

О взаимных расположениях плоской вещественной кривой относительно M -квартики с овалом-змеей

С. Ю. Оревков, Н. Д. Пучкова

Аннотация

Овал O плоской вещественной алгебраической квартики S называется змеей, обвивающейся вокруг вещественной кривой C_k степени k , если $O \cup \mathbb{R}C_k$ изотопно $O' \cup \mathbb{R}C_k$, где O' — граница утолщения вложенного отрезка, трансверсально пересекающего $\mathbb{R}C_k$ в $2k$ точках. В статье доказано, что в этом случае $\mathbb{R}C_k \cup \mathbb{R}S$ изотопно $\mathbb{R}C_k \cup \mathbb{R}Q$, где Q — возмущение удвоенной коники. При некоторых дополнительных предположениях доказаны аналоги этого утверждения для вещественных псевдоголоморфных кривых.

Введение

Задача топологической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ двух вещественных алгебраических кривых — кривой степени m и кривой степени k — относится к кругу вопросов первой части 16-й проблемы Гильберта. В предположении, что эти кривые находятся в общем положении, для случаев $m + k \leq 6$ задача решена, а для случая $m + k = 7$ много сделано. В недавних работах второго автора [14]–[16] изучались взаимные расположения двух M -кривых степени 4 (M -квартик), пересекающихся в 16 попарно различных точках, расположенных на одном овале одной кривой и на одном овале второй кривой. Эта задача была поставлена Г.М. Полотовским. В этих работах было введено понятие овала-змеи — овала, “обвивающегося” вокруг овала другой кривой (рис. 1; определение см. ниже¹), и рассмотрены три серии расположений с таким овалом-змеей, выделенные дополнительными условиями. Метод исследования был довольно трудоемким: перечислялись попарно различные топологические модели таких расположений, удовлетворяющие известным ограничениям на топологию вещественных алгебраических кривых, после чего осуществлялись попытки реализовать эти модели кривыми степени 8 или доказать невозможность такой реализуемости. Доказательства нереализуемости проводились методом, основанным на теории кос и зацеплений, предложенным первым автором в [4]; реализуемость доказывалась возмущением квадрата коники в построенных в [11] (см. рис. 5 ниже) расположениях коники и квартики. При этом для серии, рассмотренной в [15], удалось получить полную классификацию. Отметим, что все результаты из [14]–[16] автоматически переносятся на случай псевдоголоморфных кривых.

Однако первый автор заметил, что с точностью до изотопии в $\mathbb{R}P^2$ любое расположение квартики со змеей относительно любой другой кривой может быть получено из расположения этой кривой и коники возмущением квадрата коники — см. теорему 1 ниже. Доказано также (теоремы 2, 3), что при некоторых дополнительных предположениях

¹В настоящей работе овал-змея может обвиваться вокруг нескольких овалов другой кривой.

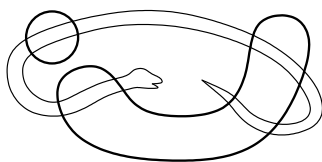


Рис. 1: овал-змея кватрики, обвивающийся вокруг двух овалов другой кватрики.

аналог теоремы 1 справедлив для псевдоголоморфных кривых, и что в случае пересечения M -кватрики со змеей с другой кватрикой алгебраическая и псевдоголоморфная классификации совпадают (теорема 4). В частности, это дает простое (без утомительного перебора логических возможностей и без компьютерных вычислений) доказательство всех результатов работ [14]–[16] как для алгебраических, так и для псевдоголоморфных кривых.

На наш взгляд, задача о расположениях кривой относительно кватрики с овалом-змеей интересна тем, что это один из редких случаев, когда топологические ограничения на вещественные алгебраические кривые доказываются намного легче, чем их аналоги для вещественных псевдоголоморфных кривых.

Замечание. В доказательстве теоремы 1 используется простейшая версия метода Гильберта – Роона – Гудкова. Отметим, что в работе [10] этим методом запрещены некоторые взаимные расположения алгебраических кривых, реализуемые псевдоголоморфными кривыми. Поэтому не исключено (хотя шансов на это, по-видимому, не очень много), что некоторые расположения, запрещенные теоремой 1, но не запрещенные теоремами 2–4 (см. раздел 2), псевдоголоморфно реализуемы.

Мы признательны Г.М. Полотовскому и В.М. Харламову за ценные обсуждения и советы по улучшению рукописи. Мы также благодарим рецензента за полезные замечания.

1 Алгебраический случай

Определение. Пусть C_k — неособая плоская вещественная алгебраическая кривая степени k , и $\mathbb{R}C_k$ — множество ее вещественных точек (его компоненты связности называются *ветвями* кривой C_k). Овал O плоской вещественной алгебраической кватрики S будем называть *змеей, обвивающейся вокруг C_k* (и, более конкретно, змеей, обвивающейся вокруг ветвей кривой C_k , с которыми он пересекается, — их объединение обозначим через B), если O ограничивает диск, который множеством B делится на $2k - 1$ криволинейных четырехугольников и два двуугольника (см. рис. 1). Эти двуугольники будем называть *концами* змеи.

