

Разбивающая полугруппа кривых рода 4

С. Ю. Оревков

Рациональная функция на вещественной алгебраической кривой C называется разбивающей, если вещественные значения она принимает только в вещественных точках. Такая функция определяет накрытие $\mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$. Пусть c_1, \dots, c_r — компоненты связности множества $\mathbb{R}C$. М. Куммер и К. Шоу определили разбивающую полугруппу кривой C как множество всех наборов $(d_1(f), \dots, d_r(f))$, где f — разбивающая функция и $d_i(f)$ — степень ограничения f на c_i .

В настоящей статье мы описываем разбивающие полугруппы всех кривых рода 4. Доказательства основаны на рассмотрении канонического вложения кривой C в квадрику X в \mathbb{P}^3 и применении теоремы Абеля к 1-формам на C , полученным как вычет Пуанкаре некоторых мероморфных 2-форм.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: Разбивающая полугруппа, вещественная алгебраическая кривая

§ 1. Введение

Вещественной алгебраической кривой мы будем называть комплексную алгебраическую кривую C , снабженную антиголоморфной инволюцией $\text{conj} : C \rightarrow C$ (инволюция комплексного сопряжения). В этом случае множество вещественных точек $\{p \in C \mid \text{conj}(p) = p\}$ будем обозначать через $\mathbb{R}C$. Вещественная кривая называется *разбивающей*, если $\mathbb{R}C$ разбивает C на две половинки, переходящие друг в друга при комплексном сопряжении. Все рассматриваемые кривые являются гладкими и неприводимыми.

Необходимое и достаточное условие того, что C разбивающая, — существование *разбивающего морфизма* $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, то есть такого морфизма, что $f^{-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) = \mathbb{R}C$. Ограничение разбивающего морфизма на $\mathbb{R}C$ является накрытием над $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$. Зафиксировав нумерацию компонент связности c_1, \dots, c_r множества $\mathbb{R}C$, можно рассмотреть набор $d(f) = (d_1, \dots, d_r)$, где d_i есть степень ограничения накрытия f на c_i . Куммер и Шоу [2] определили *разбивающую полугруппу* кривой C как

$$\text{Sep}(C) = \{d(f) \mid f : C \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ — разбивающий морфизм}\}.$$

Легко убедиться, что это и в самом деле полугруппа относительно сложения (см. [2, предл. 2.1]). Обозначим:

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}.$$

Как показано в [2], $\text{Sep}(C) = \mathbb{N}^{g+1}$, если C является M -кривой рода g (т.е. $\mathbb{R}C$ имеет $g+1$ компонент связности), и $\text{Sep}(C)$ есть \mathbb{N}^2 (соотв. \mathbb{N}^3 или $2 + \mathbb{N}_0$), если C — разбивающая кривая рода 1 (соотв. 2). Разбивающие полугруппы гиперэллиптических кривых любого рода и кривых рода 3 вычислены в [3]. Гораздо более простое доказательство для кривых рода 3 приведено в [4, замечание 3.3]. В §4 мы приводим доказательство для гиперэллиптических кривых, которое по существу то же, что и в [3], но изложенное с точки зрения работы [4].

В настоящей статье найдены разбивающие полугруппы всех кривых рода 4 (этот результат был анонсирован в [4, замечание 3.6]). Пусть C — разбивающая кривая рода 4. Если C есть M -кривая, то $\text{Sep}(C) = \mathbb{N}^5$ (см. выше). Если C гиперэллиплична, но не M -кривая, то $\text{Sep}(C) = \{2\} \cup (4 + \mathbb{N}_0)$ (см. [3] и §4).

Предположим, что C не гиперэллиплична. Как известно, в этом случае образ C при каноническом вложении является кривой степени 6 на неприводимой квадрике X в \mathbb{P}^3 . Поскольку C разбивающая, вещественную структуру на \mathbb{P}^3 можно выбрать так, чтобы C была вещественной кривой на неприводимой вещественной поверхности X , такой, что $\dim \mathbb{R}X = 2$, и тогда $\mathbb{R}X$ — эллипсоид, гиперboloид или квадратичный конус.

Когда X — эллипсоид или гиперboloид, все жесткие изотопические классы гладких вещественных секстик C рода 4 на X (т.е. компоненты связности пространства таких кривых) описаны в [1]. Те же рассуждения легко переносятся на случай, когда X — квадратичный конус (см. также подстрочное примечание в [5, стр. 14]). Представители всех жестких изотопических классов разбивающих немаксимальных кривых с точностью до автоморфизмов X изображены на рис. 1. Четыре из них реализуемы малым возмущением трех плоских сечений. Два других — возмущением плоского сечения и сечения тонким цилиндром вокруг прямой. Стрелками на рис. 1 показаны комплексные ориентации, т.е. граничные ориентации, индуцированные с одной из половинок $C \setminus \mathbb{R}C$.

