РАЗБИВАЮЩАЯ ПОЛУГРУППА ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ И КРИВЫХ РОДА 3

С. Ю. Оревков

Аннотация. Рациональная функция на вещественной кривой C называется разбивающей, если она вещественные значения принимает только в вещественных точках. Такая функция задает накрытие $\mathbb{R}C \to \mathbb{RP}^1$. Пусть $A_1, \dots, A_n$ компоненты связности множества $\mathbb{R}C$. М. Куммер и К. Шоу в недавней статье определили разбивающую полугруппу кривой C как множество всех наборов $(d_1(f), \dots, d_n(f))$, где f — разбивающая функция, а d_i — степень ограничения f на A_i. Мы вычисляем разбивающую полугруппу гиперэллиптических кривых и кривых рода 3.

1. Введение

Вещественной алгебраической кривой мы будем называть комплексную алгебраическую кривую C, снабженную антиголоморфной инволюцией $\mathrm{conj} : C \to C$ (инволюция комплексного сопряжения). В этом случае множество ее вещественных точек $\{p \in C \mid \mathrm{conj}(p) = p\}$ мы будем обозначать через $\mathbb{R}C$. Скажем, что вещественная кривая C *разбивающая* (или *типа I*), если $\mathbb{R}C$ разбивает C на две половины, переходящие друг в друга при комплексном сопряжении. Все рассматриваемые здесь кривые предполагаются гладкими и неприводимыми.

Достаточным условием для того, чтобы кривая C была разбивающей, является существование *разбивающего морфизма* $f : C \to \mathbb{P}^1$, т. е. такого морфизма, что $f^{-1}(\mathbb{RP}^1) = \mathbb{R}C$. Из результатов Альфорса [1] следует, что это условие также необходимо: любая разбивающая кривая обладает разбивающим морфизмом. Ограничение разбивающего морфизма на $\mathbb{R}C$ есть накрытие над $\mathbb{RP}^1$. Если фиксировать нумерацию компонент связности $A_1, \dots, A_n$ кривой $\mathbb{R}C$, то можно рассмотреть последовательность $d(f) = (d_1, \dots, d_n)$, где d_i — степень накрытия f, ограниченного на A_i.

Куммер и Шоу исследовали в [2] следующую задачу. Пусть C — разбивающая кривая. Какие последовательности реализуемы в виде $d(f)$ для разбивающих морфизмов $f : C \to \mathbb{P}^1$? Легко видеть, что все реализуемые последовательности образуют аддитивную полугруппу (см. [2, предложение 2.1]). Следуя [2], назовем ее *разбивающей полугруппой* кривой C и обозначим через $\mathrm{Sep}(C)$.

В [2] доказаны разные интересные свойства полугрупп $\mathrm{Sep}(C)$. В частности, там показано, что $\mathrm{Sep}(C) = \mathbb{N}^{g+1}$ для M-кривой C (кривая C рода g называется M-кривой, если $\mathbb{R}C$ имеет $g+1$ компонент связности, что есть максимально возможное

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 17-01-00592-а

число для кривых рода g). В [2] также показано, что разбивающая полугруппа иногда зависит от нумерации компонент. Простейший пример — гиперболическая кривая 4-й степени в $\mathbb{RP}^2$ (плоская кривая называется *гиперболической*, если линейная проекция из некоторой точки есть разбивающий морфизм). Пусть C такая кривая. Тогда $\mathbb{R}C$ состоит из двух овалов, один внутри другого. Если их занумеровать так, чтобы внутренний овал был первым, то $(1,2) \in \mathrm{Sep}(C)$, а $(2,1) \notin \mathrm{Sep}(C)$; см. [2, пример 3.7]. Более того, $\mathrm{Sep}(C)$ почти вычислена в [2], а именно, показано, что $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\geq 2} \subset \mathrm{Sep}(C)$. Мы завершаем это вычисление:

Теорема 1. *Пусть C — неособая вещественная гиперболическая кривая 4-й степени в $\mathbb{RP}^2$. Занумеруем ее овалы так, чтобы внутренний был первым. Тогда* $\mathrm{Sep}(C) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Доказательство основано на двух фактах: теорема 2 (см. чуть ниже) и теорема Натанзона [3, теорема 2.3], утверждающая, что два разветвленных накрытия над диском (право-лево) топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны над граничной окружностью.

