

РАЗБИВАЮЩАЯ ПОЛУГРУППА ПЛОСКИХ КВИНТИК

М.И. МАГИН И С.Ю. ОРЕВКОВ

Аннотация. Морфизм f вещественной алгебраической кривой X в \mathbb{P}^1 называется *разбивающим*, если $f^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \mathbb{R}X$. Такой морфизм задаёт накрытие $\mathbb{R}X \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$. Обозначим компоненты связности $\mathbb{R}X$ через X_1, X_2, \dots, X_r и степень ограничения f на X_i через $d_i(f)$. Так мы можем сопоставить каждому разбивающему морфизму набор натуральных чисел $d(f) = (d_1(f), \dots, d_r(f))$. В недавней работе [KS20] М. Куммер и К. Шоу определили *разбивающую полу группу кривой X* как множество всех наборов $d(f)$, где f — разбивающий морфизм $X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

В настоящей работе мы описываем разбивающие полу группы плоских кривых степени 5.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вещественной кривой мы называем комплексную алгебраическую кривую X , снабжённую антиголоморфной инволюцией $\text{conj}: X \rightarrow X$. Её *множество вещественных точек* — это $\mathbb{R}X = \{p \in X \mid \text{conj}(p) = p\}$. Все рассматриваемые кривые предполагаются гладкими и неприводимыми, если иное специально не оговорено.

Вещественную кривую X называют *разбивающей*, или кривой *типа I*, если множество $X \setminus \mathbb{R}X$ несвязно. В этом случае оно состоит из двух половинок, переставляющихся антиголоморфной инволюцией.

Альфортс [Ah150] показал, что принадлежность кривой типу I равносильна существованию *разбивающего морфизма* $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, то есть такого вещественного морфизма в \mathbb{P}^1 , для которого $f^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \mathbb{R}X$.

Разбивающий морфизм задаёт накрытие $f|_{\mathbb{R}X}: \mathbb{R}X \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$. Пусть X_1, \dots, X_r — компоненты связности множества $\mathbb{R}X$. Обозначив через $d_i(f)$ степень ограничения f на компоненту X_i , мы можем сопоставить каждому разбивающему морфизму f набор натуральных чисел $d(f) = (d_1(f), \dots, d_r(f))$. Куммер и Шоу определили *разбивающую полу группу* вещественной кривой X как

$$\text{Sep}(X) = \{d(f) \mid f: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ — разбивающий морфизм}\}.$$

Несложно показать, что $\text{Sep}(X)$ в самом деле является полу группой по сложению, см. [KS20, предложение 2.1]. Обозначим:

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}.$$

В [KS20] Куммер и Шоу описали разбивающие полу группы M -кривых произвольного рода, а также кривых рода ≤ 2 . А именно, если X — M -кривая рода g (т.е. $b_0(\mathbb{R}X) = g+1$), то $\text{Sep}(X) = \mathbb{N}^{g+1}$. Если же X — разбивающая кривая рода 1, то $\text{Sep}(X) = \mathbb{N}^2$, а если X — разбивающая кривая рода 2, то $\text{Sep}(X) = \mathbb{N}^3$ или $2 + \mathbb{N}_0$. Далее, в работах [Ore19, Ore24] были вычислены разбивающие полу группы всех вещественных кривых

рода ≤ 4 и всех вещественных гиперэллиптических кривых. В работе [Man24] М. Манцаролли привела несколько начальных результатов о разбивающих полугруппах $(M - 2)$ -кривых (т.е. кривых рода g , для которых $b_0(\mathbb{R}X) = g - 1$).

В настоящей работе мы вычисляем разбивающие полугруппы плоских кривых степени 5 (они имеют род 6). Хорошо известно (см., например, [Rok78, стр. 95]), что всего три изотопических типа плоских квинтик можно реализовать разбивающими кривыми: это M -квинтика, $(M - 2)$ -квинтика и гиперболическая квинтика (плоскую кривую называют *гиперболической*, если линейная проекция из некоторой её точки определяет разбивающий морфизм). Если X — M -квинтика, то, как сказано выше, $\text{Sep}(X) = \mathbb{N}^7$, так что мы интересуемся последними двумя случаями.

Гиперболическая квинтика и $(M - 2)$ -квинтика изображены на рис. 1 (см. лемму 4.1). Двойными стрелками на рис. 1 обозначена *комплексная ориентация*, т.е. ориентация, индуцированная на $\mathbb{R}X$ одной из половинок $X \setminus \mathbb{R}X$.

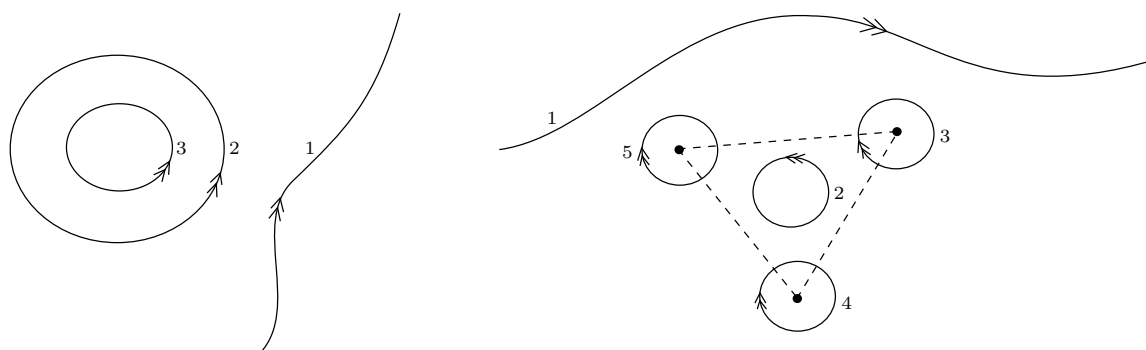


Рис. 1. Изотопические типы разбивающих плоских не- M -квинтик.

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Теорема 1.1. Пусть X — плоская вещественная разбивающая квинтика. Тогда, если $b_0(\mathbb{R}X) = 3$, то

$$\text{Sep}(X) = \{(1, 2, 1), (1, 2, 2)\} \cup ((2, 3, 1) + \mathbb{N}_0^3) \cup ((1, 3, 2) + \mathbb{N}_0^3).$$

Если же $b_0(\mathbb{R}X) = 5$, то

$$\text{Sep}(X) = (2, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{N}_0^5.$$

Для доказательств мы используем методы работ [Ore21, Ore24], а также недавними результатами из [MO25].

Настоящая работа организована следующим образом. В §2.1 мы приводим необходимые нам предварительные сведения из [Ore21]. Далее, в §2.2 мы приводим общий метод построения разбивающих морфизмов, использованный в работе [Ore24]. Этот метод представляет из себя комбинацию теоремы Абеля и формулы присоединения в терминах вычетов Пуанкаре. Разделы 3 и 4 посвящены вычислению разбивающих полугрупп гиперболических квинтик и $(M - 2)$ -квинтик, соответственно.

2. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

2.1. Шахматные ориентации. Для целей настоящей работы мы ограничимся случаем плоских кривых, хотя, нетрудно заметить, что результаты, приведенные в этом параграфе и в §2.2, верны и в более общем случае, см. [Ore21].

Помимо комплексной ориентации на множестве вещественных точек разбивающей кривой нам будет нужна и другая, D -ориентация, связанная с дивизором $D \in |X + K_{\mathbb{P}^2}|$.

Пусть X — вещественная кривая в \mathbb{P}^2 , а D — вещественный дивизор из присоединённой линейной системы $|X + K_{\mathbb{P}^2}|$. Предположим дополнительно, что D не содержит X в качестве компоненты, и запишем D в виде $D = D_1 + 2D_0$, где D_0 и D_1 эффективны, причем D_1 — без кратных компонент.

Так как $D - X \sim K_{\mathbb{P}^2}$, это дивизор некоторой мероморфной 2-формы ω на $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Пользуясь тем, что D и X вещественные, форму ω также можно выбрать вещественной. Тогда форма ω определяет на $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus (\mathbb{R}X \cup \mathbb{R}D_1)$ «шахматную ориентацию»: эта ориентация изменяется на противоположную всякий раз, когда мы пересекаем $\mathbb{R}X \cup \mathbb{R}D_1$ в гладкой точке (см. рис. 2). Шахматная ориентация индуцирует на $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}D$ граничную ориентацию. Описанная выше ориентация на $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}D$ называется D -ориентацией.

