Математика

*Представлено академиком В. А. Васильевым*

УДК 515.162.8

# О ДЕЙСТВИИ ГУРВИЦА НА КВАЗИПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ КОС ИЗ ТРЕХ НИТЕЙ

С. Ю. Оревков

Обозначим через $\mathbf{B}_3$ группу кос из трех нитей: $\mathbf{B}_3 = \langle\sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\rangle$. *Квазиположительным разложением* косы $X \in \mathbf{B}_3$ назовем набор кос $(X_1, \dots, X_k) \in \mathbf{B}_3^k$ такой что $X_1 \dots X_k = X$, и каждая из кос $X_i$ сопряжена в $\mathbf{B}_3$ стандартной образующей $\sigma_1$ (заметим, что $\sigma_1$ и $\sigma_2$ сопряжены в $\mathbf{B}_3$). Коса $X$ называется *квазиположительной*, если она допускает хотя бы одно квазиположительное разложение.

Пусть $G$ – некоторая группа. Зададим отображения $\Sigma_i : G^k \to G^k$, $1 \le i < k$, как $\Sigma_i(X_1, \dots, X_k) = (Y_1, \dots, Y_k)$, где $(Y_i, Y_{i+1}) = (X_i X_{i+1} X_i^{-1}, X_i)$ и $Y_j = X_j$ при $j \notin \{i, i+1\}$. Эти отображения обратимы, так как $(X_i, X_{i+1}) = (Y_{i+1}, Y_{i+1}^{-1} Y_i Y_{i+1})$. Если $(X_1, \dots, X_k)$ — квазиположительное разложение некоторой косы $X$, то легко видеть, что $\Sigma_i(X_1, \dots, X_k)$ — тоже квазиположительное разложение той же косы. Соответствие $\sigma_i \mapsto \Sigma_i$ является действием группы кос $\mathbf{B}_k$ на множестве $G^k$. Это действие называется *действием Гурвица.* Разложения, принадлежащие одной и той же орбите действия Гурвица называются *Гурвиц-эквивалентными.*

Если $U$, $V$ — слова над алфавитом $\mathcal{A} = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ (такие слова, а также представляемые ими косы, мы будем называть *положительными*), то $U \equiv V$ будет обозначать побуквенное равенство, а $U = V$ — равенство в группе $\mathbf{B}_3$. Положим $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$.

Если $W \equiv a_1 \dots a_n$ — положительное слово и $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$, то положим $W \setminus I \equiv W_1 \dots W_{k-1}$ и $W_I = (A_1 x_1 A_1^{-1}, \dots, A_k x_k A_k^{-1})$, где $x_j = a_{i_j}$, $W_1, \dots, W_{k+1}$ — части, на которые слово $W$ разбивается буквами $x_1, \dots, x_k$ (т. е. $W_j \equiv a_l \dots a_m$, где $l = i_{j-1} + 1$, $m = i_j - 1$, $i_0 = 0$, $i_{k+1} = n + 1$), и $A_j = W_1 \dots W_j$. Легко видеть, что $W_I$ является квазиположительным разложением косы $W\Delta^{-p}$ тогда и только тогда, когда $W \setminus I = \Delta^p$. Если $i - 1 \notin I$, $i \in I$ и $a_{i-1} = a_i$, то $W_I = W_{\{i-1\}\cup(I\setminus\{i\})}$. Если $I$ не содержит таких $i$, будем говорить, что оно $W$*-минимально.*

**Теорема 1.** *Пусть $W$ — положительное слово и $p \ge 0$. Предположим, что коса $X = W\Delta^{-p}$ квазиположительна. Тогда в любой орбите действия Гурвица на квазиположительных разложениях косы $X$ есть элемент вида $W_I$ с $W$-минимальным $I$.*

**Следствие 1.** (см. [3]). *Коса $X \in \mathbf{B}_3$ квазиположительна тогда и только тогда, когда из любого положительного слова $W$, такого что $X = W\Delta^{-p}$, можно вычеркнуть несколько букв так, чтобы получилось слово, равное в $\mathbf{B}_3$ косе $\Delta^p$.* $\square$

Поскольку любая коса допускает представление в виде $W\Delta^{-p}$, теорема 1 дает алгоритм нахождения представителей каждой орбиты действия Гурвица. Этот алгоритм допускает оптимизацию в духе метода ветвей и границ по аналогии с [4; §6].

**Следствие 2.** *Для каждой косы из трех нитей число орбит действия Гурвица конечно.* $\square$

**Следствие 3.** *Любые два квазиположительных разложения* положительной *косы из трех нитей Гурвиц-эквивалентны.*

*Доказательство.* Ввиду теоремы 1 достаточно убедиться в том, что разложения $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1)$ и $(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2)$ Гурвиц-эквивалентны. Действительно, $(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \sigma_1) \overset{\Sigma_2}{\mapsto} (\sigma_1,\, \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1},\, \sigma_2) \overset{\Sigma_1}{\mapsto} (\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1},\, \sigma_1,\, \sigma_2) = (\sigma_2,\, \sigma_1,\, \sigma_2)$. $\square$

Копредставление Бирман–Ко–Ли (БКЛ) [1] для $\mathbf{B}_3$ имеет вид

$$\mathbf{B}_3 = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_2\sigma_1 = \sigma_1\sigma_0 = \sigma_0\sigma_2 \rangle, \tag{2}$$

где $\sigma_1$ и $\sigma_2$ те же, что и выше, и тем самым, $\sigma_0 = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$. Слова над алфавитом $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ и задаваемые ими косы мы будем называть *БКЛ-положительными*. Любая коса записывается в виде $W\delta^{-p}$ с БКЛ-положительным словом $W$ и $\delta = \sigma_2\sigma_1$.

**Теорема 2.** *Пусть $W$ — БКЛ-положительное слово и $p \geq 0$. Предположим, что коса $X = W\delta^{-p}$ квазиположительна. Тогда в любой орбите действия Гурвица на квазиположительных разложениях $X$ есть элемент вида $W_I$ с $W$-минимальным $I$.*

**Следствие 4.** *Любые два квазиположительных разложения БКЛ-положительной косы из трех нитей Гурвиц-эквивалентны.*

Естественно, аналог следствия 1 тоже имеет место. Несмотря на сходство теорем 1 и 2 доказательства их совершенно разные. Доказательство теоремы 1 более геометрично и очень похоже на доказательство основного результата из статьи Камады [2]. Доказательство теоремы 2 чисто комбинаторное в духе [3].

Пусть $e : \mathbf{B}_3 \to \mathbb{Z}$ — гомоморфизм групп, такой что $e(\sigma_1) = e(\sigma_2) = 1$.

**Теорема 3.** *Если $e(X) = 2$, то $X$ имеет не более двух орбит действия Гурвица.*

**Пример.** Пусть $W \equiv \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2\sigma_2^2$. Тогда $W_{\{1,5\}} \not\sim W_{\{3,7\}}$, и значит, по теоремам 1 и 3, коса $W\Delta^{-2}$ имеет ровно две орбиты действия Гурвица.

**Замечание.** Теорема 2 и ее доказательство переносятся без изменений на случай групп Артина–Титса серии $I_2(p)$, если в качестве БКЛ-положительных слов рассматривать положительные слова от образующих копредставления $\langle a_1, \dots, a_p \mid a_pa_{p-1} = a_{p-1}a_{p-2} = \dots = a_2a_1 = a_1a_p \rangle$.

**§1. Допустимые графы и квазиположительные разложения.** Фиксируем диск $D$ и точку $q$ на его границе $\partial D$. Пусть $\Gamma$ — ориентированный граф, вложенный в $D \setminus \{q\}$, ребра которого помечены числами 1 и 2. Обозначим через $V(\Gamma)$ множество всех вершин графа $\Gamma$, а через $V_n(\Gamma)$ — множество вершин, к которым примыкает $n$ ребер. Положим $\partial\Gamma = \Gamma \cap \partial D$, $R(\Gamma) = V_6(\Gamma)$ и $B(\Gamma) = V_1(\Gamma) \setminus \partial\Gamma$. Элементы множества $B(\Gamma)$ будем называть *точками ветвления.*

Будем говорить, что $\Gamma$ — *допустимый граф*, если $\partial\Gamma \subset V_1(\Gamma)$, $V(\Gamma) = V_1(\Gamma) \cup R(\Gamma)$, и для любой вершины $v \in R(\Gamma)$ выходящие из нее ребра ориентированы и помечены

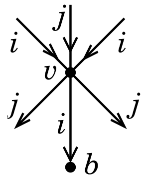


**Рис. 1.** $i \neq j$

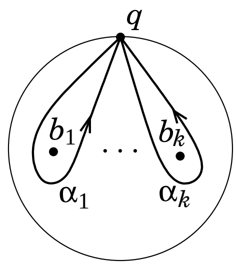


**Рис. 2.**

как на рис. 1. Допустимый граф $\Gamma$ назовем *квазиположительным*, если для каждой точки ветвления $b$ примыкающее к ней ребро ориентировано в сторону $b$ (см. рис. 1).

Если $\alpha$ — путь в $D \setminus V(\Gamma)$, трансверсальный ребрам графа $\Gamma$, то определим слово $\Gamma(\alpha)$ как $\sigma_{i_1}^{\pm 1}\sigma_{i_2}^{\pm 1}\dots$, где $i_1, i_2, \dots$ — числа, которыми помечены ребра, последовательно пересекаемые путем $\alpha$, а знаки выбраны в зависимости от ориентаций пересекаемых ребер, причем обходу вокруг точки ветвления с пометкой $i$ в положительном направлении отвечает $\sigma_i$. Слово, отвечающее обходу вдоль $\partial D$ в положительном направлении с началом в точке $q$, назовем *граничным словом* графа $\Gamma$ и обозначим его через $\Gamma(\partial D)$. Если $\Gamma$ — допустимый граф, то легко видеть, что слова, отвечающие путям, гомотопным в $D \setminus B(\Gamma)$, задают одну и ту же косу.

Каждый квазиположительный граф $\Gamma$ однозначно определяет класс Гурвиц-эквивалентности квазиположительных разложений граничной косы следующим образом. Пусть $B(\Gamma) = \{b_1, \dots, b_k\}$. Выберем попарно непересекающиеся простые замкнутые пути $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ как на рис. 2. Тогда $(\Gamma(\alpha_1), \dots, \Gamma(\alpha_k))$ — квазиположительное разложение косы $\Gamma(\partial D)$. Набор путей $(\alpha_i)$ определен с точностью до диффеоморфизма диска, неподвижного на границе, т. е. с точностью до действия группы кос $\mathbf{B}_k$. Несложно убедиться, что это и есть действие Гурвица.

**Лемма 1.** *Каждое квазиположительное разложение данного слова может быть задано некоторым квазиположительным графом.*

*Доказательство.* Если $W_1$ и $W_2$ — слова, равные в $\mathbf{B}_3$, и диск $D_2$ лежит внутри диска $D_1$, то найдется допустимый граф $\Gamma$ в кольце $D_1 \setminus D_2$ без точек ветвления, такой что $\Gamma(\partial D_i) = W_i$, $i = 1, 2$ (этот факт достаточно проверить, когда $W_2$ получено из $W_1$ либо соотношением группы кос, либо вставкой или сокращением слов $\sigma_i^{\pm 1}\sigma_i^{\mp 1}$). Чтобы построить граф, задающий квазиположительное разложение $(X_1, \dots, X_k)$ слова $W$, $X_i = a_i\sigma_1 a_i^{-1}$, мы рассмотрим вложенные диски $D_3 \subset D_2 \subset D_1 \subset D$. В кольце $D \setminus D_1$ разместим граф, реализующий равенство слов $W = X_1 \dots X_k$, в кольце $D_1 \setminus D_2$ завершим точками ветвления ребра, отвечающие центральным "$\sigma_1$" слов $X_i$, и, наконец, в кольце $D_2 \setminus D_3$ разместим граф, реализующий равенство слов $(a_1 a_1^{-1}) \dots (a_k a_k^{-1}) = 1$. □

**Лемма 2.** *Если два квазиположительных графа совпадают вне диска $U \subset D$, а внутри $U$ каждый из них имеет не более одной точки ветвления, то эти графы задают одно и то же квазиположительное разложение граничной косы.* □

Нам понадобятся лишь два частных случая леммы 2: когда один граф получен из другого модификациями, изображенными на рис. 3.

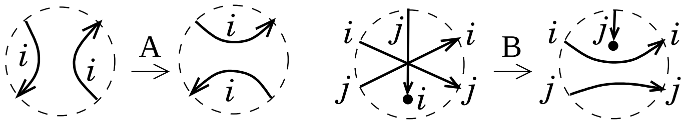


**Рис. 3.** $i \neq j$

**§2. Доказательство теоремы 1.** Обозначим через $\Delta_{-p}$ слово $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\dots$ ($3p$ чередующихся букв). Это слово представляет косу $\Delta^{-p}$. Ввиду лемм 1 и 2 достаточно доказать, что любой квазиположительный граф с граничным словом $W\Delta_{-p}$ модификациями на рис. 3 можно преобразовать так, чтобы каждая точка ветвления соединялась одним ребром с точкой на границе диска $D$ (такие точки ветвления мы назовем *хорошими*, а остальные — *плохими*).

Этот факт мы будем доказывать индукцией по весу графа, который мы определим как $|R(\Gamma)|$ плюс число плохих точек ветвления. Если вес равен нулю, то все точки ветвления хорошие. Докажем теперь требуемый результат для некоторого графа $\Gamma$, предполагая его доказанным для графов меньшего веса. Если плохих точек нет, то все доказано, поэтому будем считать, что они есть. Предположим, что нет модификаций, понижающих вес графа. Пусть $b$ — плохая точка ветвления. Без ограничения общности можно считать, что примыкающее к ней ребро $bv$ помечено единицей. В его окрестности $\Gamma$ ориентирован как на рис. 1 при $i = 1$, $j = 2$, так как иначе модификацией A (см. рис. 3) можно уменьшить $|R(\Gamma)|$. Обозначим через $P$ замыкание компоненты множества $D \setminus \Gamma$, содержащей $b$. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ребра графа, лежащие на $\partial P$, занумерованные в порядке положительного обхода вдоль $\partial P$ с началом в вершине $v$.

Докажем индукцией по $i$, что если ребро $e_i$ ориентировано положительно относительно $\partial P$, то оно помечено двойкой, а если отрицательно, то единицей. Поскольку этот факт противоречит ориентации ребра $e_n$ на рис. 1, мы тем самым завершим доказательство теоремы 1. При $i = 1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно для некоторого $i$. Чтобы доказать его для $i+1$, достаточно исключить все случаи на рис. 4.

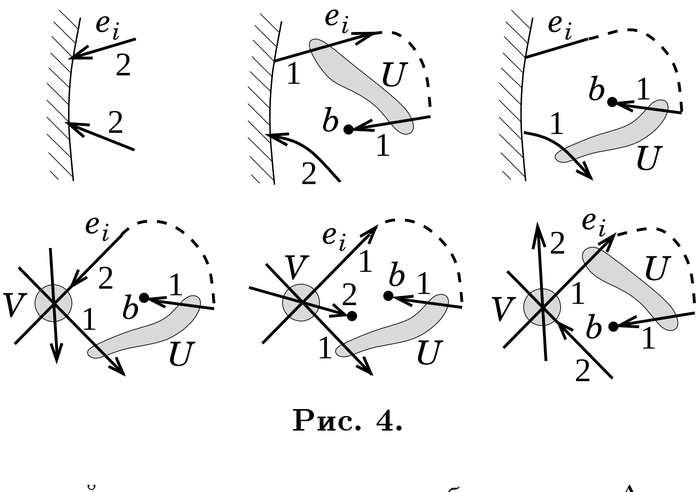


**Рис. 4.**

Левый верхний случай невозможен в силу выбора слова $\Delta_{-p}$. Два правых верхних — потому что модификация A, примененная к диску $U$, уменьшает число плохих точек ветвления. Наконец, три нижних случая невозможны, так как, применяя модификацию А к диску $U$, а затем модификацию В к диску $V$, мы уменьшаем $|R(\Gamma)|$. Теорема 1 доказана.

§**3. Доказательство теоремы 2.** Пусть $\mathcal{A} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ и $\mathcal{P}$ — множество БКЛ-положительных слов. Напомним, что $U = V$ — равенство в $\mathbf{B}_3$, а $U \equiv V$ — побуквенное равенство слов. Мы будем следовать соглашению, что если используется знак $\equiv$, то все сомножители в обеих частях равенства принадлежат $\mathcal{P}$. Пусть $\tau : \mathbf{B}_3 \to \mathbf{B}_3$, $\tau(X) = \delta^{-1} X \delta$. Поскольку $\tau(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, то $\tau : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ однозначно определен.

**Лемма 3.** (см. [1; теорема 2.7]). *Если $U = V$ для $U, V \in \mathcal{P}$, то $V$ получается из $U$ применением соотношений* (2) (*без использования $\sigma_i^{-1}$*). $\square$

**Лемма 4.** *Если $a_1 \dots a_n = b_1 \dots b_n$, $a_i, b_i \in \mathcal{A}$, то $(a_1, \dots, a_n) \sim (b_1, \dots, b_n)$.* $\square$

**Лемма 5.** *Пусть $\delta^p = W \equiv AuB$, $u \in \mathcal{A}$. Тогда найдутся $v \in \mathcal{A}$ и $k \geq 0$, такие что либо $A \equiv A_1 v A_2$, $A_2 = \delta^k$, $vA_2 u = \delta^{k+1}$, либо $B \equiv B_1 v B_2$, $B_1 = \delta^k$, $uB_1 v = \delta^{k+1}$.*

*Доказательство.* При $p = 1$ утверждение очевидно. Предположим, оно верно для $p-1$. По лемме 3 либо $W \equiv (\sigma_2\sigma_1)^p$, либо к $W$ можно применить хотя бы одно соотношение. В обоих случаях $W \equiv CxyD$, где $xy = \delta$. Если $A \equiv C$ или $A \equiv Cx$, то положим $v = y$ или $v = x$ соответственно и получим требуемое утверждение. В противном случае мы имеем либо $C \equiv AuC_1$, либо $D \equiv D_1 uB$. Мы рассмотрим только первый из этих случаев (второй аналогичен). Положим $E = \tau^{-1}(D)$. Тогда $AuC_1E = CE = C\delta D\delta^{-1} = W\delta^{-1} = \delta^{p-1}$, значит по предположению индукции либо 1) $A \equiv A_1 v A_2$, $A_2 = \delta^k$, $vA_2u = \delta^{k+1}$, либо 2) $C_1 \equiv B_1 v C_2$, $B_1 = \delta^k$, $uB_1v = \delta^{k+1}$, либо 3) $E \equiv E_1 w E_2$, $C_1 E_1 = \delta^m$, $uC_1E_1w = \delta^{m+1}$. В случаях 1) и 2) утверждение леммы очевидно. В случае 3) положим $B_1 = C_1 xy\tau(E_1)$, $v = \tau(w)$, $B_2 = \tau(E_2)$, $k = m+1$. $\square$

Положим $\mathcal{I}_k(W) = \{I \mid W \setminus I = \delta^p, p \geq 0, |I| = k\}$.

**Лемма 6.** *Пусть $W = a_1 \dots a_n \in \mathcal{P}$, $I \in \mathcal{I}_k(W)$. Предположим, что $a_i a_{i+1} = \delta$ для некоторого $i$, и при этом одно из чисел $i$, $i+1$ лежит в $I$, а другое не лежит. Тогда существует $J \in \mathcal{I}_k(W)$, такое что $W_I \sim W_J$ и $\{i, i+1\} \cap J = \varnothing$.*

*Доказательство.* Пусть $i \notin I$ и $i+1 \in I$ (в случае $i \in I$ и $i+1 \notin I$ доказательство аналогично). Пусть $W \equiv W_1 x_1 \dots W_k x_k W_{k+1}$, где $x_1, \dots, x_k$ — буквы, стоящие на позициях, принадлежащих множеству $I$. Тогда для некоторого $m$ имеем $x_m = a_{i+1}$ и $W_m \equiv Au$, где $u = a_i$. Положим $A_j = W_1 \dots W_j$ и $X_j = A_j x_j A_j^{-1}$. Пусть $v = a_l$ — "парная" к $u$ буква в слове $W \setminus I$, существование которой доказывается в лемме 5, и пусть $W_s$ — содержащее ее подслово. Положим $J = \{l\} \cup (I \setminus \{i+1\})$ и докажем, что $W_J \sim W_I$. Пусть $W_J = (Y_1, \dots, Y_k)$. Ясно, что $Y_j = X_j$ при $j < \min(m, s)$.

Случай 1. $s \leq m$. Тогда $W_s \dots W_m \equiv BvDu$, $D = \delta^q$, $vDu = \delta^{q+1}$, и, если $s < m$, то $W_s \equiv BvC$ и $D \equiv CW_{s+1} \dots W_{m-1}A$. Поскольку $ux_m = \delta$, отсюда следует $vDu = Dux_m$, и значит $X_m = A_{s-1}Bv(Dux_m)(vDu)^{-1}B^{-1}A_{s-1}^{-1} = A_{s-1}BvB^{-1}A_{s-1}^{-1} = Y_s$. При $j > m$ имеем $Y_j = B_j x_j B_j^{-1}$, где $B_j = A_{s-1}B(Dux_m)W_{m+1} \dots W_j =$ $A_{s-1}B(vDu)W_{m+1} \dots W_j = A_j$, откуда $Y_j = X_j$. При $s \leq j < m$ имеем $Y_s Y_{j+1} Y_s^{-1} = B_j x_j B_j^{-1}$, где $B_j = Y_s A_{s-1} BCW_{s+1} \dots W_j = (A_{s-1}BvB^{-1}A_{s-1}^{-1})A_{s-1}BCW_{s+1} \dots W_j = A_{s-1}BvCW_{s+1} \dots W_j = A_j$, откуда $Y_s Y_{j+1} Y_s^{-1} = X_j$. Таким образом, $W_J =$

$(X_1,\dots,X_{s-1},X_m,X_m^{-1}X_sX_m,\,\dots,\,X_m^{-1}X_{m-1}X_m,\,X_{m+1},\dots,X_k)=\Sigma_s^{-1}\dots\Sigma_{m-1}^{-1}(W_I)$.

Случай 2. $s>m$. Тогда $W_s\equiv BvC$, $ux_m=\delta$, $D=\delta^q$, $uDv=\delta^{q+1}$, где $D\equiv W_{m+1}\dots W_{s-1}B$. Мы имеем $uDv=ux_mD$. Сокращая на $u$, получаем $Dv=x_mD$. Поэтому $Y_{s-1}=A_mx_m(Dv)(x_mD)^{-1}A_m^{-1}=A_mx_mA_m^{-1}=X_m$. При $j\ge s$ имеем $Y_j=B_jx_jB_j^{-1}$, где $B_j=A_m(x_mD)CW_{s+1}\dots W_j=A_m(Dv)CW_{s+1}\dots W_j=A_j$, откуда $Y_j=X_j$. При $m<j<s$ имеем $Y_{j-1}=B_jx_jB_j^{-1}$, где $B_j=A_mx_mW_{m+1}\dots W_j=(A_mx_mA_m^{-1})A_j=X_mA_j$, откуда $Y_{j-1}=X_mX_jX_m^{-1}$. Таким образом, $W_J=(X_1,\dots,X_{m-1},\,X_mX_{m+1}X_m^{-1},\,\dots,\,X_mX_{s-1}X_m^{-1},\,X_m,X_s,\dots,X_k)=\Sigma_{s-1}\dots\Sigma_m(W_I)$. □

**Лемма 7.** *Пусть $xy=\delta$, $x,y\in\mathcal{A}$, и либо* (i) $W\equiv AxyB$ *и* $V\equiv AuvB$, *где* $uv=\delta$, *либо* (ii) $W\equiv AB$ *и* $V\equiv Axy\,\tau(B)$, *либо* (iii) $W\setminus I\ne 1$, $W\equiv AxyB$ *и* $V\equiv A\,\tau^{-1}(B)$. *Тогда, если $I\in\mathcal{I}_k(W)$, то существует $J\in\mathcal{I}_k(V)$, такое что $V_J\sim W_I$.*

*Доказательство.* Пусть $i-1$ — длина слова $A$ и $m=|\{i,i+1\}\cap I|$.

(i). Если $m=0$, то $V_I=W_I$. Если $m=2$, то результат следует из леммы 4. Случай $m=1$ сводится к случаю $m=0$ по лемме 6.

(ii). $V_J=W_I$ при $J=(I\cap[1,i-1])\cup(2+(I\cap[i,k]))$.

(iii). Случай $m=0$ следует из (ii). Случай $m=1$ сводится к случаю $m=0$ по лемме 6. Рассмотрим случай $m=2$, т. е. $\{i,i{+}1\}\subset I$. Пусть $W\equiv a_1\dots a_n$. Условие $W\setminus I\ne 1$ означает, что либо $\{1,\dots,i{-}1\}\not\subset I$, либо $\{i{+}2,\dots,n\}\not\subset I$. Мы рассмотрим первый из этих случаев (второй аналогичен). Пусть $l=\max(\{1,\dots,i-1\}\setminus I)$. Без ограничения общности можно считать, что $a_l=\sigma_2$. Положим $C\equiv a_1\dots a_{l-1}$, $D\equiv a_{l+1}\dots,a_{i-1}$, $E\equiv\tau(D)$. Поскольку $Dxy=D\delta=\delta E=\sigma_1\sigma_0E$, по лемме 4 имеем $W_I\sim U_I$, где $U\equiv C\sigma_2\sigma_1\sigma_0EB$, и по лемме 6 имеем $U_I\sim U_K$, где $\{l,l+1\}\cap K=\varnothing$. Поскольку $C\sigma_2\tau^{-1}(EB)\equiv C\sigma_2D\tau^{-1}(B)\equiv V$, мы тем самым свели случай $m=2$ к случаю $m=1$ для $(C\sigma_2,\sigma_1\sigma_0,EB;K)$ вместо $(A,xy,B;I)$, □

Теорема 2 следует из леммы 7, так как любое квазиположительное разложение $(A_jx_jA_j^{-1})_{j=1}^k$ данной косы можно представить в виде $W_I$, где $W=W_1x_1\dots W_kx_kW_{k+1}$, $W_j\in\mathcal{P}$, $A_{j-1}^{-1}A_j=W_j\delta^{-3p_j}$ $(A_0=A_{k+1}=1)$, а затем заменами (i)–(iii) леммы 7 преобразовать $W$ в любое наперед заданное слово.

**§4. Доказательство теоремы 3.** Положим $]1,\Delta[\;=\{\sigma_1,\,\sigma_2,\,\sigma_1\sigma_2,\,\sigma_2\sigma_1\}$, $\tau(X)=\Delta^{-1}X\Delta$. Для $u\in\;]1,\Delta[$ через $S(u)$ и $F(u)$ обозначим первую и последнюю буквы слова $u$. Любая коса из $\mathbf{B}_3$ представляется в виде $u_1\dots u_n\Delta^{-p}$, где $u_i\in\;]1,\Delta[$ и $F(u_i)=S(u_{i+1})$ (*правая нормальная форма*), и любой класс сопряженности, кроме $\sigma_1\Delta^{2m+1}$ и $\sigma_1\sigma_2\Delta^{2m}$, содержит элемент указанного вида, в котором, к тому же, $\tau^p(F(u_n))=S(u_1)$. Пусть $X$ — такой элемент. Отождествим $u_1,\dots,u_n$ (в этом порядке) с вершинами правильного $n$-угольника $P$. Назовем *антисимметрией* $n$-угольника $P$ симметрию $s$, ось которой проходит через середины двух сторон $ab$ и $cd$, причем $e(u_i)=2$ при $u_i\in\{a,b,c,d\}$, и $e(u_i)\ne e(s(u_i))$ в противном случае. Из теоремы 1 можно вывести следующий факт.

**Лемма 8.** *Если $e(X)=2$, то число орбит действия Гурвица на квазиположительных разложениях косы $X$ равно числу антисимметрий многоугольника $P$.* □

Поэтому теорема 3 вытекает из следующей леммы:

**Лемма 9.** *$P$ имеет не более двух антисимметрий.*

*Доказательство.* Предположим, что $P$ имеет три различные антисимметрии $s_1$, $s_2$, $s_3$. Без ограничения общности можно считать, что угол $\alpha$ между осями $s_1$ и $s_2$ наименьший из всех углов между осями, в частности, $\alpha \le \pi/3$.

Случай 1. $\alpha = 2\pi/n$. Пусть $u_{-1}u_0$ и $u_0u_1$ — стороны, через которые проходят оси $s_1$ и $s_2$ (мы считаем, что индексы — это вычеты mod $n$). Тогда условие антисимметричности $s_1$ и $s_2$ влечет $e(u_0) = e(u_{\pm1}) = 2$, $e(u_{\pm2}) = 3 - e(u_{\mp1}) = 1$, $e(u_{\pm3}) = 3 - e(u_{\mp2}) = 2$, и т. д. вплоть до вершин, антиподальных к $u_{\pm1}$. Поскольку значения $e$ чередуются, то получается, что нет места для оси $s_3$.

Случай 2. $\alpha > 2\pi/n$. Пусть $r = s_2 \circ s_1$ (поворот на угол $2\alpha$) и $ab$, $cd$ — стороны, через которые проходит ось $s_3$. Положим $a^\pm = r^{\pm1}(a)$, $b^\pm = r^{\pm1}(b)$. Из условия $2\pi/n < \alpha \le \pi/3$ следует, что $\{a, b, c, d\} \cap \{a^\pm, b^\pm\} = \varnothing$. Поскольку $s_3(a^+) = b^-$, из этого следует, что $e(a^+) = 1$ или $e(b^-) = 1$. Пусть $e(b^-) = 1$ (случай $e(a^+) = 1$ аналогичен). Заметим, что если $e(u_i) = 1$, то всегда $e(s_j(u_i)) = 2$. Поэтому $e(s_1(b^-)) = 2$. Поскольку $s_2(b) = s_2(r(b^-)) = s_1(b^-)$ и $e(b) = 2$, отсюда следует, что $e(b) = e(s_2(b)) = 2$. Следовательно, $b$ и $s_2(b)$ — соседние вершины, и ось $s_2$ проходит между ними, а значит, угол между осями $s_2$ и $s_3$ равен $2\pi/n$. Это противоречит минимальности угла $\alpha$.

## Цитированная литература


1. J. Birman, K.-H. Ko, S.-J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups*, Adv. Math. **139** (1998), 322–353.
2. S. Kamada, *Surfaces in $\mathbb{R}^4$ of braid index three are ribbon*, J. of Knot Theory and Ramifications **1** (1992), 137–160.
3. S. Yu. Orevkov, *Quasipositivity problem for 3-braids*, Turkish Journal of Math. **28** (2004), 89–93.
4. S. Yu. Orevkov, *Algorithmic recognition of quasipositive braids of algebraic length two*, J. of Algebra **423** (2015), 1080–1108.



Математический ин-т им. В. А. Стеклова

Университет им. Поля Сабатье (Тулуза-3)
*E-mail address*: orevkov@math.ups-tlse.fr