Теорема 2. *Пусть C — разбивающая вещественная гиперэллиптическая кривая рода $g \geq 2$, не являющаяся M-кривой. Тогда*

$$\mathrm{Sep}(C) = \begin{cases} (1,1)\mathbb{N} \cup (\mathbb{N}_{\geq (g+1)/2})^2, & \text{\textit{если} } g \text{ \textit{нечетно},} \\ 2\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_{\geq g}, & \text{\textit{если} } g \text{ \textit{четно}.} \end{cases}$$

Заметим, что любая разбивающая кривая рода три — это либо M-кривая, либо гиперэллиптическая кривая, либо плоская гиперболическая квартика. Таким образом, результаты из работы [2], дополненные теоремами 1 и 2, дает разбивающие полугруппы всех разбивающих кривых до рода три включительно.

2. Двойственная система Вандермонда

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вещественные числа. Рассмотрим систему однородных линейных уравнений с неизвестными $h_1, \ldots, h_n$ (двойственную систему Вандермонда):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k h_i = 0, \qquad k = 0, \ldots, g-1. \tag{1}$$

Это условие на $(h_1, \ldots, h_n)$ можно эквивалентно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} h_i F(x_i) = 0 \qquad \text{для всех таких } F \in \mathbb{R}[x], \text{ что } \deg F < g.$$

Для вещественной последовательности $h = (h_1, \ldots, h_n)$, обозначим через $\mathrm{ch}(h)$ *число перемен знака* в h, т. е. число пар (i,j) таких, что $1 \leq i < j \leq n$, $h_i h_j < 0$, и $h_k = 0$ при $i < k < j$.

Предложение 2.1. *Пусть $x_1 < \dots < x_n$, $n > 0$. Последовательность $s = (s_1, \dots, s_n)$, где $s_i \in \{-1, 0, 1\}$, является последовательностью знаков некоторого решения системы (1) тогда и только тогда, когда $\operatorname{ch}(s) \ge g$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$). Предположим, что $h = (h_1, \dots, h_n)$ — решение системы (1) и $\operatorname{ch}(h) < g$. В этом случае можно выбрать многочлен F степени меньше g такой, что $F(x_i) \ne 0$ и $h_i F(x_i) \ge 0$ при всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $h_1 F(x_1) + \dots + h_n F(x_n) = 0$ и каждый член в этой сумме неотрицателен. Следовательно, $h = (0, \dots, 0)$.

($\Leftarrow$). Пусть $\operatorname{ch}(s) \ge g$. Пусть $I = \{i_0, \dots, i_g\} \subset \{1, \dots, n\}$ таково, что $\operatorname{ch}(s_{i_0}, \dots, s_{i_g}) = g$. Обозначим через $h'_I = (h'_{i_0}, \dots, h'_{i_g})$ некоторое ненулевое решение системы (1), в которой $\sum_{1 \le i \le n}$ заменена на $\sum_{i \in I}$. В силу части “($\Rightarrow$)” мы имеем $\operatorname{ch}(h'_I) = g$. Поэтому, меняя при необходимости знак h'_I, получаем $\operatorname{sign} h'_{i_j} = s_{i_j} \ne 0$ при всех $j = 0, \dots, g$.

Выберем $(h_i)_{i \notin I}$ так, что $\operatorname{sign} h_i = s_i$ и $|h_i| < \varepsilon \ll 1$. Положим $h_{i_0} = h'_{i_0}$. Поскольку определитель Вандермонда $g \times g$, соответствующий столбцам с номерами из $I \setminus \{i_0\}$, ненулевой, остальные числа $h_{i_1}, \dots, h_{i_g}$ однозначно находятся из (1). Более того, если ε достаточно мало, то $h_I = (h_i)_{i \in I}$ близко к h'_I, а значит $\operatorname{sign} h_i = \operatorname{sign} h'_i = s_i$ для всех $i \in I$. $\square$

Следствие 2.2. *Пусть $x_1, \dots, x_n$ — вещественные числа, необязательно все различные. Для $x \in \mathbb{R}$ положим $I(x) = \{i \mid x_i = x\}$. Пусть $(h_1, \dots, h_n)$ — вещественное решение системы (1) такое, что $h_i \ne 0$ при всех $i = 1, \dots, n$. Тогда хотя бы один из следующих случаев имеет место:*

- (i) *$\sum_{i \in I(x)} h_i = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, в частности, каждое x_i встречается по крайней мере дважды в последовательности $(x_1, \dots, x_n)$;*
- (ii) *последовательность $(h_1, \dots, h_n)$ содержит не менее $[(g+1)/2]$ положительных и не менее $[(g+1)/2]$ отрицательных членов.*

3. Разбивающая полугруппа гиперболических кривых

В этом разделе мы докажем теорему 2.