На рис. 1 видно, что жесткий изотопический тип разбивающей кривой однозначно (с точностью до $\text{Aut}(X)$) определяется топологией пары $(\mathbb{R}X, \mathbb{R}C)$. Более того, он определяется только числом компонент связности множества $\mathbb{R}C$ и числом тех из них, которые ограничивают гладкий

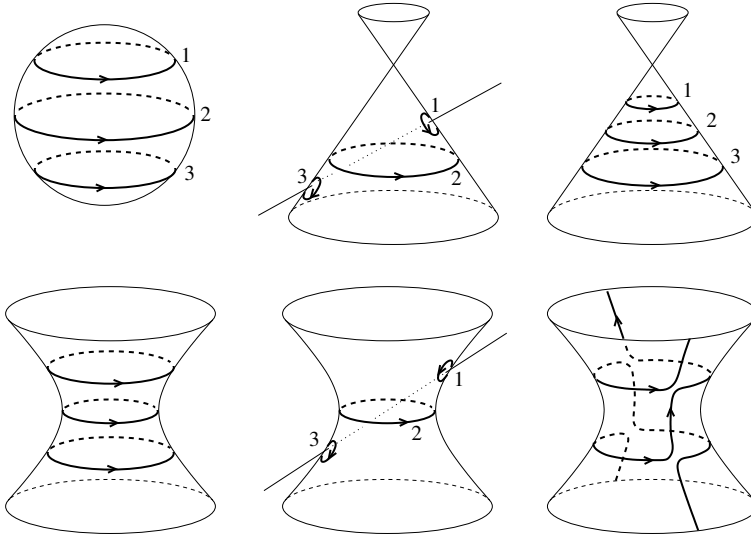


Рис. 1. Жесткие изотопические типы разбивающих не- M -секстик на квадраках.

диск на $\mathbb{R}X$ (такие компоненты называются *овалами* кривой C). Оказывается, хоть это заранее и не очевидно, что $\text{Sep}(C)$ тоже зависит только от X и от этих двух чисел. Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. Пусть C — разбивающая кривая рода 4 на квадраке X . Занумеруем ее компоненты в соответствии с рис. 1 (произвольно в случае M -кривой). Тогда $\text{Sep}(C)$ такая, как указано в таблице 1.

X	$b_0(\mathbb{R}C)$	число овалов	$\text{Sep}(C)$
эллипсоид	3	3	$(1, 2, 1) + \mathbb{N}_0^3$
	5	5	\mathbb{N}^5
квадратичный конус	3	0	$\{(1, 1, 1)\} \cup ((1, 2, 1) + \mathbb{N}_0^3)$
	3	2	$(1, 2, 1) + \mathbb{N}_0^3$
гиперболоид	5	4	\mathbb{N}^5
	3	0	$3 + \mathbb{N}_0$
	3	2	\mathbb{N}^3
	5	4	$(1, 2, 1) + \mathbb{N}_0^3$
			\mathbb{N}^5

Таблица 1. Разбивающие полугруппы кривых рода 4 на квадраках.

Разделы 2 и 3 посвящены доказательству теоремы 1. Оно основано на технике, предложенной в [4, §3]. В §4 мы приводим доказательство теоремы 2 работы [3], сходное с доказательством теоремы 1 настоящей статьи.

До конца раздела 3 X и C такие, как в теореме 1, причем C не M -кривая (теорема 1 для M -кривых доказана в [2, теорема 1.7]). Число компонент связности множества $\mathbb{R}C$ будем обозначать через r , а число овалов — через l . Как и выше, компоненты связности множества $\mathbb{R}C$ будем обозначать c_1, \dots, c_r (нумерация в соответствии с рис. 1).

§ 2. Основные леммы

Пусть $D = D_0 + D_1$ — вещественное плоское сечение квадрики X , причем D_0 — компонента D четной кратности (в нашем случае D_0 непуста только когда X — квадратичный конус, а $D = D_0$ — удвоенная прямолинейная образующая). Дивизор $D - C$ принадлежит каноническому классу поверхности X , значит, это дивизор некоторой мероморфной 2-формы Ω_D на X . Она задает “шахматную” ориентацию на $\mathbb{R}X \setminus (\mathbb{R}C \cup \mathbb{R}D_1)$, т.е. ориентацию, меняющуюся при прохождении через $\mathbb{R}C \cup \mathbb{R}D_1$. Зададим D -ориентацию на $\mathbb{R}C \setminus \mathbb{R}D$ как граничную ориентацию, индуцированную “шахматной” ориентацией на $\mathbb{R}X \setminus (\mathbb{R}C \cup \mathbb{R}D_1)$. Обозначим через ω_D вычет Пуанкаре формы Ω_D . Тогда D -ориентация совпадает с ориентацией, заданной формой ω_D , в том смысле, что $\omega_D(v) > 0$ для $v \in T(\mathbb{R}C)$ тогда и только тогда, когда D -ориентация положительна на v . Как и комплексные ориентации, D -ориентация определена лишь с точностью до одновременного обращения на всех компонентах множества $\mathbb{R}C$.

