АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ В $\mathbb{C}^2$, ПРОХОДЯЩАЯ ЧЕРЕЗ ЦЕНТР, У КОТОРОЙ ВСЕ КОМПОНЕНТЫ ГРАНИЦЫ СКОЛЬ УГОДНО КОРОТКИ

С.Ю. Оревков

Памяти Анатолия Георгиевича Витушкина

1. Введение

Пусть $\mathbb{S}^3$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^2$ с центром в начале координат. А.Г. Витушкин поставил следующий вопрос (см. [1], [2; задача 5.3], [4]):

(1). Существует ли абсолютная константа c, такая что для любой комплексной алгебраической кривой A в $\mathbb{C}^2$, проходящей через начало координат, найдется компонента связности множества $A \cap \mathbb{S}^3$, длина которой не меньше чем c?
(2). Верно ли, что $c = 2\pi$?

В настоящей статье мы даем отрицательный ответ на оба вопроса.

Теорема 1.1. *а). Пусть Ω — компактная замкнутая область в комплексно аналитической поверхности, и M — граница области Ω. Пусть M_0 — множество точек на M, в окрестности которых M является C^2-гладкой строго псевдовыпуклой вещественной гиперповерхностью. Предположим, что на Ω задана произвольная риманова метрика. Пусть A — комплексно аналитическая кривая в Ω, такая что ∂A лежит в M_0 и реализует нулевой класс в $H_1(M_0;\mathbb{Z})$, и пусть P — произвольне конечное множество точек на A.*

Тогда для любой двумерной цепи β в M_0, такой что $\partial\beta = \alpha$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует комплексно аналитическая кривая A' в Ω, которая ε-близка к $A \cup \operatorname{supp}\beta$, такая что длина каждой компоненты $\partial A'$ меньше чем ε, и при этом $P \subset A'$.

б). Если к тому же $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, и для каждой точки $p \in M_0$, комплексная касательная прямая T к поверхности M в точке p не пересекается с областью Ω в других точках, и при этом ограничение на прямую T второй фундаментальной формы поверхности M точке p положительно определено (в силу строгой псевдовыпуклости последнее условие эквивалентно тому, что секционная кривизна в точке p в направлении T положительна), то в качестве A' можно выбрать алгебраическую кривую.

Эта теорема непосредственно вытекает из предложений 2.6 и 3.5. Она доказана в конце §3. Ключевую роль в доказательстве играет понятие лежандровой сети, натянутой на трансверсальный цикл в трехмерном контактном многообразии, введенное в §2.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

Отрицательный ответ на вопрос Витушкина получается применением части б) теоремы 1.1 в случае, когда Ω — единичный шар, P — его центр, и A — произвольная кривая (например, прямая), проходящая через P.

Замечание 1.2. Условие *строгой* псевдовыпуклости в теореме 1.1 существенно, как видно из того, что если вместо шара рассматривать единичный бидиск, то ответы на оба вопроса Витушкина положительны (см. [1]).

Замечание 1.3. Формулировки теоремы 1.1 и предложений 2.6 и 3.5 из которых она следует, даны в "минимаксной общности", в том смысле, что мы старались давать максимально общие формулировки при условии, что самое простое известное нам доказательство для случая алгебраической кривой в единичном шаре нисколько не усложнится.

Если отказаться от этого принципа, то теорему 1.1 несложно обобщить настолько, насколько хватит фантазии. Например, прямую T в части б) можно заменить на алгебраическую кривую (но в этом случае усложнится доказательство соответствующего аналога леммы 3.1), можно ввести в рассмотрение границы Шилова, полиномиальную выпуклость и т.д.

Замечание 1.4. Если вместо алгебраических кривых рассматривать вещественные поверхности в $\mathbb{C}^2$, имеющие открытые проекции на (комплексные) координатные оси, то отрицательный ответ на вопрос (1) получен в [1].

Замечание 1.5. Напомним терминологию теории зацеплений. Зацепление $L \subset \mathbb{S}^3$ называется *неразложимым* (*в несвязную сумму*), если не существует трехмерных шаров B_1, B_2, таких что $B_1 \cup B_2 = \mathbb{S}^3$, $B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$, $L \cap B_1 \neq \varnothing \neq L \cap B_2$, и $L \cap B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Так вот, если в вопросе (1) вместо компонент связности зацепления $L = A \cap \mathbb{S}^3$ говорить о его неразложимых компонентах, то ответ будет *положительным*. Это следует из результатов работы [3], где доказано, что край связной кривой — неразложимое зацепление.

Замечание 1.6. По-видимому, для А.Г. Витушкина основной мотивировкой для постановки рассматриваемого в настоящей статье вопроса была его связь с задачей о полиномиальных оболочках "плохих" множеств. Связи между этими задачами обсуждаются, в частности, в недавней статье [4].

Заметчание 1.7. Ответ на вопрос (2) (верно ли, что $c = 2\pi$) отрицателен даже для кривых второй степени. Чтобы в этом убедиться, достаточно явно параметризовать кривую $\{\,(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = az(z-1)\,\} \cap \mathbb{S}^3$, затем численным интегрированием проверить, что при некоторых вещественных значениях параметра a ее длина меньше, чем 4π, и наконец, заметить, что возмущенная кривая $\{w^2 = az(z-1+\varepsilon)\} \cap \mathbb{S}^3$ при $0 < \varepsilon \ll 1$ состоит из двух равных половинок, суммарная длина которых близка к длине исходной кривой.

Итак, абсолютной константы c нет. Однако если фиксировать n — число компонент кривой $A \cap \mathbb{S}^3$, то такая константа, зависящая от n, несомненно, найдется (ясно, что суммарная длина всех компонент больше, чем 2π). Обозначим через $n(\varepsilon)$ минимальное число компонент кривой $A \cap \mathbb{S}^3$ при условии, что A — комплексная алгебраическая кривая, проходящая через начало координат, такая что все компоненты вещественной кривой $A \cap \mathbb{S}^3$ имеют длину, меньшую чем ε.

Из сказанного выше следует, что $n(\varepsilon) > 2\pi/\varepsilon$. Из теоремы Стокса несложно вывести, что при проектировании на $\mathbb{C}P^1$ сумма ориентированных площадей, ограниченных проекциями компонент кривой $A \cap \mathbb{S}^3$, больше чем площадь всей $\mathbb{C}P^1$, а значит, $n(\varepsilon) > \mathrm{const}/\varepsilon^2$ (см. предложение 4.9). С другой стороны, непосредственное применение конструкции, содержащейся в доказательстве теоремы 1.1, дает верхнюю оценку $n(\varepsilon) < \mathrm{const}/\varepsilon^4$.

Напрашивается естественная корректировка вопроса Витушкина: верно ли, что длина максимальной компоненты кривой $A \cap \mathbb{S}^3$ существенно больше очевидных оценок и если да, то насколько? Более конкретно, какова асимптотика величины $n(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$? Тот же вопрос можно задать о величине $d(\varepsilon)$ — минимальной степени алгебраической кривой. Как мы видели, порядок роста $n(\varepsilon)$ заключен между ε^{-2} и ε^{-4}. Представляется правдоподобным, что он равен ε^{-3}. В §6 мы доказываем верхнюю оценку на $n(\varepsilon)$ порядка ε^{-3}. В §5 мы показываем, что эта оценка не может быть улучшена методами данной статьи (т.е. при помощи построений, основанных на возмущении лежандровой сети). В конце §5 мы ставим новый вопрос, из положительного ответа на который следовала бы нижняя оценка на $n(\varepsilon)$ порядка ε^{-3}.

2. Лежандровы сети, натянутые на трансверсальные циклы

Все утверждения этого пункта почти что очевидны, но мы тем не менее приведем их доказательства.

Цепи, циклы и *границы* мы будем понимать более или менее в смысле теории сингулярных гомологий, но мы будем рассматривать только кусочно гладкие цепи, и при этом будем отождествлять цепи, получающиеся друг из дружки подразбиениями и перепараметризациями. В частности, *одномерная цепь* в гладком многообразии M — это элемент свободной абелевой группы, порожденной всеми кусочно гладкими отображениями $\alpha : I = [0,1] \to M$, отфакторизованной по всем соотношениям вида $\alpha = -(\alpha \circ \varphi)$ и $\alpha = (\alpha \circ \varphi_1) + (\alpha \circ \varphi_2)$, где φ — обращающий ориентацию кусочно гладкий гомеоморфизм отрезка I на себя, а φ_1 и φ_2 — сохраняющие ориентацию кусочно гладкие гомоеморфизмы отрезка I на отрезки $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$ соответственно. Из этих соотношений, например, следует, что постоянное отображение $I \to p \in M$ реализует нулевую цепь. Линейную комбинацию $\sum m_i \alpha_i$, представляющую цепь α, мы будем называть *минимальной реализацией цепи* α, если $m_i \neq 0$ при всех i, и если не существует индексов i_1, i_2, отрезков $I_1, I_2 \subset I$ и гомеоморфизма $\varphi : I_1 \to I_2$, таких что $\alpha_{i_1}|_{I_1} = \alpha_{i_2} \circ \varphi$.

Пусть $\sum m_i \alpha_i$ — некоторая минимальная реализация одномерной цепи α на многообразии M. В этом случае *носителем* цепи α называется множество $\operatorname{supp} \alpha = \bigcup \alpha_i(I)$, а если, к тому же, на M задана риманова метрика, то *длиной* цепи α называется величина $\operatorname{len} \alpha = \sum |m_i| \operatorname{len} \alpha_i$, где $\operatorname{len} \alpha_i$ — длина пути α_i. Цепь α называется *ε-короткой*, если $\operatorname{len} \alpha < \varepsilon$. Аналогично определяется носитель и площадь двумерной цепи. В дальнейшем, допуская некоторую вольность речи, мы не будем делать различия между цепями и их минимальными реализациями. Одномерный цикл называется *общим* или *в общем положении*, если это объединение попарно непересекающихся кусочно гладко вложенных ориентированных окружностей, взятых с кратностью 1.

Напомним, что *контактной структурой* на трехмерном ориентируемом многообразии M называется гладкое поле касательных двумерных плоскостей, которое может быть задано как $\ker\eta$, где η — некоторая 1-форма, такая что $\eta\wedge d\eta$ нигде не обращается в ноль. Известно, что все контактные структуры между собой локально эквивалентны.