Лемма 3.1. *Пусть C — (комплексная) гиперэллиптическая кривая рода g, и f — мероморфная функция на C такая, что дивизор нулей $(f)_0$ специален (это так, например, при $\deg f < g$). Тогда $f = f_1 \circ \pi$, где $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ — гиперэллиптическая проекция и f_1 — мероморфная функция на $\mathbb{P}^1$.*

Доказательство. Если D и D' — два эффективных дивизора на кривой, то вложение ϕ_D, задаваемое полной линейной системой $|D|$ является композицией $\phi_{D+D'}$ с линейной проекцией. Пусть $D = (f)_0$ и пусть D' эффективный дивизор такой, что $D + D' \sim K_C$ (такой D' существует, так как D специален). Тогда ϕ_D — проекция канонического вложения, которое, как известно, раскладывается в композицию проекции на $\mathbb{P}^1$ и вложения. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть C — разбивающая вещественная алгебраическая кривая рода $g > 0$. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис голоморфных 1-форм на C.*

(a). Пусть $f : C \to \mathbb{P}^1$ — разбивающий морфизм, и пусть $\{p_1, \dots, p_n\} = f^{-1}(p)$ для некоторой точки $p \in \mathbb{RP}^1$. Тогда существуют вещественные положительные (относительно некоторой фиксированной комплексной ориентации) вещественные векторы $v_1, \dots, v_n$ (v_i касается в p_i) такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_k(v_i) = 0 \qquad \text{при всех } k = 1, \dots, g. \tag{2}$$

(b). Обратно, пусть $p_1, \dots, p_n$ — различные точки на $\mathbb{R}C$ и $v_1, \dots, v_n$ — положительные вещественные касательные векторы (v_i касается в p_i) такие, что выполнено условие (2). Предположим к тому же, что дивизор $D = p_1 + \dots + p_n$ не специален, т. е., $h^0(K_C - D) = 0$. Тогда существует разбивающий морфизм со слоем D.

Доказательство. (a). Следует из теоремы Абеля – Якоби.

(b). Следует из теоремы Абеля – Якоби и [2, лемма 2.10]. В самом деле, рассмотрим отображение Абеля – Якоби $\varphi : \mathrm{Sym}^n(C) \to \mathcal{J}(C)$. Условие (2) означает, что $v = (v_1, \dots, v_n)$ (как касательный вектор к $\mathrm{Sym}^n(C)$ в точке D) лежит в ядре дифференциала в D отображения φ. Неспециальность D означает, что φ является субмерсией возле D, следовательно, v касается $\varphi^{-1}(\varphi(D)) = |D|$ в D. Поэтому существует путь $[0, t_0] \to |D|$, $t \mapsto D_t$, такой, что $D_0 = D$ и $\left(\frac{d}{dt} D_t\right)_{t=0} = v$. Тогда для любого t, $0 < t \le t_0$, существует мероморфная функция $f_t : C \to \mathbb{P}^1$ такая, что $D = (f_t)_0$ и $D_t = (f_t)_\infty$. При достаточно малом t условие положительности векторов v_i влечет чередование нулей и полюсов функции f_t вдоль $\mathbb{R}C$, следовательно, f_t — разбивающий морфизм в силу [2, лемма 2.10]. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть C — разбивающая вещественная алгебраическая кривая рода $g \ge 2$, не являющаяся M-кривой. Тогда ее можно задать уравнением $y^2 = G(x)$, где $G(x)$ — вещественный многочлен степени $2g+2$, не имеющий кратных нулей, и всюду положительный на $\mathbb{R}$. Рассмотрим стандартный базис голоморфных 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_g$, где $\omega_k = x^{k-1} dx/y$. Гиперэллиптическая проекция имеет вид $(x, y) \mapsto x$. Ее ограничение на $\mathbb{R}C$ — неразветвленное двулистное накрытие над $\mathbb{RP}^1$, которое тривиально при четных g и нетривиально при нечетных g. Выберем комплексную ориентацию на $\mathbb{R}C$ такую, что $dx > 0$ на положительных касательных векторах.