Лемма 2.1. (См. [4, теорема. 3.2].) *Пусть $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ — разбивающий морфизм и $P = f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}\mathbb{P}^1$. Если $P \not\subset D$, то D -ориентация не может совпадать с комплексной ориентацией во всех точках множества $P \setminus D$.*

Лемма 2.2. *Пусть p_1, \dots, p_n и q_1, \dots, q_n — попарно различные точки на C . Предположим, что дивизоры $P := p_1 + \dots + p_n$ и $Q = q_1 + \dots + q_n$ линейно эквивалентны. Тогда существуют гладкие пути $p_j : [0, t_0] \rightarrow C$, $p_j(0) = p_j$, $t_0 > 0$, такие, что $P_t := \sum p_j(t) \in |P|$ при всех $t \in [0, t_0]$, причем при всех $j = 1, \dots, n$ производная $p_j'(0)$ не равна нулю.*

Доказательство. Пусть f — мероморфная функция на C с простыми нулями в P и простыми полюсами в Q . Пусть P_t — дивизор нулей функции $f - t$. Результат следует из теоремы о неявной функции.

Лемма 2.3. Пусть D — неприводимое вещественное плоское сечение квадрики X . Фиксируем комплексную ориентацию на C (стрелки на рис. 2).

Если $r = 3$ и $\mathbb{R}D$ пересекает компоненты $\mathbb{R}C$, как показано на рис. 2 слева или в середине, то

$$\left((1, 3, 1) + \mathbb{N}_0^3 \right) \cup \left((1, 2, 2) + \mathbb{N}_0^3 \right) \subset \text{Sep}(C). \quad (1)$$

Если $r = 1$ и $\mathbb{R}D$ пересекает компоненты $\mathbb{R}C$, как показано на рис. 2 справа, то $5 + \mathbb{N}_0 \subset \text{Sep}(C)$.

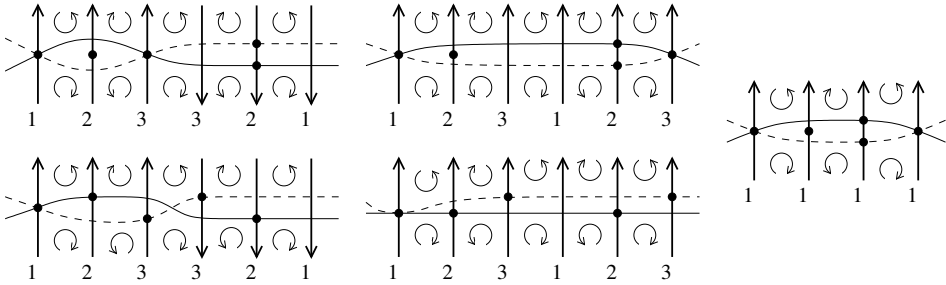


Рис. 2. (См. лемму 2.3) $\mathbb{R}D$ — горизонтальная сплошная линия.

Доказательство. Пусть D' — вещественное плоское сечение квадрики X , близкое к D и пересекающее $D \cup C$, как показано на рис. 2 пунктирной линией. Рассмотрим дивизор $P = p_1 + \dots + p_5$ на C , где пять точек p_1, \dots, p_5 расположены, как показано в соответствующих случаях на рис. 2. Выбирая D' достаточно близко к D , можно считать, что ни одна прямая, лежащая на X , не проходит через два точки дивизора P .

По теореме Римана – Роха размерность линейной системы $|P|$ не меньше 1. Покажем, что $|P|$ не имеет базисных точек, т.е. $\dim |P - p_j| = 0$ для всех $j = 1, \dots, 5$. По теореме Римана – Роха для этого достаточно показать, что дивизор $P - p_j$ не специален, т.е. $|K_C - (P - p_j)| = \emptyset$. Линейная система $|K_C|$ высекается на C плоскими сечениями (напомним, что C канонически вложена в \mathbb{P}^3), поэтому надо показать, что ни одно плоское сечение не проходит через все точки дивизора $P - p_j$. Предположим, что некоторое плоское сечение D'' проходит через все точки дивизора $P - p_j$. Рассмотрим следующие три случая.

Случай 1. $p_j \notin D \cap D'$. Тогда D'' имеет три общие точки с D или D' и, следовательно, совпадает с D или D' , что невозможно, так как каждый из дивизоров D и D' содержит только три точки из P .

Случай 2. $p_j \in D \cap D'$ и $P \not\subset D \cup D'$. Тогда единственную точку из $P \setminus (D \cup D')$ можно сдвинуть с объединения всех плоских сечений, проходящих через трехточечные подмножества $P - p_j$.

Случай 3. $p_j \in D \cap D'$ и $P \subset D \cup D'$ (два нижних расположения на рис. 2). D и D' оба проходят через две точки из $P - p_j$, следовательно, D'' пересекает $D \cup D'$ только в точках из P , так как $D \cdot D'' = D' \cdot D'' = 2$. Выбирая D' достаточно близко к D , можно добиться, что D' и D'' C^1 -близки к D , в частности, D'' идет монотонно слева направо (на рис. 2). Легко видеть, что это невозможно при условии, что D'' содержит все точки из $P - p_j$ и пересекает $D \cup D'$ только в точках из P .

