СИЛЬНАЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ В ПРАВО-ИНВАРИАНТНОМ ПОРЯДКЕ НА ГРУППЕ КОС И КВАЗИПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ

С.Ю. Оревков

Пусть B_n — группа кос из n нитей:

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ при } |i-j|>1,\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j \text{ при } |i-j|=1\rangle.$$

Деорнуа [1–3] доказал, что существует полный право-инвариантный порядок на элементах группы B_n (право-инвариантный значит $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$, $\forall \alpha,\beta,\gamma$), однозначно определяемый условием

$$\beta_0\sigma_i\beta_1 > 1 \qquad \text{если } \beta_0,\ \beta_1 \text{ — слова, составленные из } \sigma_{i+1}^{\pm1},\dots,\sigma_{n-1}^{\pm1}.$$

Он дал также эффективный на практике алгоритм, определяющий, является ли данная коса положительной, тривиальной или отрицательной (коса β называется *положительной* если $\beta > 1$). Недавно авторы статьи [4] дали красивую геометрическую интерпретацию право-инвариантного порядка (см. §2 ниже) и другие алгоритмы сравнения кос, про один из которых доказана квадратичность по времени.

Будем говорить, что коса $\beta \in B_n$ *сильно положительна*, если $\alpha\beta\alpha^{-1} > 1$ для любого $\alpha \in B_n$. Ясно, что сильно положительные косы образуют полугруппу, инвариантную относительно сопряжения. Коса $\beta = \sigma_1^2\sigma_2^{-2}$ является примером положительной, но не сильно положительной косы, потому что $\alpha\beta\alpha^{-1} < 1$ для $\alpha = \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2$ (см. [4]). В настоящей заметке мы обсуждаем некоторые классы сильно положительных кос.

Теорема A. (Баркел [5], Лавер [6]). *Образующие σ_k сильно положительны.*

Доказательства, приведенные в [5], [6], — алгебраические. Недавно Вист [7] дал геометрическое доказательство, основанное на идеях и результатах статьи [4]. В §3 мы даем еще одно доказательство. В нем мы получаем теорему A как непосредственное следствие из основного результата работы [4].

Коса $\beta \in B_n$ называется *квазиположительной* если $\beta = (\gamma_1\sigma_1\gamma_1^{-1})\cdot\ldots\cdot(\gamma_s\sigma_1\gamma_s^{-1})$ при некоторых $\gamma_1,\dots,\gamma_s \in B_n$. Это понятие было введено Рудольфом [8, 9]; он показал, что коса квазаположительна тогда и только тогда, когда она является граничной косой алгебраической функции $w(z)$, неявно заданной в диске уравнением $w^n + a_1(z)w^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0$, $a_i \in \mathbf{C}[z]$. Вопрос о

Автор благодарит ин-т им. Макса Планка за финансовую поддержку и гостеприимство

квазиположительности косы естественно возникает в топологии плоских вещественных алгебраических кривых [10]. Алгоритм распознавания квазиположительных кос известен лишь при $n=3$. Некоторые необходимые условия для квазиположительности имеются в [9], [10]. Теорема А дает еще одно необходимое условие для квазиположительности косы, поскольку она, очевидно, эквивалентна утверждению о том, что *квазиположительная коса положительна в право-инвариантном порядке.*

Обозначим через Q_n (соотв., P_n) множество квазиположительных (соотв., сильно положительных) кос в B_n. В этих обозначениях теорему А можно переформулировать как $Q_n \subset P_n$. Обозначим:

$$\pi_n := (\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1})\cdot(\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_1) \in B_n.$$

Теорема B. *Если β_0 — слово, составленное из $\sigma_2^{\pm1},\dots,\sigma_{n-1}^{\pm1}$, то коса $\beta = \beta_0\pi_n$ сильно положительна.*

Это показывает, что $P_n \neq Q_n$. Действительно, для косы $\beta = \prod_j \sigma_{i_j}^{k_j}$ обозначим $e(\beta)=\sum_j k_j$. Тогда теорема B влечет