Одномерная цепь на контактном многообразии (M,η) называется *лежандровой*, если она кусочно гладка класса C^2, и форма η обращается в ноль на ее гладких участках. Одномерная цепь α называется *положительно трансверсальной*, если ее можно представить в виде $\alpha=\sum m_i\alpha_i$, где $m_i>0$ и $\alpha_i^*(\eta)>0$ при всех i (такая реализация цепи α автоматически будет минимальной).

Обозначим через x,y,z стандартные координаты в $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим контактную структуру, задаваемую 1-формой $\eta=dz-y\,dx$. Обозначим через $\mathrm{pr}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ проекцию $(x,y,z)\mapsto(x,y)$.

Лемма 2.1. *Пусть $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ — путь класса гладкости C^2, начинающийся в точке $p_0=(x_0,y_0)$. Тогда для любого $z_0\in\mathbb{R}$ существует единственный лежандров путь $\tilde\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^3$, начинающийся в точке $\tilde p_0=(x_0,y_0,z_0)$, такой что $\gamma=\mathrm{pr}\,\tilde\gamma$. При этом длина пути $\tilde\gamma$ меньше, чем $L\sqrt{1+(|y_0|+L)^2}$, где L — длина пути γ.*

Путь $\tilde\gamma$ называется *лежандровым поднятием* пути γ, начинающимся в $\tilde p_0$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t)=(x(t),y(t))$. Положим $\tilde\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, где $z(t)=z_0+\int_{\gamma([0,t])}y\,dx$. Мы имеем $|\tilde\gamma'|^2=\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2=\dot x^2+\dot y^2+(y\,\dot x)^2\le(1+y^2)|\gamma'|^2$. Следовательно, длина пути $\tilde\gamma$ меньше, чем $L\max\sqrt{1+y^2}$. Остается заметить, что $\max y\le|y_0|+L$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $0<\varepsilon<1/2$ и пусть $\tilde p_0=(x_0,y_0,z_0)$ и $\tilde p_1=(x_1,y_1,z_1)$ — точки в $\mathbb{R}^3$, такие что $|y_0|<1$, $|y_1|<1$, и $\|\tilde p_1-\tilde p_0\|<\varepsilon^2$. Тогда существует кусочно гладкий лежандров путь из $\tilde p_0$ в $\tilde p_1$, длина которого меньше, чем $c_1\varepsilon$ для некоторой абсолютной константы c_1.*

Доказательство. Пусть γ_1 — прямолинейный отрезок, соединяющий точки $p_0=\mathrm{pr}(\tilde p_0)$ и $p_1=\mathrm{pr}(\tilde p_1)$, и пусть $\tilde\gamma_1$ — лежандрово поднятие пути γ_1, начинающееся в точке $\tilde p_0$. Пусть $\tilde p_1'=(x_1,y_1,z_1')$ — конец пути $\tilde\gamma_1$. Пусть $\gamma_2=\mathrm{sign}(z_1-z_1')\partial D$, где D — диск площади $|z_1-z_1'|$, такой что $p_1\in\partial D$. Пусть $\tilde\gamma_2$ — лежандрово поднятие пути $\tilde\gamma_2$, начинающееся в точке $\tilde p_1'$. Тогда конец пути $\tilde\gamma_2$ совпадает с точкой p_1, так как $\int_{\tilde\gamma_2}dz=\int_{\gamma_2}y\,dx=\pm\,\mathrm{Area}(D)$. Оценка на длину пути $\tilde\gamma_1$ получается непосредственным применением леммы 2.1. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть M — контактное трехмерное многообразие класса гладкости C^2, на котором фиксирована некоторая риманова метрика. Пусть α — одномерный лежандров цикл на M, гомологичный нулю. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют ε-короткие одномерные лежандровы циклы $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ на M, такие что $\sum\alpha_j=\alpha$.*

Доказательство. Известно, что все контактные структуры локально эквивалентны. Поэтому для любой точки $p\in M$ найдутся ее окрестность U_p и гладкое вложение $\varphi_p : U_p \to \mathbb{R}^3$, отображающее данную контактную структуру на M в контактную структуру на $\mathbb{R}^3$, задаваемую формой $\eta = dz - y\,dx$. Заменяя если надо U_p на меньшую окрестность, мы всегда можем предполагать, что множество $\varphi_p(U_p)$ выпукло, заключено в слое $\{|z| < 1\}$, и существует константа $m_p > 0$, такая что $\|d\varphi_p(v)\| > m_p\|v\|$ при всех $v \in TU_p$. В каждой окрестности U_p выберем открытое подмножество V_p, такое что $p \in V_p$ и $\overline{V}_p \subset U_p$.

Пусть β — двумерная цепь в M, границей которой является α. Выберем конечное подсемейство $\mathcal{U} = \{(U_i, V_i, \varphi_i)\}_{i=1,\dots,k} \subset \{(U_p, V_p, \varphi_p)\}_{p\in M}$, такое что носитель цепи β содержится в $\bigcup_{i=1}^k V_i$, и пусть $m = \min_{(U_p,V_p,\varphi_p)\in\mathcal{U}} m_p$.

Пусть $\varepsilon_1 = \min_i \operatorname{dist}\big(\varphi_i(\overline{V}_i),\, \mathbb{R}^3 \setminus \varphi_i(U_i)\big)$ и $\varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1, m\varepsilon/3)/c_1$ (здесь c_1 — константа из леммы 2.2). Представим β в виде суммы симплексов $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_n$ таким образом, что:

(1) β_j содержится в некотором V_{i_j}, и $\operatorname{diam}\varphi_{i_j}(\beta_j) < \varepsilon_2^2$ при всех $i = 1, \dots, n$;
(2) длины (относительно метрики на M) тех ребер β_j, которые дают вклад в $\alpha = \partial\beta$, не превосходят $\varepsilon/3$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — множество тех ребер симплексов β_j, которые не дают вклад в α (для каждой пары ребер, сокращающихся друг с другом в $\partial\sum\beta_j$, мы только одно из них включаем в Γ). Для каждого $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \subset \partial\beta_j$, по лемме 2.2 можно выбрать кусочно гладкий лежандров путь γ', соединяющий концы пути $\varphi_{i_j}(\gamma)$, длина которого меньше, чем $c_1\varepsilon_2$. Поскольку $c_1\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$, мы имеем $\gamma' \subset U_{i_j}$, следовательно $\gamma'' = \varphi_{i_j}^{-1}(\gamma')$ — лежандров путь в M, который короче, чем $\varepsilon/3$. Пусть Γ'' — множество всех таких γ''.

Наконец, для любого $j = 1, \dots, n$, зададим α_j как цикл, полученный из $\partial\beta_j$ заменой каждого ребра $\gamma \in \Gamma$ на соответствующий путь $\gamma'' \in \Gamma''$. □

Определение 2.4. Пусть α — положительно трансверсальный одномерный цикл в контактном трехмерном многообразии M. Конечный набор одномерных циклов $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ в M назовем *лежандровой сетью, натянутой на* α, если

(1) каждый цикл α_i раскладывается в сумму двух цепей $\alpha_i = \alpha_i^{\mathrm{pt}} + \alpha_i^{\mathrm{leg}}$ (каждая из которых может быть нулевой), где α_i^{pt} положительно трансверсальна, а α_i^{leg} — лежандрова;
(2) $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \alpha_1^{\mathrm{pt}} + \dots + \alpha_n^{\mathrm{pt}} = \alpha$;

Циклы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы будем называть *ячейками* сети $\mathcal{A}$, а объединение их носителей — *носителем* сети $\mathcal{A}$.

Определение 2.5. Пусть α — положительно трансверсальный цикл на M в общем положении. Лежандрова сеть $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, натянутая на α, называется *общей* или *в общем положении*, если существует кусочно гладко вложенный граф Γ с лежандровыми ребрами, такой что

(1) кратность (т.е. число инцидентных ребер) каждой вершины графа Γ равна либо 1, либо 3;
(2) каждая концевая (т.е. кратности 1) вершина является гладкой точкой носителя цикла α, в которой касательные к Γ и к α различны;
(3) $\Gamma \cap \operatorname{supp}\alpha$ совпадает с множеством концевых вершин графа Γ;

(4) каждая цепь α_i^{leg} является суммой некоторых ребер графа Γ с коэффициентами ± 1, причем каждое ребро входит ровно в две ячейки с противоположными знаками.

Предложение 2.6. *Пусть M — трехмерное контактное многообразие класса гладкости C^2, снабженное некоторой римановой метрикой. Пусть α — положительно трансверсальный одномерный цикл на M, гомологичный нулю. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует лежандрова сеть $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, натянутая на α, каждая ячейка которой ε-коротка. Носитель сети $\mathcal{A}$ может быть сделан сколь угодно близким к носителю произвольной двумерной цепи β, такой что $\partial\beta = \alpha$.*

Если α — цикл в общем положении, то и $\mathcal{A}$ можно выбрать в общем положении.

Доказательство такое же как и у леммы 2.3, и мы его опускаем. Чтобы достичь общности положения сети $\mathcal{A}$, надо воспользоваться следующим утверждением.

Предложение 2.7. *Пусть M — трехмерное контактное многообразие класса гладкости C^2, снабженное некоторой римановой метрикой. Пусть α — положительно трансверсальный одномерный цикл на M в общем положении, и пусть $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — лежандрова сеть, натянутая на α.*

Тогда для любого $\delta > 0$ существует лежандрова сеть в общем положении $\mathcal{A}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$, натянутая на α, такая что при всех $i = 1, \dots, n$, циклы α'_i и α_i являются δ-близкими в хаусдорфовой метрике, и $|\operatorname{len}\alpha_i - \operatorname{len}\alpha'_i| < \delta$.

Доказательство. Шаг 1. Покажем, что $\mathcal{A}$ можно сколь угодно мало возмутить так, что найдется вложенный граф Γ с лежандровыми ребрами, удовлетворяющий условию (4) определения 2.5.