Мы доказали, что линейная система $|P|$ не имеет базисных точек. Тогда по лемме 2.2 существует деформация $P_t = p_1(t) + \dots + p_5(t) \in |P|$, $t \in [0, t_0]$, такая, что $p_j(0) = p_j$ и $p'_j(0) \neq 0$ для всех $j = 1, \dots, 5$.

Для завершения доказательства применим рассуждения из доказательства теоремы 3.2 работы [4]. Положим $\omega = \omega_D$ и рассмотрим D -ориентацию на $\mathbb{R}C \setminus \mathbb{R}D$ (см. начало этого параграфа). Это граничная ориентация, индуцированная “шахматной” ориентацией, которая изображена на рис. 2 круговыми стрелками. Пусть $v_j = p'_j(0) \in T_{p_j}(\mathbb{R}C)$, $j = 1, \dots, 5$. По теореме Абеля $\omega(v_1) + \dots + \omega(v_5) = 0$, причем $\omega(v_j) = 0$ при $p_j \in D$. Есть только две точки p_{j_1}, p_{j_2} из P , не лежащие в D , следовательно, $\omega(v_{j_1}) = -\omega(v_{j_2})$. На рис. 2 видно, что D -ориентация и комплексная ориентация совпадают в одной из точек p_{j_1}, p_{j_2} и противоположны в другой точке. Следовательно, комплексные ориентации имеют один и тот же знак на v_{j_1} и v_{j_2} .

Применяя те же рассуждения к D' вместо D , заключаем, что во всех случаях при $r = 3$ комплексная ориентация на векторах v_j , соответствующих точкам p_j , имеет один и тот же знак, если эти точки лежат на одной компоненте связности множества $\mathbb{R}C$. При $r = 1$ (рис. 2, справа) это дает только совпадение знака комплексной ориентации на векторах v_2, v_3, v_4 (мы предполагаем, что точки p_j занумерованы слева направо). Однако, применяя те же рассуждения к плоскому сечению, проходящему через p_2, p_4, p_5 (соотв. через p_1, p_2, p_3), мы получим совпадение знака комплексной ориентации на v_1 и v_3 (соотв. на v_4 и v_5).

Следовательно, при $0 < t \ll t_0$ дивизоры P и P_t перемежаются (interlace), см. [2, §2.1], т.е. каждая компонента дополнения $\mathbb{R}C \setminus P$ содержит ровно одну точку из P_t . Тогда (см. [2, предл. 2.11]) мероморфная функция на C , имеющая дивизор $P - P_t$, задает разбивающий морфизм $C \rightarrow \mathbb{P}^1$. Следовательно, $\{(1, 3, 1), (1, 2, 2)\} \subset \text{Sep}(C)$ при $r = 3$ и $5 \in \text{Sep}(C)$ при $r = 1$. Поскольку дивизор P не специален, результат следует из [2, предл. 3.2].

Лемма 2.4. *Предположим, что X — квадратичный конус или гиперболюид, $l = 2$ и L — вещественная прямая на X . Тогда L не может иметь непустое пересечение с обоими овалами кривой C .*

Доказательство. Любая вещественная кривая на X пересекает каждый овал в четном числе точек с учетом кратностей. Поэтому результат следует из того, что $L \cdot C = 3$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

3.1. Доказательство для эллипсоида. Пусть X — эллипсоид и $r = 3$. Если $(d_1, d_2, d_3) \in \text{Sep}(C)$, то $d_2 \geq 2$; см. [4, пример 3.5].

Пучок плоскостей, проходящих через точку на c_1 и точку на c_3 , задает разбивающий морфизм, который реализует $(1, 2, 1) \in \text{Sep}(C)$.

Выберем по точке в каждой компоненте дополнения $\mathbb{R}X \setminus \mathbb{R}C$, гомеоморфной диску. Применение леммы 2.3 к плоскому сечению, проходящему через эти две точки, завершает доказательство.

3.2. Доказательство для квадратичного конуса. Пусть X — квадратичный конус. Теорема 1 есть комбинация следующих предложений.

Предложение 3.1. *Если $(r, l) = (3, 0)$ и $d = (d_1, 1, d_3) \in \text{Sep}(C)$, то $d = (1, 1, 1)$.*

Доказательство. Пусть разбивающий морфизм $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ реализует $(d_1, 1, d_3)$, и пусть P — его слой. Результат следует из леммы 2.1, в которой D — удвоенная линейная образующая конуса, проходящая через точку $P \cap c_2$.

Предложение 3.2. *Если $(r, l) = (3, 0)$, то $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1)\} \subset \text{Sep}(C)$.*

Доказательство. Пучок плоскостей, проходящих через вещественную прямую L , задает морфизм $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Если L — прямолинейная образующая конуса X , то f реализует $(1, 1, 1) \in \text{Sep}(C)$. Если L пересекает c_1 и c_3 , но не c_2 , то f реализует $(1, 2, 1) \in \text{Sep}(C)$.

