О ЖЕСТКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ КАСПИДАЛЬНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

М. Г. Зайденберг, С. Ю. Оревков

Пусть Y – гладкая аффинная алгебраическая поверхность над $\mathbb{C}$. Предположим, что она $\mathbb{Q}$-ациклична, т.е. $H_i(Y;\mathbb{Q}) = 0$, $i > 0$, и что она log-общего типа, т.е. $\bar{k}(Y) = 2$, где $\bar{k}$ – логарифмическая размерность Кодаиры (см. [4], [5], [7]). В [2] поставлен вопрос, является ли такая поверхность жесткой. Жесткость означает, что $h^1(\Theta) = 0$, где X – минимальное гладкое пополнение поверхности Y дивизором D с простыми нормальными пересечениями (SNC-дивизор), а $\Theta = \Theta_X\langle D\rangle$ – логарифмическое касательное расслоение на X вдоль D. При $\bar{k} = 2$ все известные $\mathbb{Q}$-ацикличные поверхности жестки. Для $\chi = h^0 - h^1 + h^2$ имеет место $\chi(\Theta) = (K_X + D)^2 + 2$ (см. [2, лемма 1.3(5)]).

1. Формулировка результата. Рассмотрим плоскую неприводимую кривую D. Легко видеть, что $Y = \mathbb{P}^2 \setminus D$ является $\mathbb{Q}$-ациклической, если и только если D рациональна и каспидальна (мы называем кривую *каспидальной*, если все ее особенности суть *каспы*, т.е. аналитически неприводимы). Если D имеет как минимум три каспа, то $\bar{k}(Y) = 2$ (см. [9]). Жесткость Y эквивалентна проективной жесткости D: любая эквисингулярная вложенная деформация проективно эквивалентна D [3, (2.1)]. Жесткость имеет место во всех известных примерах [3]. Настоящая заметка посвящена доказательству следующего факта.

Предложение (1.1). (см. [8]). *Проективно жесткая рациональная каспидальная кривая в $\mathbb{P}^2$ имеет не более 9 каспов.*

2. Логарифмическое неравенство Богомолова–Мияоки–Яо (log-БМЯ). Пусть D – некоторая SNC-кривая на гладкой проективной поверхности X, и $Y = X \setminus D$. При $\bar{k}(Y) \geq 0$ существует *разложение Зарисского* $K + D = H + N$, где H, N – $\mathbb{Q}$-дивизоры на X такие, что (i) форма пересечения отрицательно определена на подпространстве V_N, порожденном неприводимыми компонентами N (в частности, $N^2 \leq 0$); (ii) $HC \geq 0$ для каждой неприводимой кривой $C \subset X$; (iii) H ортогонален к V_N (значит, $(K+D)^2 = H^2 + N^2$).

Теорема (2.1). [7], [5]. *Если $\bar{k}(Y) = 2$, то $H^2 \leq 3e(Y)$, где e – эйлерова характеристика.*

3. Двойственный граф. Пусть E – SNC-кривая на гладкой поверхности с неприводимыми компонентами $E_1, \dots, E_k$. Пусть $A_E = (E_i \cdot E_j)_{ij}$ – ее матрица пересечений. Это то же самое, что матрица инцидентности *двойственного графа* Γ_E кривой E. Его вершины отвечают неприводимым компонентам E, а ребра – их точкам пересечения; вес вершины определен как индекс самопересечения соответствующей компоненты. Положим $d(\Gamma_E) = \det(-A_E)$. Экстремальную линейную ветвь графа назовем *твигом.* Крайнюю вершину твига T обозначим через $\operatorname{tip}(T)$. *Индуктивностью* твига T определим как $\operatorname{ind}(T) = d(T - \operatorname{tip}(T))/d(T)$. Применяя правило Крамера, получаем следующую лемму.

Лемма (3.1). *Если Γ – взвешенное дерево с $d(\Gamma) \neq 0$, и $B = (b_{ij}) = A^{-1}$, где A – матрица инцидентности, то $b_{ij} = -d(\Gamma - [ij])/d(\Gamma)$, где $[ij]$ – минимальный подграф, содержащий i-ю и j-ю вершины.*

Комбинируя (3.1) с формулой Якоби для минора обратной матрицы, примененной к 2×2-минору, отвечающему вершинам v и v_0, получаем еще одну лемму.

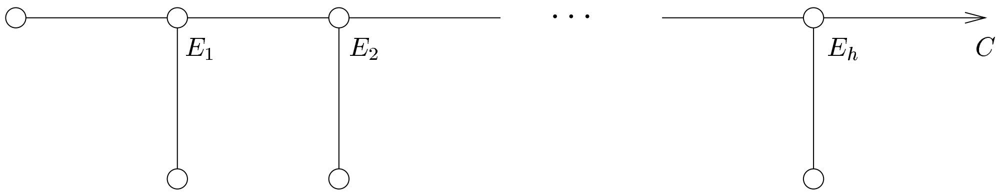
Лемма (3.2). *Пусть Γ – взвешенное дерево, T – его твиг, инцидентный вершине $v_0 \in \Gamma - T$, и $v = \operatorname{tip}(T)$. Положим $d_T(\Gamma) = d(\Gamma - T - v_0)$. Тогда $d_T(\Gamma) = d(\Gamma - v)d(T) - d(\Gamma)d(T - v)$.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Следствие (3.3). *Если* $d(\Gamma) = 1$ *и* $d(T) \neq 0$, *то* $\mathrm{ind}(T) =]d_T(\Gamma)/d(T)[$. *(Здесь* $]a[$ *означает* $[a] - a$, *где* $[a] := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$.*)*