По определению одномерных цепей существуют кусочно-гладкие лежандровы пути $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ и целые коэффициенты m_{ij}, такие что $\alpha_i^{\mathrm{leg}} = \sum_j m_{ij}\gamma_j$. Нам надо добиться того, чтобы было $|m_{ij}| \le 1$ при всех i, j. Для этого мы будем последовательно уменьшать величину $\sum_{ij}\max(0, |m_{ij}| - 1)$. Предположим, что $m_{i_0,j_0} \ge 2$ для некоторых i_0, j_0 (случай $m_{i_0,j_0} \le -2$ рассматривается аналогично). Поскольку γ_{j_0} не входит в $\sum_i \alpha_i$, мы имеем $\sum_i m_{i,j_0} = 0$. Значит, найдется индекс i_1, такой что $m_{i_1,j_0} < 0$. Пусть γ' — лежандрово возмущение пути γ_{j_0}, такое что $\partial\gamma' = \partial\gamma_{j_0}$ и $(\operatorname{supp}\gamma') \cap (\operatorname{supp}\Gamma) = \operatorname{supp}(\partial\gamma')$. Заменим α_{i_0} на $\alpha_{i_0} - \gamma_{j_0} + \gamma'$ и α_{i_1} — на $\alpha_{i_1} + \gamma_{j_0} - \gamma'$. Легко видеть, что при этом величина $\sum_{ij}\max(0, |m_{ij}| - 1)$ уменьшается по меньшей мере на единицу.

Шаг 2. Предположим, что существует вложенный граф Γ с лежандровыми ребрами, удовлетворяющий условию (4) определения 2.5, и покажем, что его можно так возмутить, чтобы выполнялось условия (1)–(3).

Пусть p — вершина графа $\hat\Gamma = \Gamma \cup (\operatorname{supp}\alpha)$ кратности $k > 3$. Рассмотрим вспомогательный граф G_p, вершинами которого являются ребра графа $\hat\Gamma$, инцидентные вершине p, и при этом вершины γ, γ' графа G_p (т.е. ребра графа $\hat\Gamma$) соединены ребром в графе G_p, если $\gamma \subset \operatorname{supp}\alpha_i$ и $\gamma' \subset \operatorname{supp}\alpha_i$ для некоторого α_i. Из условия $\sum_i \alpha_i = \alpha$ следует, что в результате удаления нескольких ребер из графа G_p получается несвязное объединение графов $E_1 \sqcup \dots \sqcup E_m$, причем графы $E_2, \dots, E_m$ комбинаторно эквивалентны окружности, а граф E_1 — либо окружности (если $p \notin \operatorname{supp}\alpha$), либо отрезку, концы которого соответствуют ребрам графа $\hat{\Gamma}$, лежащим на $\operatorname{supp}\alpha$. Обозначим вершины графа E_k через $\gamma_{k,1}, \dots, \gamma_{k,c_k}$ так, что вершина $\gamma_{k,j}$ соединена ребром (в графе E_k) с вершиной $\gamma_{k,j+1}$.

Пусть U_p — достаточно малая окрестность точки p, диффеоморфная шару, такая что $\Gamma_p = U_p \cap \Gamma = \bigcup_{k,j}(\gamma_{k,j} \cap U_p)$, причем каждое из множеств $\gamma_{k,j} \cap U_p$ является вложенным отрезком, тансверсальным к ∂U_p. Положим $\Gamma_{p,k} = \bigcup_{j=1}^{c_k}(\gamma_{k,j} \cap U_p)$ и $q_{k,j} = \gamma_{k,j} \cap \partial U_p$. Обозначим через $\Gamma'_{p,k}$, $k = 1, \dots, m$, произвольное плоское дерево, вложенное в двумерный диск Δ, такое что все его вершины имеют кратность 1 или 3, и при этом число концевых вершин (т.е. вершин кратности 1) равно c_k, и все они лежат на $\partial\Delta$. Обозначим концевые вершины дерева $\Gamma'_{k,j}$ через $q'_{k,1}, \dots, q'_{k,c_k}$ в порядке обхода вдоль $\partial\Delta$. В случае, когда $p \in \operatorname{supp}\alpha$, потребуем также, чтобы существовала вершина p' дерева $\Gamma'_{p,1}$, соединенная ребрами с точками $q'_{1,1}$ и q'_{1,c_1}.

Возмутим граф Γ, заменяя каждое дерево $\Gamma_{p,k}$ на образ дерева $\Gamma'_{p,k}$ при лежандровом вложении в M, обладающем следующими свойствами: $q'_{k,j} \mapsto q_{k,j}$, если $p \in \operatorname{supp}\alpha$, то объединение ребер $[p', q'_{1,1}] \cup [p', q'_{1,c_1}]$ отображается гомеоморфно на дугу $q_{1,1}q_{1,c_1}$ кривой $\operatorname{supp}\alpha$ (причем так, что вершина p' отображается в гладкую точку этой дуги), и образы всех остальных ребер дерева $\Gamma'_{p,k}$ Лежандровы. $\square$

3. Приближение лежандровой сети объединением границ аналитических дисков

Пусть V — комплексно аналитическая поверхность, и M — ориентированная вещественная гиперповерхность в V. Тогда на M определено поле комплексных касательных, которое можно представить в виде $\ker\eta$ для некоторой 1-формы η. Кривую $\gamma : [0,1] \to M$ мы будем называть *лежандровой* (соответственно, *положительно трансверсальной*), если $\gamma^*\eta = 0$ (соответственно, $\gamma^*\eta > 0$). В случае, когда гиперповерхность M строго псевдовыпукла, поле комплексных касательных является контактной структурой, и значит данные определения согласованы с определениями из §2.

Лемма 3.1. *Пусть U — открытое подмножество $\mathbb{C}^2$, и $M \subset U$ — вещественная гиперповерхность, заданная уравнением $f = 0$, где f — вещественная функция в U класса гладкости C^2. Пусть $\gamma : [0, t_1] \to M$ — лежандров путь класса гладкости C^2, и $p_0 = \gamma(0)$. Пусть T — комплексная касательная к M в точке p. Предположим, что гессиан H в точке p_0 ограничения $f|_T$ положительно определен.*

Пусть L_t — комплексная прямая, проходящая через точки p и $\gamma(t)$. Обозначим через S_t^+ и S_t^- дуги, на которые кривая $L_t \cap M$ разбивается точками $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$. Тогда

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\operatorname{len}(S_t^\pm)}{\operatorname{len}\left(\gamma([0,t])\right)} = \frac{\operatorname{len}(E)}{d(E, \gamma'(0))} < \pi\sqrt{K_1/K_2}, \tag{1}$$

где E — эллипс $\{H = 1\}$, $d(E, v)$ — длина его диаметра в направлении вектора v, и K_1, K_2 $(K_1 \ge K_2)$ — главные кривизны гиперповерхности M в направлении T.

Доказательство. Обозначим через (z, w) координаты в $\mathbb{C}^2$. Без ограничения общности можно считать, что p_0 — начало координат, T — ось $w = 0$ и $\gamma'(0) = (1, 0)$. Тогда мы имеем

$$f'_z(0,0) = f'_{\bar z}(0,0) = 0 \qquad \text{и} \qquad f'_w(0,0) = \overline{f'_{\bar w}(0,0)} = a \ne 0. \tag{2}$$

Поскольку f дважды дифференцируема, мы имеем

$$f(z,w) = aw + \bar a \bar w + Az^2 + 2Bz\bar z + \bar A \bar z^2 + w\,g_1 + \bar w\,g_2 + (z\bar z + w\bar w)\,g_3, \tag{3}$$

где

$$2A = f''_{zz}(0,0), \quad 2B = f''_{z\bar z}(0,0), \qquad \lim_{(z,w)\to(0,0)} g_{1,2,3}(z,w) = 0.$$

Положим $\gamma(t) = (z(t), w(t))$. Условие, что путь γ лежандров, означает, что

$$f'_z(\gamma(t))\,z'(t) + f'_w(\gamma(t))\,w'(t) = 0, \qquad t \in [0, t_1]. \tag{4}$$

При $t = 0$, согласно (2), это влечет $w'(0) = 0$. Поэтому мы имеем

$$z(t) = t(1 + \alpha_1(t)), \quad w(t) = b\,t^2(1 + \alpha_2(t)), \quad 2b = w''(0), \quad \lim_{t\to 0} \alpha_{1,2}(t) = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя (4) при $t = 0$ и комбинируя с (2), (3) и (5), получаем

$$2ab + 2A + 2B = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим параметризацию прямой L_t вида $\varphi_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $\zeta \mapsto \big(z(t)\zeta, w(t)\zeta\big)$. Обозначим кривую $\varphi_t^{-1}(L_t \cap M)$ через S_t. Она задана уравнением $f(\varphi_t(\zeta)) = 0$. Используя (3) и (5), левую часть этого уравнения можно переписать в виде

$$t^2 \cdot \Big(ab\zeta + \bar a \bar b \bar\zeta + A\zeta^2 + 2B\zeta\bar\zeta + \bar A \bar\zeta^2 + g(t,\zeta)\Big), \tag{7}$$

где $g(t, \zeta)$ стремится к нулю при $t \to 0$ равномерно на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{C}$. Заметим, что гессиан ограничения $f|_T$ имеет вид $H(z) = (Az^2 + 2Bz\bar z + \bar A \bar z^2)/2$. Следовательно, комбинируя (7) с (6) и деля на $2t^2$, мы получаем $S_t = \{\,\zeta \mid H(\zeta - 1/2) + g(t,\zeta) = H(1/2)\,\}$, и значит, $S_t \to E_{1/2}$ при $t \to 0$, где $E_{1/2} = \{\,\zeta \mid H(\zeta - 1/2) = H(1/2)\,\}$ — сдвиг эллипса E. Поскольку вторые производные функции f непрерывны, $S_t \to E_{1/2}$ влечет $\operatorname{len}(S_t) \to \operatorname{len}(E)$ и $\operatorname{len}(S_t^\pm) \to \operatorname{len}(E)/2$. Остается заметить, что длина кривой $\varphi_t^{-1}(\gamma[0,t])$ стремится к $d(E, 1)$, потому что γ дважды дифференцируема. $\square$

Замечание 3.2. а). Если условие лежандровости пути γ в лемме 3.1 ослабить до условия $\gamma'(0) \in T$, то S_t по-прежнему будет стремиться при $t \to \infty$ к некоторому сдвигу эллипса E, но в этом случае центр сдвинутого эллипса может оказаться не на вещественной оси, и поэтому дуга $\varphi_t^{-1}(\gamma[0,t])$ будет стремитья не к диаметру, а к хорде эллипса, и тем самым, не будет верхней оценки на отношение длин.