Предложение 3.3. *Если $(r, l) = (3, 0)$, то*

$$\{(d_1, d_2, d_3) \in (1, 2, 1) + \mathbb{N}_0^3 \mid d_1 + d_2 + d_3 \geq 5\} \subset \text{Sep}(C). \quad (2)$$

Доказательство. Пусть L — вещественная прямая, близкая к оси симметрии конуса X , но не проходящая через его вершину. Пусть D — сечение конуса X вещественной плоскостью, проходящей через L . Тогда (1) выполнено по лемме 2.3, а также в силу симметрии имеет место включение $(2, 2, 1) + \mathbb{N}_0^3 \subset \text{Sep}(C)$.

Предложение 3.4. *Если $(r, l) = (3, 2)$ и $(d_1, d_2, d_3) \in \text{Sep}(C)$, то $d_2 \geq 2$.*

Доказательство. Предположим, что существует разбивающий морфизм $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, реализующий $(d_1, 1, d_3)$. Пусть P — его слой, и пусть $D = 2L$, где L — образующая конуса, проходящая через точку $P \cap c_2$. По лемме 2.4 L не может проходить через все точки дивизора P . Поэтому мы получаем противоречие с леммой 2.1.

Предложение 3.5. *Если $(r, l) = (3, 2)$, то $(1, 2, 1) \in \text{Sep}(C)$.*

Доказательство. Предположим, что C такая, как на рис. 1, т.е. это возмущение плоского сечения и тонкого цилиндра, ось которого зацеплена с c_2 . Пусть L — прямая, пересекающая c_1 и c_3 . Тогда пучок плоских сечений, проходящих через L , реализует $(1, 2, 1) \in \text{Sep}(C)$. Как отмечено во введении, любая другая кривая на X , для которой $(r, l) = (3, 2)$, получается из данной модельной кривой непрерывной деформацией. Такую деформацию можно осуществить одновременно с непрерывным перемещением прямой, пересекающей овалы c_1 и c_3 . По лемме 2.4 эта прямая в процессе деформации не может совпасть с образующей конуса. Поэтому она остается зацепленной с c_2 , а значит, пучок проходящих через нее плоскостей все время задает один и тот же элемент полугруппы $\text{Sep}(C)$.

Предложение 3.6. *Если $(r, l) = (3, 2)$, то имеет место (2).*

Доказательство. Пусть D — плоское сечение конуса X , проходящее через прямую, изображенную на рис. 1, и не проходящее через вершину конуса. Тогда из леммы 2.3 следует (1) и, в силу симметрии, (2). Как и в доказательстве предложения 3.5, взаимное расположение D и C не может измениться в процессе деформации.

3.3. Доказательство для гиперboloида. Пусть X — гиперboloид, а A и B — вещественные прямые на X из разных семейств. Фиксируем комплексную ориентацию на $\mathbb{R}A$ и $\mathbb{R}B$ и обозначим их гомологические классы в $H_1(\mathbb{R}X)$ через a и b соответственно. Имеется два жестких гомологических класса неприводимых плоских сечений. Они однозначно определяются классами гомологий $a + b$ и $a - b$. Мы предполагаем, что A , B и ориентации $\mathbb{R}X$, $\mathbb{R}A$, $\mathbb{R}B$ выбраны так, что горизонтальные и вертикальные плоские сечения на рис. 1 (ориентированные согласно стрелкам) принадлежат классам $a + b$ и $a - b$ соответственно, причем $ab = -ba = 1$. Таким образом, класс $\mathbb{R}C$ в $H_1(\mathbb{R}X)$ равен

$$\begin{cases} 3a + 3b, & \text{если } (r, l) = (3, 0), \\ 3a + b, & \text{если } (r, l) = (1, 0), \\ a + b, & \text{если } (r, l) = (3, 2). \end{cases} \quad (3)$$

Доказательства следующих двух лемм несложны, и мы их опускаем.

Лемма 3.7. Пусть $p, q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}X$, $t \mapsto p_t$, $t \mapsto q_t$, — непрерывные пути, такие, что при любом $t \in [0, 1]$ прямая $p_t q_t$ не лежит в X . Пусть D_0 — неприводимое вещественное плоское сечение поверхности X , проходящее через p_0 и q_0 . Тогда существует непрерывное семейство неприводимых вещественных плоских сечений $\{D_t\}_{t \in [0, 1]}$, такое, что $\mathbb{R}D_t$ гомологично $\mathbb{R}D_0$ и проходит через p_t и q_t при всех $t \in [0, 1]$.

Лемма 3.8. Пусть D — неприводимое вещественное плоское сечение поверхности X , такое, что $[\mathbb{R}D] = a - b$. Пусть Γ — ориентированная простая замкнутая кривая на $\mathbb{R}X$, принадлежащая гомологическому классу $a + b$ и имеющая две точки пересечения с $\mathbb{R}D$. Пусть L — вещественная прямая, проходящая через точки $p, q \in \mathbb{R}D \setminus \Gamma$. Тогда $\mathbb{R}L$ зацеплено с Γ в $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ в том и только в том случае, когда $\mathbb{R}L \cap \mathbb{R}D$ и $\Gamma \cap \mathbb{R}D$ не перемешаются на $\mathbb{R}D$, т.е. в том и только в том случае, когда p и q лежат на одной и той же компоненте дополнения $\mathbb{R}D \setminus \Gamma$.