Следствие. *Если β_0 –слово, составленное из $\sigma_2^{\pm1},\dots,\sigma_{n-1}^{\pm1}$, и $e(\beta_0) < 2-2n$ (например, $\beta_0 = \sigma_2^{-2n}$), то $\beta_0\pi_n \in P_n \setminus Q_n$.*

Пусть $\beta \in B_n$ — коса и L — соответствующее зацепление (замыкание косы β). Пусть $L_1,\dots,L_k$ — компоненты L. Пусть $n_1,\dots,n_k$ — любые положительные целые числа и $\beta_1,\dots,\beta_k$ — любые косы, $\beta_j \in B_{n_j}$. Тогда $(\beta_1,\dots,\beta_k)$-*обмотка* косы β определяется как коса, для которой соответствующее зацепление получено из L заменой каждого L_j на зацепление в трубчатой окрестности зацепления L_j, задаваемое косой β_j. Например, коса β из теоремы B есть $(\beta_0,1)$-обмотка косы $\sigma_1^2 \in B_2$. Будем говорить, что коса i-положительна, если она является произведением кос вида $\beta_0\sigma_i\beta_1$, где β_0, β_1 –слова, составленные из $\sigma_{i+1}^{\pm1},\dots,\sigma_{n-1}^{\pm1}$. Тогда представляется правдоподобным, что теорема B есть частный случай следующего более общего факта.

Гипотеза. *Если любая коса, сопряженная косе β, 1-положительна, и β' — обмотка косы β, то любая коса, сопряженная косе β', 1-положительна.*

§1. Доказательство теоремы B

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — замкнутый единичный диск и $X_n = \{x_0,\dots,x_{n+1}\}$, где $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$ — вещественные в D. *Геометрическая коса* — это набор из n гладких непересекающихся кривых (называемых *нитями*) в цилиндре $D\times[0,1]$, таких, что проекция каждой нити на $[0,1]$ есть диффеоморфизм, и множество концов всех нитей совпадает с $X_n\times\{0,1\}$. Косой называется класс эквивалентности геометрических кос относительно изотопий цилиндра $D\times[0,1]$, неподвижных на $D\times\{0,1\}$.

Пусть p — проекция $(z,t)\mapsto(\operatorname{Re} z, t)$. Геометрическая коса находится *в общем положении*, если проекции нитей трансверсальны между собой и t-координаты их пересечений различны. Стандартная образующая $\sigma_i \in B_n$ и обратный к ней элемент изображены на рис. 1. Рисунок для $\alpha\cdot\beta$, где $\alpha,\beta \in B_n$, получается, если рисунок косы β приставить сверху к рисунку косы α. Таким образом, геометрическая коса B в общем положении определяет слово из стандартных образующих $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, в котором каждая буква отвечает двойной точке множества $p(B)$.