б). Единственное место в доказательстве, где используется непрерывность вторых производных функции f — это импликация $(S_t \to E_{1/2}) \Longrightarrow (\operatorname{len}(S_t) \to \operatorname{len}(E))$. Поэтому утверждение леммы остается верным, если условие о том, что f класса гладкости C^2 ослабить до условия двухкратной дифференцируемости функции f, но при этом потребовать, чтобы поверхность была M выпукла.

Следствие 3.3. *Пусть Ω область в комплексно аналитической поверхности с границей $M = \partial\Omega$ класса гладкости C^2, снабженной C^2-гладкой римановой метрикой g, и пусть $p_0 \in M$. Предположим, что M строго псевдовыпукла в окрестности точки p_0. Пусть $\gamma : [0, t_1] \to M$, $\gamma(0) = p_0$, — лежандрова кривая класса гладкости C^2.*

Тогда для любого $\delta > 0$ существует семейство аналитических дисков $\{D_t\}_{t\in[0,t_2]}$, $t_2 \le t_1$, таких что $D_t \subset \Omega$, $\partial D_t \subset M$, $D_t \cap \gamma = \{p_0, \gamma(t)\}$, D_t трансверсально к M, и

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{len} S_t^{\pm}}{\operatorname{len}\gamma([0,t])} < 1 + \delta, \tag{8}$$

где S_t^+ и S_t^- — дуги, на которые кривая ∂D_t разбивается точками $\gamma(0)$ и $\gamma(t)$.

Доказательство. Выберем координаты (z, w) как в доказательстве леммы 3.1. Тогда замена координат $(z, w) \to (z, w + cz)$ преобразует H в

$$(A + ac)z^2 + 2Bz\bar{z} + (\bar{A} + \bar{a}\bar{c})\bar{z}^2.$$

Выберем c так, что $A + ac = B - \delta_1$ при $\delta_1 \ll \delta$ и применим лемму 3.1. □

Определение 3.4. Пусть M — гладкое контактное многообразие. *Положительно трансверсальной кривой с простыми пересечениями* (PTSC-кривой) на M назовем объединение кусочно гладких вложенных положительно трансверсальных ориентированных замкнутых кривых $S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ (называющихся *компонентами кривой* S), которые пересекаются не более чем попарно, причем если S_i и S_j пересекаются в точке p, то каждая из этих кривых гладка в p, и касательные к S_i и к S_j в точке p различны.

Контуром PTSC-кривой S назовем ориентированную кусочно гладкую вложенную окружность γ, являющуюся объединением дуг кривой S, такую что

(1) на любой гладкой дуге a кривой γ ориентация, индуцированная с γ совпадает с ориентацией, индуцированной с S;
(2) если кривая γ проходит черех точку пересечения компонент кривой S, то она в этой точке обязательно переходит с одной компоненты на другую.

Ясно, что любые два контура могут пересекаться только в точках пересечения компонент кривой S, и сумма всех контуров равна S.

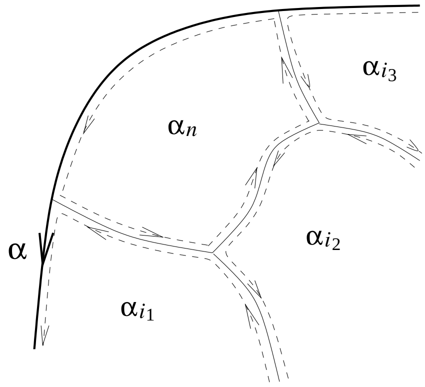
Предложение 3.5. *a). Пусть Ω — область в комплексно аналитической поверхности с границей $M = \partial\Omega$ класса гладкости C^2, снабженной C^2-гладкой римановой метрикой g. Пусть α — положительно трансверсальная кривая на M, являющаяся объединением непересекающихся кусочно C^2-гладко вложенных окружностей, и $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — лежандрова сеть в общем положении, натянутая на α. Предположим, что M строго псевдовыпукла в окрестности* $\operatorname{supp}\mathcal{A}$.

Тогда для любого $\delta > 0$ существует PTSC-кривая $S = S_1 + \cdots + S_N$, такая что:

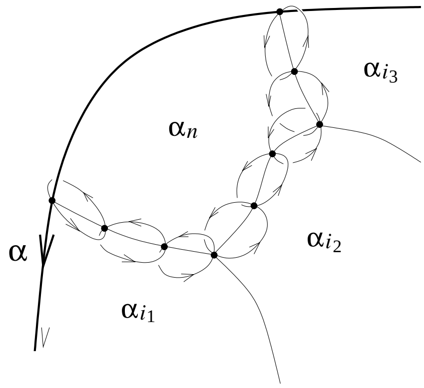
(1) *каждая S_j является границей аналитического диска D_j в Ω;*
(2) *$S + \alpha$ имеет в точности n контуров $\beta_1, \dots, \beta_n$;*
(3) *для любого $i = 1, \dots, n$, хаусдорфово расстояние между β_i и α_i меньше, чем δ, и при этом $\operatorname{len}(\beta_i) < \operatorname{len}(\alpha_i) + \delta$.*

б). Если, к тому же, Ω является областью в $\mathbb{C}^2$, и в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\mathcal{A}$ *секционная кривизна гиперповерхности M в направлении комплексных касательных не обращается в ноль, то диски $D_1, \dots, D_N$ можно выбрать так, чтобы каждый из них являлся пересечением некоторой комплексной прямой с областью Ω, но в этом случае оценку на длины надо заменить на* $\operatorname{len}(\beta_i) < c_3 \operatorname{len}(\alpha_i) + \delta$, *где c_3 — некоторая константа, зависящая от M, g и $\mathcal{A}$ (если Ω — стандартный шар, и g индуцирована стандартной метрикой в $\mathbb{C}^2$, то можно положить $c_3 = \pi/2$).*

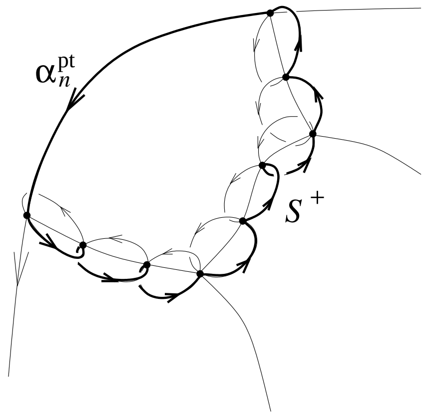
Доказательство. а). Индукция по n. Случай $n = 0$ тривиален. Предположим, мы доказали требуемое утверждение для лежандровых сетей, состоящих из $n-1$ ячейки. Докажем его для сети $\mathcal{A}$, состоящей из n ячеек. Пусть α_i^{pt} и α_i^{leg} обозначают то же, что в определении 2.4. Описываемое ниже построение проиллюстрировано на рисунках 1(а–г).



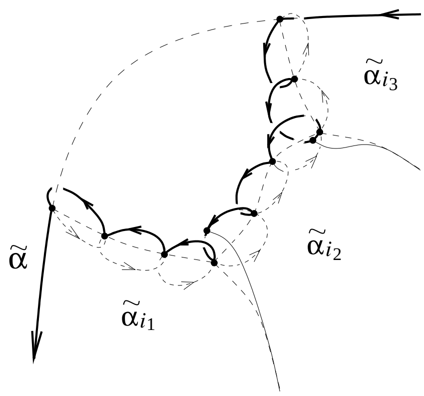
а). Сеть $\mathcal{A}$.



б). $(\operatorname{supp}\mathcal{A}) \cup (S_1 \cup \dots \cup S_1)$.



в). Контур $\beta_n = \alpha_n^{\mathrm{pt}} + S^+$.



г). Сеть $\tilde{\mathcal{A}}$.

Рис. 1

По следствию 3.3, для любой точки $p \in \alpha_n^{\mathrm{leg}}$ найдется окрестность U_p, такая что для любой точки $q \in U_p \cap \alpha_n$ существует аналитический диск $D_{pq} \subset \Omega$, удовлетворяющий оценке (8) с произвольной наперед заданной константой δ_1 вместо δ. Выбирая конечное подпокрытие покрытия $\{U_p\}$, можно представить $\alpha_n^{\rm leg}$ в виде суммы дуг $\alpha_n^{\rm leg} = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ так, что для любого $i = 1, \dots, k$, найдется аналитический диск $D_i \subset \Omega$, такой что $\partial D_i = S_i = S_i^+ + S_i^-$, $\partial S_i^\pm = \pm\partial\gamma_i$, и $\operatorname{len}(S_i^\pm)/\operatorname{len}(\gamma_i) < 1 + \delta_1$. Мы также можем считать, что длина каждой дуги γ_i меньше произвольного наперед заданного числа, и что каждое ребро графа Γ (граф из определения 2.4), входящее в цепь $\alpha_n^{\rm leg}$, является суммой некоторого подмножества дуг γ_i.

Возмущая диски D_i, можно добиться того, что они будут трансверсальны друг другу, и значит, кривые S_i будут иметь различные касательные в точках пересечения. Мы также можем считать, что если конец дуги γ_i лежит на α, то касательные в этой точке к α и к γ_i различны. Положим $S^\pm = \sum_{i=1}^k S_i^\pm$. Это положительно трансверсальные цепи, такие что $\partial S^+ = \partial\alpha_n^{\rm leg} = -\partial S^-$. Поэтому $\tilde\alpha = \alpha - \alpha_n^{\rm leg} + S^-$ является положительно трансверсальным циклом в общем положении.

Переходя, если надо, от дуг γ_j к их подразбиениям, мы можем считать, что набор дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ можно дополнить до набора дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_m$, такого что $\alpha_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\gamma_j$, $i = 1, \dots, n$, для некоторой целочисленной матрицы коэффициентов a_{ij}, такой что $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ при всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Некоторые из дуг $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_m$ будут положительно трансверсальными, а остальные — лежандровыми.

Обозначим через P множество концов дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, не лежащих на α. Другими словами, $P = (S \cap \operatorname{supp}\alpha_n) \setminus \operatorname{supp}\alpha = (S^- \cap \operatorname{supp}\alpha_n) \setminus \operatorname{supp}\alpha$. Для каждой точки $p \in P$ зададим точку $\tilde p$ следующим образом. Предположим, что p является концом некоторой дуги γ_i, $1 \le i \le k$ (таких дуг две, но мы выберем любую из них). Тогда в качестве $\tilde p$ мы возьмем некоторую внутреннюю точку дуги S_i^-, которая ближе к p, чем к другому концу дуги S_i^-. Если p — конец некоторой дуги γ_i, и при этом $p \notin P$, то положим $\tilde p = p$.