Как и комплексные ориентации, D -ориентация определена с точностью до обращения на всех компонентах $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}D$. В самом деле, мы можем рассматривать шахматную ориентацию, определённую формой ω , или противоположную, определённую формой $-\omega$. В дальнейшем, под выбором D -ориентации, мы будем подразумевать именно выбор одной из двух этих ориентаций.

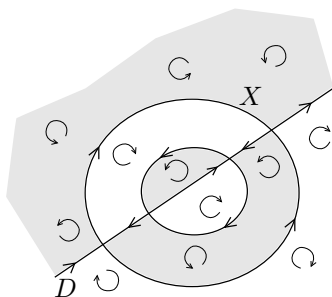


Рис. 2. D -ориентация.

Замечание 2.1. Обозначим через ω_D вычет Пуанкаре формы ω . Это голоморфная вещественная 1-форма на X , невырожденная на $X \setminus D$. Описанная выше D -ориентация на $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}D$ совпадает с ориентацией, определяемой формой ω_D , в следующем смысле: для $v \in T_p\mathbb{R}X$ мы имеем $\omega_D(v) \geq 0$, когда D -ориентация положительна на v . Кроме того, $\omega_D(v) = 0 \iff p \in \mathbb{R}X \cap \mathbb{R}D$.

Часто бывает более удобным говорить не о разбивающих морфизмах, а о дивизорах, соответствующих их слоям. А именно, будем называть тотально вещественный дивизор $P = p_1 + \dots + p_n$ на вещественной кривой X *разбивающим*, если существует разбивающий морфизм $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $p_0 \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1$, для которых $P = f^{-1}(p_0)$. В этом случае будем говорить, что P имеет разбиение степеней $d(P) := d(f) \in \text{Sep}(X)$.

Следующая теорема проливает свет на связь между комплексными ориентациями вещественной кривой, D -ориентациями и разбивающими морфизмами. Обозначения в теореме такие же, как и выше.

Теорема 2.2 (см. [Ore21, теорема 3.2]). Пусть P — разбивающий дивизор на разбивающей вещественной кривой X . Тогда если $P \not\subset D$, то D -ориентация не может совпадать с комплексной ориентацией во всех точках множества $P \setminus D$.

2.2. Построение разбивающих морфизмов. В этом параграфе мы приводим общий метод построения разбивающих морфизмов. Этот метод использовался для вычисления разбивающих полу групп гиперэллиптических кривых и кривых рода ≤ 4 , см. [Ore24]. Так как этот метод работает для кривых произвольного рода, мы дадим его общую формулировку и для удобства читателя приведём доказательство (хоть оно почти дословно совпадает с рассуждениями, приведёнными в [Ore24, вторая половина доказательства леммы 2.3]). Для упрощения последующих формулировок введём следующее обозначение.

Пусть X — разбивающая плоская вещественная кривая. Зафиксируем комплексную ориентацию на $\mathbb{R}X$ и некоторую D -ориентацию на $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}D$. Для точки $p \in \mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}D$ будем писать, что

$$\text{sign}_D(p) := \begin{cases} +1, & \text{если комплексная ориентация совпадает с } D\text{-ориентацией в точке } p, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Контекст 2.3. Пусть X — плоская вещественная разбивающая кривая. Зафиксируем комплексную ориентацию на $\mathbb{R}X$. Рассмотрим дивизор $P = p_1 + \dots + p_n$, где $p_i \in \mathbb{R}X$ — попарно различные точки. Предположим, что

- полная линейная система $|P|$ не имеет базисных точек;
- $h^0(P) \geq 2$.

В этих условиях существует гладкая деформация $P_t = p_1(t) + \dots + p_n(t) \in |P|$, где $p_j: [0, t_0] \rightarrow X$ — такие гладкие пути $p_j(0) = p_j$ и $v_j := p'_j(0) \neq 0$, см. [Ore24, лемма 2.2].