Мы разобьем доказательство теоремы 1 для гиперboloида на четыре предложения 3.9–3.12. Хорошо известно, что X бигеоргулярно эквивалентен $A \times B$. Пусть $\pi_A : X \rightarrow A$ и $\pi_B : X \rightarrow B$ — проекции, происходящие из этой эквивалентности.

Предложение 3.9. Если $(r, l) = (1, 0)$, то $\text{Sep}(C) = 3 + \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Проекция $\pi_A|_{\mathbb{R}C} : \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}A$ является трехлистным накрытием (см. (3)), следовательно, она реализует $3 \in \text{Sep}(C)$.

Напротив, $\pi_B|_{\mathbb{R}C} : \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}B$ трехлистным накрытием не является, так как иначе $\pi_B|_{\mathbb{R}C}$ тоже было бы разбивающим морфизмом, что противоречит (3). Следовательно, некоторый слой проекции π_B имеет ровно одну точку пересечения с кривой C . Без потери общности можно считать, что это A . Пусть D — малое вещественное возмущение кривой $A \cup B$, такое, что $[\mathbb{R}D] = a - b \in H_1(\mathbb{R}X)$. Тогда D и C имеют 4 вещественных пересечения. Пусть p и \bar{p} — оставшиеся два мнимых пересечения. Рассмотрим \mathcal{D} — пучок плоских сечений, проходящих через p и \bar{p} . Никакие два его элемента не пересекаются в вещественных точках. Следовательно, каждая кривая из \mathcal{D} неприводима, так как D имеет вещественные пересечения с любой вещественной прямой, лежащей в X . Поэтому $[\mathbb{R}E] = [\mathbb{R}D] = a - b \in H_1(\mathbb{R}X)$ для всех $E \in \mathcal{D}$ и, значит, E пересекает C в 4 вещественных точках в силу (3), так как

$$\mathbb{R}E \cdot \mathbb{R}C = (a - b)(3a + b) = ab - 3ba = 4ab = 4. \quad (4)$$

Следовательно, \mathcal{D} реализует $4 \in \text{Sep}(C)$.

Наконец, $5 + \mathbb{N}_0 \subset \text{Sep}(C)$ по лемме 2.3, примененной к любому элементу пучка \mathcal{D} , так как все четыре вещественные пересечения положительны в силу (4) и, значит, имеет место случай на рис. 2 справа.

Предложение 3.10. Если $(r, l) = (3, 0)$, то $\text{Sep}(C) = \mathbb{N}^3$.

Доказательство. Проекция $\pi_A : X \rightarrow A$ реализует $(1, 1, 1) \in \text{Sep}(C)$.

Пусть D — неприводимое вещественное плоское сечение поверхности X , такое, что $[\mathbb{R}D] = a - b$. Тогда $\mathbb{R}D \cdot \mathbb{R}C = 3(a - b)(a + b) = 6ab$ в силу (3), следовательно, $\mathbb{R}D$ трансверсально пересекает $\mathbb{R}C$ в шести точках. Более того, $\mathbb{R}D$ пересекает компоненты $\mathbb{R}C$ так, как показано на рис. 2 в середине. В самом деле, порядок пересечений не может измениться в процессе жесткой изотопии, поэтому он такой, как на модельной кривой, изображенной на рис. 1. Поэтому (1) вытекает из леммы 2.3. Поскольку этот результат инвариантен относительно перенумерации компонент, мы заключаем, что $(d_1, d_2, d_3) \in \text{Sep}(C)$ при $d_1 + d_2 + d_3 \geq 5$.

Пусть $p_k \in \mathbb{R}D \cap c_k$ и $p_{k+1} \in \mathbb{R}D \cap c_{k+1}$ — две точки из $\mathbb{R}D \cap \mathbb{R}C$, соседние относительно их порядка вдоль $\mathbb{R}D$ (индексы рассматриваются по модулю 3). По лемме 3.8 прямая, проходящая через p_k и p_{k+1} , зацеплена с c_{k+2} . Следовательно, любая вещественная плоскость, содержащая эту прямую, пересекает C в шести вещественных точках. Таким образом, пучок плоских сечений, проходящих через p_k и p_{k+1} , реализует элемент $(d_1, d_2, d_3) \in \text{Sep}(C)$, где $d_k = d_{k+1} = 1$ и $d_{k+2} = 2$. Поэтому $(d_1, d_2, d_3) \in \text{Sep}(C)$ при $d_1 + d_2 + d_3 = 4$.

Предложение 3.11. Если $(r, l) = (3, 2)$ и $(d_1, d_2, d_3) \in \text{Sep}(C)$, то $d_2 \geq 2$.