Овал-змею O кватрики S , обвивающийся вокруг C_k , можно также эквивалентно определить тем условием, что $O \cup B$ изотопно $O' \cup B$, где B — объединение ветвей кривой C_k , пересекающихся с O , и O' — граница малого утолщения гладко вложенного отрезка, трансверсально пересекающего B в $2k$ точках (см. [14]–[16]).

Для краткости всюду ниже выражение “в диске, ограниченном овалом”, заменяется выражением “внутри овала”. Ветвь кривой будем называть *свободной*, если она не пересекается с ветвями другой кривой.

Теорема 1. Пусть S_4 — M -кватрика с овалом O , обвивающимся вокруг кривой C_k степени k . Тогда

- 1) существует коника C_2 , пересекающая каждый овал кривой S_4 и пересекающая кривую $\mathbb{R}C_k$ в $2k$ попарно различных точках внутри овала O ;
- 2) кривая $\mathbb{R}S_4 \cup \mathbb{R}C_k$ жестко изотопна² кривой $\mathbb{R}\tilde{C}_2^2 \cup \mathbb{R}C_k$, где \tilde{C}_2^2 — малое возмущение квадрата коники C_2 .

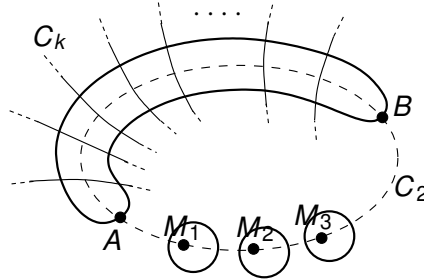


Рис. 2

Доказательство. Напомним, что M -квартика S_4 состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырех лежащих вне друг друга овалов, т. е. в рассматриваемом случае — из овала-змеи O и еще трёх свободных овалов O_1, O_2, O_3 . Выберем точки A и B на овале-змеи O на границах его разных концов и точки M_1, M_2, M_3 внутри овалов O_1, O_2, O_3 соответственно (см. рис. 2) и рассмотрим конику C_2 , проходящую через эти точки. Если точки M_i выбраны в общем положении, то она неприводима. Из теоремы Безу следует, что C_2 пересекает каждый овал кватрики в двух точках, поэтому C_2 пересекает овал-змею O только в точках A и B . Из этого вытекает, что кривая $\mathbb{R}C_k$ пересекает конику $\mathbb{R}C_2$ в $2k$ точках внутри овала-змеи O . Первое утверждение доказано.

Рассмотрим пучок кватрик

$$S_4(t) = S_4 + tC_2^2 = 0. \quad (1)$$

Тогда $S_4(0) = S_4$ и при непрерывном изменении параметра t вещественные точки пересечения кривых $S_4(t)$ и C_k не могут возникать или исчезать.

Выберем знак параметра t так, чтобы при возрастании $|t|$ внутренности овалов кватрики сжимались. Из (1) видно, что при $|t| \rightarrow \infty$ кватрика $S_4(t)$ неограниченно приближается к квадрату C_2^2 коники C_2 , поэтому кривая $\mathbb{R}S_4$ изотопна малому возмущению кривой C_2^2 . Жесткость изотопии непосредственно следует из ее построения. \square

Следствие 1. Пусть S_4 — M -квартика с овалом O , обвивающимся вокруг кривой C_k степени k . Тогда свободные овалы кватрики S_4 лежат в одной компоненте связности дополнения к $O \cup \mathbb{R}C_k$, причем в границу этой компоненты входят дуги овала-змеи O , ограничивающие его концы.

Теорема 1 позволяет легко получить классификацию взаимных расположений кривой C_k и M -кватрики со змеей, обвивающейся вокруг кривой C_k , если известна классификация расположений коники и кривой степени k , пересекающихся без касаний в $2k$ вещественных точках.

Рассмотрим в качестве примера случай $k = 3$ при условии, что кубика C_3 есть M -кривая. Классификация [12] взаимных расположений M -кубики и коники с шестью общими точками очень простая — см. рис. 3.