Лемма 2.4. В условиях 2.3 предположим, что существует вещественный дивизор $D \in |X + K_{\mathbb{P}^2}|$, для которого выполнены следующие два условия:

- $P \setminus D = \{p_i, p_j\}$;
- $\text{sign}_D(p_i) = -\text{sign}_D(p_j)$.

Тогда комплексная ориентация имеет один и тот же знак на векторах v_i и v_j .

Доказательство. Пусть ω — мероморфная 2-форма с дивизором $D - X$, а ω_D — её вычет Пуанкаре (см. §2.1). Так как для любого $t \in [0, t_0]$ $P_t \in |P|$, по теореме Абеля-Якоби:

$$\forall t \in [0, t_0] \quad \sum_{j=1}^n \int_{p_j([0,t])} \omega_D = 0.$$

Дифференцируя это равенство по t в точке $t = 0$, имеем

$$(*) \quad \omega_D(v_1) + \omega_D(v_2) + \dots + \omega_D(v_n) = 0.$$

Теперь, так как $\omega_D(v_k) = 0 \iff p_k \in \mathbb{R}X \cap \mathbb{R}D$ (см. замечание 2.1), а дивизор D проходит через все точки дивизора P , кроме p_i и p_j , равенство $(*)$ упрощается до

$$\omega_D(v_i) = -\omega_D(v_j).$$

По определению, равенство $\text{sign}_D(p_i) = -\text{sign}_D(p_j)$ означает, что комплексная ориентация совпадает с D -ориентацией в одной из точек p_i, p_j , а в другой они противоположны. Значит, комплексная ориентация должна иметь один и тот же знак на векторах v_i и v_j , что и требовалось. \square

Следующая лемма мгновенно следует из [KS20, предложение 2.11].

Лемма 2.5. Пусть p_{i_1}, \dots, p_{i_k} — точки дивизора P , лежащие на компонентах $\mathbb{R}X$, содержащих более одной точки дивизора P . В условиях 2.3 предположим, что комплексная ориентация согласована на всех векторах v_{i_j} , где $j = 1, \dots, k$. Тогда дивизор P — разбивающий.

Также для построений мы будем пользоваться следующим недавним результатом:

Теорема 2.6 ([MO25]). Пусть X — вещественная кривая рода g с $b_0(\mathbb{R}X) = r$, а $P = p_1 + \dots + p_g$ — разбивающий дивизор на X с $h^1(P) = 1$. Тогда $d(P) + \mathbb{N}_0^r \subset \text{Sep}(X)$.

3. РАЗБИВАЮЩАЯ ПОЛУГРУППА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КВИНТИК

Пусть X — гиперболическая квинтика, зафиксируем нумерацию компонент связности $\mathbb{R}X$ как на рис. 1: пусть X_1 — псевдопрямая, X_2 — внешний овал, а X_3 — внутренний овал¹.

Хорошо известно (см. [KS20, пример 2.8]), что линейная проекция из точки на внутреннем овале X задаёт разбивающий морфизм с разбиением степеней $(1, 2, 1)$, а линейная проекция с центром в точке внутри внутреннего овала X — разбивающий морфизм с разбиением степеней $(1, 2, 2)$.

Лемма 3.1. Справедливы следующие утверждения:

- (1) Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ имеем $(n, 1, m) \notin \text{Sep}(X)$.
- (2) Для $n, m \in \mathbb{N}$ с $n + m \geq 4$ имеем $(n, 2, m) \notin \text{Sep}(X)$. Более того, $(2, 2, 1) \notin \text{Sep}(X)$.
- (3) Для всех $n \geq 3$ имеем $(1, n, 1) \notin \text{Sep}(X)$.

Доказательство. (1) Пусть P — разбивающий дивизор с разбиением степеней $(n, 1, m)$, а p — его точка на внешнем овале. Рассмотрим прямую ℓ , проходящую через точку p и такую, что $P \not\subset \ell$. Положим $D = 2\ell \in |K_{\mathbb{P}^2} + X|$. Зафиксируем комплексную ориентацию на $\mathbb{R}X$ и выберем D -ориентацию так, чтоб она совпадала с комплексной ориентацией на псевдопрямой. Тогда $P \setminus D \neq \emptyset$ и комплексная ориентация совпадает с D -ориентацией во всех точках этого множества, что противоречит теореме 2.2.

(2) Пусть P — разбивающий дивизор с разбиением степеней $(n, 2, m)$. Проведём удвоенную прямую $D = 2\ell \in |K_{\mathbb{P}^2} + X|$ через две точки дивизора P на внешнем овале и выберем D -ориентацию так, чтобы она совпадала с комплексной ориентацией на псевдопрямой. Так как P — разбивающий, по теореме 2.2 он обязан целиком лежать на ℓ . Тогда при $n + m \geq 4$ получаем противоречие с теоремой Безу.

Покажем, что $(2, 2, 1) \notin \text{Sep}(X)$. Так как $\deg_{X_1} P = 2$, прямая ℓ пересекает псевдопрямую X_1 хотя бы в двух точках, а значит $\ell \cdot X_1 \geq 3$, так как индекс пересечения ℓ и X_1 нечётен, и мы опять получаем противоречие с теоремой Безу.

(3) Пусть P — разбивающий дивизор с разбиением степеней $(1, n, 1)$. Вновь проведём удвоенную прямую $D = 2\ell$ через две точки дивизора P — на внутреннем овале и на псевдопрямой. Выберем D -ориентацию так, чтобы она была противоположна комплексной ориентации на псевдопрямой. Поскольку P — разбивающий, по теореме 2.2 он должен лежать на ℓ , а значит, при $n \geq 4$ мы опять приходим к противоречию с теоремой Безу.

Покажем, что $(1, 3, 1) \notin \text{Sep}(X)$. Так как $\deg_{X_2} P = 3$, мы имеем $\ell \cdot X_2 \geq 3$, а поскольку индекс пересечения X_2 и ℓ чётен, $\ell \cdot X_2 \geq 4$. Значит, прямая ℓ пересекает X не менее чем в $1 + 4 + 1 = 6$ точках, что приводит к противоречию. \square

¹Отметим, что в [KS20] и [Ore19] для гиперболических кривых используется обратный порядок нумерации компонент.

В следующей лемме мы показываем, что все разбиения степеней, кроме тех, которые запрещены леммой 3.1, реализуются. Это завершает вычисление $\text{Sep}(X)$ для гиперболических квинтик.

Лемма 3.2. $((2, 3, 1) + \mathbb{N}_0^3) \cup ((1, 3, 2) + \mathbb{N}_0^3) \subset \text{Sep}(X)$.

Доказательство. Рассмотрим дивизор $P = p_1 + \dots + p_6$, лежащий на вырожденной конике C_1 (она изображена рис. 3 сплошной линией), пересечённой другой вырожденной коникой C_2 (она изображена рис. 3 пунктиром). Он имеет разбиение степеней $(1, 3, 2)$.

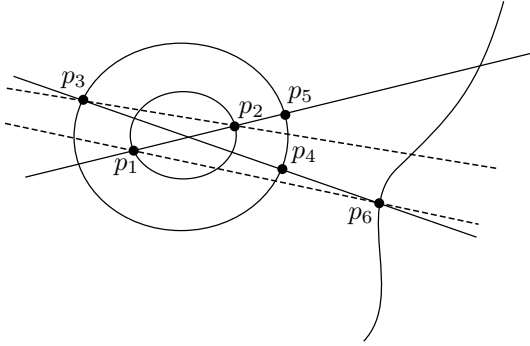


Рис. 3. Дивизор P с разбиением степеней $(1, 3, 2)$ и коники C_1 и C_2 .

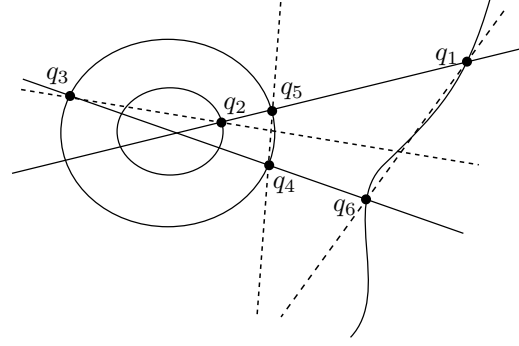


Рис. 4. Дивизор Q с разбиением степеней $(2, 3, 1)$ и вспомогательные коники.