4. Разложение Пюизо и двойственный граф разрешения. Пусть C – росток плоской неприводимой аналитической кривой в особой точке p, и пусть $E = \bigcup E_i$ – исключительная кривая минимального разрешения особенности, а Γ – двойственный граф кривой $E \cup C$. В подходящих аналитических координатах C имеет вид $x = t^n$, $y = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots$. Положим $d_1 = n$, $m_i = \min\{j \mid a_j \neq 0 \text{ и } j \neq 0 (\mod d_i)\}$, $d_{i+1} = \gcd(d_i, m_i)$. Пусть h таково, что $d_h \neq 1$, $d_{h+1} = 1$. Положим $r_1 = m_1$; $r_i = r_{i-1} d_{i-1}/d_i + m_i - m_{i-1}$ при $i > 1$.

Предложение (4.1). [1] (а). *Граф* Γ *имеет вид*



где в виде ребер изображены линейные цепочки вершин.

(б) Пусть R_i, D_i *и* S_i *– компоненты связности графа* $\Gamma - E_i$, *расположенные соответственно слева, снизу и справа от вершины* E_i. *Тогда* $d(R_i) = r_i/d_{i+1}$, $d(D_i) = d_i/d_{i+1}$, $d(S_i) = 1$.

Обозначим через n_p сумму индуктивностей всех твигов графа Γ, не содержащих C.

Следствие (4.2). $n_p =]d_1/r_1[+ \sum_{i=1}^{h}]r_i/d_i[> 1/2$.

Доказательство. Поскольку $d(\Gamma) = 1$, требуемое равенство вытекает из (3.3). Поэтому $n_p \geq]d_1/r_1[+]r_1/d_1[$. Очевидно, что если $0 < x < 1$, $x \neq 1/2$, то $]x[+]1/x[> 1/2$.

5. Пусть D – рациональная каспидальная кривая в $\mathbb{P}^2$, и $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ – минимальное разрешение особенностей D, т.е. $\tilde{D} = \sigma^{-1}(D)$ – SNC-дивизор, и $X \setminus \tilde{D} = Y$. Пусть $K + \tilde{D} = H + N$ – разложение Зарисского. Обозначим: $S = \mathrm{Sing}(D)$, $s = \#S$.

Лемма (5.1). *Если* $s \geq 3$, *то* $-N^2 = \sum_{p \in S} n_p$.

Доказательство. Поверхность Y $\mathbb{Q}$-ациклична, и при этом в силу [9] мы имеем $\bar{k}(Y) = 2$. Поэтому Y не содержит односвязных кривых [10], [6]. Поскольку $s \geq 3$, граф $\Gamma_{\tilde{D}}$ имеет не менее трех точек ветвления. При этих условиях утверждение леммы доказано в [4, (6.20)–(6.24)].

Доказательство (1.1). Поскольку $\bar{k}(Y) = 2$ (см. [9]), то согласно неравенству log-БМЯ (2.1), имеем $H^2 \leq 3$, а значит, по (5.1) и (4.2), $(K + \tilde{D})^2 = H^2 - \sum n_p < 3 - s/2$. Пусть $h^i = h^i(\Theta_X\langle\tilde{D}\rangle)$. Так как D предполагается жесткой, т.е. $h^1 = 0$, имеем $(K+\tilde{D})^2 + 2 = \chi(\Theta_X\langle\tilde{D}\rangle) = h^0 + h^2 \geq 0$. Значит, $s < 6 - 2(K + \tilde{D})^2 \leq 10$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] *Eisenbud D., Neumann W.D.* // Ann. Math. Stud. V. 110. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985. [**2**] *Flenner H., Zaidenberg M.* // Contemporary Math. 1994. V. 162. P. 143–208. [**3**] *Flenner H., Zaidenberg M.* // On a class of rational cuspidal plane curves // Preprint, 1995. P. 1–28. [**4**] *Fujita T.* // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (Ser. 1A). 1982. V. 29. P. 505–566. [**5**] *Kobayashi R., Nakamura S., Sakai F.* // Proc. Japan Acad. 1989. V. 65(A). P. 238–241. [**6**] *Miyanishi M., Tsunoda S.* // J. Math. Kyoto Univ. 1992. V. 32. P. 443–450. [**7**] *Miyaoka Y.* // Math. Ann. 1984. V. 268. P. 159–171. [**8**] *Orevkov S.Yu., Zaidenberg M.G.* // Algebraic Geometry. Proc. Conf., Santama Univ., March 15–17, 1995 (to appear). [**9**] *Wakabayashi I.* // Proc. Japan Acad. 1978. V. 54(A). P. 157–162. [**10**] *Зайденберг М.Г.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. С. 534–567; 1991. Т. 55. С. 444-446.

Университет Гренобль I
НИИ Системных Исследований РАН, Москва