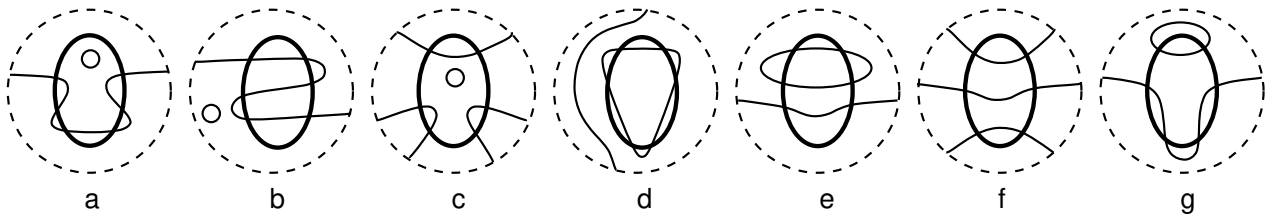


Рис. 3

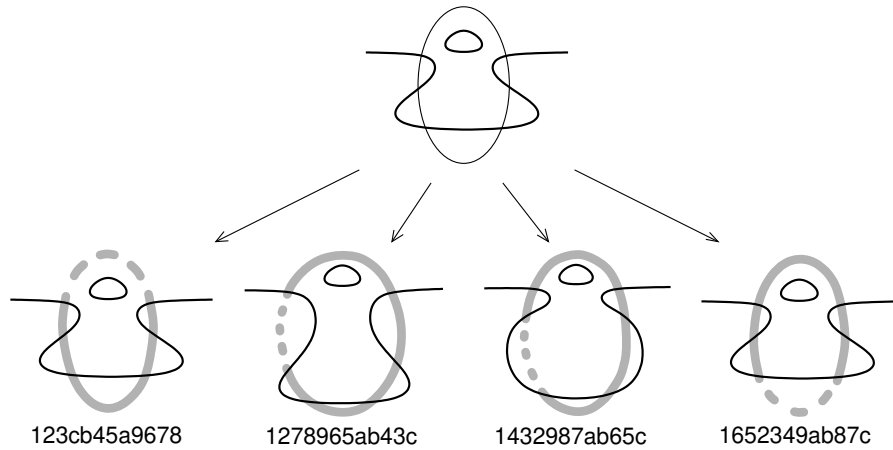


Рис. 4

Пример построений из расположения рис. 3а показан на рис. 4. Именно, на конике выбираем четыре точки так, чтобы одна из дуг, на которые эти точки делят конику, пересекала кубику в шести точках. Объединение исходной коники и близкой к ней коники из пучка коник, проходящих через выбранные четыре точки, представляет собой замкнутую цепочку из четырех двуугольников. Возмущая точки пересечения коник так, чтобы из этой цепочки получились четыре овала, получим расположения M -квартики и M -кубики, показанные на рис. 4.

Заметим, что на рис. 4 построены расположения, приведенные в списке в [7, §5] (их коды согласно [7] указаны на рис. 4). Аналогично из рис. 3b, 3c получаются все остальные расположения из [7, §5] с овалом-змеей (123cb478965a, 1278963cb45a, 1432985cb67a, 123c/9678/b45a, 1278/b43c/965a), а из рис. 3d — второе и третье расположения на рис. 1 в [9]. Естественно, никаких других расположений со змеей в работах [7], [9] нет.

Таким же способом из классификации расположений коники и квартики в [11] (рис. 5) и в труднодоступных текстах [12], [13] (рис. 6, 7) получается классификация расположений M -квартик со змеей, обвивающей другую квартику, а из классификации расположений коники и M -квинтики [5], [8] — классификация M -квартик со змеей, обвивающей ее вокруг одной из компонент M -квинтики. В частности, получаются 84 (97, 20, 2) попарно различных изотопических типов расположений со змеей, обвивающей ее вокруг одного (соответственно, двух, трех, четырех) овалов второй M -квартики. Заметим, что иногда из различных исходных расположений кривой C_k относительно коники получаются изотопные расположения кривой C_k относительно M -квартики со змеей.

²Жесткой изотопией алгебраических кривых некоторого данного класса называется изотопия, состоящая из кривых того же класса.