Легко видеть, что коника, проходящая через точки P , единственна, откуда $\dim |K_X - P| = 0$. Значит, P — специальный дивизор с индексом специальности $h^0(K_X - P) = 1$. По теореме Римана-Роха мы имеем $h^0(P) = 2$.

Покажем, что полная линейная система $|P|$ не имеет базисных точек, т.е., что $\dim |P - p_j| = 0$ для всех $j = 1, \dots, 6$. В самом деле, по теореме Римана-Роха

$$\dim |P - p_j| = \dim |K_X - (P - p_j)| + 5 - 6 + 1 = \dim |K_X - (P - p_j)| = 0,$$

так как коника, проходящая через 5 точек дивизора $P - p_j$, единственна.

Значит, мы находимся в условиях 2.3 и можем применять лемму 2.4. В обозначениях 2.3 докажем, что должным образом выбранная комплексная ориентация положительна на векторах v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .

Обозначим прямую, проходящую через точки p_1, p_2 и p_5 через ℓ_1 , и прямую, проходящую через точки p_3, p_4 и p_6 , через ℓ_2 . Пусть ℓ — вещественная прямая, проходящая через точку p_5 , как показано на рис. 5. Рассмотрим конику $D = \ell \cup \ell_2$ и соответствующую ей D -ориентацию. Тогда $P \setminus D = \{p_1, p_2\}$ и $\text{sign}_D(p_1) = -\text{sign}_D(p_2)$ (см. рис. 5). Значит, по лемме 2.4 комплексная ориентация согласована на векторах v_1 и v_2 .

Аналогичные аргументы показывают, что комплексная ориентация согласована на векторах v_3 и v_4 , см. рис. 6. Наконец, из построения дивизора P мы имеем $\text{sign}_{C_2}(p_4) = -\text{sign}_{C_2}(p_5)$, откуда по лемме 2.4 комплексная ориентация согласована на векторах v_4 и v_5 . Таким образом, по лемме 2.5 дивизор P разбивающий и $(1, 3, 2) \in \text{Sep}(X)$.

Для доказательства того, что $(2, 3, 1) \in \text{Sep}(X)$ достаточно рассмотреть дивизор $Q = q_1 + \dots + q_6$, взятый как на рис. 4, и применить аналогичные аргументы. Необходимые для этого коники нетрудно найти на рис. 4.

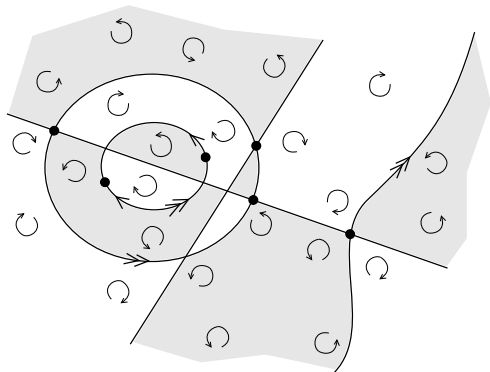


Рис. 5. Ориентации в точках p_1 и p_2 .

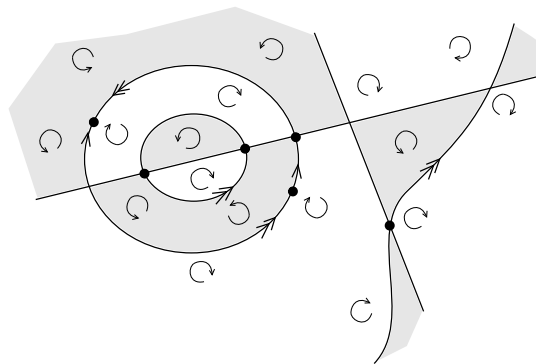


Рис. 6. Ориентации в точках p_3 и p_4 .