Доказательство. Предположим, что существует разбивающий морфизм $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, реализующий $(d_1, 1, d_3)$. Проекция $\pi_B : \mathbb{R}C \rightarrow \mathbb{R}B$ не накрытие, следовательно, у нее есть слой, имеющий ровно одну вещественную точку пересечения с кривой C . Можно считать, что это A . Пусть $A \cap C = \{p\}$. Тогда $p \in c_2$, следовательно, $A \cap (c_1 \cup c_3) = \emptyset$. Пусть $B', B'' \in |B|$ — две несовпадающие прямые, касательные к c_3 . Положим $D' = A + B'$, $D'' = A + B''$ и $P = f^{-1}(f(p))$. Тогда ни один из дивизоров D' , D'' не содержит P по лемме 2.4 и для одного из них мы приходим к противоречию с леммой 2.1, так как D' - и D'' -ориентации совпадают на c_1 и противоположны на c_3 .

Предложение 3.12. Если $(r, l) = (3, 2)$, то $(1, 2, 1) + \mathbb{N}_0^3 \subset \text{Sep}(C)$.

Доказательство. Тот факт, что $(1, 2, 1) \in \text{Sep}(C)$, доказывается так же, как в предложении 3.5. Докажем включение (2). Его доказательство тоже почти такое же, как у предложения 3.6, но надо еще воспользоваться леммой 3.7. А именно, рассмотрим жесткую изотопию $\{C_t\}_{t \in [0,1]}$, такую, что C_0 — модельная кривая на рис. 1 и $C_1 = C$. Обозначим компоненты C_t через $c_{t,1}$, $c_{t,2}$, $c_{t,3}$ в соответствии с рис. 1.

Пусть D_0 — сечение поверхности X вещественной плоскостью, содержащей прямую, изображенную на рис. 1, и такой, что $[\mathbb{R}D_0] = [c_2]$ в $H_1(\mathbb{R}X)$. Тогда из леммы 2.3 следует (1) и, по симметрии, (2) для модельной кривой C_0 . Выберем непрерывные пути $\{p_t\}$ и $\{q_t\}$ так, что $p_0, q_0 \in \mathbb{R}D_0$ и $p_t \in c_{t,1}$, $q_t \in c_{t,3}$ при всех t . По лемме 2.4 при любом t прямая $p_t q_t$ не лежит в X . Значит, по лемме 3.7 существует непрерывное семейство неприводимых вещественных плоских сечений $\{D_t\}$, таких, что $p_t, q_t \in \mathbb{R}D_t$ и $[\mathbb{R}D_t] = [c_2]$ при всех t . Тогда взаимное расположение $\mathbb{R}D_t$ и $\mathbb{R}C_t$ не меняется в процессе деформации и, значит, к кривой C тоже применима лемма 2.3.

§ 4. Гиперэллиптические кривые

Основные результаты работы [3] тоже можно доказать тем же способом, что и теорему 1. Один из них (описание $\text{Sep}(C)$, когда род C равен трем) уже передоказан этим способом в [4]. Здесь мы это сделаем для другого результата из [3].

Теорема 2. ([3, теорема 1].) *Пусть C — немаксимальная гиперэллиптическая кривая рода $g \geq 1$. Положим $m = \lfloor (g+1)/2 \rfloor$. Тогда*

$$\text{Sep}(C) = \begin{cases} ((1, 1)\mathbb{N}) \cup ((m, m) + \mathbb{N}_0^2), & \text{если } g \text{ четно,} \\ (2\mathbb{N}) \cup (g + \mathbb{N}_0), & \text{если } g \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство. Кривая C задана уравнением $y^2 = F(x)$, где F — вещественный многочлен степени $2g+2$, положительный на \mathbb{R} . Ее можно вложить в вещественную поверхность Хирцебруха X степени $g+1$ (послойная компактификация линейного расслоения $\mathcal{O}(g+1)$) так, что гиперэллиптическая проекция $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ будет ограничением расслоения $X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Ограничение $\pi|_{\mathbb{R}C}$ есть двулистное накрытие над $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$. Оно тривиально при нечетном g и нетривиально при четном g . Фиксируем аффинную карту $U \subset X$ с координатами (x, y) , так, что C и π принимают вид $y^2 = F(x)$ и $(x, y) \mapsto x$ соответственно. Тогда $\mathbb{R}C \cap U$ имеет две компоненты связности c_1 и c_2 . Каждая из них трансверсально пересекает все слои расслоения π . Имеет место $K_X + C \sim (g-1)F$, где F — слой проекции π . Полугруппу в правой части ((5) обозначим через S .