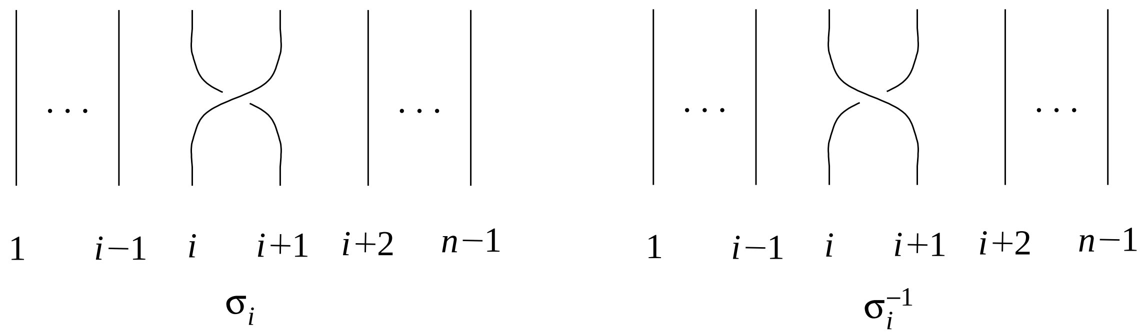


Рис. 1

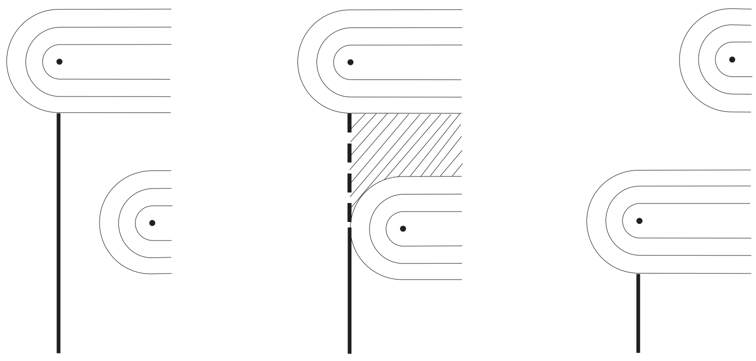
Пусть β_0, β — косы из теоремы В. Тогда геометрическая коса B, представляющая косу β, обладает следующим свойством. Существует гладкая поверхность $C \subset (D \times [0,1]) \setminus B$, расслоенная на гладкие окружности $C_t \subset \operatorname{Int} D \times \{t\}$, $t \in [0,1]$, такая, что точки $x_2, \dots, x_n$ лежат внутри C_0, точка x_1 лежит вне C_0, и окружность C_0 отображается на C_1 при диффеоморфизме $D \times \{0\} \to D \times \{1\}$, $(z,0) \mapsto (z,1)$.

Обозначим через T полноторие, полученное из $D \times [0,1]$ отождествлением $D \times \{0\}$ и $D \times \{1\}$. Мы будем одинаково обозначать подмножества в $D \times [0,1]$ и их образы в T. Пусть S — компонента геометрической косы B, соответствующая первой нити, т.е. компонента, проходящая через точку $(x_1, 0)$. Тогда образ поверхности C в T есть замкнутая поверхность гомеоморфная тору, охватывающая $B \setminus S$, причем S имеет индекс зацепления $+1$ с тором C в следующем смысле. Пусть $A \subset T$ — кольцо, такое, что одна компонента края ∂A изотопна на ∂T отрезку $y \times [0,1]$, $y \in \partial D$, а другая компонента края ∂A лежит на C. Тогда индекс зацепления S и C определяется как индекс пересечения S и A (здесь и далее мы оставляем читателю заботиться об ориентациях).

Пусть α — любая коса, и положим $\beta' = \alpha\beta\alpha^{-1}$. Нам надо доказать, что $\beta' > 1$ в право-инвариантном порядке. Согласно результатам Деорнуа [1–3], каноническая форма любой неположительной косы — это слово из $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$, не содержащее σ_1^{+1}. Таким образом, чтобы доказать, что $\beta' > 1$, достаточно убедиться в том, что каждое слово, представляющее γ, содержит σ_1^{+1}. Рассмотрим произвольное слово w, представляющее β', и пусть B' — соответствующая геометрическая коса в общем положении. B' получена из B изотопией полнотория T, так как β' и β сопряжены. Обозначим через C' и S' образы C и S при этой изотопии. Индекс зацепления не меняется при изотопиях, поэтому, Индекс зацепления S' и C' в вышеуказанном смысле равен $+1$.

Будем предполагать, что поверхность C' минимальна: мы представляем себе это так, что B' сделано из жесткой проволоки, а C' — резиновая пленка, отделяющая S' от $B' \setminus S'$. Более формально, это означает следующее. При $t \in [0,1]$ обозначим через D_t диск $D \times \{t\}$ и пусть B'_t, (соотв. S'_t, C'_t) — пересечение B' (соотв. S', C') с D_t. После того, как геометрическая коса B' зафиксирована, мы выберем $\varepsilon > 0$. Если ε достаточно мало, то при любом $t \in [0,1]$ можно предполагать, что C'_t является C^1-гладкой окружностью в D_t, удовлетворяющей тому условию, что $(C'_t \cup B'_t) \cap U_\varepsilon(z)$ является связным пожмножеством кривой C'_t при всех $z \in C'_t$, где $U_\varepsilon(z)$ обозначает открытый диск радиуса ε с центром z. Мы можем также предполагать, что C'_t при всех t имеет минимальную длину среди всех замкнутых кривых своего гомотопического класса, удовлетворяющих этому условию. Тогда каждая кривая C'_t есть объединение отрезков прямых и дуг окружностей радиусов ε, $2\varepsilon, \dots$ с центрами в точках множества B'_t.