Заметим теперь, что $\deg P = \deg Q = 6$ (что равно роду плоской квинтики), а также, что выше мы уже показали, что $h^1(P) = h^1(Q) = 1$. Значит, по теореме 2.6 выполняется включение

$$((2, 3, 1) + \mathbb{N}_0^3) \cup ((1, 3, 2) + \mathbb{N}_0^3) \subset \text{Sep}(X).$$

□

4. РАЗБИВАЮЩАЯ ПОЛУГРУППА $(M-2)$ -КВИНТИК

Данный раздел посвящен описанию разбивающей полу группы $(M - 2)$ -квинтики, т.е. плоской вещественной кривой степени 5 с четырьмя овалами.

Следующая лемма является классическим фактом в вещественной алгебраической геометрии.

Лемма 4.1. Плоская $(M - 2)$ -квинтика X является разбивающей тогда и только тогда, когда её овалы находятся в невыпуклом положении, см. рис. 1, справа.

Для доказательства леммы 4.1 достаточно применить аргументы из [Vir84, §3.2 и §3.3]. Нам отдельно понадобится следующая деталь из этого доказательства (ср. с [Vir84, §3.3]):

Предложение 4.2. Пусть X — $(M - 2)$ -квинтика с невыпуклым расположением овалов (см. рис. 1, справа). Возьмём по точке на каждом овале. Тогда пучок коник, проходящих через эти 4 точки, определяет разбивающий морфизм $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

В своей недавней работе [Man24] Манцаролли обобщает это свойство (о невыпуклом расположении овалов) на случай плоских $(M - 2)$ -кривых произвольной степени.

Пусть X — разбивающая $(M - 2)$ -квинтика. Зафиксируем нумерацию компонент $\mathbb{R}X$ как на рис. 1: пусть X_1 — псевдопрямая, X_2 — овал, находящийся внутри треугольника с вершинами в остальных, а X_3, X_4, X_5 — остальные овалы.

Разбивающий морфизм f из предложения 4.2 имеет разбиение степеней $(2, 1, 1, 1, 1)$. В работе [Man24] Манцаролли, пользуясь теоремой 2.2, доказывает, что разбивающий морфизм степени 6 из $(M - 2)$ -квинтики может иметь только разбиение степеней $(2, 1, 1, 1, 1)$ и, возможно, $(1, 2, 1, 1, 1)$, см. [Man24, пример 2.6]. Ниже мы доказываем, что разбивающий морфизм из $(M - 2)$ -квинтики не может иметь степень 1 на псевдопрямой:

Лемма 4.3. $(1, a, b, c, d) \notin \text{Sep}(X)$ при всех $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

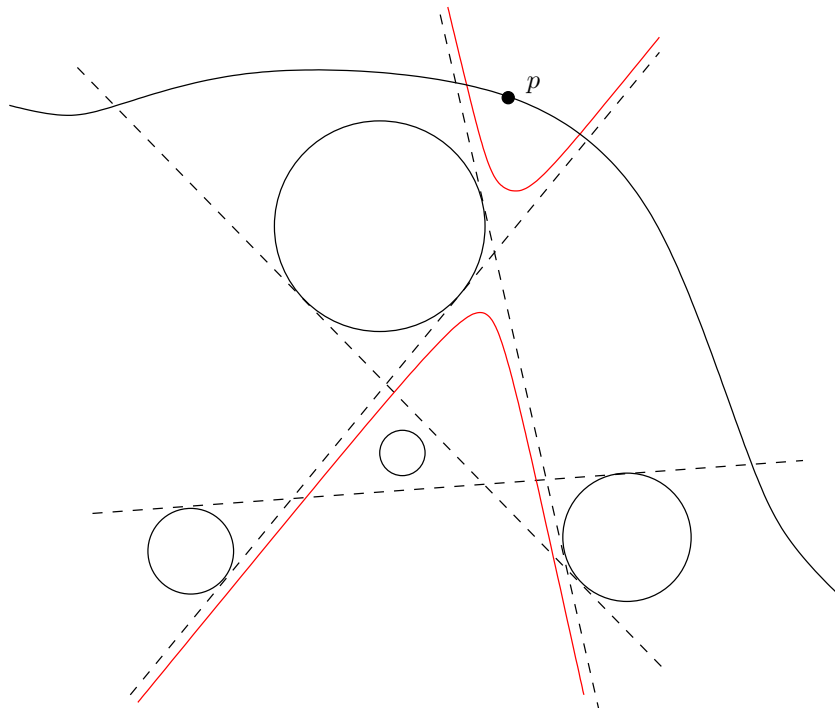


Рис. 7. Доказательство леммы 4.3.

