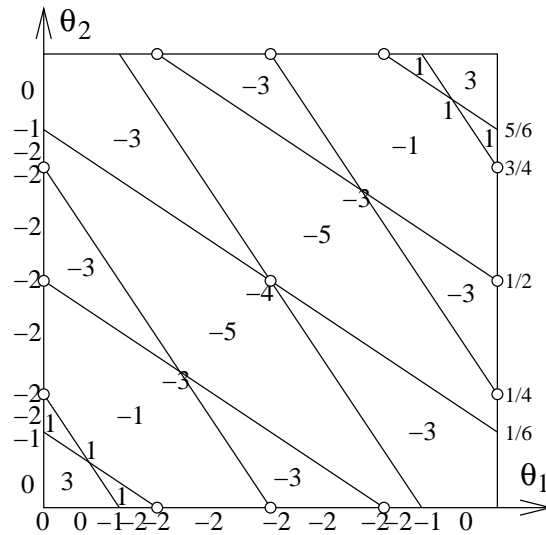


Рис. 13. Значения $\sigma_L(t_1, t_2), t_j = e^{2\pi i \theta_j}$

Теорема 5.1 и [6, Thm. 5.3] позволяют также найти дефект $n_L(t_1, t_2)$ для всех $(t_1, t_2) \in (\mathbb{S}^1)^2$. Вычисления показывают, что он равен числу компонент многообразия $\Delta_L = 0$, проходящих через точку (t_1, t_2) , кроме тех случаев, когда (t_1, t_2) есть $(-1, -1), (1, i^k)$ или $(i^k, 1), k = 1, 2, 3$ (белые кружки на рис. 13) — в этих случаях дефект на единицу меньше.

В силу предложения 4.4, сигнатуры Левина–Тристрама зацепления L такие, как на рис. 14, а все ненулевые значения дефекта — это $n_{-1}(L) = 1$ и $n_\lambda(L) = 2$ при

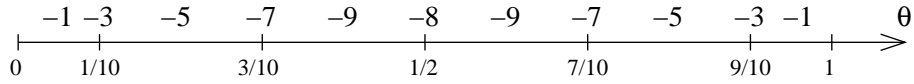


Рис. 14. Значения $\sigma_\lambda(L)$, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$

$\lambda = e^{2\pi ik/10}$, где $k \in \{1, 3, 7, 9\}$. Этот факт хорошо согласуется с формой Зейферта зацепления L , вычисленной в [15, §7] (см., однако, замечания 6.2 и 8.3).

Вопрос 11.1. Верно ли, что наклоны всех итерированных торических зацеплений (всех граф-зацеплений в трехмерных гомологических граф-сферах?) определены и вычисляются в соответствии с [7, Thm. 3.21]?

11.2. Зацепления на бесконечности для двух полукубических парабол.

Пусть L^∞ — зацепление, высекаемое все той же кривой (15), но на этот раз на достаточно большой сфере в \mathbb{C}^2 с центром в начале координат. Его диаграмма сращивания получится, если на рис. 10 поменять местами все пометки «2» и «3». Его многочлен Александера равен

$$(t_1^6 t_2^4 + t_1^3 t_2^2 + 1)(t_1^4 t_2^6 + t_1^2 t_2^3 + 1).$$

Выполнив такие же вычисления, как в предыдущем примере, мы получим значения σ_{L^∞} и ν_{L^∞} , показанные на рис. 15 (как и в §11.1, белые кружки отмечают точки, в которых ν_{L^∞} на единицу меньше числа проходящих через эту точку прямых из множества $\Delta_{L^\infty} = 0$). Сигнатуры Левина–Тристрама зацепления L^∞ показаны на рис. 16. Дефект равен 1 (соответственно, 2) в примитивных корнях из единицы третьей (соответственно, 15-й) степени.

