

Математика

Представлено академиком В. А. Васильевым

УДК 515.162.8

## ТОПОЛОГИЯ МАКСИМАЛЬНО ЗАКРУЧЕННЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Г. Б. Михалкин и С. Ю. ОРЕВКОВ

Аннотация. О. Я. Виро нашел инвариант жесткой изотопии для вещественных алгебраических узлов в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ , который можно понимать как инвариант Васильева первого порядка. В настоящей статье мы рассматриваем вещественные алгебраические узлы степени  $d$  с максимальным возможным значением этого инварианта. Мы показываем, что при фиксированном  $d$  все такие узлы топологически изотопны, и явно идентифицируем их изотопический тип.

### ВВЕДЕНИЕ

Вещественной алгебраической кривой в  $\mathbb{P}^3$  будем называть (комплексное) одномерное подмногообразие  $L$  в  $\mathbb{P}^3 = \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ , инвариантное относительно инволюции комплексного сопряжения  $\text{conj} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ ,  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2 : \bar{x}_3)$ . Инвариантность относительно  $\text{conj}$  эквивалентна тому, что  $L$  задается системой однородных полиномиальных уравнений с вещественными коэффициентами. Степень кривой  $L$  зададим как ее гомологическую степень, т. е. такое число  $d$ , что  $[L] = d[\mathbb{P}^1] \in H_2(\mathbb{P}^3) \cong \mathbb{Z}$ . Кривая степени  $d$  пересекает общую комплексную плоскость в  $d$  точках.

Множество вещественных точек кривой  $L$  будем обозначать через  $\mathbb{R}L$ . Кривую  $L$  назовем *гладкой*, если это гладкое комплексное подмногообразие в  $\mathbb{P}^3$ . В этом случае  $\mathbb{R}L$  есть гладкое вещественное подмногообразие в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ , и если оно непусто, назовем его *вещественным алгебраическим зацеплением*, или *вещественным алгебраическим узлом* когда  $\mathbb{R}L$  связно.

Два алгебраических зацепления называются *жестко изотопными*, если они принадлежат одной компоненте связности пространства гладких вещественных кривых той же степени. Жесткая изотопическая классификация вещественных алгебраических рациональных кривых в  $\mathbb{P}^3$  получена в [1] до степени 5 и в [2] до степени 6. В [2] также дана жесткая изотопическая классификация узлов и зацеплений рода 1 до степени 6 (здесь имеется в виду род комплексной кривой  $L$ , а не минимальный род поверхности Зейферта).

Во всех вышеперечисленных случаях жесткий изотопический класс полностью определяется обычным (топологическим) изотопическим классом, комплексной ориентацией (для рода 1) и инвариантом жесткой изотопии  $w$ , введенным Олегом Виро в [4]

---

При поддержке грантов SNSF 159240, 159581 и NCCR SwissMAP (Г.М.) и гранта РНФ соглашение 14-21-00053 от 11.08.14 (С.О.)

Typeset by  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

под названием *encomplexed writhe*, что можно было бы перевести как «окомплексенная закрученность» (см. в [4; §1.2] обсуждение неологизма *encomplexed*). Этот инвариант определяется как сумма знаков пересечений общей проекции, причем учитываются также пересечения пар комплексно-сопряженных ветвей с надлежащими знаками; см. [4] (определение  $w$  также воспроизведено в [2]).

Пусть  $T(p, q) = \{(z, w) \mid z^p = w^q\} \cap \mathbb{S}^3$ ,  $p \geq q \geq 0$ , — торическое зацепление типа  $(p, q)$  в трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$ . При  $p \equiv q \pmod{2}$  определим *проективное торическое зацепление* как  $T_{proj}(p, q) = T(p, q)/(-1) \subset \mathbb{S}^3/(-1) = \mathbb{RP}^3$ .