При каждом $t \in [0,1]$ положим $x_t = \min\{\operatorname{Re} z \mid (z,t) \in B'_t \setminus S'_t\}$, $L_t = \{(z,t) \in D_t \mid \operatorname{Re} z = x_t\}$ и обозначим через A_t нижнюю компоненту связности множества $L_t \setminus (C'_t \cap L_t)$. Пусть A° — замыкание множества $\bigcup_{t\in[0,1]} A_t$. Тогда $p|_{A^\circ}$ является локально-тривиальным расслоением всюду кроме конечного множества точек $t_1, \dots, t_k$, каждая из которых расположена вблизи от двойной точки проекции $p(B' \setminus S')$, отвечающей вхождению $\sigma_1^{\pm 1}$ в слово w. Поведение слоев проекции $p|_{A^\circ}$ возле точки t_j, $j = 1, \dots, k$ изображено на рис. 2, где $\delta > 0$ (соотв., $\delta < 0$) отвечает вхождению σ_1^{+1} (соотв., σ_1^{-1}).



$A_{t_j-\delta}$ A_{t_j} $A_{t_j+\delta}$

Рис. 2

Обозначим через a_j отрезок $(A^\circ \cap D_{t_j}) \setminus A_{t_j}$ (изображенный пунктиром на рис. 2). Обозначим через A^*_j ту компоненту множества $D_{t_j} \setminus (C'_{t_j} \cup a_j)$, которая расположена справа от a_j (заштрихована на рис. 2), и пусть $A = A^\circ \cup A^*$ где $A^* = A^*_1 \cup \dots \cup A^*_k$.

Вычислим индекс зацепления S' и C'. Он равен индексу пересечения S' и A. Мы имеем $S' \cap A = (S' \cap A^\circ) \cup (S' \cap A^*)$. Точки из $S' \cap A^\circ$ отвечают тем вхождениям σ_1^s, $s = \pm 1$ в слово w, для которых соответствующая двойная точка проекции $p(B')$ является точкой пересечения кривых $p(S')$ и $p(B' \setminus S')$. Точки из $S' \cap A^*$ отвечают тем вхождениям σ_1^s, $s = \pm 1$ в слово w, которые соответствуют двойным точкам проекции $p(B' \setminus S')$ (заметим, что каждое A^*_j должно содержать точку из $S' \cap D_{t_j}$, потому что C' минимальна). В обоих случаях вклад точки пересечения в индекс зацепления равен s. Поскольку индекс зацепления равен $+1$, мы видим, что любое слово, представляющее β', должно включать в себя σ_1^{+1}. Теорема B доказана.

§1. Геометрическая интерпретация право-инвариантного порядка

Все отображения, рассматриваемые ниже, будут кусочно гладкими. Пусть D и $X_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ — обозначает то же, что и в §1. Группу кос B_n можно естественно отождествить с группой классов отображений пары (D, X_n), которая по определению есть группа гомеоморфизмов $(D, X_n) \to (D, X_n)$, тождественных на ∂D с точностью до гомеоморфизмов, изотопных тождественному отображению. Класс $[\gamma] \in B_n$ гомеоморфизма γ однозначно определен кривой $\Gamma := \gamma([-1, 1])$. Следуя [4], назовем Γ *криволинейной диаграммой* (curve diagram) косы $[\gamma]$. Криволинейная диаграмма косы σ_i имеет вид $[-1, x_{i-1}] \cup \Gamma_+ \cup [x_i, x_{i+1}] \cup \Gamma_- \cup [x_{i+2}, 1]$, где Γ_+ — путь из x_{i-1} в x_{i+1} по верхнему полудиску, и Γ_- — путь из x_i в x_{i+2} по нижнему полудиску. Соглашение о порядке умножения проиллюстрировано на рис. 3 (мы воспроизводим его из [4]).