Для каждого $i = 1, \dots, m$, определим дугу $\tilde\gamma_i$ следующим образом. Пусть $\partial\gamma_i = q - p$, и пусть $\tilde p$ и $\tilde q$ — точки, выбранные вышеописанным образом исходя из точек p и q соответственно. Если $1 \le i \le k$, то зададим $\tilde\gamma_i$ как путь на S^-, соединяющий $\tilde p$ с $\tilde q$. Если $k < i \le m$ и дуга γ_i лежандрова, то выберем в качестве $\tilde\gamma_i$ кусочно лежандров путь из $\tilde p$ в $\tilde q$. Если дуга γ_i положительно трансверсальна, то положим $\tilde\gamma_i = \gamma_i$. Во всех случаях ориентируем дугу $\tilde\gamma_i$ так, что $\partial\tilde\gamma_i = \tilde q - \tilde p$. Из леммы 2.2 следует, что дугу $\tilde\gamma_i$ можно выбрать сколь угодно близкой к γ_i.

Положим $\tilde{\mathcal A} = \{\tilde\alpha_1, \dots, \tilde\alpha_{n-1}\}$, где $\tilde\alpha_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\tilde\gamma_j$, $i = 1, \dots, n-1$. Легко проверить, что это лежандрова сеть в общем положении, натянутая на $\tilde\alpha$ (см рис. 1 г). Следовательно, по предположению индукции можно выбрать PTSC-кривую $\tilde S = S_{k+1} + \dots + S_N$, так чтобы выполнялось утверждение леммы для $\tilde{\mathcal A}$ вместо $\mathcal A$ и для произвольной наперед выбранной константы вместо δ. Тогда при подходящем выборе констант, участвовавших в построении $\tilde{\mathcal A}$, кривая $S = S_1 + \dots + S_k + \tilde S$ будет удовлетворять требованиям леммы. Действительно, обозначим контуры кривой $\tilde S$ через $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$. Тогда кривая S имеет n контуров, а именно, $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$, и $\beta_n = \alpha_n^{\rm pt} + S^+$. По предположению индукции контуры $\beta_1,\dots,\beta_{n-1}$ близки к циклам $\tilde\alpha_1,\dots,\tilde\alpha_{n-1}$, а значит и к циклам $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$. Контур β_n близок к циклу α_n по построению (см рис. 1 в).

б). Доказательство примерно такое же, как и в пункте а), но многообразие M надо заменить на некоторую его окрестность носитель сети $\mathcal{A}$, в которой величина K_1/K_2 из (1) ограничена снизу некоторой константой. $\square$

Обозначим $\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge 0\}$ и $\mathbb{R}_- = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 0\}$.

Лемма 3.6. *Пусть x,y,z — координаты в $\mathbb{R}^3$, и пусть $f_1,f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}^2$ — отображения, задаваемые формулами $f_1(x,y,z)=x+iz$, $f_2(x,y,z)=y+iz$. Для каждого комплексного числа c обозначим через S_c вещественную кривую $\{p\in\mathbb{R}^3\mid f_1(p)f_2(p)=c\}$. Тогда при $c\notin\mathbb{R}_-$ кривая S_c имеет две ветви (т.е. две компоненты связности) S_c^+ и S_c^-, причем $S_c^+\subset\{x+y>0\}$, $S_c^-\subset\{x+y<0\}$, и ограничение линейной функции $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(x,y,z)\mapsto x-y$, на каждую из ветвей $S_c^\pm$ является диффеоморфизмом.*

Более того, $S_c^\pm$ стремится в любом разумном смысле к $S_0^\pm$ при $c\to 0$, $c\notin\mathbb{R}_-$, где $S_0^+=\{z=xy=0, x+y\ge 0\}$ и $S_0^-=\{z=xy, x+y\le 0\}$.

Доказательство. Положим $a=\operatorname{Re}c$, $b=\operatorname{Im}c$. Тогда кривая S_c задается системой уравнений $xy-z^2=a$, $z(x+y)=b$. Заменой переменных $x-y=2u$, $x+y=2v$ преобразуем эту систему к виду $v^2-u^2-z^2=a$, $2zv=b$.

Если $b=0$ и $a>0$, то S_c — гипербола $v^2-u^2=a$ в плоскости $z=0$.

Если $b\ne 0$, то для нахождения пересечения кривой S_c с плоскостью $u=u_0$ надо решить систему уравнений $v^2-u^2-z^2=a$, $2zv=b$, $u=u_0$. Исключая u,z, получаем уравнение $v^4-(u_0^2+a)v^2-(b/2)^2=0$ относительно неизвестной v. Ясно, что это уравнение при всех значениях u_0 имеет ровно два вещественных корня, один из которых положителен, а другой — отрицателен. $\square$

Замечание. При $c\in\mathbb{R}_-$ кривая S_c не гладка. Она является объединением гиперболы $v^2-u^2=c$ в плоскости $z=0$ и окружности $u^2+z^2=-c$ в плоскости $v=0$, которые пересекаются в двух точках $z=v=0$, $u=\pm\sqrt{-c}$.

Лемма 3.7. *Пусть M — трехмерное вещественное ориентированное многообразие класса гладкости C^2, и пусть f_1,f_2,h — C^2-гладкие комплекснозначные функции на M, такие что $f_1(p_0)=f_2(p_0)=0$, $h(p_0)\ne 0$, и каждая из функций f_1,f_2 является субмерсией в окрестности некоторой точки $p_0\in M$. Обозначим вещественные кривые $f_j^{-1}(0)$ через γ_j, $j=1,2$. На каждой кривой γ_j введем в окрестности точки p_0 ориентацию, индуцированную субмерсией f_j. Предположим, что касательные к кривым γ_1 и γ_2 в точке p_0 различны.*

Тогда существуют число $\theta_0\in[0,2\pi[$, и окрестность U точки p_0, такие что каждая из кривых $U\cap\gamma_j$, $j=1,2$, диффеоморфна открытому интервалу, и для любого фиксированного $\theta\not\equiv\theta_0 \mod 2\pi$ найдется $r_0=r_0(\theta)>0$, такое что при $0<r<r_0$ кривая $S_{r,\theta}=\{\,p\in U\mid f_1(p)f_2(p)=re^{i\theta}h(p)\,\}$ состоит из двух гладких ветвей, одна из которых стремится к $\gamma_1^-\cup\gamma_2^+$, а другая к $\gamma_2^-\cup\gamma_1^+$ при $r\to 0$, где через $\gamma_j^\pm$ обозначен прообраз $\mathbb{R}_\pm$ при сохраняющем ориентацию вложении $(U\cap\gamma_j,p_0)\to(\mathbb{R},0)$.

Доказательство. Ясно, что если утверждение леммы выполнено для функций f_1,f_2,h, то оно выполнено (с другим числом θ_0) и для функций c_1f_1,c_2f_2,c_3h, где c_1, c_2, c_3 — произвольные ненулевые комплексные числа. Поэтому мы можем считать, что $h(p_0) = 1$. Выберем локальную вещественную координату z в окрестности точки p_0 так, чтобы обе кривые γ_1, γ_2 лежали на поверхности $z = 0$. Умножая функции f_1 и f_2 на подходящие комплексные числа, мы можем считать, что $\partial(\operatorname{Re} f_j)/\partial z(p_0) = 0$, $j = 1, 2$. Положим $x = \operatorname{Re} f_1$, $y = \operatorname{Re} f_2$. Тогда (x, y, z) — локальная система координат, в которой функции f_1, f_2 имеют вид $f_1(x, y, z) = x + iz + O(x^2 + y^2 + z^2)$, $f_2(x, y, z) = y + iz + O(x^2 + y^2 + z^2)$. Поэтому утверждение леммы следует из леммы 3.6 и из того, что кривая $H_r(S_{r,\theta})$ стремится к кривой $\{(x + iz)(y + iz) = e^{i\theta}\}$ при $r \to 0$, $\theta = \mathrm{const} \not\equiv \pi \mod 2\pi$, где через H_r обозначена гомотетия $(x, y, z) \mapsto (x/\sqrt{r},\, y/\sqrt{r},\, z/\sqrt{r})$. $\square$

Предложение 3.8. *Пусть Ω — произвольная область в $\mathbb{C}^2$ с C^2-гладкой компактной границей M, и A — алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, заданная уравнением $f = 0$. Предположим, что $S = A \cap M$ — PTSC-кривая. Пусть h — произвольный многочлен, не обращающийся в нуль в двойных точках кривой S. Тогда существует конечное множество $\Theta \subset [0, 2\pi[$, такое что для любого $\theta \in [0, 2\pi[\setminus \Theta$ найдется $r_0 = r_0(\theta) > 0$, такое что при $0 < r < r_0$ кривая $S_{r,\theta} = \{\, p \in M \mid f(p) = re^{i\theta} h(p) \,\}$ гладка, и ее компоненты стремятся к контурам кривой S при $r \to 0$.*

Доказательство. Следует из леммы 3.7. $\square$

Доказательство Теоремы 1.1. По предложениям 2.6 и 2.7 можно построить лежандрову мелкоячеистую сеть в общем положении, натянутую на ∂A. По предложению 3.5 ее можно приблизить краем объединения D аналитических (соответственно, линейных) дисков, так чтобы контуры кривой $D \cap M$ были бы сколь угодно коротки. Используя предложение 3.8 в алгебраическом случае и стандартную технику аналитических пучков на открытых римановых поверхностях в аналитическом случае, кривую D можно возмутить так, чтобы все компоненты края стали бы близки к контурам кривой S. При этом возмущение можно выбрать так, чтобы точки множества P остались бы неподвижными (в алгебраическом случае для этого достаточно выбрать многочлен h из предложения 3.8 так, чтобы он обращался в нуль в точках множества P). $\square$

4. Некоторые элементарные факты о стандартной контактной структуре на $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$.