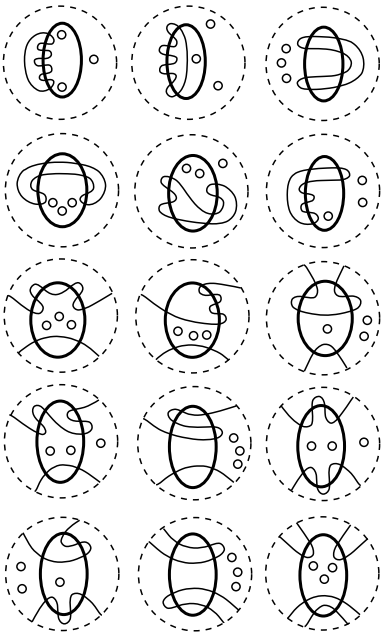


Рис. 5

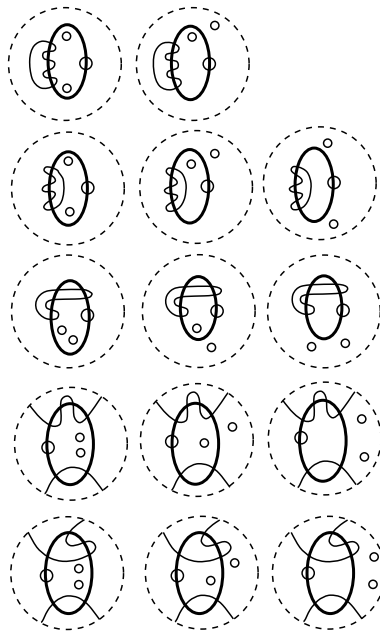


Рис. 6

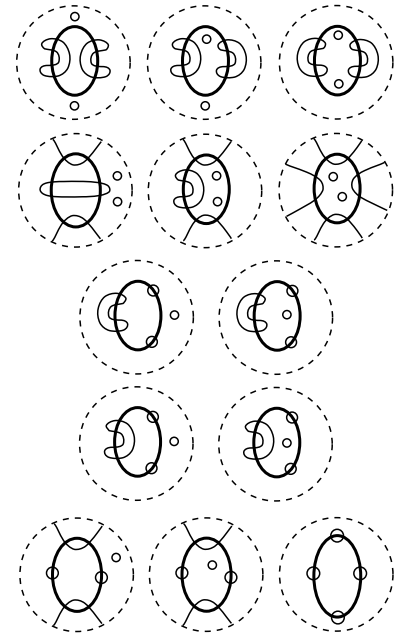


Рис. 7

2 Псевдоголоморфный случай

2.1 Применение вспомогательной коники

Для случая псевдоголоморфных кривых (о вещественных псевдоголоморфных кривых см., например, [6]) определение овала-змеи точно такое, как было в п.1 выше.

Теорема 2. Пусть S_4 — вещественная псевдоголоморфная M -квартика с овалом O , обвивающимся вокруг вещественной псевдоголоморфной кривой C_k степени k . Тогда:

1) существует вещественная псевдоголоморфная (относительно той же почти комплексной структуры) коника C_2 , пересекающая каждый овал кривой S_4 и пересекающая кривую $\mathbb{R}C_k$ в $2k$ попарно различных точках внутри овала O ;

2) внутри концов овала-змеи и внутри свободных овалов кривой S_4 нет свободных овалов кривой C_k ;

3) существует изотопия $\{O_t\}_{t \in [0,1]}$ овала-змеи $O = O_0$, такая, что O_1 — овал малого возмущения удвоения коники C_2 , пересечение O_t с несвободными ветвями кривой C_k трансверсально и O_t лежит внутри O при всех $t > 0$;

4) если внутри овала O нет овалов кривой C_k , то объединение $\mathbb{R}S_4 \cup \mathbb{R}C_k$ изотопно $\mathbb{R}Q \cup \mathbb{R}C_k$, где Q — малое возмущение удвоения коники C_2 .

Доказательство. 1) Выберем пять точек так же, как в доказательстве теоремы 1. В силу результатов М. Громова [1], через выбранные точки проходит неприводимая псевдоголоморфная коника C_2 . Так же, как в доказательстве теоремы 1, получаем, что эта коника пересекает кривую C_k в $2k$ точках внутри овала-змеи O .

2) Если бы такой свободный овал кривой C_k был, то, выбрав одну из пяти точек внутри него, получили бы расположение коники C_2 и кривой S_4 , противоречащее теореме Безу.

Последние два утверждения легко следуют из двух первых. \square

Следствие 2. Для псевдоголоморфных кривых имеет место аналог следствия 1.

2.2 Применение максимального пучка прямых

Докажем утверждение п. 4) теоремы 2 при других предположениях.

Пусть F_k — вещественная псевдоголоморфная кривая степени k , $M \in \mathbb{R}P^2$ — точка, не лежащая на кривой $\mathbb{R}F_k$, и L_M — пучок прямых с центром в точке M . Пучок L_M назовем *максимальным для кривой $\mathbb{R}F_k$* , если любая прямая этого пучка пересекает $\mathbb{R}F_k$ не менее, чем в $k - 2$ точках. Будем называть интервал пучка L_M *максимальным для кривой $\mathbb{R}F_k$* , если для совокупности прямых этого интервала выполняется такое же условие.

Определение. Будем говорить, что овалы α и β кривой F_k являются *соседними относительно пучка L_M* , если существует такой открытый интервал I пучка L_M , ограниченный касательными $t_\alpha, t_\beta \in L_M$ к овалам α и β в точках T_α и T_β соответственно, что в достаточно малых окрестностях точек T_α, T_β овалы не пересекаются с прямыми пучка из интервала I , и никакие прямые пучка из I не касаются кривой F_k . Далее, будем говорить, что *пучок L_M перечисляет овалы кривой F_k* , если все овалы кривой F_k образуют циклическую последовательность из соседних относительно пучка L_M овалов.

Теорема 3. Пусть S_4 — вещественная псевдоголоморфная M -квартика с овалом-змеей O , обвивающимся вокруг вещественной псевдоголоморфной кривой C_k степени k . Если существует пучок прямых, перечисляющий овалы кривой S_4 и такой, что некоторые окрестности замыканий интервалов этого пучка между касательными к соседним овалам максимальны для кривой $\mathbb{R}S_4 \cup \mathbb{R}C_k$, то кривая $\mathbb{R}S_4 \cup \mathbb{R}C_k$ изотопна кривой $\mathbb{R}Q \cup \mathbb{R}C_k$, где Q — малое возмущение удвоения вещественной псевдоголоморфной коники C_2 , пересекающей кривую C_k в $2k$ попарно различных точках внутри овала O .

Доказательство. Пусть для кривых S_4 и C_k существует пучок L_M , обладающий требуемыми в формулировке теоремы свойствами. Тогда (предложение 2.2 [6]) среди кос из $k + 4$ нитей, которые могут получиться возмущением особенностей пересечения комплексификации пучка прямых L_M и множества $\mathbb{C}S_4 \cup \mathbb{C}C_k$, имеется некоторая квазиположительная коса b (описание построения косы см., например, в [4] или в [6]).

Так же, как в доказательстве теоремы 2, строим неприводимую псевдоголоморфную конику C_2 , пересекающую в двух точках каждый овал квартики и пересекающую кривую C_k в $2k$ точках внутри овала-змеи.

Пусть α и β соседние (в порядке перечисления пучком L_M) овалы кривой S_4 и пусть D — дуга коники C_2 , имеющая концы в точках $D_\alpha \in \alpha$ и $D_\beta \in \beta$ и не имеющая других общих точек с овалами кривой S_4 . Обозначим через l_α и l_β прямые из пучка L_M , пересекающие овалы α и β так, что дуга D находится в области, ограниченной этими прямыми. Произведем в этой области перестройку “ $\supset \subset \longrightarrow \times$ ” (см. рис.7): удалим попавшие в эту область части овалов α и β и соединим крест-накрест концы оставшихся частей этих овалов парой трансверсально пересекающихся в одной точке дуг. При этом добавляемые дуги выберем так, чтобы они не пересекали кривую C_k — это возможно, поскольку дуга D не пересекается с кривой C_k (все $2k$ общих точек кривых C_2 и C_k лежат внутри овала-змеи).

В силу максимальной пучка L_M для кривой $\mathbb{R}S_4 \cup \mathbb{R}C_k$ в указанных в условии теоремы интервалах, описанная перестройка не изменит косу b (см. следствие 3.2 в [6]), следовательно, получившееся расположение по-прежнему будет псевдоголоморфно реализуемо. Произведя такие перестройки для каждой из четырех пар соседних овалов, получим расположение кривой C_k и квартики \tilde{S}_4 , имеющей четыре двойные точки. По формуле рода \tilde{S}_4 не может быть неприводимой, следовательно, она является объединением двух коник (рис. 9), каждая из которых пересекает C_k в $2k$ точках.

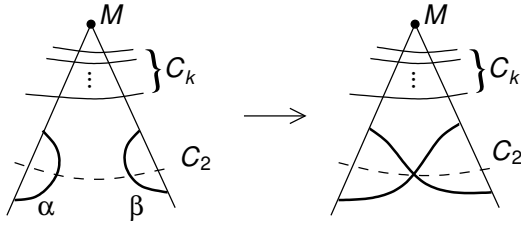


Рис. 8: перестройка “ $\supset \subset \longrightarrow \times$ ”.

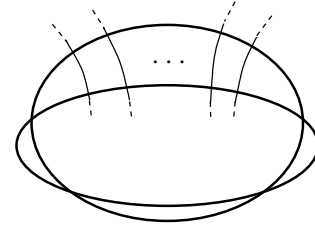


Рис. 9: $C_k \cup \tilde{S}_4$.

Остается доказать, что нет овалов кривой C_k в двуугольниках, ограничиваемых кривой \tilde{S}_4 . Действительно, если бы был такой овал, мы получили бы противоречие с теоремой Безу для коники, проходящей через точку внутри него и через все четыре двойные точки кривой \tilde{S}_4 . \square

Замечание. Для большинства (для всех, кроме трех) случаев расположения овала-змеи, обвивающегося вокруг овала другой M -квартки, рассмотренных в [14]–[16], пучок, удовлетворяющий условиям теоремы 3, имеется: его центр можно взять вне овала-змеи и внутри обвиваемого этим овалом овала α второй квартки так, чтобы для каждого конца овала-змеи прямая из пучка, пересекающая этот конец, пересекала овал α в четырех точках.

2.3 Применение теоремы Виро – Харламова

Для случая $k = 4$ выполнение условия об отсутствии овала кривой C_k внутри овала-змеи (см. последнее утверждение теоремы 2) можно доказать, используя результаты Виро и Харламова [3], обобщающие классические сравнения по модулю 8 на особые кривые. Поэтому имеет место

Теорема 4. Пусть S_4 – вещественная псевдоголоморфная M -квартка с овалом-змейей, обвивающимся вокруг вещественной псевдоголоморфной квартки C_4 . Тогда объединение $\mathbb{R}S_4 \cup \mathbb{R}C_4$ изотопно $\mathbb{R}Q \cup \mathbb{R}C_4$, где Q – малое возмущение удвоения коники.