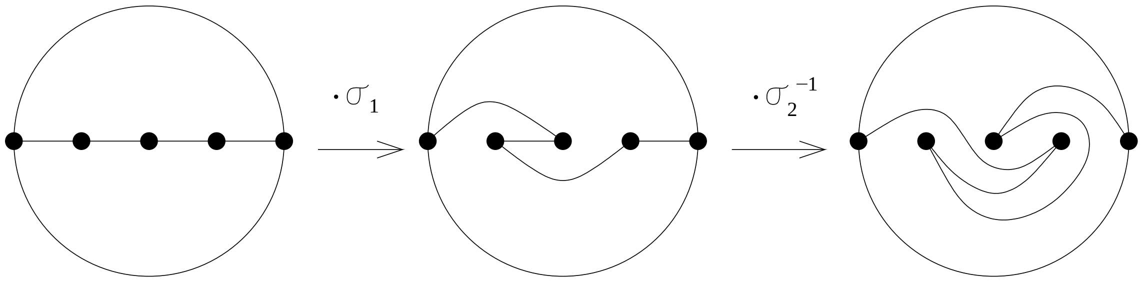


Рис. 3: Криволинейные диаграммы кос 1, σ_1 и $\sigma_1\sigma_2^{-1}$

Пусть $\Gamma = \gamma([-1, 1])$ — криволинейная диаграмма. Обозначим $\gamma([x_i, x_{i+1}])$ через Γ_i. Будем говорить, что криволинейная диаграмма Δ *трансверсальна* к Γ, если для каждой Γ_i либо $\Gamma_i \subset \Delta$, либо Γ_i трансверсальна к Δ.

Пусть Δ трансверсальна к Γ. Компонента множества $D \setminus (\Gamma \cup \Delta)$ называется *двуугольником между* Γ *и* Δ, если она гомеоморфна открытому диску и ограничена одним открытым отрезком кривой $\Gamma \setminus X_n$, одним открытым отрезком кривой $\Delta \setminus X_n$ и двумя точками. Будем говорить, что пара (Γ, Δ) *редуцирована*, если нет двуугольников между Γ и Δ.

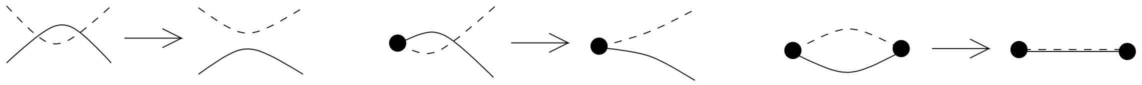


Рис. 4

Любую пару криволинейных диаграмм (Γ, Δ) можно редуцировать за конечное число элементарных преобразований, изображенных на рис.4, где Γ изображена сплошной линией, а Δ — пунктирной. Каждое элементарное преобразование уменьшает на 1 число двуугольников.

Право-инвариантный порядок на группе кос можно описать в терминах криволинейных диаграмм следующим образом (см. [4]). Пусть косы γ, δ заданы трансверсальными друг другу криволинейными диаграммами Γ, Δ. Предположим, что (Γ, Δ) редуцирована. Множество $D \setminus \Gamma$ состоит из двух компонент.

Та компонента, которая содержит $\sqrt{-1}$ называется *верхней*. Предположим, что Γ и Δ совпадают на дуге, идущей из -1 в x_i (возможно, $i=0$) и не совпадают после x_i. Пусть a — компонента множества $\Delta\setminus(\Delta\cap\Gamma)$, начинающаяся в x_i. Тогда $\delta>\gamma$ если и только если a лежит в верхней части $D\setminus\Gamma$. Это значит, что двигаясь вдоль Δ из -1 в 1, мы идем вдоль Γ до точки x_i, а затем сварачиваем влево.