Доказательство. Несложно убедиться в том, что существуют 4 бикасательные, объединение которых с квинтикой с точностью до изотопии такое, как на рис. 7.

Предположим, что f — разбивающий морфизм с $d_1(f) = 1$. Пусть D — малое возмущение двух бикасательных, изображенное на рис. 7. Тогда на $f^{-1}(f(p))$ комплексная ориентация совпадает с D -ориентацией, что противоречит теореме 2.2. \square

Следующая лемма завершает вычисление разбивающей полугруппы для разбивающих $(M - 2)$ -квинтик.

Лемма 4.4. Пусть X — разбивающая $(M - 2)$ -квинтика. Тогда

$$(2, 1, 1, 1, 1) + \mathbb{N}_0^5 \subset \text{Sep}(X).$$

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — разбивающий морфизм из предложения 4.2, а $P = f^{-1}(p_0)$ — соответствующий разбивающий дивизор. Тогда, так как точки дивизора P лежат на конике и при этом через точки P может проходить лишь одна коника, $h^1(P) = h^0(K_X - P) = 1$. Значит, доказываемое следует из теоремы 2.6. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Ahl50] Lars L. Ahlfors. Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 24(1):100–134, December 1950. doi:10.1007/BF02567028.
- [KS20] Mario Kummer and Kristin Shaw. The separating semigroup of a real curve. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, 29(1):79–96, July 2020. arXiv:1707.08227 [math]. URL: <http://arxiv.org/abs/1707.08227>, doi:10.5802/afst.1624.
- [Man24] Matilde Manzaroli. Real plane separating $(M-2)$ -curves of degree d and totally real pencils of degree $(d-3)$, July 2024. arXiv:2404.09671 [math]. URL: <http://arxiv.org/abs/2404.09671>, doi:10.48550/arXiv.2404.09671.
- [MO25] Grigory Mikhalkin and Stepan Orevkov. In preparation., 2025.

- [Ore19] S. Yu. Orevkov. Separating semigroup of hyperelliptic curves and of genus 3 curves. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 31(1):81–84, December 2019. URL: <http://www.ams.org/spmj/2020-31-01/S1061-0022-2019-01586-2/>, doi:10.1090/spmj/1586.
- [Ore21] S. Yu Orevkov. Algebraically unrealizable complex orientations of plane real pseudoholomorphic curves. *Geometric and Functional Analysis*, 31(4):930–947, August 2021. arXiv:2010.09130 [math]. URL: <http://arxiv.org/abs/2010.09130>, doi:10.1007/s00039-021-00569-1.
- [Ore24] S. Yu Orevkov. Separating semigroup of genus 4 curves, December 2024. arXiv:2412.02460 [math]. URL: <http://arxiv.org/abs/2412.02460>, doi:10.48550/arXiv.2412.02460.
- [Rok78] V A Rokhlin. Complex topological characteristics of real algebraic curves. *Russian Mathematical Surveys*, 33(5):85–98, October 1978. URL: <https://www.mathnet.ru/eng/rm3519>, doi:10.1070/RM1978v033n05ABEH002514.
- [Vir84] O Ya Viro. Real plane curves of degrees 7 and 8: new prohibitions. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 23(2):409–422, April 1984. URL: <https://www.mathnet.ru/eng/im1439>, doi:10.1070/IM1984v023n02ABEH001777.

М.И. МАГИН: САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, РОССИЯ, 199034, САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, УНИВЕРСИТЕТСКАЯ НАВ. 7/9

Email address: matheusz.magin@gmail.com

С.Ю. ОРЕВКОВ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.А. СТЕКЛОВА РАН, РОССИЯ, 119991, МОСКВА, УЛ. ГУВКИНА 8; IMT, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, 31062, TOULOUSE, FRANCE.

Email address: orevkov@math.ups-tlse.fr