Прежде, чем доказывать теорему 4, мы приведем нужные нам результаты из [3] и поясним, почему они применимы к псевдоголоморфным кривым.

Пусть F – вещественная алгебраическая кривая четной степени $2k$ в проективной плоскости, возможно, особая (например, приводимая), но без кратных компонент и без изолированных точек множества $\mathbb{R}F$. Обозначим через $\Gamma = \Gamma(F)$ объединение компонент связности множества $\mathbb{R}F$, содержащих особые точки кривой F . Пусть $\mathbb{R}P_+^2$ (соотв. Γ_+) – одно из двух замкнутых подмножеств $\mathbb{R}P^2$, границей которых является $\mathbb{R}F$ (соотв. Γ), причем выберем $\mathbb{R}P_+^2$ и Γ_+ согласованным образом в том смысле, что $V \cap \mathbb{R}P_+^2 = V \cap \Gamma_+$ для некоторой окрестности V множества Γ .

Обозначим через F_1, \dots, F_n неприводимые компоненты кривой F , а через $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_n$ – их нормализации (неособые модели). Будем говорить, что F есть $(M - r)$ -кривая, если \tilde{F}_i есть $(M - r_i)$ -кривая ($i = 1, \dots, n$) и $r = r_1 + \dots + r_n$. В частности, F есть M -кривая, если все \tilde{F}_i являются M -кривыми. Будем говорить, что F – кривая типа I, если все \tilde{F}_i – кривые типа I (т.е. множества $\tilde{F}_i \setminus \mathbb{R}\tilde{F}_i$ несвязны). В противном случае будем говорить, что F – кривая типа II.

В [3, (3.A), (3.B)] доказано, что при некоторых дополнительных условиях на кривую F имеют место следующие аналоги сравнения Гудкова–Рохлина, сравнения Гудкова–Крашна–Харламова и сравнения Харламова–Марена:

$$\chi(\mathbb{R}P_+^2) \equiv k^2 + q \pmod{8}, \quad \text{если } F \text{ есть } M\text{-кривая}, \quad (2)$$

$$\chi(\mathbb{R}P_+^2) \equiv k^2 + q \pm 1 \pmod{8}, \quad \text{если } F \text{ есть } (M-1)\text{-кривая}, \quad (3)$$

$$\chi(\mathbb{R}P_+^2) \not\equiv k^2 + q + 4 \pmod{8}, \quad \text{если } F \text{ есть } (M-2)\text{-кривая типа II}, \quad (4)$$

где q зависит только от топологии пары $(\mathbb{R}P^2, \Gamma_+)$ и, если особенности более сложные, чем простые двойные точки, от их типов и расположения на Γ (см. [3, §§2.3–2.4]).

В случае нодальных кривых (а только этот случай нам здесь и нужен) упомянутые дополнительные условия формулируются особенно просто:

- (I) все особенности кривой F — вещественные простые двойные точки с вещественными касательными;
- (II) каждая вещественная ветвь кривой F (т.е. гладко погруженная окружность) пересекает объединение остальных ветвей в $d \equiv 0 \pmod{4}$ точках, если она стягиваема в $\mathbb{R}P^2$, и в $d \equiv (-1)^{k+1} \pmod{4}$ точках, если нестягиваема (напомним, что $\deg F = 2k$).

Замечание. В [3, §4.3] формулировка условия (II) и описание правой части сравнений (2)–(4) для случая нодальных кривых содержат ошибки. Исправленную версию см. в [18].

О. Я. Виро [17] заметил, что многие результаты топологического характера о неособых плоских вещественных алгебраических кривых, в том числе сравнения по модулю 8, и их доказательства автоматически переносятся на так называемые *гибкие кривые*, определение которых дано в [17, §1]. Это относится и к результатам работы [3], если определить гибкие кривые с особенностями следующим образом.

Определение. 1. Подмножество $X \subset \mathbb{C}P^2$ называется *вещественной поверхностью с комплексно-аналитическими особенностями*, если в некоторой окрестности U его конечного подмножества Σ оно является комплексно-аналитической кривой, а вне Σ — гладким ориентированным вещественно двумерным подмногообразием в $\mathbb{C}P^2$, причем его ориентация в $X \cap U$ — естественная ориентация комплексной кривой. Тогда X единственным образом разлагается в объединение $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$, где каждое X_i есть образ связной компактной римановой поверхности \tilde{X}_i при непрерывном отображении $\nu_i : \tilde{X}_i \rightarrow \mathbb{C}P^2$, таком, что прообраз $\tilde{\Sigma}_i = \nu_i^{-1}(X_i \cap \Sigma)$ конечен, а ограничение $\nu_i|_{\tilde{X}_i \setminus \tilde{\Sigma}_i}$ — вложение. Множества X_i назовем *неприводимыми компонентами* поверхности X . Род компоненты X_i определим как род поверхности \tilde{X}_i , а ее степень положим равной числу m_i , такому, что $[X_i] = m_i[\mathbb{C}P^1]$ в $H_2(\mathbb{C}P^2)$.