Положим  $N_d = (d-1)(d-2)/2$ . По формуле рода это максимально возможное значение инварианта  $w$  для неприводимых кривых степени  $d$ , которое может достигаться только если кривая рациональна. Поэтому гладкую неприводимую вещественную алгебраическую кривую  $K$  в  $\mathbb{P}^3$ , для которой  $|w(K)| = N_d$ , где  $d = \deg K$  (а значит, род равен нулю), мы будем называть *максимально закрученной* (maximally writhed), или *MW-кривой*. Сформулируем основной результат статьи.

**Теорема 1.** *Пусть  $K$  — MW-кривая степени  $d \geq 3$ , причем  $w(K) = N_d$ . Тогда узел  $\mathbb{R}K$  изотопен  $T_{proj}(d, d-2)$ .*

**Следствие 1.** *Плоская проекция MW-кривой степени  $d$  из общей вещественной точки имеет  $N_d$  или  $N_d - 1$  вещественных двойных точек с вещественными локальными ветвями.*

*Доказательство.* Это следует из результата Мурасуги [3; предложение 7.5], состоящего в том, что любая проекция торического зацепления  $T(p, q)$ ,  $1 \leq q \leq p$ , имеет не менее  $p(q-1)$  пересечений.  $\square$

В предложении 2 (см. самый конец статьи) мы даем уточнение и независимое (т. е. не использующее работу [3]) доказательство следствия 1.

**Гипотеза 1.** В условиях теоремы 1 кривая  $K$  жестко изотопна  $T_{proj}(d, d-2)$ .

**Гипотеза 2.** Если вещественный алгебраический узел  $\mathbb{R}K$  степени  $d$  в  $\mathbb{RP}^3$  изотопен  $T_{proj}(d, d-2)$ , то  $w(K) = N_d$ .

В другой статье мы предполагаем доказать гипотезу 2, а также обобщить теорему 1 на случай зацеплений произвольного рода.

Следующее дифференциально-геометрическое свойство максимально закрученных алгебраических кривых нам сообщил Олег Виро.

**Предложение 1.** *Пусть кривая  $K$  удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда  $\mathbb{R}K$  имеет всюду положительное кручение.*

### 1. MW-КРИВЫЕ ИМЕЮТ ВСЮДУ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ КРУЧЕНИЕ (ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1)

Напомним, что знак (дифференциально-геометрического) кручения кривой  $t \mapsto r(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , совпадает со знаком определителя  $\det(r', r'', r''')$  и не зависит от выбора параметризации при  $r' \neq 0$ . Знак кручения кривой в  $\mathbb{RP}^3$  не зависит от выбора положительно ориентированной аффинной карты.

**Лемма 1.** Пусть  $K$  — вещественный алгебраический узел в  $\mathbb{P}^3$  рода 0. Если  $\mathbb{R}K$  имеет нулевое кручение в точке  $p$ , то существует сколь угодно малая деформация кривой  $K$  (в классе вещественных алгебраических кривых), имеющая отрицательное кручение в некоторой точке.

*Доказательство.* Выберем аффинные координаты  $(x_1, x_2, x_3)$  с центром в  $p$  такие, что параметризация  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  удовлетворяет условию  $\text{ord}_t x_1 < \text{ord}_t x_2 < \text{ord}_t x_3$ . Если  $\text{ord}_t x_k > k$  при  $k = 1, 2$  или  $3$ , то  $x_k$  допускает возмущение, для которого  $\text{ord}_t x_k = k$  и  $k$ -я производная  $x_k^{(k)}(0)$  имеет любой наперед заданный знак. Действительно, пусть  $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$  — однородные координаты, для которых  $x_i = y_i/y_0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда рассматриваемая параметризация может быть выбрана так, что  $x_i(t) = y_i(t)/y_0(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $y_0(t), \dots, y_3(t)$  — многочлены степени  $d = \deg K$ , и  $y_0(0) > 0$ . Тогда в качестве возмущения функции  $x_k(t)$  достаточно взять  $(c_k t^k + y_k(t))/y_0(t)$ , где  $0 < |c_k| \ll 1$  и  $c_k$  имеет требуемый знак.  $\square$

*Доказательство предложения 1.* Благодаря лемме 1 достаточно показать, что  $\mathbb{R}K$  не может иметь точек с отрицательным кручением. Предположим противное. Тогда в некоторой аффинной карте  $\mathbb{R}K$  имеет параметризацию вида  $t \mapsto (t, t^2 + O(t^3), -t^3 + O(t^4))$ . Это значит, что в достаточно малой окрестности начала координат кривая приближается рациональной кубической кривой с отрицательным кручением. Следовательно, есть проекция с отрицательным пересечением (см. [4; §1.4]). Поскольку  $w(K)$  есть сумма знаков всех вещественных пересечений и их количество не превосходит  $N_d$ , одно отрицательное пересечение делает невозможным достижение равенства  $w(K) = N_d$ .  $\square$

## 2. Единственность $MW$ -кривых с точностью до изотопии (доказательство теоремы 1)

Пусть кривая  $K$  удовлетворяет условиям теоремы 1, т. е.  $K$  — гладкая вещественная рациональная кривая в  $\mathbb{P}^3$  степени  $d \geq 3$ , и  $w(K) = N_d$ .

Для точки  $p \in \mathbb{P}^3$  обозначим через  $\pi_p : \mathbb{P}^3 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^2$  проекцию из  $p$ , а через  $\hat{\pi}_p : K \rightarrow \mathbb{P}^2$  — ее ограничение на  $K$ . Если  $p \in K$ , продолжим  $\hat{\pi}_p$  в  $p$  по непрерывности; тогда  $\pi_p^{-1}(\hat{\pi}_p(p)) = T_p$  — прямая, касающаяся  $K$  в точке  $p$ .

Для  $p \in \mathbb{R}\mathbb{P}^3$  положим  $C_p = \hat{\pi}_p(K)$ . Это алгебраическая кривая, и

$$\deg C_p = \begin{cases} d, & p \notin K \\ d - 1, & p \in K. \end{cases}$$

Напомним, что алгебраическая кривая  $C$  (возможно, особая) степени  $m$  в  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  называется *гиперболической* относительно точки  $q \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  (которая может как принадлежать, так и не принадлежать кривой  $C$ ), если любая прямая, проходящая через  $q$ , пересекает  $C$  в  $m$  вещественных точках с учетом кратностей. Положим

$$\text{hur}(C) = \{q \mid C \text{ гиперболическа относительно } q\}. \quad (1)$$

Легко проверить, что  $\text{hur}(C)$  либо пусто, либо является замкнутым выпуклым множеством. Оно может состоять из единственной точки, но тогда эта точка особа. Например, если  $C$  — каспидальная кубика, то  $\text{hur}(C)$  состоит только из ее каспа.

Аналогично, будем говорить, что наша кривая  $K$  гиперболична относительно вещественной прямой  $L$ , если для любой вещественной плоскости  $P$ , проходящей через  $L$ , все точки пересечения  $K$  и  $P \setminus L$  вещественны.

Следующие два свойства гиперболических кривых вытекают непосредственно из определений.

**Лемма 2.** Пусть  $C$  — плоская вещественная кривая,  $q \in \text{hyp}(C)$  и  $q_1 \in \mathbb{R}C \setminus \{q\}$ . Тогда каждая локальная ветвь кривой  $C$  в точке  $q_1$  гладка, вещественна и трансверсальна прямой  $(qq_1)$ . Проекция из  $q$  задает накрытие  $\mathbb{R}\tilde{C} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , где  $\tilde{C}$  — нормализация кривой  $C$ .  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $L$  — вещественная прямая в  $\mathbb{P}^3$  и  $p \in \mathbb{R}L$ . Тогда гиперболичность  $K$  относительно  $L$  эквивалентна условию  $\pi_p(L) \in \text{hyp}(C_p)$ .  $\square$

**Лемма 4.** Если  $p \in \mathbb{R}K$ , то  $\hat{\pi}_p(p)$  — гладкая точка кривой  $\mathbb{R}C_p$ , и  $T_p \cap K = \{p\}$ .