§2. Доказательство теоремы А

Поскольку все образующие сопряжены между собой, достаточно доказать, что $\gamma\sigma_1\gamma^{-1}>1$ для всех $\gamma\in B_n$. В силу право-инвариантности, это равносильно тому, что $\gamma\sigma_1>\gamma$.

Пусть γ — произвольная коса из B_n. Нам надо доказать, что $\delta>\gamma$, где $\delta=\gamma\sigma_1$. Пусть Γ — криволинейная диаграмма косы γ. Пусть $I=[-1,1]$, это — криволинейная диаграмма единичной косы. Предположим, что Γ трансверсальна к I, и пара (Γ,I) редуцирована. Обозначим ε-окрестность отрезка $[x_1,x_2]$ через D_ε. Поскольку (Γ,I) редуцирована, при достаточно малом ε пара $(D_\varepsilon,D_\varepsilon\cap\Gamma)$ изотопна одной из нарисованных на рис. 5, и выполнено следующее условие:

(*) Если две точки из $\Gamma\cap\partial D_\varepsilon$ соседние в смысле циклического порядка вдоль окружности ∂D_ε, то их нельзя соединить дугой из $\Gamma\setminus D_\varepsilon$, не содержащей точек из X_n.

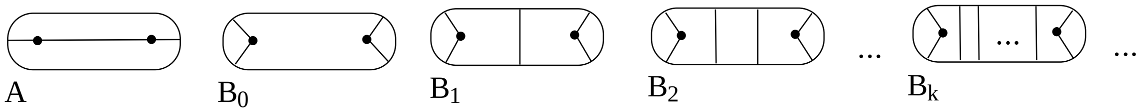


Рис .5

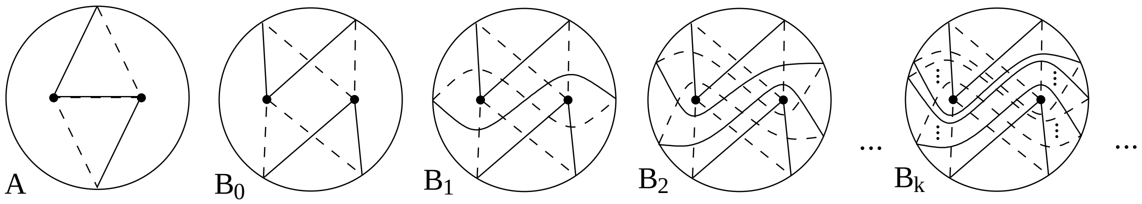


Рис. 6

Кривые $D_\varepsilon\cap\Gamma$ на рис. 5 можно продеформировать в кривые, изображенные слошной линией на рис. 6. Криволинейная диаграмма Δ_ε косы $\delta:=\gamma\sigma_1$ получается из Γ заменой фрагмента $D_\varepsilon\cap\Gamma$ на кривые, изображенные на рис. 6 пунктиром. Диаграмма Δ_ε еще не трансверсальна к Γ. Пусть Δ получена из Δ_ε применением преобразования, показанного на рис. 7, в каждой из тех компонент множества $\Gamma\setminus(D_\varepsilon\cup X_n)$, у которых один из концов лежит на ∂D_ε. Диаграмма Δ уже трансверсальна к Γ.

Если имеет место случай, показанный на рис. 5.A, то (Γ,Δ) редуцирована, и требуемое неравенство $\delta>\gamma$ непосредственно вытекает из результата [4],

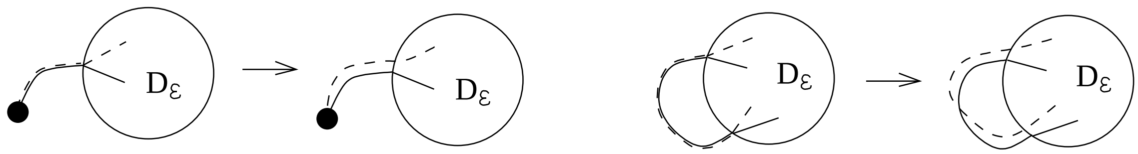


Рис. 7

сформулированного в §1. Поэтому мы будем предполагать, что имеет место один из случаев $5.B_k$.