2. (Ср. с [17, §1].) Пусть X — вещественная поверхность в $\mathbb{C}P^2$ с комплексно-аналитическими особенностями и X_1, \dots, X_n — ее неприводимые компоненты, m_i — степень компоненты X_i , g_i — ее род. Назовем X *гибкой кривой степени m* , если выполнены следующие условия:

- (i) $m = m_1 + \dots + m_n$;
- (ii) для всех $i = 1, \dots, n$ верна формула рода: $g_i + \sum_{p \in X_i \cap \Sigma} \delta_p(X_i) = \frac{1}{2}(m_i - 1)(m_i - 2)$, где через $\delta_p(X_i)$ обозначен дельта-инвариант особенности кривой $X_i \cap U$ в точке p ;

- (iii) X инвариантна относительно комплексного сопряжения $\text{conj} : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$;
- (iv) поле касательных плоскостей на $X \cap \mathbb{R}P^2$ можно продеформировать в классе conj -инвариантных плоскостей в поле комплексных прямых, касательных к $X \cap \mathbb{R}P^2$, так, что деформация тождественна в окрестности Σ .

Вещественные подальные псевдоголоморфные кривые в $\mathbb{C}P^2$ conj -эквивариантно изотопны гибким подальным кривым, поэтому сравнения (2)–(4) при выполнении условий (I) и (II) к ним тоже применимы. В самом деле, conj -эквивариантной изотопией можно сделать кривую комплексно-аналитической в окрестностях узлов, так как все самопересечения положительны. Непрерывная деформация почти комплексной структуры в стандартную комплексную структуру [1, §2.3] дает условие (iv). Условие (ii) следует из формулы присоединения для симплектических поверхностей (см. лемму 1.5.1 в [2]).

Доказательство теоремы 4. Пусть C_2 — коника из теоремы 2 (см. рис. 2) и Q — M -возмущение её удвоения, имеющее овал-змею. Обозначим кривые $S_4 \cup C_4$ и $Q \cup C_4$ через F и G . В силу третьего пункта теоремы 2 множества $\Gamma(F)$ и $\Gamma(G)$ изотопны, следовательно, величина q в правой части сравнений одна и та же для обеих кривых. Более того, для каждой из кривых F и G при надлежащем выборе $\mathbb{R}P_+^2$ имеет место равенство

$$\chi(\mathbb{R}P_+^2) = \Phi + p - n, \quad (5)$$

где p (соотв. n) — число свободных овалов квартики-не-змеи C_4 , лежащих вне (соотв. внутри) овала-змеи, а величина Φ одна и та же для обеих кривых.

Поэтому в случае, когда C_4 — M -квартика, из (2) и (5) следует, что $p(F) = p(G)$ и $n(F) = n(G) = 0$, т.е. внутри овала-змеи нет свободных овалов квартики C_4 , и результат вытекает из последнего пункта теоремы 2.

В случае, когда C_4 — $(M - r)$ -квартика типа II ($r = 1, 2$), воспользуемся тем фактом (см. предложение 1 ниже), что любое расположение несвободных ветвей квартики C_4 и коники C_2 реализуется M -квартикой и коникой. Из этого следует, что левая часть в (3), (4) для кривой G равна $k^2 + q - r$, и завершение доказательства такое же, как и в M -случае.

Наконец, если C_4 — $(M - 2)$ -квартика типа I, формула Рохлина для комплексных ориентаций [17, (3.13)] применима к кривым, полученным из F и G при сглаживании их особых точек, согласованном с комплексными ориентациями. При перемещении одного свободного овала кривой G внутрь овала-змеи эта формула нарушается. \square

Напомним, что плоская вещественная квартика C_4 называется *гиперболической*, если $\mathbb{R}C_4$ состоит из двух овалов, один из которых лежит внутри другого (это эквивалентно тому, что C_4 есть $(M - 2)$ -квартика типа I).

Предложение 1. Пусть C_2 и C_4 — неособые вещественные псевдоголоморфные (например, вещественные алгебраические) коника и квартика в проективной плоскости, пересекающиеся в 8 вещественных точках. Если C_4 не гиперболическая квартика, то расположение $\mathbb{R}C_2 \cup \mathbb{R}C_4$ на $\mathbb{R}P^2$ с точностью до изотопии либо такое, как показано на рис. 5–7, либо получается из этих расположений удалением некоторых свободных овалов квартики. Все эти расположения реализуемы алгебраически.