В этом пункте для удобства читателя мы приведем некоторые хорошо известные факты о кривых на $\mathbb{S}^3$ и их проекциях на $\mathbb{P}^2$ и выведем из них нижнюю оценку на $n(\varepsilon)$ порядка $1/\varepsilon^2$.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$ — стандартные координаты в $\mathbb{C}^2$. Обозначим:

$$\rho = \rho(z, w) = |z|^2 + |w|^2 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2,$$

$$\eta = 1/2\, d^c \rho = i/2\, (z\, d\bar z - \bar z\, dz + w\, d\bar w - \bar w\, dw) = x\, dy - y\, dx + u\, dv - v\, du,$$

$$\omega = 1/2\, d\eta = i/2\, (dz \wedge d\bar z + dw \wedge d\bar w) = dx \wedge dy + du \wedge dv.$$

Пусть $\mathbb{B}^4 = \{\rho \le 1\}$, $\mathbb{S}^3 = \partial \mathbb{B}^4 = \{\rho = 1\}$, $\mathbb{P}^1 = \big(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)/_{(z,w)\sim(\lambda z, \lambda w)}$ и пусть $\mathrm{pr} : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{P}^1$ и $\mathrm{pr}_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{S}^3$ — стандартные проекции.

Поле двумерных плоскостей $\ker\eta|_{\mathbb{S}^3}$ является полем комплексных касательных к $\mathbb{S}^3$. Оно задает стандартную (тугую) контактную структуру на $\mathbb{S}^3$.

Пусть $\|\cdot\|_{\mathbb{P}^1}$ и $\omega_{\mathbb{P}^1}$ — риманова метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{P}^1$ и соответствующая ей форма объема, задаваемые как

$$\|d\zeta\|_{\mathbb{P}^1} = \frac{|d\zeta|^2}{(1+|\zeta|^2)^2}, \qquad \omega_{\mathbb{P}^1} = \frac{i}{2}\,\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{(1+|\zeta|^2)^2}, \qquad \zeta = z/w.$$

$\mathbb{P}^1$ с этой метрикой изометрично двумерной сфере радиуса $1/2$, в частности,

$$\int_{\mathbb{P}^1}\omega_{\mathbb{P}^1} = \pi.$$

Пусть

$$\eta^* = \mathrm{pr}^*_{\mathbb{S}^3}(\eta|_{\mathbb{S}^3}) \qquad \text{и} \qquad \omega^* = \mathrm{pr}^*(\omega_{\mathbb{P}^1}).$$

Легко проверить, что

$$\eta^* = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{2}\,d^c\log\rho \qquad \text{и} \qquad d\eta^* = \frac{2\omega}{\rho} - \frac{d\rho\wedge\eta}{\rho^2} = 2\omega^*. \tag{10}$$

Лемма 4.1. *Пусть F — двумерная цепь на $\mathbb{S}^3$. Тогда*

$$\int_{\partial F}\eta = 2\int_{\mathrm{pr}_* F}\omega_{\mathbb{P}^1}.$$

Доказательство. Следует из теоремы Стокса и равенства (10). □

Пусть $\|\cdot\|_{\mathbb{S}^3}$ — риманова метрика на $\mathbb{S}^3$, индуцированная стандартной метрикой в $\mathbb{C}^2$. Легко проверить, что

$$\|v\|^2_{\mathbb{S}^3} = |\eta(v)|^2 + \|\,\mathrm{pr}_* v\|^2_{\mathbb{P}^1}, \qquad v\in T\mathbb{S}^3. \tag{12}$$

В частности, если D — диск, высекаемый на $\mathbb{B}^4$ комплексной прямой, проходящей через начало координат, то окружность ∂D ортогональна контактной структуре, и

$$\int_{\partial D}\eta = 2\pi. \tag{13}$$

Лемма 4.2. *Пусть A — гладкая комплексная алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, проходящая через начало координат и имеющая там невырожденное касание с комплексной прямой L. Пусть F — замыкание множества $\mathrm{pr}_{\mathbb{S}^3}(A\cap\mathbb{B}^3\setminus 0)$. Тогда $\partial F = \partial(A\cap\mathbb{B}^4) - \partial(L\cap\mathbb{B}^4)$. В частности,*

$$\int_{\partial(A\cap\mathbb{B}^4)}\eta = 2\pi + 2\int_{\mathrm{pr}_* F}\omega_{\mathbb{P}^2} \ge 2\pi. \tag{14}$$

Доказательство. Применить *вещественное* раздутие начала координат (отождествив $\mathbb{C}^2$ с $\mathbb{R}^4$). □

Определение 4.3. n-мерная цепь β с кусочно гладкой границей на n-мерном ориентированном многообразии M называется *положительной* (соотв., *строго положительной*), если каждая компонента связности дополнения к $\partial\beta$ входит в β с *неотрицательной* (соотв., *положительной*) кратностью. В этом случае мы будем писать $\beta \geq 0$ (соотв., $\beta > 0$).

Каждую n-мерную цепь β на M можно единственным образом представить в виде $\beta = \beta^+ - \beta^-$ так, что $\beta^+ \geq 0$, $\beta^- \geq 0$ и $(\operatorname{supp}\beta^+) \cap (\operatorname{supp}\beta^-) = (\operatorname{supp}\partial\beta^+) \cap (\operatorname{supp}\partial\beta^-)$. Цепи $\beta^\pm$ назавыются *положительной* и *отрицательной частями* цепи β.

Если U — область в M с кусочно гладкой границей, и β — n-мерная цепь, то *ограничением* цепи β на область U называется цепь $\beta|_U = \sum m_i(\beta_i \cap U)$, где $\beta = \sum m_i\beta_i$ — представление цепи β в виде целочисленной линейной комбинации областей с кусочно гладкими границами.

Замечание 4.4. Пусть M — ориентированное n-мерное многообразие. Мы будем отождествлять n-мерные цепи на M с кусочно гладкими границами и функции, являющиеся целочисленными линейными комбинациями характеристических функций областей. А именно, если $\beta_1, \dots, \beta_k$ — области в M с кусочно гладкими границами, то цепь $\beta = \sum m_i\beta_i$, $m_i \in \mathbb{Z}$, будет отождествляться с функцией $\chi_\beta = \sum m_i\chi_{\beta_i}$, где χ_{β_i} — характеристическая функция области β_i (т.е. $\chi_{\beta_i}|_{\beta_i} = 1$, $\chi_{\beta_i}|_{M\setminus\beta_i} = 0$).

При этом отождествлении интегралу 2-формы ξ по цепи β отвечает $\int_M \chi_\beta\xi$, ограничению цепи β на область U отвечает умножение на χ_U и т.д.

Лемма 4.5. (*Изопериметрическое неравенство для двумерных цепей на* $\mathbb{S}^2$.) *Пусть* $\mathbb{S}^2$ *сфера радиуса* R *в* $\mathbb{R}^3$ *со стандартной римановой метрикой и со стандартной формой площади* dS. *Пусть* β *— двумерная цепь на* $\mathbb{S}^2$ *с кусочно гладкой границей, длина которой (с учетом кратностей, если имеются кратные участки) равна* a *и пусть* $b = \int_\beta dS$ *— ориентированная площадь цепи* β. *Пусть* β^+ *(соотв.,* β^-*) — положительная (соотв., отрицательная) часть цепи* β, *и пусть* $b^\pm = \int_{\beta^\pm} dS$.

Предположим, что $|b| < 2\pi R^2$ *и* $a < 2\pi R$. *Тогда*

$$|b| \leq b^+ + b^- \leq S_R(a), \qquad \text{где} \quad S_R(a) = 2\pi R^2\bigl(1 - \sqrt{1 - a^2/(2\pi R)^2}\,\bigr) \tag{15}$$

и, если множество $\operatorname{supp}\partial\beta$ *связно, то*

$$\operatorname{diam}_{\mathbb{S}^2} \operatorname{supp}\beta \leq a/2. \tag{16}$$

Доказательство. Если β является областью на сфере, то (15) — классическое изопараметрическое неравенство.

В общем случае границу цепи β можно представить в виде объединения несамопересекающихся замкнутых кривых, длины которых обозначим через $a_1, \dots, a_k$. Каждая из этих кривых является границей двух областей на сфере, причем площадь по крайней мере одной из них не превосходит $2\pi R^2$. Выбирая должным образом знаки этих областей, мы получим цепь, граница которой совпадает с $\partial\beta$. Добавляя к ней если надо несколько экземпляров $\pm[\mathbb{S}^2]$, мы получим цепь β', такую что $\beta - \beta'$ — цикл, гомологичный нулю, $\partial\beta' = \partial\beta$, и при этом β' имеет вид $\beta' = m[\mathbb{S}^2] + s_1\beta_1 + \cdots + s_k\beta_k$, где $m \in \mathbb{Z}$, $s_i = \pm 1$, и β_i — область площади $b_i \le 2\pi R^2$. Для каждой из этих областей мы имеем $b_i \le S_R(a_i)$. Из того, что функция S_R выпукла и $S_R(0) = 0$, следует, что $S_R(a) = S_R(a_1 + \cdots + a_k) \ge S_R(a_1) + \cdots + S_R(a_k)$. Поэтому

$$|b - 4\pi R^2 m| = \Big|\sum s_i b_i\Big| \le \sum b_i \le \sum S_R(a_i) \le S_R(a).$$

Докажем, что $m = 0$. Для этого вспомним, что $|b| < 2\pi R^2$. Значит, поскольку $S_R(a) < 2\pi R^2$, мы получаем $4\pi R^2|m| \le |b| + |b - 4m\pi R^2| < 2\pi R^2 + S_R(a) < 4\pi R^2$, т.е. $|m| < 1$. Но $m \in \mathbb{Z}$, значит $m = 0$.

Положим $\hat\beta^\pm = \sum_{s_i=\pm1}\beta_i$, $\hat b^\pm = \sum_{s_i=\pm1} b_i$. Мы доказали, что $\hat b^+ + \hat b^- \le S_R(a)$ и для доказательства (15) осталось заметить, что $b^\pm \le \hat b^\pm$. Это очевидно, так как разложение $\beta^+ - \beta^-$ получается из $\hat\beta^+ - \hat\beta^-$ последовательным сокращением компонент связности дополнения к $\operatorname{supp}\partial\beta$, входящих одновременно в β^+ и β^-.