Пождем, что $\text{Sep}(C) \subset S$. Пусть $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ — разбивающий морфизм и P — его слой, лежащий в U . Пусть $P_i = P \cap c_i$ и $n_i = \#P_i$, $i = 1, 2$. Без ограничения общности можно предполагать, что $n_1 \leq n_2$. Напомним, что $m = \lfloor (g+1)/2 \rfloor$. Предположим, что $n_1 < m$. Пусть D_0 — объединение $m-1$ слоев π , такое, что $P_1 \subset D_0$ и $D_0 \setminus \pi^{-1}(P_1)$ не пересекается с P . Положим $D = 2D_0$ при четном g и $D = 2D_0 + F$ при нечетном,

где F – слой на бесконечности, т.е. слой прекции π , не лежащий в U . Тогда $D - C \sim K_X$ и мы рассмотрим соответствующую мероморфную 2-форму Ω_D на X и ее вычет Пуанкаре ω_D на C . Это 1-форма, и она задает D -ориентацию на $\mathbb{R}C \setminus \text{supp}D$ (см. §2). Тогда ω_D обращается в нуль в точках дивизора P_1 , причем D -ориентация совпадает с комплексной ориентацией на $c_2 \setminus \text{supp}D$. Значит, $P_2 \subset D_0$ в силу [4, теорема 3.2], следовательно, $P_2 \subset \pi^{-1}(P_1)$. Аналогично $P_1 \subset \pi^{-1}(P_2)$, и значит, $n_1 = n_2$, из чего следует, что $\text{Sep}(C) \subset S$.

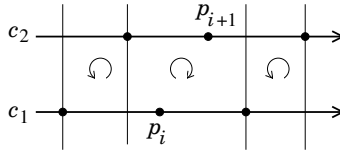


Рис. 3. К доказательству теоремы 2.

Докажем теперь обратное включение $S \subset \text{Sep}(C)$. Гиперэллиптическая проекция реализует $2 \in \text{Sep}(C)$ или $(1, 1) \in \text{Sep}(C)$ (в зависимости от четности рода), следовательно, порожденная этим элементом подгруппа содержится в $\text{Sep}(C)$. Таким образом, в силу [2, предл. 3.2] достаточно реализовать $g \in \text{Sep}(C)$ или $(m, m) \in \text{Sep}(C)$ (в зависимости от четности рода) разбивающим морфизмом с неспециальным слоем. Пусть $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, g$, – точки на C , такие, что $x_1 < x_2 < \dots < x_g$ и $\text{sign}(y_i) = (-1)^i$, т.е. p_1, p_3, \dots лежат на c_1 и p_2, p_4, \dots лежат на c_2 . Тогда дивизор $P = p_1 + \dots + p_g$ неспециален на C . Покажем, что P реализуем в качестве слоя разбивающего морфизма. Будем действовать, как в доказательстве леммы 2.3. По теореме Римана – Роха $\dim |P| = 1$. Пусть $P_t = p_1(t) + \dots + p_g(t)$, $P_0 = P$, – деформация дивизора P в $|P|$. Линейная система $|P|$ не имеет базисных точек. В самом деле, если $p_i(t)$ постоянно, то $P_t^* := P_t - p_i(t) \sim P^* := P - p_i$, следовательно, $P_t^* + \tau(P^*) \sim P^* + \tau(P^*)$, где τ – гиперэллиптическая инволюция, однако это противоречит тому, что $P^* + \tau(P^*) \in |K_C|$ и каждый дивизор из $|K_C|$ инвариантен относительно τ . Пусть D_i , $i = 1, \dots, g - 1$, – объединение $g - 2$ слоев π , проходящее через все точки дивизора P , кроме p_i и p_{i+1} . Тогда $D_i \in |K_X + C|$, и мы рассмотрим D_i -ориентацию на $C \setminus \text{supp}(D_i)$. В одной из точек p_i, p_{i+1} она совпадает с комплексной ориентацией, а в другой эти ориентации противоположны (см. рис. 3). Значит (ср. с концом доказательства леммы 2.3), комплексная ориентация имеет один и тот же знак на касательных векторах $p'_i(0)$ и $p'_{i+1}(0)$. Это верно для всех $i = 1, \dots, g - 1$, следовательно,

дивизоры P и P_t , $0 < t \ll 1$, перемежаются, и требуемый результат вытекает из [2, предл. 3.2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. И. Дегтярев, В. И. Звонилов, *Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических кривых бистепени (3,3) на квадраках*, Матем. заметки, **66:6** (1999), 810–815.
- [2] M. Kummer, K. Shaw, *The separating semigroup of a real curve*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse. Mathématiques (6), **29** (2020), 79–96.
- [3] С. Ю. Оревков, *Разбивающая полугруппа гиперэллиптических кривых и кривых рода 3*, Алгебра и анализ, **31:1** (2019), 108–113.
- [4] S. Yu. Orevkov, *Algebraically unrealizable complex orientations of plane real pseudoholomorphic curves*, GAFA – Geom. Funct. Anal., **31** (2021), 930–947.
- [5] V. I. Zvonilov, *Graphs of trigonal curves and rigid isotopies of singular real algebraic curves of bidegree (4,3) on a hyperboloid*, arxiv:2412.15795.

С. Ю. Оревков

Математический институт РАН
им. В. А. Стеклова, Москва, Россия

С. Ю. Оревков

Institut des mathématiques de Toulouse, l'université
Paul Sabatier, Toulouse, France
E-mail: orevkov@math.ups-tlse.fr