Доказательство. Из теоремы Безу для вспомогательных прямых следует, что взаимные расположения несвободных овалов могут быть только такими, как на рис. 5–7, и при этом свободные овалы могут находиться не более чем в двух компонентах дополнения к несвободным овалам, одна из которых лежит внутри, а другая вне Γ_+ . Поэтому в случаях,

удовлетворяющих условиям (I) и (II) (рис. 5 и первые две строки на рис. 7), результат следует из сравнений (2)–(4), в которых q находится из реализуемых расположений. Для расположения несвободных овалов из первой строки на рис. 6 в случае M -квартики результат следует из формулы Рохлина для комплексных ориентаций [17, (3.13)], примененной к сглаживанию всех двойных точек, согласованному с комплексными ориентациями (см. [9, §3.1]). В остальных случаях достаточно применить теорему Безу для вспомогательных прямых.

Алгебраическую реализацию см. в [11]–[13]. Ее также легко получить возмущением кватрики, максимально касающейся коники в особенностях типа A_2 или A_4 (см. [7]–[9]). \square

Из этого предложения в силу теорем 1 и 4 следует, что в случае, когда M -квартика со змеей обвивает негиперболическую кватрику, алгебраическая и псевдоголоморфная изотопические классификации объединений таких кривых совпадают. В случае, когда C_4 — гиперболическая кватрика, эти классификации тоже совпадают (алгебраическая классификация расположений гиперболической кватрики и коники, пересекающихся в 8 вещественных точках, получена в [12, теорема 2.4], а ее совпадение с псевдоголоморфной классификацией доказывается так же, как предложение 1).

Список литературы

- [1] M. Gromov, “Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds”, *Invent. Math.*, **82** (1985), 307–347.
- [2] S. Ivashkovich, V. Shevchishin, “Complex curves in almost complex manifolds and meromorphic hulls”, arxiv:math/9912046.
- [3] V. M. Kharlamov, O. Ya. Viro, “Extension of the Gudkov-Rohlin congruence”, *Topology and Geometry Rohlin Seminar*, Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer, Berlin, 1988. 357–406.
- [4] S. Yu. Orevkov, “Link theory and oval arrangements of real algebraic curves”, *Topology*, **38** (1999), 779–810.
- [5] С. Ю. Оревков, “Проективные коники и M -квинтики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов”, *Матем. заметки*, **65**:4 (1999), 528–532.
- [6] S. Yu. Orevkov, “Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy”, *Geom. and Funct. Analysis.*, **12**:4 (2002), 723–755.
- [7] Оревков С. Ю. “Построения расположений M -квартики и M -кубики с максимально пересекающимися овалом и нечетной ветвью”, *Вестник Нижегородского Государственного университета. Серия Мат. моделирование и оптимальное управление*, 2002, Вып. 1 (25), 12–48.
- [8] С. Ю. Оревков, “Расположения M -квинтики относительно коники, максимально пересекающей её нечетную ветвь”, *Алгебра и анализ*, **19**:4 (2007), 174–242.
- [9] С. Ю. Оревков, Г. М. Полотовский, “Проективные M -кубики и M -кватрики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов”, *Алгебра и анализ*, **11**:5 (1999), 166–184.

- [10] S. Yu. Orevkov, E. I. Shustin, “Flexible, algebraically unrealizable curves: rehabilitation of Hilbert-Rohn-Gudkov approach”, *J. Reine Angew. Math.*, **551** (2002), 145–172.
- [11] Г. М. Полотовский, “Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка”, *Доклады АН СССР*, **236**:3 (1977), 548–551.
- [12] Г. М. Полотовский, Топологическая классификация распадающихся кривых 6-го порядка. Дис. . . . к. ф.-м. н., ГГУ, Горький, 1979.
- [13] Г. М. Полотовский, “Полная классификация M -распадающихся кривых 6-го порядка в вещественной проективной плоскости”, // Деп. ВИНТИ 20.04.1978. ДЕП. №1349-78, 103 с.
- [14] Н. Д. Пучкова, “О взаимных расположениях двух M -кривых степени 4”, *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*, **222** (2023), 69–82.
- [15] Н. Д. Пучкова, “О расположениях двух M -кривых степени 4, овал одной из которых обвивается вокруг овала другой”, *Чебышевский сборник*, **24**:3(89), (2023), 56–70.
- [16] Н. Д. Пучкова, “Об одном классе взаимных расположений двух M -кривых степени 4”, *Математика и теоретические компьютерные науки* (в печати).
- [17] О. Я. Виро, “Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет”, *УМН*, **41**:3(249) (1986), 45–67.
- [18] О. Я. Виро, С. Ю. Оревков, “Сравнение по модулю 8 для вещественных алгебраических кривых степени 9”, *УМН*, **56**:4(340) (2001), 137–138.

С.Ю. Оревков

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва,
 Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, Toulouse, France,
E-mail: orevkov@math.ups-tlse.fr

Н.Д. Пучкова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Нижний Новгород,
E-mail: nataha1910@mail.ru