*Доказательство.* Согласно предложению 1,  $\mathbb{R}K$  имеет ненулевое кручение в точке  $p$ , следовательно образ ростка  $(K, p)$  при проекции  $\hat{\pi}_p$  является гладкой ветвью кривой  $C_p$  в точке  $q = \hat{\pi}_p(p)$ . Предположим, что  $C_p$  имеет еще одну локальную ветвь в  $q$  — проекцию ростка  $(K, p_1)$ . Выберем вещественную точку  $p_0$  на прямой  $(pp_1)$ , не совпадающую с  $p$  и  $p_1$ . Тогда  $C_{p_0}$  имеет (по крайней мере) две ветви в  $\pi_{p_0}(p) = \pi_{p_0}(p_1)$ , одна из которых каспидальна. В этом случае возмущением  $K$  можно получить либо не вещественное пересечение, либо пару вещественных пересечений противоположных знаков, что противоречит максимальной инвариантности инварианта  $w(K)$  (ср. с окончанием доказательства предложения 1).  $\square$

**Лемма 5.** Если  $p \in \mathbb{R}K$ , то  $\text{hyp}(C_p)$  — замыкание компоненты связности множества  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{R}C_p$  и  $\hat{\pi}_p(p)$  — гладкая точка на ее границе.

*Доказательство.* Положим  $q = \hat{\pi}_p(p)$ . Это гладкая точка кривой  $C_p$  по лемме 4. Для вещественной особой точки  $u$  кривой  $C_p$  обозначим через  $\sigma(u)$  ее вклад в  $w(K)$ , т. е. сумму знаков пересечений у нодальной деформации особенности  $u$ . Тогда очевидный аналог предложения 21 из работы [2] дает

$$w(K) = i(q') + i(q'') + \sum_{u \in \text{Sing}(\mathbb{R}C_p)} \sigma(u),$$

где  $q', q'' \notin C_p$  — точки, близкие к  $q$  и лежащие по разную сторону от  $\mathbb{R}C_p$ ,  $i(x)$  для  $x \notin C_p$  обозначает половину образа гомологического класса  $[\mathbb{R}C_p]$  при изоморфизме  $H_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$  (выбор ориентации см. в [2; §6]). Ясно, что  $i(q') + i(q'') \leq \deg C_p - 1 = d - 2$  и  $\sum_u \sigma(u) \leq \text{Card Sing}(\mathbb{R}C_p) \leq (d - 2)(d - 3)/2$ . Эти две верхние оценки в сумме дают  $N_d$ , а значит равенство  $w(K) = N_d$  влечет достижение равенства в каждой из них. Остается заметить, что равенство  $i(q') + i(q'') = d - 2$  влечет  $q \in \text{hyp}(C_p)$ .

Тот факт, что  $\text{hyp}(C_p)$  есть замыкание компоненты дополнения к  $C_p$ , вытекает из обсуждения после (1), так как  $q$  — гладкая точка кривой  $C_p$ .  $\square$

Напомним, что прямая, касающаяся  $K$  в точке  $p$ , обозначается через  $T_p$ . Положим

$$T = \bigcup_{p \in \mathbb{R}K} \mathbb{R}T_p$$

**Лемма 6.** *Предположим, что кривая  $K$  гиперболична относительно вещественной прямой  $L$ , и что  $p \in (\mathbb{R}K) \setminus L$ . Тогда  $L \cap T_p = \emptyset$ .*

*Доказательство.* Следует из леммы 2 и леммы 3.  $\square$

**Лемма 7.** *Пусть  $p_1$  и  $p_2$  — различные точки на  $\mathbb{R}K$ . Тогда  $T_{p_1} \cap T_{p_2} = \emptyset$ .*

*Доказательство.* Пусть  $L = T_{p_1}$ . Тогда кривая  $K$  гиперболична относительно  $L$  по лемме 5 и лемме 3, и при этом  $p_2 \notin L$  по лемме 4. Поэтому результат следует из леммы 6.  $\square$

Таким образом,  $T$  является дизъюнктивным объединением непрерывного семейства вещественных проективных прямых (топологически — окружностей), параметризованных замкнутой кривой  $\mathbb{R}K$ . Мы покажем, что пара  $(T, \mathbb{R}K)$  изотопна в  $\mathbb{R}P^3$  гиперболоиду с лежащим на нем проективным торическим узлом  $T_{proj}(d, d-2)$ . Заметим, что поверхность  $T$  не гладкая. Она имеет ребро возврата вдоль  $\mathbb{R}K$ .

**Лемма 8.** *Существуют две вещественные прямые  $L_1$  и  $L_2$  такие, что  $K$  гиперболична относительно каждой из них,  $L_1 \cap K = \emptyset$  и  $L_2$  пересекает  $K$  без касания в паре комплексно-сопряженных точек.*

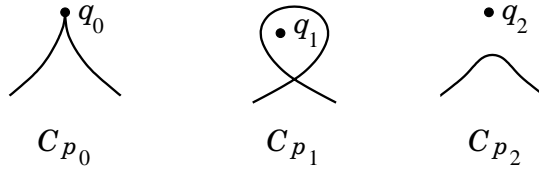


Рис. 1. Два возмущения каспа в доказательстве леммы 8

*Доказательство.* Выберем точку  $p \in \mathbb{R}K$  и точку  $p_0 \in \mathbb{R}T_p \setminus \{p\}$ . Тогда  $\pi_p(T_p) = \hat{\pi}_p(p) \in \text{hur}(C_p)$  по лемме 5, следовательно  $K$  гиперболична относительно  $T_p$  по лемме 3. Положим  $q_0 = \pi_{p_0}(p)$ . Тогда, опять по лемме 3, имеем  $q_0 \in \text{hur}(C_{p_0})$ . Кривая  $C_{p_0}$  имеет касп в  $q_0$ , поскольку кривизна в  $p$  ненулевая. Пусть  $p_1$  и  $p_2$  — точки, близкие к  $p_0$ , выбранные по разные стороны от соприкасающейся плоскости кривой  $\mathbb{R}K$  в точке  $p$ . Тогда  $C_{p_1}$  и  $C_{p_2}$  получены из  $C_{p_0}$  возмущениями каспа, изображенными на рис. 1, где  $q_2$  — уединенная двойная точка кривой  $C_{p_2}$  (точка пересечения двух комплексно-сопряженных локальных ветвей). Положим  $L_j = \pi_{p_j}^{-1}(q_j)$ ,  $j = 1, 2$ , где точки  $q_1$  и  $q_2$  выбраны согласно рис. 1. Из  $q_0 \in \text{hur}(C_{p_0})$  следует, что  $q_j \in \text{hur}(C_{p_j})$ ,  $j = 1, 2$ , из чего по лемме 6 вытекает гиперболичность кривой  $K$  относительно  $L_j$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $L_1$  и  $L_2$  будут как в лемме 8.

Прямая  $L_1$  не пересекается с  $T$  по лемме 6. Пусть  $P$  — вещественная плоскость, проходящая через  $L_1$ . Опять по лемме 6,  $P$  пересекает каждую прямую  $T_p$ ,  $p \in \mathbb{R}K$ , в единственной точке; обозначим эту точку через  $\xi_P(p)$ . Тогда отображение  $\xi_P : \mathbb{R}K \rightarrow \mathbb{R}P$  непрерывно. Оно инъективно по лемме 7, и его образ (который совпадает с  $T \cap \mathbb{R}P$ ) не пересекается с  $L_1$ . Следовательно,  $T \cap \mathbb{R}P$  — жорданова кривая в вещественной аффинной плоскости  $\mathbb{R}P \setminus L_1$ . Обозначим через  $D_P$  диск, ограниченный этой жордановой кривой, и положим  $U_1 = \bigcup_P D_P$  где  $P$  пробегает все вещественные

плоскости, проходящие через  $L_1$ . Тогда  $U_1$  расслаивается на диски над окружностью, параметризованной пучком проходящих через  $L_1$  плоскостей. Поскольку  $\mathbb{R}P^3$  ориентируемо, это расслоение тривиально, значит  $U_1$  — полноторие и  $\partial U_1 = T$ . Каждая из этих плоскостей  $P$  трансверсально пересекает  $K$  в  $d$  вещественных точках, следовательно  $\mathbb{R}K$  лежит в  $T$ , реализуя гомологический класс  $d\alpha$ , где  $\alpha$  — образующая группы  $H_1(U_1)$ .

Те же рассуждения, примененные к  $L_2$ , показывают, что  $T$  ограничивает полноторие  $U_2$ , для которого  $\mathbb{R}K$  реализует гомологический класс  $(d-2)\beta$ , где  $\beta$  — образующая группы  $H_1(U_2)$ . Таким образом, поднятие  $K$  на сферу  $S^3$  есть  $T(d, d-2)$ , что завершает доказательство.  $\square$

Мы видим, что  $T$  разбивает  $\mathbb{R}P^3$  на два полнотория  $U_1$  и  $U_2$ , и при этом  $\mathbb{R}L_1 \subset U_2$  и  $\mathbb{R}L_2 \subset U_1$ .

**Предложение 2.** (Ср. со следствием 1). Пусть  $p$  — общая точка в  $\mathbb{R}P^3$ . Тогда  $C_p$  имеет только вещественные двойные точки. Если  $p \in U_1$ , то все двойные точки имеют вещественные локальные ветви и внутренность множества  $\text{hur}(C_p)$  непуста. Если  $p \in U_2$ , то одна двойная точка  $q$  уединенная (т.е. имеет комплексно-сопряженные локальные ветви), все остальные двойные точки имеют вещественные локальные ветви, и  $\text{hur}(C_p) = \{q\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим путь общего положения  $p(t)$ , соединяющий данную точку с точкой на  $T$ . Он определяет непрерывную деформацию диаграммы узла, которая состоит из последовательных преобразований Рейдемейстера (R1) – (R3). Однако (R2) невозможно, так как в нем участвует отрицательное пересечение, а (R1) встречается только когда  $p(t)$  проходит через  $T$ . Следовательно, количество и тип двойных точек не меняются при деформации. Проекция из точки, лежащей на поверхности  $T$ , каспидальна и гиперболична относительно каспа, поэтому результат вытекает из леммы 2.

Непустота внутренности  $\text{hur}(C_p)$  в случае, когда  $p \in U_1$ , следует из того, что  $\text{hur}(C_p)$  может исчезнуть только при преобразовании (R3). Однако это невозможно, так как все пересечения положительны и граничная ориентация на  $\partial(\text{hur}(C_p))$  согласуется с ориентацией кривой  $\mathbb{R}C_p$  по лемме 2 (см. рис. 2).  $\square$

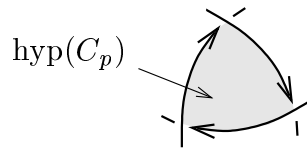


Рис. 2. Неисчезание  $\text{hur}(C_p)$  при преобразованиях (R3)

**Благодарность.** Мы признательны Олегу Виро за очень полезные обсуждения.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Björklund, *Real algebraic knots of low degree*, J. Knot Theory Ramifications **20:9** (2011), 1285–1309.

2. G. Mikhalkin and S. Orevkov, *Real algebraic knots and links of low degree*, J. Knot Theory Ramifications **26** (2016), 1642010, 34 pages.
3. K. Murasugi, *On the braid index of alternating links*, Trans. Amer. Math. Soc. **326:1** (1991), 237–260.
4. O. Viro, *Encomplexing the writhe*, in: Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 202, 2001, pp. 241–256.

UNIVERSITÉ DE GENÈVE, SECTION DE MATHÉMATIQUES, BATTELLE VILLA, 1227 CAROUGE, SUISSE  
*E-mail address:* grigory.mikhalkin@unige.ch

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА, УЛ. ГУБКИНА Д. 8, МОСКВА, РФ, 119991;  
IMT, UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, 31062 TOULOUSE, FRANCE;  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ», УЛ. УСА-  
ЧЕВА, Д. 6, МОСКВА, РФ, 119048.  
*E-mail address:* orevkov@math.ups-tlse.fr