Предположим теперь, что множество $\operatorname{supp}\partial\beta$ связно и докажем (16). Докажем сначала, что $\operatorname{supp}\beta$ не содержит антиподальных точек. Действительно, обозначим через $\sigma : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ центральную симметрию. Из того, что $\operatorname{len}\partial\beta < 2\pi R$, следует, что $\sigma(\operatorname{supp}\partial\beta) \cap \operatorname{supp}\partial\beta = \varnothing$. Поскольку $\operatorname{supp}\beta$ связно, из этого следует, что $\sigma(\operatorname{supp}\beta)$ лежит в одной компоненте связности дополнения к $\operatorname{supp}\partial\beta$. Эта компонента не может лежать в $\operatorname{supp}\beta$, так как ее площадь больше площади множества $\sigma(\operatorname{supp}\beta)$, а значит, больше площади множества $\operatorname{supp}\beta$. Следовательно, $\sigma(\operatorname{supp}\beta) \cap \operatorname{supp}\beta = \varnothing$.

Пусть $p, q \in \operatorname{supp}\beta$. Обозначим через γ_p (соответственно γ_q) кратчайшую геодезическую из p в $\sigma(q)$ (соответственно из q в $\sigma(p)$). Поскольку точки $\sigma(p)$ и $\sigma(q)$ не лежат в $\operatorname{supp}\beta$, найдутся точки $p' \in \gamma_p \cap \operatorname{supp}\partial\beta$ и $q' \in \gamma_q \cap \operatorname{supp}\partial\beta$. Следовательно, $\operatorname{dist}_{\mathbb{S}^2}(p,q) \le \operatorname{dist}_{\mathbb{S}^2}(p',q') \le (\operatorname{len}\partial\beta)/2 = a/2$. $\square$

Замечание 4.6. Классическое изопериметрическое неравенство (неравенство (15) для одной области на сфере) можно эквивалентно переписать в виде $4\pi b - b^2/R^2 \le a^2$, и тогда оно будет выполнено без предположений $b < 2\pi R^2$ и $a < 2\pi R$. Аналогом такого неравенства для двумерных цепей является

$$\max_{m\in\mathbb{Z}}\Big(|b - 4m\pi R^2| - (b - 4m\pi R^2)/R^2\Big) \le a^2$$

и это неравенство также верно без предположений $|b| < 2\pi R^2$ и $a < 2\pi R$. График левой части этого неравенства (рассматриваемой как функция от b) является объединением верхних половинок эллипсов с центрами в точках $\big((2+4m)\pi R^2, 0\big)$, $m \in \mathbb{Z}$. Эллипсы касаются друг друга в точках $\big(4m\pi R^2, 0\big)$.

Лемма 4.7. *Пусть γ — положительно трансверсальная кривая на $\mathbb{S}^3$ (например, компонента связности пересечения комплексной аналитической кривой с $\mathbb{S}^3$). Обозначим:*

$$a = \operatorname{len}_{\mathbb{P}^1}(\operatorname{pr}\gamma), \qquad b = \int_\gamma \eta, \qquad \ell = \operatorname{len}_{\mathbb{S}^2}(\gamma).$$

Тогда

$$\max(a,b) \le \ell \le a+b \tag{17}$$

и если $\ell < \pi/2$, *то*

$$b \le S_{1/2}(a) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{\pi^2}}\,\right) = \frac{a^2}{4\pi} + \frac{a^4}{16\pi^3} + \dots \tag{18}$$

Доказательство. Неравенства (17) следуют из (12) и из того, что форма η положительна на γ.

Для доказательства неравенства (18) рассмотрим двумерную цепь на $\mathbb{S}^3$, границей которой является цикл γ и обозначим через β ее проекцию на $\mathbb{P}^1$. Напомним, что $\mathbb{P}^1$ изометрична сфере радиуса $R = 1/2$. Поэтому, если $\ell < \pi/\sqrt{2}$, то из (17) следует, что $a < \ell < \pi/2 < \pi = 2\pi R$ и $b < \ell < \pi/2 = 2\pi R^2$, и результат следует из леммы 4.5. $\square$

Следствие 4.8. *Пусть γ — положительно трансверсальная кривая на $\mathbb{S}^3$ и пусть ℓ и b означают то же, что в лемме 4.7. Тогда если $\ell < \pi/2$, то $b \le S_{1/2}(\ell)$.*

Доказательство. Следует из (17), (18) и монотонности функции $S_{1/2}$ $\square$

Комбинируя все эти факты, мы легко получаем квадратичную оценку на $n(\varepsilon)$, о которой говорилось во введении:

Предложение 4.9. *Если $\varepsilon < \pi/2$, то $n(\varepsilon) > 2\pi/S_{1/2}(\varepsilon) = 8\pi^2/\varepsilon^2 - 2 + O(\varepsilon^2)$.*

Доказательство. Пусть A — комплексная алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, проходящая через начало координат, такая что все компоненты $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ кривой $A \cap \mathbb{S}^3$ короче, чем ε. Возмущая A, мы можем считать, что условия леммы 4.2 выполнены. Значит, согласно (14) и следствию 4.8,

$$2\pi \le \int_{\partial(A\cap\mathbb{B}^4)} \eta = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \eta \le n S_{1/2}(\varepsilon) = \frac{n\varepsilon^2}{4\pi} \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} + O(\varepsilon^4)\right). \quad \square$$

5. Нижняя оценка порядка ε^{-3} на число ячеек лежандровой сети

В этом пункте мы докажем следующий результат, который в некотором смысле показывает, что методом, изложенным в §§2–3, невозможно получить верхнюю оценку лучше, чем $n(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-3})$.

Предложение 5.1. *Пусть A — алгебраическая кривая в $\mathbb{C}^2$, проходящая через начало координат, и $\Gamma = A \cap \mathbb{S}^3$. Пусть $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — лежандрова сеть, натянутая на Γ (см. определение 2.4). Предположим, что все ячейки сети $\mathcal{A}$ короче, чем ε. Тогда*

$$n > \frac{2c_0}{\varepsilon S_{1/2}(\varepsilon)} = \frac{8c_0\pi}{\varepsilon^3} - \frac{2c_0}{\pi\varepsilon} + O(\varepsilon),$$

где c_0 *— константа, зависящая только от* A. *В случае, когда* A *— комплексная прямая, можно положить* $c_0 = \pi^2/4$.

Замечание. По-видимому, похожее утверждение должно иметь место для произвольного трехмерного контактного многообразия.

Доказательство. Мы будем использовать обозначения, введенные в §4. Мы будем считать, что $\varepsilon < \pi/2$. Зададим функцию $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{R}_+$, положив $f(p) = \operatorname{dist}_{\mathbb{P}^1}(p, \operatorname{pr}\Gamma)$. Для каждой ячейки α_i рассмотрим двумерную цепь $\tilde\beta_i$ на $\mathbb{S}^3$, такую что $\partial\tilde\beta_i = \alpha_i$, и положим $\beta_i = \operatorname{pr}_*\tilde\beta_i$. Пусть $\beta_i = \beta_i^+ - \beta_i^-$ — разложение цепи β_i на положительную и отрицательную части (см. определение 4.3). Обозначим

$$b_i = \int_{\beta_i}\omega_{\mathbb{P}^1}, \quad b_i^+ = \int_{\beta_i^+}\omega_{\mathbb{P}^1}, \quad b_i^- = \int_{\beta_i^-}\omega_{\mathbb{P}^1}, \qquad c_0 = \int_{\mathbb{P}^1} f\,\omega_{\mathbb{P}^1}.$$

В случае, когда A — комплексная прямая, переходя к сферическим координатам несложно вычислить, что $c_0 = \pi^2/4$. Из (18) следует, что $b < \pi/2$, следовательно, по лемме 4.5 имеем

$$\operatorname{diam}_{\mathbb{P}^1}(\operatorname{supp}\beta_i) < \varepsilon/2, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{19}$$

Возмущая кривую A, мы можем считать, что она невырождена. Пусть F и L означают то же, что в лемме 4.2. Пусть $\tilde\beta_0$ — двумерная цепь в $\mathbb{S}^3$, такая что $\partial\tilde\beta_0 = \partial(L \cap \mathbb{B}^4)$. Тогда, согласно (14),

$$\sum_{i=1}^n \partial\tilde\beta_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \Gamma = \partial F + \partial(L\cap\mathbb{B}^4) = \partial F + \partial\tilde\beta_0.$$

Из (13) и из того, что $\operatorname{pr}_*\partial\tilde\beta_0 = 0$ следует, что $\operatorname{pr}_*\tilde\beta_0 = [\mathbb{P}^1]$. Поэтому $\sum_{i=1}^n \beta_i = \operatorname{pr}_* F + \operatorname{pr}_*\tilde\beta_0 = \operatorname{pr}_* F + [\mathbb{P}^1]$. Следовательно,

$$c_0 = \int_{\mathbb{P}^1} f\,\omega_{\mathbb{P}^1} \le \int_{\operatorname{pr}_* F} f\,\omega_{\mathbb{P}^1} + \int_{\mathbb{P}^1} f\,\omega_{\mathbb{P}^1} = \sum_{i=1}^n \int_{\beta_i} f\,\omega_{\mathbb{P}^1}. \tag{20}$$

Обозначим $m_i^+ = \max_{\operatorname{supp}\beta_i^+} f$, $m_i^- = \min_{\operatorname{supp}\beta_i^-} f$. Тогда

$$\int_{\beta_i} f\,\omega_{\mathbb{P}^1} = \int_{\beta_i^+} f\,\omega_{\mathbb{P}^1} - \int_{\beta_i^-} f\,\omega_{\mathbb{P}^1} \le b_i^+ m_i^+ - b_i^- m_i^-$$

$$= b_i^+(m_i^+ - m_i^-) + (b_i^+ - b_i^-)m_i^- = b_i^+(m_i^+ - m_i^-) + b_i m_i^-. \tag{21}$$

По лемме 4.5 мы имеем $b_i^+ \le S_{1/2}(\varepsilon)$. Поскольку $|f(p) - f(q)| \le \operatorname{dist}_{\mathbb{P}^1}(p,q)$, из (19) следует, что $m_i^+ - m_i^- < \operatorname{diam}_{\mathbb{P}^1}\operatorname{supp}\beta_i < \varepsilon/2$, а значит,

$$b_i^+(m_i^+ - m_i^-) \le S_{1/2}(\varepsilon)\varepsilon/2. \tag{22}$$

Докажем, что

$$b_i m_i^- = 0. \tag{23}$$

Пусть $\alpha_i = \alpha_i^{\mathrm{leg}} + \alpha_i^{\mathrm{pt}}$ — разложение из определения 2.4. Рассмотрим два случая: $\alpha_i^{\mathrm{pt}} = 0$ и $\alpha_i^{\mathrm{pt}} \neq 0$. В первом случае цикл α_i лежандров, следовательно

$$b_i = \int_{\beta_i} \omega_{\mathbb{P}^1} = \int_{\tilde{\beta}_i} \omega^* = \int_{\alpha_i} \eta^* = 0.$$

Во втором случае $\operatorname{supp} \tilde{\beta}_i$ имеет непустое пересечение с Γ, следовательно f обращается в ноль на $\operatorname{supp} \beta_i$, а значит $m_i^- = 0$. Равенство (23) доказано. Комбинируя (20) – (23), получаем $c_0 \leq n S_{1/2}(\varepsilon)\varepsilon/2 = O(\varepsilon^3)$. $\square$

Замечание. В случае, когда A — комплексная прямая, проходящая через начало координат, величина $\int_{\beta_i} f\omega_{\mathbb{P}^1}$, играющая главную роль в доказательстве, может быть инерпретирована как момент цепи β_i (рассматриваемой как мера на $\mathbb{P}^1$) относительно точки $\operatorname{pr} A$. Тем самым, доказательство вкратце сводится к следующему рассуждению: мера $\omega_{\mathbb{P}^1}$, момент которой равен абсолютной константе $\pi^2/4$, представляется в виде суммы мер β_i, моменты которых имеют порядок малости ε^3.