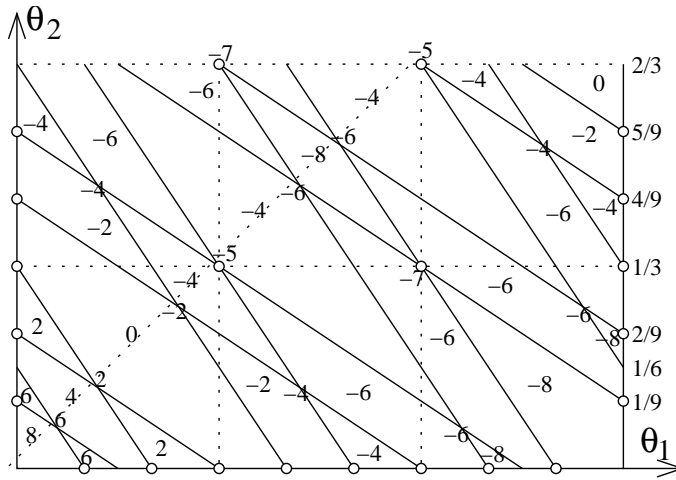


Рис. 15. Значения $\sigma_{L^\infty}(t_1, t_2)$, $t_j = e^{2\pi i\theta_j}$

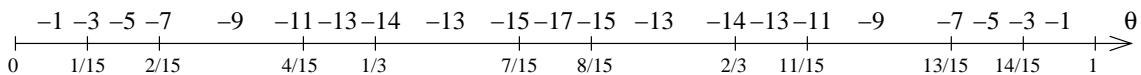


Рис. 16. Значения $\sigma_\lambda(L^\infty)$, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$

Вопрос 11.2. Нетрудно убедиться, что разложение эрмитовой изометрической структуры зацепления L^∞ задается теми же формулами, что и в [14], [15] с тем единственным исключением, что фактор Λ_λ^2 в него входит со знаком минус. Верно ли это для всех зацеплений на бесконечности аффинных алгебраических кривых в \mathbb{C}^2 или хотя бы для какого-нибудь естественного подкласса таких зацеплений?

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. Brieskorn, *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Invent. Math. **2** (1966), 1–14.
2. D. Cimasoni, *The Conway potential function of a graph link*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **136** (2004), 557–563.
3. D. Cimasoni, V. Florens, *Generalized Seifert surfaces and signatures of colored links*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 3, 1223–1264.
4. A. Conway, *The Levine-Tristram signature: a survey*, arXiv:1903.04477.
5. A. Conway, M. Nagel, E. Toffoli, *Multivariable signatures, genus bounds and 1-solvable cobordisms*, arXiv:1703.07540.
6. A. Degtyarev, V. Florens, A. Lecuona, *The signature of a splice*, Int. Math. Res. Notices (IMRN) 2017, No. 8, 2249–2283.
7. A. Degtyarev, V. Florens, A. Lecuona, *Slopes and signatures of links*, arXiv:1802.01836.
8. A. Degtyarev, V. Florens, A. Lecuona, *Slopes of links and signature formulas*, arXiv:2002.02790.
9. D. Eisenbud, W. D. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Ann. of Math. Studies 110, Princeton University Press, 1985.
10. V. Florens, *Signatures of colored links with application to real algebraic curves*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), no. 7, 883–918.
11. C. M. Gordon, *Some aspects of classical knot theory*, in: Knot Theory Proceedings. Plans-sur-Bex, Switzerland, 1977, Lect. Notes in Math. vol. 685, Springer, Berlin, 1978, pp. 1–60.
12. R. A. Litherland, *Signatures of iterated torus knots*, in: Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), Lecture Notes in Math., vol. 722, Springer, Berlin, 1979, pp. 71–84.
13. T. Matumoto, *On the signature invariants of a non-singular complex sesqui-linear form*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), no. 1, 67–71.
14. W. D. Neumann, *Invariants of plane curve singularities*, in: Noeuds, tresses et singularités, C. R. Sémin., Plans-sur-Bex 1982, Monogr. Enseign. Math. 31, 1983, pp. 223–232.
15. W. D. Neumann, *Splicing algebraic links*, in: Complex analytic singularities, Adv. Studies in Pure Math., 8, 1987, pp. 349–361.
16. S. Yu. Orevkov, *Plane real algebraic curves of odd degree with a deep nest*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), no. 4, 497–522.
17. O. Viro, *Twisted acyclicity of a circle and signatures of a link*, J. Knot Theory Ramifications **18** (2009), no. 6, 729–755.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА, УЛ. ГУБКИНА 8, МОСКВА, РФ

ИМТ, L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, TOULOUSE, FRANCE

ЛАБОРАТОРИЯ АГГА, МФТИ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ), ДОЛГОПРУДНЫЙ, МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ, РФ