$\Gamma \cup \Delta$ разбивает D_ε на несколько криволинейных многоугольников. Среди них $2k+2$ треугольников и $2k+2$ пятиугольников (четырехугольников при $k=0$) примыкают к окружности ∂D_ε. Обозначим их соответственно через T_i, P_i, $i = 1, \dots, 2k+2$. Скажем, что треугольник T_i *плохой*, если он получился из треугольника на рис. 6 у которого стороны, лежащие на ∂D_ε, соединены вне D_ε дугой диаграммы Γ. По (*), эта дуга должна содержать точку из X_n. Присоединяя область, ограниченную этой дугой, к плохому треугольнику, мы получаем двуугольник между Γ и Δ, причем все двуугольники между Γ и Δ получаются таким способом.

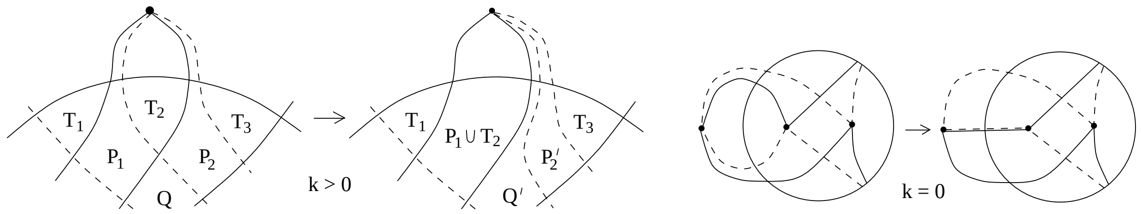


Рис. 8

Пусть Δ' получена из Δ применением преобразования, показанного на рис. 8, к каждому плохому треугольнику. Поскольку плохое треугольники не могут быть соседними, эти преобразования независимы. Покажем, что (Γ, Δ') редуцирована. Действительно, при $k = 0$ это очевидно (см. рис. 8). При $k > 0$ появляется только три новых многоугольника: Q', P_2', и $P_1 \cup T_2$ (см. рис. 8). Ни один из них не может содержаться в двуугольнике между Γ и Δ'.

Мы видим на рис. 8, что Δ' была получена из Δ изменением только тех отрезков Δ, у которых оба конца лежат в D_ε. Однако, точка x_i, в которой Δ' впервые расходится с Γ, лежит на отрезке, начинающемся в x_0 и не входящем в D_ε. Следовательно, Δ' совпадает с Δ возле x_i. Но возле x_i кривая Δ расположена относительно Γ как на рис. 7. Значит, $\delta > \gamma$ согласно §1. Теорема A доказана.

Список литературы

1. P. Dehornoy, *Braid groups and left distributive operations*, Trans. AMS **343** (1994), 115–150.
2. P. Dehornoy, *From large cardinals to braids via distributive algebra*, J. Knot Theory and its Ramifications **4** (1995), 33–79.
3. P. Dehornoy, *A fast method of comparing braids*, Adv. in Math. **125** (1997), 200–235.
4. R. Fenn, M.T. Greene, D. Rolfsen, C. Rourke, B. Wiest, *Ordering the braid group*, Preprint.
5. S. Burckel, *The wellordering on positive braids*, J. Pure Appl. Algebra **120** (1997), 1–17.

6. R. Laver, *Braid group actions on left distributive structures and well-orderings in the braid groups*, J. Pure Appl. Algebra **108** (1996), 81–98.
7. B. Wiest, *Dehornoy's ordering of the braid groups extends the subword ordering*, Pacific J. Math. (to appear); http://protis.univ-mrs.fr/~bertw.
8. L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), 191–202.
9. L. Rudolph, *Some knot theory of complex plane curves*, Noeuds, Tresses et Singularités, Mono. No. 31, L'Ens. Math., 1983, pp. 99–122.
10. S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology (to appear).

Математический ин-т им. В.А.Стеклова РАН
E-mail address: orevkov@mi.ras.ru