Пусть $f : C \to \mathbb{P}^1$ — разбивающий морфизм, и пусть $\{p_1, \dots, p_n\} = f^{-1}(p)$ для некоторой фиксированной точки $p \in \mathbb{RP}^1$ в общем положении. Положим $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$. По лемме 3.2(a) существуют положительные касательные векторы $v_1, \dots, v_n$ такие, что (2) выполнено. Пусть $a_i = dx(v_i)$. Положительность v_i влечет $a_i > 0$. Поэтому (2) имеет вид (1) для $h_i = a_i/y_i$, и теорема 2 вытекает из следствия 2.2 и леммы 3.1.

4. Разбивающая полугруппа кривых рода три

В этом разделе мы докажем теорему 1. Пусть C — плоская гиперболическая квартика. Тогда $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{\ge 2} \subset \mathrm{Sep}(C)$ согласно [2, пример 3.7]. Докажем обратное включение.

Как показано в [2, пример 2.8], $(1,1) \notin \mathrm{Sep}(C)$. Предположим, что существует разбивающий морфизм $f_0 : C \to \mathbb{P}^1$ с $d(f_0) = (n,1)$, $n \geq 2$. Пусть C^+ — одна из половинок, на которые $\mathbb{R}C$ делит C. Тогда ограничение f_0 на C^+ есть разветвленное накрытие над диском Δ – одной из компонент $\mathbb{CP}^1 \setminus \mathbb{RP}^1$. Возмущая f_0 (вместе с C), можно считать, что все критические значения просты, т. е. $f^{-1}(p)$ содержит не менее n точек для всех $p \in \Delta$.

Пусть $f_1 : C \to \mathbb{P}^1$ — разбивающий морфизм с $d(f_1) = (1,n)$, существующий согласно [2, пример 3.7]. Его можно выбрать так, чтобы все критические значения были простыми. Тогда по теореме Натанзона, [3, теорема 2.3], существует непрерывное семейство разветвленных накрытий $f_t : C^+ \to \Delta$, $0 \leq t \leq 1$, соединяющее f_0 с f_1. Обозначим через C_t^+ поверхность C^+, снабженную комплексной структурой, поднятой с Δ посредством f_t, и пусть C_t — результат склейки C_t^+ со своей комплексно сопряженной копией вдоль границы. Тогда f_t продолжается до разбивающего морфизма $C_t \to \mathbb{P}^1$, который мы тоже обозначим через f_t. Итак, мы получаем непрерывное семейство разбивающих морфизмов f_t кривых рода три C_t.

По непрерывности мы имеем $d(f_t) = (1,n)$ при надлежащей нумерации компонент $\mathbb{R}C_t$. Поэтому, по теореме 2, кривая C_t не гиперэллиптична при всех t. Известно, что любая негиперэллиптическая кривая рода 3 изоморфна гладкой квартике в $\mathbb{P}^2$, тем самым существует непрерывное семейство вложений $\iota_t : C_t \to \mathbb{P}^2$ такое, что $\iota_t(C_t)$ — гладкая плоская квартика, а также непрерывное семейство разбивающих морфизмов этих квартик на $\mathbb{P}^1$. Внутренний и внешний овалы при этой деформации не могут поменяться местами, что противоречит тому, что $d(f_0) \neq d(f_1)$ и вложение в $\mathbb{P}^2$ единственно с точностью до проективной эквивалентности.

Цитированная литература

1. L. L. Ahlfors, *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions*, Comment. Math. Helv. **24** (1950), 100–134.
2. M. Kummer, K. Shaw, *The separating semigroup of a real curve*, Annales de la fac. des sciences de Toulouse. Mathématiques (6); (to appear), arxiv:1707.08227.
3. С. М. Натанзон, *Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу **23** (1988), 79–103; англ. перевод:, Selecta. Math. Soviet. **12** (1993), no. 3, 251–291.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

IMT, l'université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, Toulouse, France
E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr