

**Проективные M -кубики и M -квартики в общем
положении с максимально пересекающейся парой овалов**

С.Ю.ОРЕВКОВ, Г.М.ПОЛОТОВСКИЙ

Получена изотопическая классификация кривых, указанных в заглавии. При этом предложен новый подход к построению кривых. Для доказательств запретов применены теория комплексных ориентаций и методы теории зацеплений (неравенство Мурасуги — Тристрама).

ВВЕДЕНИЕ

Увеличение запаса примеров плоских алгебраических кривых с известной топологией индуцирует, как правило, общее продвижение в круге вопросов, связанных с первой частью 16-ой проблемы Гильберта. В частности, полученная в [1], [2] классификация плоских вещественных кривых степени 6, распадающихся в произведение двух трансверсально пересекающихся сомножителей, нашла разнообразные применения, основные из которых перечислены в [3] (сейчас этот список можно дополнить построением кривых степени 6 на кубической поверхности в недавней работе [4]). Характер упомянутых применений позволяет надеяться, что аналогичная классификация распадающихся кривых степени 7 будет столь же полезной. Однако в рассматриваемой задаче " $7 \gg 6$ ": не говоря о том, что исследованию подлежит на порядок большее количество топологических типов, техники работ [1], [2] здесь уже недостаточно. Последнее ясно после проведенного вторым автором весьма объемного "предварительного" изучения распадающихся кривых степени 7, часть результатов которого изложена в [3], [5]. Отметим также, что для классификации расположений M -кривой степени 6 и трансверсально пересекающей ее прямой оказалось недостаточно и более мощных средств [6], [7]. Недавно с помощью привлечения методов теории зацеплений эта задача была продвинута первым автором (см. [8], [9]; в частности, найдена классификация гибких аффинных M -кривых степени 6). В настоящей работе с помощью методов теории зацеплений получена изотопическая классификация кривых, указанных в заглавии. Используемые средства применимы и для других классов кривых — например, для коник и квинтик в общем положении — и можно надеяться, что они позволят завершить классификацию распадающихся кривых степени 7 (при естественных условиях максимальной и трансверсальности).

Работа поддержана грантом 98-01-00794 РФФИ

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТА

Ниже C_n обозначает множество точек M -кривой степени n в вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Напомним, что C_3 (M -кубика) состоит в $\mathbb{R}P^2$ из двух непересекающихся топологических окружностей, одна из которых разбивает $\mathbb{R}P^2$, а вторая — не разбивает. Первая называется овалом и будет обозначаться O_3 , а вторая — нечетной ветвью и будет обозначаться J_3 ; M -квартика C_4 состоит в $\mathbb{R}P^2$ из четырех овалов вне друг друга. Мы предполагаем, что один из этих овалов — будем обозначать его O_4 — пересекается с O_3 в 12 различных вещественных точках. Остальные три овала квартики и ветвь J_3 будем называть *свободными* (от точек пересечения). Основной результат настоящей работы — топологическая классификация троек

$$(\mathbb{R}P^2, C_3 \sqcup C_4, C_3), \quad (1.1)$$

где \sqcup обозначает объединение при описанных выше условиях (трансверсальность пересечения, максимальность числа общих вещественных точек, свобода трех овалов квартики и ветви J_3) — может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. *Любая тройка $(\mathbb{R}P^2, C_3 \sqcup C_4, C_3)$ гомеоморфна одной из 31 топологических моделей, перечисленных на рис. 1, где стандартные окружности — модели овала O_3 , нечетные ветви J_3 не нарисованы, а в компонентах дополнения к $O_3 \cup O_4$, содержащих буквы α и β , следует расположить, соответственно, α и $\beta = 3 - \alpha$ свободных овалов квартики при значениях α , указанных в подписях под рисунками.*

Как обычно в подобных задачах, общая схема доказательства естественно разбивается на три этапа: (i) перечисление допустимых топологических моделей; (ii) построения; (iii) запреты. Под "*допустимыми моделями*" здесь понимаются такие расположения в $\mathbb{R}P^2$ наборов A и B топологических окружностей, что A , B и $A \cup B$ удовлетворяют тем же комбинаторным условиям, что C_3 , C_4 и $C_3 \cup C_4$ в (1.1), включая ограничения на взаимные расположения овалов, вытекающие из теоремы Безу при рассмотрении пересечений с прямыми.

Этап (i) подробно описан в [5]. Именно, там приведен алгоритм перечисления допустимых моделей для $O_3 \sqcup O_4$, который дает список из 20 расположений, показанных на рис. 1; затем с помощью теоремы Брюзотти (см., например, [10]) о независимости устранения невырожденных двойных точек доказывается, что для каждого из этих расположений теорема Безу допускает только одну (с точностью до эквивалентности в силу симметрии) область α внутри овала O_3 (см. рис. 1), где могут быть расположены α свободных овалов кривой C_4 , $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$. Таким образом, *всего для троек (1.1) имеем $20 \times 4 = 80^1$ допустимых моделей.*

Этапам (ii) и (iii) посвящены разделы 2 и 3 соответственно.

2. ПОСТРОЕНИЯ

Предварительно опишем применяемую ниже кодировку допустимых моделей. Словом (последовательностью символов) $w = \langle s_1 s_2 \dots s_n \rangle$, $s_k \in \{+, -\}$, бу-

¹В разделе VIIIa)[3] ошибочно указано "16" вместо "20" и "64" вместо "80".

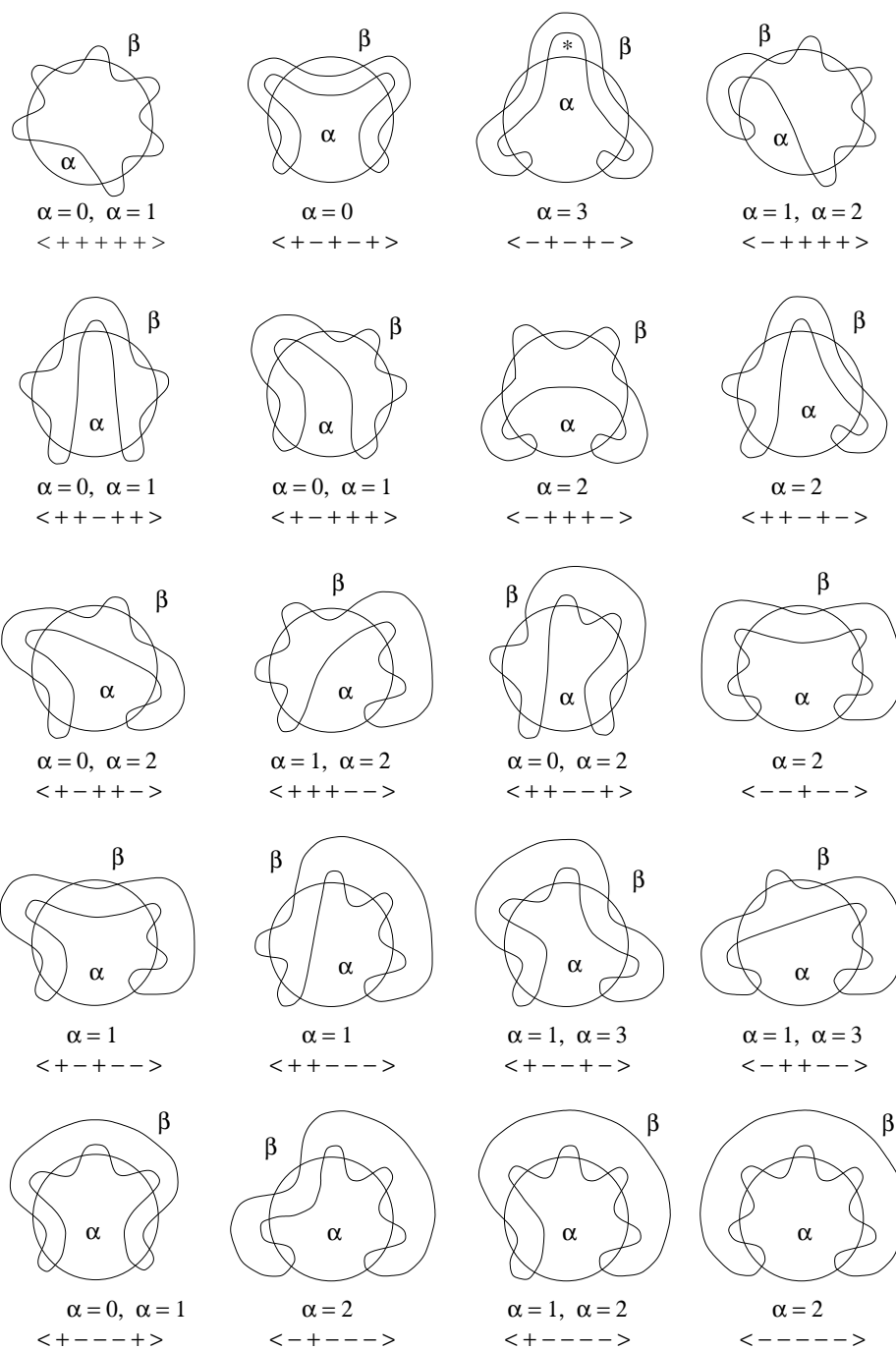


Рис. 1

дем кодировать взаимное расположение овалов O_3 и O_4 , составленное из блоков

$B(s_1), \dots, B(s_n)$ в соответствии с рис. 2.1; блоки $B(+)$ и $B(-)$ изображены на рис. 2.2. Удобно считать, что символы " $<$ " и " $>$ " тоже входят в слово w ; отвечающими им блоками $B(<)$ и $B(>)$ являются крайний левый и крайний правый блоки на рис. 2.1.

Замечание. Ясно, что возможны 32 различных слова w описанного вида. После отождествления слов, переходящих друг в друга при изменении направления чтения, останутся двадцать слов, записанных под соответствующими им моделями на рис. 1.

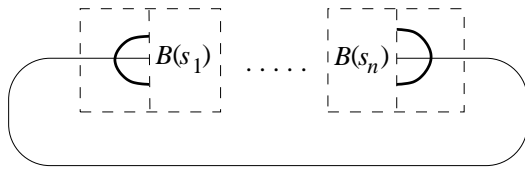


Рис. 2.1

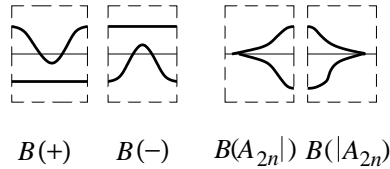


Рис. 2.2

Рис. 2.3

Для кодировки расположений $C_3 \sqcup C_4$ будем оснащать слово w указанием параметра α в фигурных скобках после w .

2.1. Элементарные построения методом малого параметра.

Модель $\langle++++\rangle\{0\}$ реализуется кривой $C_3 \cup C_4$, где C_4 — M -квартика, имеющая 6 точек перегиба на одном овале O_4 (такая квартика построена в [11]), а C_3 — M -кубика, полученная малым возмущением объединения трех секущих этого овала, достаточно близких к трем его бикасательным и пересекающих его в четырех точках каждая.

Для реализации модели $\langle++-++\rangle\{0\}$ рассмотрим M -квартуку C_4 , полученную возмущением объединения двух эллипсов. Пусть $L = 0$ — бикасательная к O_4 и $E = 0$ — эллипс, касающийся O_4 в трех точках так, как показано на рис. 3.1. Предположим, что $L < 0$ на O_4 и $E < 0$ внутри эллипса. Тогда $C_4 \cup \{EL = \varepsilon\}$ при $0 < \varepsilon \ll 1$ дает искомое расположение (см. рис. 3.2).

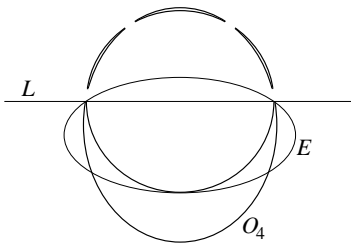


Рис. 3.1

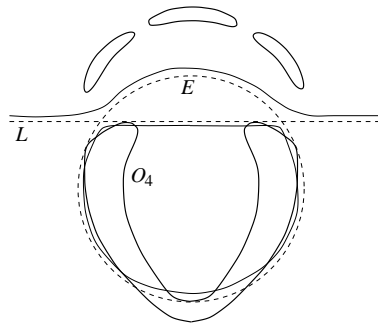


Рис. 3.2

Замечания. 1. Используя в качестве исходного расположения объединение коники и кубики, получающееся в методе Харнака (см., например, [10]), аналогичными элементарными построениями удастся реализовать еще модели $\langle +--+ \rangle\{0\}$ и $\langle -+-- \rangle\{3\}$. Мы опускаем подробности, поскольку в следующем пункте эти две модели будут реализованы единым способом вместе со всеми оставшимися.

2. Реализация модели $\langle ++-- \rangle\{0\}$ и все построения следующего пункта получены первым автором.

2.2. Построения с помощью устранения каспов.

Построение особых кривых. Пусть в точке p одна кривая неособа, а другая имеет особенность A_{2n} . Будем говорить, что эти кривые имеют в точке p *максимальное касание*, если в некоторых локальных аналитических координатах они записываются уравнениями $y = 0$ и $y^2 = x^{2n+1}$ соответственно. По аналогии с кодировкой взаимных расположений овалов мы будем обозначать словом $w = A_{2n}|s_1 \dots s_k|A_{2m}$ взаимное расположение овала и особой четной ветви с особенностями A_{2n}, A_{2m} , получающееся из рис. 2.1 заменой блоков $B(\langle \rangle)$ и $B(\rangle)$ соответственно на блоки $B(A_{2n}|)$ и $B(|A_{2m})$, показанные на рис. 2.3. Данные обозначения предполагают наличие максимального касания в особых точках (что, впрочем, следует из рисунка). Положим также $B(A_0|) = B(\langle)$, $B(|A_0) = B(\rangle)$. Как и в неособом случае, $w\{\alpha\}$ будет обозначать взаимное расположение M -кубики и квартики, при котором внутри O_3 лежат α и снаружи $\beta = 3 - \alpha - n - m$ свободных овалов квартики. Поскольку при $m + n = 3$ имеем $\alpha = \beta = 0$, в этом случае " $\{0\}$ " будем опускать.

Лемма 2.2.1. *Существуют следующие расположения неособой кубики и особой квартики:*

$$A_6|+->; A_6|+>; A_4|+-|A_2; A_4|+>|A_2; A_2|---|A_2\{0\}; A_4|+++>\{0\}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть $(x : y : z)$ — однородные координаты в $\mathbb{R}P^2$ и C_3 — M -кубика, овал O_3 которой касается оси $y = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$ и имеет в этой точке кривизну k (т.е. O_3 в окрестности этой точки определяется уравнением $y = kx^2 + \dots$), а нечетная ветвь J_3 пересекает эту ось в некоторой точке p . Пусть коника C_2 касается оси $y = 0$ в точке p и имеет с J_3 еще пять различных общих точек — имеются две возможности такого расположения кривых C_3 и C_2 , показанные на рис. 4.1, 4.2. Легко проверить, что при квадратичном преобразовании $f_k(x : y : z) = (xy : y^2 : yz - kx^2)$ образ $f_k(C_3)$ кубики C_3 является кубикой с овалом $f_k(O_3)$ и нечетной ветвью $f_k(J_3)$, а $f_k(C_3 \cup C_2)$ реализует расположение $A_6|+->$ в случае рис. 4.1 и $A_6|+>$ в случае рис. 4.2.

Пусть теперь C_3 — M -кубика, расположенная относительно координатных осей так, как показано на рис. 5.1 (ось $y = 0$ — касательная перегиба к нечетной ветви в точке $(0 : 0 : 1)$). Определим новую M -кубику C'_3 уравнением $(yz - kx^2)(x - \varepsilon z) + \delta y^3 = 0$. При $0 < \delta \ll \varepsilon \ll k \ll 1$ получим расположение кривых C_3 и C'_3 , показанное на рис. 5.2. Расположение $A_4|+++>\{0\}$ получается как $f_k(C_3) \cup f_k(C'_3)$.

Еще 2 конфигурации из (2.1) строятся применением гиперболизма — квадратичного преобразования $h_\mu(x : y : z) = (x^2 : xy : yz)$. Пусть овал кубики C_3

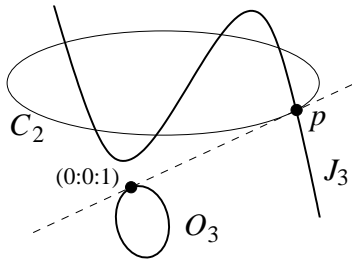


Рис. 4.1

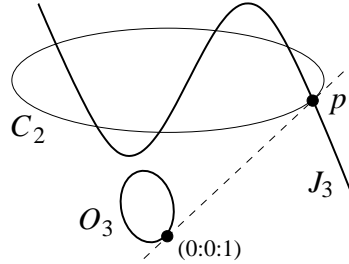


Рис. 4.2

касается оси $y = 0$ в точке $(0 : 0 : 1)$, а также проходит через точку $(0 : 1 : 0)$. Тогда $A_4|+|A_2$ и $A_4|-+|A_2$ реализуются в виде $hy(C_3) \cup hy(C_2)$, где C_2 — коника, пересекающая нечетную ветвь кубики C_3 в 6 различных вещественных точках, в двух из которых C_2 касается осей $x = 0$ и $y = 0$. Как и выше, C_2 можно выбрать двумя способами.

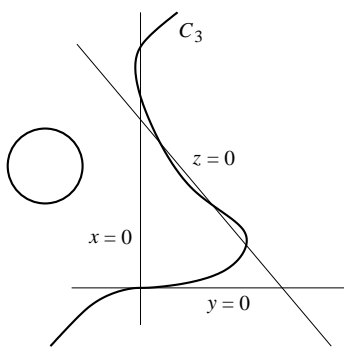


Рис. 5.1

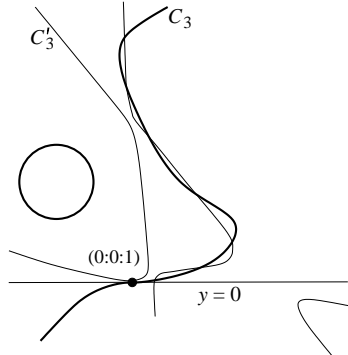


Рис. 5.2

Наконец, построим кривую $A_2|---|A_2$. Рассмотрим эллипсы E, C' , пересекающиеся в точках p, p' и касающиеся в точке q . Проведем через p касательную L к C' . Пусть r — вторая точка пересечения L и E , а L' — касательная к E , проходящая через r (см. рис. 6.1). Положим $C = C' + \varepsilon L^2$, $H = L'^2 + \delta LL''$; здесь мы обозначаем одинаково кривую и определяющий ее многочлен, причем считаем, что в области, помеченной на рис. 6.1 звездочкой, многочлен LL'' положителен, а C' отрицателен. Тогда прямая L касается коник C и H в точках p и r соответственно, и при $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ получим то, что показано на рис. 6.2. Разрезав $\mathbb{R}P^2$ вдоль L , получим диск, изображенный на рис. 6.3.

Раздуем на $\mathbb{R}P^2$ точку r (обозначим через R вклеенную прямую), а затем раздуем точку пересечения R и L (вторую вклеенную прямую обозначим через F). Получившаяся поверхность склеена из восьмиугольника на рис. 6.4 в соответствии со стрелками на его границе (F_1 и F_2 — части, на которые F делится прямыми R и L). На комплексификации этой поверхности индекс самопересечения кривой L равен -1 . Стягивая L в точку, получим (минимальную

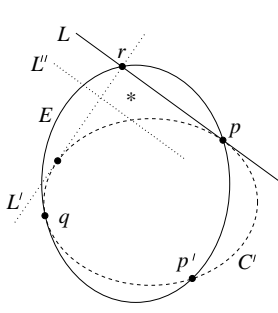


Рис. 6.1

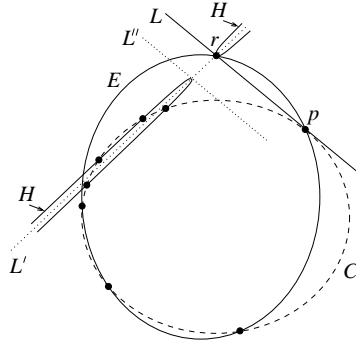


Рис. 6.2

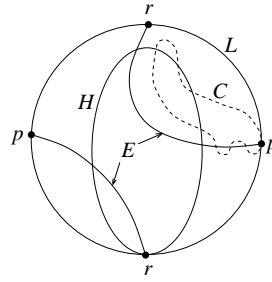


Рис. 6.3

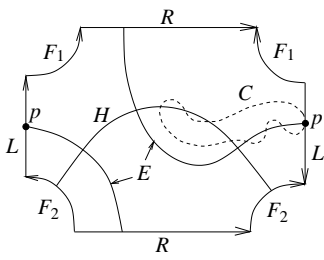


Рис. 6.4

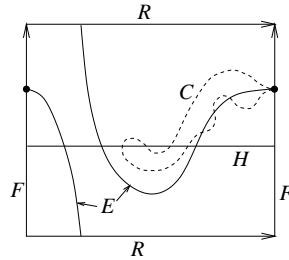


Рис. 6.5

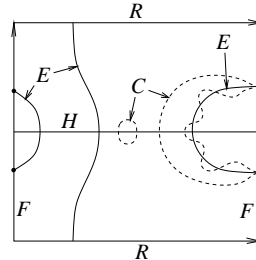


Рис. 6.6

рациональную) линейчатую поверхность Σ_2 (см. рис. 6.5), причем F — слой, а R и H — сечения расслоения $\Sigma_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$; индексы самопересечения: $R^2 = -2$, $H^2 = 2$. Рассмотрим двулистное накрытие $\xi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, разветвленное вдоль $H \cup R$. Тогда Σ_1 — линейчатая поверхность с индексами самопересечения сечений $R^2 = -1$, $H^2 = 1$. Комплексное сопряжение поднимается с Σ_2 на Σ_1 двумя способами. Выберем то поднятие, при котором множеством неподвижных точек служит $\mathbb{R}\Sigma_1 := \xi^{-1}(A)$, где A — верхняя (на рис. 6.5) компонента множества $\mathbb{R}\Sigma_2 \setminus (R \cup H)$. Поверхность $\mathbb{R}\Sigma_1$ изображена на рис. 6.6 (мы обозначаем одинаково кривые на $\mathbb{R}\Sigma_2$ и их прообразы на $\mathbb{R}\Sigma_1$). Стыгивая R , получаем $\mathbb{R}P^2$ с требуемым расположением кватрики C и кубики E .

Последние две операции (двулистное накрытие и стягивание кривой R) в терминах уравнений означают следующее. На $U := \mathbb{R}\Sigma_2 \setminus (R \cup F) \cong \mathbb{R}^2$ можно выбрать аффинные координаты (x, y) , в которых H имеет вид $y = 0$, а слои расслоения $\Sigma_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ имеют вид $x = \text{const}$. Выберем знак координаты y так, что $y > 0$ сверху от H на рис. 6.5. Тогда уравнения требуемых кривых получаются из уравнений кривых на U (рис. 6.5) подстановкой $y = z^2$ с последующей проективизацией. Например, если $f(x, y) = 0$ — уравнение кривой C на U , то многогранником Ньютона многочлена f является треугольник с вершинами $(0,0)$, $(4,0)$, $(2,0)$, и тогда $f(x, z^2) = 0$ — уравнение кватрики, участвующей в конфигурации $A_2|---|A_2$. \square

Построение возмущений. Теперь мы построим возмущения особенностей типа A_{2n} с учетом расположения относительно максимально касающейся глад-

кой ветви. Пусть (x, y) — локальные координаты, в которых эта ветвь имеет вид $y = 0$. В соответствии с используемой выше системой кодировки обозначим через $A_{2n}|$ (соответственно, $|A_{2n}$) особенность $y^2 = x^{n+1}$ (соответственно, $y^2 = -x^{n+1}$), и $\langle s_1 \dots s_n \{ \alpha \}$ будет означать последовательность блоков $B(\langle)$, $B(s_1), \dots, B(s_n)$, расположенных вплотную один к другому вдоль оси $y = 0$, вне которых находятся α овалов в нижней полуплоскости и $\beta = n - \alpha$ овалов в верхней полуплоскости. Мы опишем только возмущения $A_{2n}|$, так как возмущения $|A_{2n}$ получаются из них отражением относительно вертикальной оси.

Предложение. Для любой последовательности знаков s_1, \dots, s_n существует возмущение $A_{2n}| \rightarrow \langle s_1 \dots s_n \{ \alpha \}$, где α — число плюсов в последовательности $-s_1, s_2, -s_3, \dots, (-1)^n s_n$.

Доказательство. Требуемые возмущения строятся методом T -кривых Виро (см. [12]). Пусть Δ — треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2n + 1, 0)$. Разобьем его на треугольники отрезками $[(0, 2), (2k + 1, 0)]$, $k = 1, \dots, n$, и произвольным образом продолжим это разбиение до примитивной триангуляции. Распределение знаков $s : \Delta \cap \mathbf{Z}^2 \rightarrow \{\pm 1\}$ зададим формулами $s(k, 0) = (-1)^k$, $s(k, 1) = s_k$, $s(0, 2) = 1$. \square

Замечание. В работе первого автора [9] доказано, что таким образом получают все M -расположения M -возмущений особенности A_{2n} относительно горизонтальной оси с точностью до "полужестких" изотопий, т.е. изотопий, при которых кривая в каждый момент имеет не более 2 пересечений с вертикальной прямой (или, говоря менее формально, изотопическая классификация, учитывающая порядок чередования овалов). Аналогичные результаты получены для M -кривых на линейчатых поверхностях, трехкратно пересекающих слои, с учетом расположения относительно исключительного сечения.

Следствие 2.2.2. Особенности A_2, A_4, A_6 обладают возмущениями:

$$\begin{array}{llll} A_2| \rightarrow \langle +\{0\} & A_4| \rightarrow \langle ++\{1\} & A_6| \rightarrow \langle +++\{1\} & \langle -++\{2\} \\ & \langle -\{1\} & \langle +++\{2\} & \langle ---\{3\} \\ & & \langle -+\{2\} & \langle +++\{0\} & \langle ---\{1\} \\ & & \langle --\{1\} & \langle +---\{1\} & \langle ----\{2\} \end{array}$$

Построение расположений $C_3 \sqcup C_4$. Все реализуемые модели из Теоремы 1, кроме $\langle +++++\rangle\{0\}$ и $\langle +-+--\rangle\{0\}$, построенных в 2.1, получаются возмущением особых кватрик в расположениях списка (2.1) способами, перечисленными в следствии 2.2.2. По поводу обоснования того, что любые возмущения из списка следствия 2.2.2 применимы к любой особенности из (2.1), см. замечание в конце работы [13].

При использовании принятой нами системы кодировки эти построения можно описать как чисто формальную замену выражений $A_n|$ и $|A_n$ в кодах из (2.1) в соответствии с таблицей из следствия 2.2.2, сопровождаемую складыванием чисел, встречающихся в фигурных скобках. Например, из особого расположения $A_2|---|A_2\{0\}$ получаются $\langle +----\rangle\{0\}$, $\langle +----\rangle\{1\}$, $\langle ----\rangle\{1\}$,

$\langle \text{-----} \rangle \{2\}$, где средние два расположения эквивалентны в силу симметрии. Все результаты построений (с учетом таких эквивалентностей) собраны в таблице 7 — см. переформулировку Теоремы 1 в конце статьи.

3. ЗАПРЕТЫ

3.1. Применение теории комплексных ориентаций.

Напомним необходимые понятия и факты (детали можно найти в [14]). Если множество A вещественных точек неособой вещественной кривой степени n разбивает множество комплексных точек этой кривой, то на две симметричные половины. Эти половины индуцируют на A как на общем крае две противоположные ориентации, которые называются *комплексными ориентациями*. Пара овалов, один из которых охватывает другой, называется *инъективной парой*. Инъективная пара ориентированных овалов называется *положительной*, если их ориентации индуцированы некоторой ориентацией ограничиваемого ими кольца в $\mathbb{R}P^2$, и *отрицательной* в противном случае. Если n нечетно, то овал O называется *положительным*, если $[O] = -2[J] \in H_1(\mathbb{R}P^2 \setminus \text{Int } O)$, где J — нечетная компонента кривой, и *отрицательным* в противном случае. Для кривой степени n при $n = 2k$ имеет место *формула Рохлина*

$$2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - k^2, \quad (3.1)$$

а при $n = 2k + 1$ — *формула Рохлина-Мишачева*

$$\Lambda^+ - \Lambda^- + 2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - k(k + 1). \quad (3.2)$$

Здесь Π^+ (Π^-) и Λ^+ (Λ^-) обозначают количество положительных (отрицательных) инъективных пар и овалов кривой, а l — общее число овалов кривой.

Теория комплексных ориентаций для каждой из допустимых моделей рис. 1 позволяет запретить некоторые значения для пар (α, β) . Пусть, например, модель $\langle \text{++++} \rangle \{\alpha\}$ реализуется некоторой кривой $C_3 \cup C_4$. Кубика C_3 и квартика C_4 обладают комплексными ориентациями как M -кривые, причем овал O_3 отрицателен в силу (3.2) при $k = l = 1$. Зафиксируем некоторую комплексную ориентацию кубики и выберем ориентацию овала O_4 — например, так, как показано на рис. 7. Пусть среди α и β свободных овалов квартики α^+ и β^+ положительных относительно нечетной ветви J_3 , а остальные α^- и β^- — отрицательны. Построим теперь неособую кривую степени 7 как результат малого возмущения кривой $C_3 \cup C_4$, устраняющего все 12 двойных точек согласованно с выбранными ориентациями — см. пунктир на рис. 7. Это можно сделать в силу теоремы Брюотти. По теореме Фидлера (см. [15] или [14]), индуцированная при этом ориентация возмущенной кривой является ее комплексной ориентацией, и, следовательно, должна удовлетворять формуле (3.2) с $k = 3$. В нашем примере мы имеем $l = 15$ (12 овалов, возникших при устранении особенностей, и три — из свободных овалов квартики), $\Lambda^+ = \alpha^+ + \beta^+ + 6$, $\Lambda^- = \alpha^- + \beta^- + 6$, $\Pi^+ = \alpha^+$, $\Pi^- = \alpha^-$ и формула (3.2) вместе с условием, что общее число свободных овалов равно трем, дает систему

$$\begin{cases} 3(\alpha^+ - \alpha^-) + (\beta^+ - \beta^-) = 3, \\ \alpha^+ + \alpha^- + \beta^+ + \beta^- = 3. \end{cases} \quad (3.3)$$

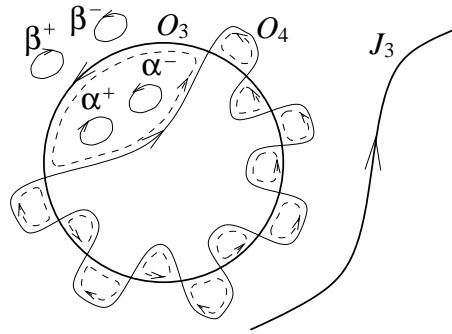


Рис. 7

Таблица 1.

| N пп. | α | α^+ | α^- | β^+ | β^- | Л.ч. | N пп. | α | α^+ | α^- | β^+ | β^- | Л.ч. |
|-------|----------|------------|------------|-----------|-----------|------|-------|----------|------------|------------|-----------|-----------|------|
| 1 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0 | 9 | 11 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 5 |
| 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 | 12 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 0 | 0 | -3 | 13 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | 0 | 3 | 0 | 0 | -9 | 14 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | -1 |
| 5 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 7 | 15 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | -3 |
| 6 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 5 | 16 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | -5 |
| 7 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 |
| 8 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 18 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| 9 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | -5 | 19 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | -1 |
| 10 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | -7 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | -3 |

Осталось найти целые неотрицательные решения системы (3.3).

Заметим теперь, что вид левой части первого уравнения в (3.3) один и тот же для всех моделей $O_3 \sqcup O_4$ из списка рис. 1. Правая часть этого уравнения зависит, вообще говоря, от взаимного расположения овалов O_3 и O_4 , а также от выбора ориентации овала O_4 , однако несложно проверить, что при смене этой ориентации меняется только знак правой части, а модуль остается неизменным.² В Таблице 1 перечислены все логически возможные наборы целых неотрицательных значений α^+ , α^- , β^+ , β^- , удовлетворяющие второму уравнению (3.3), и соответствующие значения левой части ("Л.ч.") первого уравнения этой системы. Сопоставляя с ними возможные значения правой части этого уравнения ("П.ч.") для каждой модели рис. 1, приведенные в Таблице 2, получаем запреты, указанные в последнем столбце этой таблицы. В частности, модель $\langle++++\rangle\{2\}$ не может быть реализована никакой кривой степени 7.

3.2. Применение теории зацеплений.

3.2.1. Расположение кривой относительно пучка прямых. Пусть $C \subset \mathbb{RP}^2$ — модель вещественной кривой степени m , имеющей в качестве особенностей лишь простые двойные точки. Фиксируем точку $p \in \mathbb{RP}^2 \setminus C$ и обозначим через

²Поэтому смена одной из исходных ориентаций на противоположную не даст новых запретов.

Таблица 2.

| Коды расположений $O_3 \sqcup O_4$ | П.ч. | Запрет |
|---|---------|-----------------------|
| $\langle +++++ \rangle \langle -+--+ \rangle \langle ---++ \rangle \langle +++-- \rangle \langle +--+ \rangle \langle -+--+ \rangle \langle +----- \rangle$ | ± 3 | $\alpha \neq 2$ |
| $\langle ---++ \rangle \langle -+--+ \rangle \langle +----- \rangle$ | ± 5 | $\alpha \neq 0; 3$ |
| $\langle ----- \rangle$ | ± 7 | $\alpha \neq 0; 1; 3$ |
| Остальные коды списка рис. 1 | ± 1 | $\alpha \neq 3$ |

\mathcal{L}_p пучок прямых, проходящих через эту точку. Выберем аффинные координаты (x, y) так, что (i) $\mathcal{L}_p = \{l_t\}$, где l_t — прямая, заданная уравнением $x = t$; (ii) C имеет m различных вещественных точек пересечения с бесконечно удаленной прямой; (iii) C находится в *общем положении* относительно \mathcal{L}_p , т.е. в \mathcal{L}_p имеется конечное число *критических прямых* l_{x_1}, \dots, l_{x_q} , $x_1 < \dots < x_q$, и каждая из них имеет одну точку двукратного пересечения с C (т.е. каждая из этих прямых либо касается C , либо пересекает C в ее двойной точке без касания).

Схему расположения кривой C относительно пучка \mathcal{L}_p будем кодировать, как и в [9], словом $u_1 \dots u_q$, где каждая буква u_i характеризует расположение кривой C в окрестности прямой l_{x_i} и принимает одно из значений $\supset_k, \subset_k, \times_k$ ($k \in \{1, \dots, m-1\}$) в соответствии с рис. 8; пару расположенных подряд символов $\subset_k \supset_k$ будем заменять одним символом \circ_k ("свободный овал в k -той полосе").

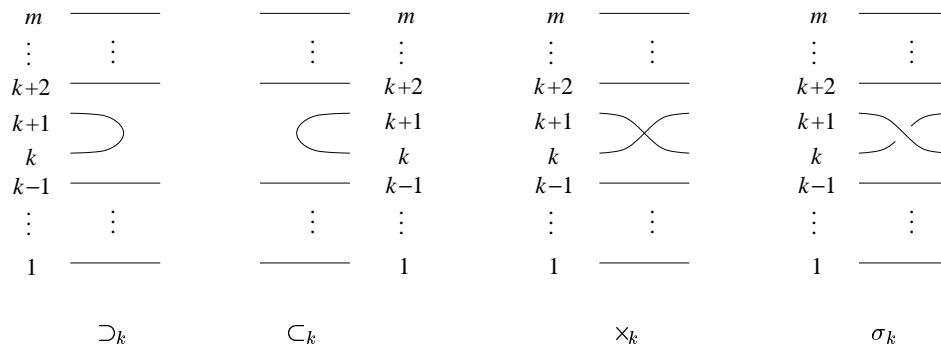


Рис. 8

Пример. Предположим, что модель $\langle +--+ \rangle \{2\}$ реализуется некоторой кривой $C = C_3 \cup C_4$. Пусть O_α^* — один из двух свободных овалов этой кривой, лежащих в области α , и p — точка внутри O_α^* . Тогда можно выбрать аффинные координаты (x, y) , удовлетворяющие перечисленным выше условиям, в которых C расположена так, как изображено на рис. 9. В силу теоремы Безу остальные два свободных овала, O_α в области α и O_β в области β , должны находиться внутри вертикальной полосы $D = \{x_7 < x < x_{12}\}$, где l_{x_7} и $l_{x_{12}}$ — критические прямые, касающиеся овала O_4 . Множество $J_3 \cup O_3 \cup O_\alpha^*$ делит D на шесть горизонтальных полос, которые мы занумеруем числами от 1 до 6 снизу вверх (в порядке возрастания координаты y). По теореме Безу ни одна

прямая пучка \mathcal{L}_p (вертикальная прямая на рис. 9) не может пересекать оба овала O_α и O_β . Пусть левый из этих овалов расположен в i -й полосе, а правый — в j -й. Тогда схема расположения кривой C относительно \mathcal{L}_p кодируется словом

$$\times_3 \times_2 \times_2 \times_3 \times_3 \times_2 \supset_3 \circ_i \circ_j \subset_4 \times_5 \times_4 \times_4 \times_5 \times_5 \times_4. \quad (3.4)$$

Поскольку полосы с номерами 2 и 5 (3 и 4) принадлежат одной области α (соответственно, области β), то, с учетом очевидной симметрии, достаточно рассмотреть только случаи $(i, j) \in \{(2, 3), (2, 4), (5, 3), (5, 4)\}$.

Замечание. Чтобы в Таблице 3 ниже запись кода была короче, вместо \times_k будем писать сам индекс k . Например, (3.4) будет иметь вид $32^23^22 \supset_3 \circ_i \circ_j \subset_4 54^25^24$.

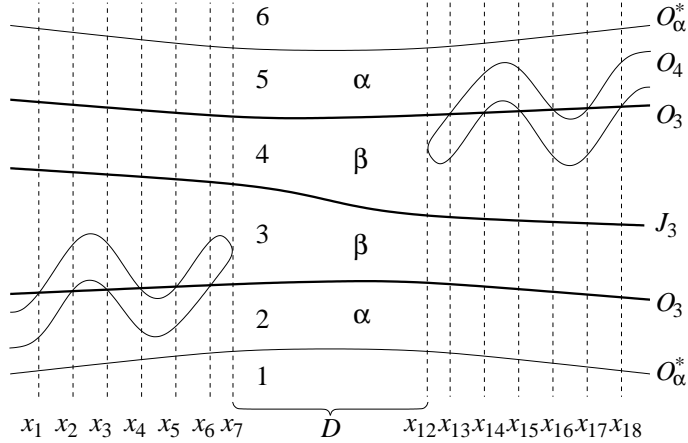


Рис. 9.

3.2.2. Коса вещественной алгебраической кривой. Напомним, что коса из m нитей — это график m -значной функции $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ с попарно различными значениями в каждой точке, рассматриваемый с точностью до послышной изотопии, причем $F(0) = F(1) = \{y_1, \dots, y_m\}$, $\operatorname{Re} y_1 < \dots < \operatorname{Re} y_m$. Группа B_m кос из m нитей имеет стандартное копредставление

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ при } |i - j| > 1, \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ при } |i - j| = 1 \rangle,$$

где образующая σ_k показана на рис. 8, а ориентация выбирается так, что двузначной функции $F(t) = e^{\pm t\pi i}$, $t \in [0, 1]$, отвечает коса $\sigma_1 \in B_2$.

Замыканием косы $b \in B_m$ называется зацепление в \mathbb{R}^3 , полученное соединением концов $F(1)$ ее нитей с их началами $F(0)$ с помощью m дуг, проекции которых на плоскость не пересекаются.

Следуя [9], вещественной алгебраической кривой C степени m и точке $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus C$ сопоставим косу $b_{(C,p)} \in B_m$ следующим образом. Пусть $y = F(x)$ — m -значная функция, графиком которой является комплексификация кривой C , и пусть $x = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ — простая замкнутая кривая в верхней полуплоскости комплексификации оси Ox , охватывающая все значения x с $\operatorname{Im} x > 0$,

при которых l_x — критическая прямая пучка \mathcal{L}_p . Тогда $b_{(C,p)}$ — коса, соответствующая графику функции $y = F(\gamma(t))$. Эта коса, вообще говоря, зависит от начальной точки пути γ , но ее класс сопряженности, а значит, и замыкание, — не зависят.

Если C имеет m вещественных точек пересечения с бесконечно удаленной прямой и не менее $m - 2$ вещественных точек пересечения с каждой из остальных прямых пучка \mathcal{L}_p , то несложно убедиться (см. [9]), что коса $b_{(C,p)}$ однозначно с точностью до сопряженности определяется видимым на $\mathbb{R}P^2$ расположением кривой C относительно пучка прямых \mathcal{L}_p . Разложение косы $b_{(C,p)}$ на стандартные образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ получается следующим образом. Положим $\pi_{k,l} = \prod_{i=k}^l \sigma_i$ (индекс i меняется последовательно от $i = k$ до $i = l$), $\tau_{k,l} = \pi_{l,k-1}^{-1} \pi_{k,l+1}$ и $\tau_{l,k} = \tau_{k,l}^{-1}$ при $k > l$, $\tau_{k,k} = 1$, $\Delta_m = \pi_{1,m-1} \pi_{1,m-2} \dots \pi_{1,1}$. Тогда $b_{(C,p)} = b_{\mathbb{R}} \Delta_m$, где $b_{\mathbb{R}} \in B_m$ получается из кодирующего слова $u_1 \dots u_q$ (см. 3.2.1) применением следующих правил замены подслов:

- (i) $\supset_k \subset_l \longrightarrow \sigma_k^{-1} \tau_{k,l}$;
- (ii) $\supset_k \times_{i_1} \times_{i_2} \dots \times_{i_p} \subset_l \longrightarrow \sigma_k^{-1} \delta_1 \dots \delta_p \tau_{k,l}$, где

$$\delta_j = \begin{cases} \sigma_{i_j}^{-1} & \text{при } i_j < k - 1 \\ \sigma_{i_j+2}^{-1} & \text{при } i_j > k - 1 \\ \tau_{k,k+1} \sigma_{k-1}^{-1} \tau_{k+1,k} & \text{при } i_j = k - 1 \end{cases}$$

- (iii) Каждый символ \times_i , не замененный по правилу (ii), заменяется на σ_i^{-1} .

Пример. Для слова (3.4) при $(i, j) = (2, 3)$ получаем

$$b_{\mathbb{R}} = \underbrace{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-2} \sigma_3^{-2} \sigma_2^{-1}}_{\times_3 \times_2 \times_2 \times_3 \times_3 \times_2} \cdot \underbrace{\sigma_3^{-1} (\sigma_2^{-1} \sigma_3)}_{\supset_3 \subset_2} \cdot \underbrace{\sigma_2^{-1} (\sigma_3^{-1} \sigma_2)}_{\supset_2 \subset_3} \cdot \underbrace{\sigma_3^{-1} (\sigma_4^{-1} \sigma_3)}_{\supset_3 \subset_4} \cdot \underbrace{\sigma_5^{-1} \sigma_4^{-2} \sigma_5^{-2} \sigma_4^{-1}}_{\times_5 \times_4 \times_4 \times_5 \times_5 \times_4}.$$

3.2.3. Неравенство Мурасуги-Тристрама. Напомним некоторые определения. Пусть A — вещественная симметричная матрица, и $B = Q A Q^t$ — ее диагонализация. *Сигнатура* $\sigma(A)$ и *дефект* (nullity) $n(A)$ матрицы A определяются как сумма знаков диагональных элементов и число нулей на диагонали матрицы B .

Поверхность Зейферта ориентированного зацепления L в трехмерной сфере S^3 называется связная ориентированная поверхность $X \subset S^3$, краем которой (с учетом ориентации) является L . Пусть x_1, \dots, x_n — базис в $H_1(X, \mathbb{Z})$. *Матрицей Зейферта* называется матрица из коэффициентов зацепления $\text{lk}(x_i, x_j^+)$, где x_j^+ — результат малого сдвига цикла x_j вдоль поля положительных нормалей к X . *Сигнатура* $\sigma(L)$ и *дефект* $n(L)$ зацепления L определяются формулами $\sigma(L) = \sigma(V + V^t)$, $n(L) = 1 + n(V + V^t)$, где V — матрица Зейферта.

Определим сигнатуру $\sigma(b)$ и дефект $n(b)$ косы b как сигнатуру и дефект ее замыкания и для $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ положим $e(b) = \sum k_i$.

В [9] показано, что необходимым условием того, что данная схема расположения кривой относительно пучка прямых \mathcal{L}_p реализуема вещественной алгебраической кривой степени m , является неравенство Мурасуги — Тристрама,

которое в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$|\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0, \quad b = b_{(C,p)} \in B_m. \quad (3.5)$$

Для вычисления матрицы Зейферта по заданной кривой b мы пользовались несложной компьютерной программой, написанной первым автором для вычислений в [9]. Эта программа опирается на стандартный алгоритм построения поверхности Зейферта с помощью так называемых окружностей Зейферта, получающихся при сглаживании двойных точек на диаграмме зацепления; подробности см. в [9]. Этот алгоритм дает матрицу $s \times s$, где $s = e(b) + m - 1$.

3.2.4. Результаты вычислений.

Здесь мы приводим результаты вычислений величин, входящих в неравенство (3.5), и полученные на этой основе запреты. Во второй и третьей колонках таблицы 3 перечислены все модели, запрещенные с помощью теории зацеплений. В графе "N" дан номер строки; ниже ссылка на k -ю строку таблицы 3 имеет вид "Nk". В графе "p" следующим образом указан выбор точки p (центра пучка прямых):

- I — внутри свободного овала кривой C_4 из области α ;
- II — внутри пересечения внутренностей несвободных овалов O_3 и O_4 ;
- III — в области α вне овалов кривой C_4 , но в выпуклой оболочке овала O_4 ;
- IV — в области, помеченной звездочкой на третьей модели рис. 1 (данный выбор точки p мы используем только для этой модели).

В следующей колонке таблицы 3 приведены коды взаимных расположений пучка \mathcal{L}_p и модели кривой $C_3 \cup C_4$. Заметим, что выбор месторасположения точки p определяет этот код с точностью до следующих замен фрагментов кодов:

$$\times_j \supset_{j\pm 1} \leftrightarrow \times_{j\pm 1} \supset_j; \quad C_{j\pm 1} \times_j \leftrightarrow C_j \times_{j\pm 1}; \quad \times_j u_k \leftrightarrow u_k \times_j; \quad (3.6)$$

$$C_j \supset_{j\pm 1} \leftrightarrow \emptyset, \quad (3.7)$$

где $|k - j| > 1$ и u — любой из символов \times , C , \supset . Выбор вариантов из (3.6) не влияет на результаты вычислений, в случае (3.7) всегда будем выбирать вариант " \emptyset " (см. предложение 5.3.1 [9]). Тогда $e(b) = 9 - \#(\circ) - \#(\supset)$, где $\#(\cdot)$ — количество символов данного вида в коде (см. последний столбец Таблицы 3).

Для рассматриваемого в этой статье случая $m = 7$. Обозначим через h левую часть неравенства (3.5). Для строки N1 вычисления дают $n = 1$, $\sigma = 2$, откуда $h = 2 + 7 - 6 - 1 = 2$, что противоречит неравенству (3.5), т.е. доказывает нереализуемость модели $\langle +++++ \rangle \{3\}$.

В таблице 4 приведены все подлежащие рассмотрению наборы значений параметров i и j (т.е. возможные способы распределения свободных овалов с учетом симметрии — ср. с примером в п.3.2.1) для строки N2, а в таблице 5 — наборы (i, j, k) для строк N4–N18; наборы для строки N3 содержатся в таблице 6.

Для строки N2 вычисления дают $n = 1$ и значения величины σ , приведенные в таблице 4, откуда опять во всех случаях получаем $h > 0$. Для строк N3–N18 имеем $e(b) < 6$, поэтому если $n = 1$, то для этих строк (3.5) дает запрет независимо от значения сигнатуры σ . Результаты вычислений для тех случаев, когда $n > 1$, собраны в таблице 6.

Таблица 3.

| N | Код модели | α | p | Код расположения | $e(b)$ |
|----|----------------------------------|----------|-----|--|--------|
| 1 | $\langle+++++\rangle\{\alpha\}$ | 3 | II | $\supset_2 0_2 0_2 1^{12} C_5$ | 6 |
| 2 | $\langle++-+-\rangle\{\alpha\}$ | 1,2 | I | $32^2 3^2 2 \supset_3 0_i 0_j C_4 54^2 5^2 4$ | 6 |
| 3 | $\langle--+-+\rangle\{\alpha\}$ | 0,1 | IV | $2312^3 \supset_3 0_i 0_j 0_k C_3 2^3 132 \supset_3 C_4$ | 4 |
| 4 | $\langle-++++\rangle\{\alpha\}$ | 0 | II | $2^2 \supset_3 0_i 0_j 0_k 1^8 4 C_5 6$ | 5 |
| 5 | $\langle++-+-\rangle\{\alpha\}$ | 2 | III | $5^2 \supset_6 0_i 0_j 0_k 2^3 1^2 2^3 C_6 5^2$ | 5 |
| 6 | $\langle+++--\rangle\{\alpha\}$ | 2 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 2^2 1^2 2^6 C_5 6$ | 5 |
| 7 | $\langle-+-+--\rangle\{\alpha\}$ | 0,1 | III | $6^2 \supset_5 0_i 0_j 0_k 12^6 1 C_5 6^2$ | 5 |
| 8 | $\langle-+-+--\rangle\{\alpha\}$ | 0,1 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 2^4 1^2 2^2 1^2 C_5 6$ | 5 |
| 9 | $\langle-+-+--\rangle\{\alpha\}$ | 1 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 2^2 1^2 2^4 1^2 C_5 6$ | 5 |
| 10 | $\langle---+--\rangle\{\alpha\}$ | 0 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 2^6 1^4 C_5 6$ | 5 |
| 11 | $\langle-+-+--\rangle\{\alpha\}$ | 1 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 2^4 1^4 2^2 C_5 6$ | 5 |
| 12 | $\langle-+-+--\rangle\{\alpha\}$ | 1 | III | $6^2 \supset_5 0_i 0_j 0_k 1^3 2^2 1^3 C_5 6^2$ | 5 |
| 13 | $\langle-+-+--\rangle\{\alpha\}$ | 0,3 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 2^2 1^2 2^2 1^4 C_5 6$ | 5 |
| 14 | $\langle++----\rangle\{\alpha\}$ | 0,3 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 1^6 2^4 C_5 6$ | 5 |
| 15 | $\langle++----\rangle\{\alpha\}$ | 0 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 1^2 2^2 1^4 2^2 C_5 6$ | 5 |
| 16 | $\langle++----\rangle\{\alpha\}$ | 0 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 1^4 2^4 1^2 C_5 6$ | 5 |
| 17 | $\langle++----\rangle\{\alpha\}$ | 3 | III | $5^2 \supset_6 0_i 0_j 0_k 21^6 2 C_6 5^2$ | 5 |
| 18 | $\langle++----\rangle\{\alpha\}$ | 1 | III | $6 \supset_5 0_i 0_j 0_k 1^6 2^2 1^2 C_5 6$ | 5 |

Таблица 4.

| Строка N2 | | | | |
|-----------|-----|-----|----------|-----|
| α | i | j | σ | h |
| 1 | 3 | 3 | -2 | 2 |
| 1 | 3 | 4 | -2 | 2 |
| 1 | 4 | 3 | -4 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | -4 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | -2 | 2 |
| 2 | 5 | 3 | -2 | 2 |
| 2 | 5 | 4 | -2 | 2 |

Таблица 5.

| Строка | α | Рассмотренные наборы (ijk) |
|----------------|----------|--|
| N4 | 0 | (333)(334)(343)(344)(433)(434)(443)(444) |
| N5 | 2 | (665)(664)(656)(646) |
| N6 | 2 | (665)(664)(656)(646)(566)(466) |
| N7 | 0 | (555)(554)(545)(544)(444) |
| N8,N10,N13–N16 | 0 | (555)(554)(545)(544)(455)(454)(445)(444) |
| N7,N12 | 1 | (655)(654)(645)(644)(565)(564)(464) |
| N8,N9,N11,N18 | 1 | (655)(654)(645)(644)(565)(564) (556)(546)(465)(464)(456)(446) |
| N13,N14,N17 | 3 | (666) |

Итак, во всех случаях, включенных в таблицу 3, $h > 0$, что и завершает доказательство теоремы 1.

Замечания. 1. Приведенные выше доказательства существенно опираются на "удачный" выбор области (компоненты множества $\mathbb{R}P^2 \setminus C$) для точки p : вычисления показали, что далеко не при любом выборе неравенство (3.5) дает противоречие. С другой стороны, "удачный" выбор этой области, вообще говоря, не единственный: например, модель $\langle--+-+\rangle\{1\}$ (см. строку N3 в таблице 3) запрещается и при выборе типа "I".

2. Модели, нереализуемые в силу п.3.1, тоже могут быть запрещены методами п.3.2. Мы привели в п.3.1 доказательства с помощью теории комплексных

Таблица 6.

| Строка | α | i | j | k | n | σ | h | Строка | α | i | j | k | n | σ | h |
|--------|----------|-----|-----|-----|-----|----------|-----|--------|----------|-----|-----|-----|-----|----------|-----|
| N3 | 0 | 3 | 3 | 3 | 2 | -1 | 2 | N3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | -3 | 4 |
| N3 | 0 | 3 | 3 | 4 | 2 | -3 | 4 | N3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | -3 | 4 |
| N3 | 0 | 3 | 4 | 3 | 2 | -3 | 4 | N3 | 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | -2 | 2 |
| N3 | 0 | 3 | 4 | 4 | 2 | -3 | 4 | N8 | 0 | 4 | 4 | 5 | 2 | -2 | 2 |
| N3 | 0 | 4 | 3 | 4 | 2 | -3 | 4 | N8 | 1 | 6 | 4 | 5 | 2 | -2 | 2 |
| N3 | 0 | 4 | 4 | 4 | 3 | -2 | 2 | N8 | 1 | 5 | 6 | 4 | 2 | -2 | 2 |
| N3 | 1 | 2 | 3 | 3 | 2 | -1 | 2 | N8 | 1 | 5 | 4 | 6 | 2 | -2 | 2 |
| N3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | -3 | 4 | N8 | 1 | 4 | 6 | 5 | 2 | -2 | 2 |
| N3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | -3 | 4 | N15 | 0 | 5 | 5 | 4 | 2 | -2 | 2 |
| N3 | 1 | 2 | 4 | 4 | 3 | -2 | 2 | N18 | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | -2 | 2 |

ориентаций, поскольку они значительно проще и не требуют компьютерных вычислений.

Приведем в заключение эквивалентную теореме 1 формулировку, содержащую указания на методы доказательства.

Таблица 7.

| | {0} | {1} | {2} | {3} | | {0} | {1} | {2} | {3} |
|---------|-------------------|----------------|----------------|-------------------|---------|-------------|----------------|----------------|-------------|
| <++++> | $\exists e$ | $\exists 6$ | с.о. | | <+----> | $\exists 4$ | | $\exists 2$ | с.о. |
| <+---> | $\exists e, 2, 3$ | | | с.о. | <----> | с.о. | | $\exists 3$ | с.о. |
| <--+--> | | | с.о. | $\exists e, 1, 4$ | <+---> | | $\exists 2, 3$ | с.о. | |
| <++++-> | | $\exists 1$ | $\exists 6$ | с.о. | <+----> | | $\exists 4$ | с.о. | |
| <+---> | $\exists e$ | $\exists 4$ | | с.о. | <+---> | | $\exists 1, 4$ | с.о. | $\exists 2$ |
| <+---> | $\exists 6$ | $\exists 2, 3$ | | с.о. | <+---> | | $\exists 1$ | с.о. | $\exists 3$ |
| <--+--> | | | $\exists 1$ | с.о. | <+----> | $\exists 5$ | $\exists 2$ | с.о. | |
| <--+--> | | | $\exists 1, 4$ | с.о. | <+----> | с.о. | | $\exists 1, 4$ | с.о. |
| <+---> | $\exists 1$ | | $\exists 2, 3$ | с.о. | <+----> | с.о. | $\exists 5$ | $\exists 2$ | с.о. |
| <--+--> | | $\exists 6$ | $\exists 3$ | с.о. | <+----> | с.о. | с.о. | $\exists 5$ | с.о. |

Теорема 1'. Топологическая классификация троек $(\mathbb{R}P^2, C_3 \sqcup C_4, C_3)$ описывается таблицей 7, где реализуемые модели и только они отмечены знаком " \exists ", буква "e" рядом с которым указывает на элементарное построение (см. п. 2.1), а цифры — порядковый номер возмущаемой кривой из списка (2.1) при построениях п. 2.2. Модели, запрещенные в п. 3.1 при помощи комплексных ориентаций (см. таблицу 2), помечены буквами "с.о.". Остальные модели (см. пустые клетки) запрещены в п. 3.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полотовский Г.М., Каталог M -распадающихся кривых 6-го порядка, ДАН СССР, **236:3** (1977), 548–551.
2. ———, $(M - 1)$ - и $(M - 2)$ -распадающиеся кривые 6-го порядка, Методы качественной теории дифференциальных уравнений, Горьковский университет, Горький, 1978, 130–148.

3. Polotovskii G.M., *On the classification of decomposing plane real algebraic curves*, Lect.Notes in Math. **1524** (1992), 52–74.
4. Mikhalkin G., *Topological arrangement of curves of degree 6 on cubic surfaces in $\mathbb{R}P^3$* , J. Algebraic Geom. **7** (1998), 219–237.
5. Polotovskii G.M., *On the classification of decomposable 7-th degree curves*, Contemp. Math. (1999) (to appear).
6. Корчагин А.Б., Шустин Е.И., *Аффинные кривые степени 6 и устранения невырожденной шестикратной особой точки*, Известия АН СССР, Серия Матем. **52:6** (1988), 1181–1199.
7. Шустин Е.И., *К изотопической классификации аффинных M -кривых степени 6*, Методы качественной теории и теории бифуркации, Горьковский университет, Горький, 1988, 97–105.
8. Оревкин С.Ю., *Новая аффинная M -секстика*, Функц. анализ и его прилож. **32:2** (1998), 91–94.
9. Orevkov S.Yu., *Link theory and arrangements of real algebraic curves*, Topology (1999) (to appear).
10. Гудков Д.А., *Топология вещественных проективных алгебраических многообразий*, Успехи Матем. Наук **29:4** (1974), 3–79.
11. Гудков Д.А., Небукина Г.Ф., *Точки перегиба и двойные касательные кривых 4-го порядка*. VII, Деп. в ВИНТИ **6711-В85** (1985), 1–16.
12. Itenberg I., Viro O., *Patchworking Algebraic Curves Disproves the Ragsdale Conjecture*, The Mathematical Intelligencer **18** (1996), no. 4, 19–28.
13. Шустин Е.И., *Новая M -кривая 8-й степени*, Математ. заметки **42:2** (1987), 180–186.
14. Рохлин В.А., *Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых*, Успехи Матем. Наук **33:5** (1978), 77–89.
15. Fiedler Th., *Eine Beschränkung für die Lage von reellen ebenen algebraischen Kurven*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **11** (1981), 7–19.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ РАН ИМ.В.А.СТЕКЛОВА
E-mail address: orevkov@mi.ras.ru

НИЖЕГОРОДСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
E-mail address: polot@curve.unn.ac.ru