Наконец, сформулируем открытый вопрос, из положительного ответа на который следовала бы нижняя оценка на $n(\varepsilon)$ порядка ε^{-3} (тем же способом, каким доказывается предложение 5.1).

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество положительных функций на $\mathbb{P}^1$, удовлетворяющих условию Липшица с константой 1, т.е. таких функций $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{R}_+$, что $|f(p) - p(q)| \leq \operatorname{dist}_{\mathbb{P}^1}(p, q)$ при всех $p, q \in \mathbb{P}^1$.

Существует ли абсолютная константа c, такая, что неравенство

$$\max_{f\in\mathcal{L}} \Big(\int_{m[\mathbb{P}^1]+\operatorname{pr}_* F} f\omega_{\mathbb{P}^1} - \int_{A\cap\mathbb{S}^3} (f\circ \operatorname{pr})\cdot\eta \Big) > c, \qquad F = \overline{\operatorname{pr}_{\mathbb{S}^3}(A\cap\mathbb{B}^4 \setminus \{0\})},$$

имело бы место для любой алгебраической кривой $A \subset \mathbb{C}^2$, имеющей кратность m в начале координат? (Как и в формулах (14) и (20), здесь через pr_* обозначен гомоморфизм групп двумерных цепей, индуцированный проекцией $\operatorname{pr} : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{P}^1$; при отождествлении двумерных цепей на $\mathbb{P}^1$ с целочисленными функциями, описанном в замечании 4.4, цепи $m[\mathbb{P}^1] + \operatorname{pr}_* F$ отвечает функция, значением которой на прямой L, проходящей через 0, является число точек пересечения L и $A \cap \mathbb{B}^4$ с учетом кратностей).

6. Построение лежандровой сети на $\mathbb{S}^3$, дающей верхнюю оценку на $n(\varepsilon)$ порядка $1/\varepsilon^3$

Обозначим через L координатную ось $\{w = 0\}$. Пусть $\Gamma = L \cap \mathbb{S}^3$. Для натурального числа n обозначим через $\tilde{R}_n : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ поворот $(z, w) \mapsto (e^{2\pi i/n} z, w)$, и пусть $R_n : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ соответствующий поворот $(z : w) \mapsto (e^{2\pi i/n} z : w) = (z : e^{-2\pi i/n} w)$. Положим $p_0 = (0 : 1)$, $p_\infty = (1 : 0)$. Это неподвижные точки вращения R_n.

Фиксируем некоторое достаточно малое число $\varepsilon > 0$, и пусть $m = [10\pi/\varepsilon]+1$. Положим

$$r_k = \frac{k\pi}{2m}, \qquad \Delta_k = \{\, q \in \mathbb{P}^1 \mid \operatorname{dist}_{\mathbb{P}^1}(p_0, q) \le r_k \,\}, \qquad k = 0, \dots, m.$$

Напомним, что $\mathbb{P}^1$ изометрична сфере радиуса $1/2$, поэтому

$$\{p_0\} = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \dots \subset \Delta_m = \mathbb{P}^1.$$

Обозначим через A_k замыкание множества $\Delta_k \setminus \Delta_{k-1}$ и положим $a_k = \operatorname{Area}(A_k)$, $s_k = \operatorname{Area}(\Delta_k) = a_1 + \dots + a_k$, $k = 1, \dots, m$. Обозначим $\ell_k = (\operatorname{len}\partial\Delta_k + \operatorname{len}\partial\Delta_{k-1})/2$ — среднее арифметическое длин двух окружностей, ограничивающих кольцо A_k. Для каждого $k = 1, \dots, m$ положим $n_k = 2^{\nu_k}$, где ν_k выбрано так, что

$$\frac{\varepsilon}{40} < \ell_k^+ \le \frac{\varepsilon}{20}, \qquad \ell_k^+ = \frac{s_k \ell_k}{n_k a_k}. \tag{24}$$

Ясно, что ν_k однозначно определяется этим условием. Действительно, из (24) следует, что $\nu_k = [\log_2(20 s_k \ell_k/(\varepsilon a_k))]$.

По определению мы имеем

$$\ell_k = \frac{\pi}{2}\Big(\sin\frac{k\pi}{m} + \sin\frac{(k-1)\pi}{m}\Big), \quad s_k = \frac{\pi}{2}\Big(1 - \cos\frac{k\pi}{m}\Big), \quad a_k = s_k - s_{k-1}. \tag{25}$$

Отсюда несложно вывести, что

$$\nu_k \le \nu_{k+1} \le \nu_k + 2, \qquad k = 1, \dots, m-1. \tag{26}$$

Обозначим

$$\beta_{k,0}^+ = A_k \cap \Big\{\, |\operatorname{Arg}\zeta - \theta_k| \le \frac{\pi\ell_k^+}{\ell_k} \,\Big\}, \qquad b_k^+ = \operatorname{Area}(\beta_{k,0}^+), \qquad k = 1, \dots, m,$$

где $\zeta = z/w$ — стандартная комплексная координата на $\mathbb{P}^1$, а числа $\theta_1, \dots, \theta_m$ мы выберем чуть позже. Другими словами, угловая ширина области $\beta_{k,0}^+$ равна $2\pi\ell_k^+/\ell_k = (2\pi s_k)/(n_k a_k)$. Из этого следует, что

$$b_k^+ = \frac{a_k \ell_k^+}{\ell_k} = \frac{s_k}{n_k}. \tag{27}$$

Положим

$$\beta_{k,j}^+ = R_{n_k}^j(\beta_{k,0}^+), \qquad \beta_{k,j}^- = \beta_{k,j}^+ \cap \beta_{k,j+1}^+, \qquad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n_k$$

(здесь и далее при использовании двойного индекса (k,j) мы подразумеваем, что j — вычет по модулю n_k).

Угловая ширина области $\beta_{k,j}^+$ равна $(2\pi s_k)/(n_k a_k)$, что не меньше угловой величины поворота R_{n_k} (поскольку $s_k/a_k \ge 1$). Поэтому $\beta_{k,j}^- \ne \varnothing$ и при этом

$$b_k^- := \operatorname{Area}(\beta_{k,j}^-) = b_k^+ - \frac{a_k}{n_k} = \frac{s_k}{n_k} - \frac{a_k}{n_k} = \frac{s_{k-1}}{n_k}. \tag{28}$$

Обозначим через $p_{k,j}$ середину дуги $(\partial\Delta_k)\cap\beta^-_{k,j}$, а через $q_{k,j}$ — середину дуги $(\partial\Delta_{k-1})\cap\beta^+_{k,j}$. Выберем теперь числа θ_k, участвовавшие в определении областей $\beta^+_{k,0}$, таким образом, что $p_{k,0}=q_{k+1,0}$ при всех k. Поскольку $p_{k,j}=R^j_{n_k}(p_{k,0})$ и $q_{k,j}=R^j_{n_k}(q_{k,0})$, мы имеем

$$\{p_{k,j}\,|\,0\le j<n_k\}=\{q_{k+1,j}\,|\,0\le j<n_{k+1}\}\qquad\text{при } n_k=n_{k+1}$$
$$\{p_{k,j}\,|\,0\le j<n_k\}\subset\{q_{k+1,j}\,|\,0\le j<n_{k+1}\}\qquad\text{при } n_k<n_{k+1}$$

Более того, при всех k,j мы имеем

$$p_{k,j}=q_{k+1,\mu_k j},\qquad\text{где}\quad \mu_k=\frac{n_{k+1}}{n_k}=2^{\nu_{k+1}-\nu_k}.$$

Заметим, что по определению мы имеем также

$$p_{m,1}=p_{m,2}=\dots=p_{m,n_m}=p_\infty,\qquad q_{1,1}=q_{1,2}=\dots=q_{1,n_1}=p_0.$$

Обозначим через $\alpha^+_{k,j}$, $k=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n_k$, путь, идущий из $p_{k,j}$ в $p_{k,j-1}$ вдоль границы области $\beta^+_{k,j}$ в положительном направлении и проходящий каждую точку множества $(\partial\beta^+_{k,j})\setminus\{p_{k,j}\}$ не более одного раза. В случае $k=m$ это определение неоднозначно (поскольку $p_{m,j}=p_{m,j-1}=p_\infty$), но мы будем считать, что $\alpha^+_{m,j}$ — это полный обход границы области $\beta^+_{k,j}$ в положительном направлении, начинающийся и заканчивающийся в точке p_∞. Обозначим также через $\gamma^{(0)}_{k,j}$ (соответственно, $\gamma^{(1)}_{k,j}$) ту половину пути $\alpha^+_{k,j}$, которая идет из точки $p_{k,j}$ в точку $q_{k,j}$ (соответственно, из точки $q_{k,j}$ в точку $p_{k,j-1}$). Наконец, положим (см. рис. 2 и рис. 3)

$$\alpha^-_{k,j}=\gamma^{(1)}_{k,j+1}+\gamma^{(0)}_{k,j},\qquad k=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n_k,$$

$$\alpha_{m,1}=\alpha^+_{m,1},\qquad \alpha_{k,1}=\alpha^+_{k,1}-\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\alpha^-_{k+1,j},\quad k=1,\dots,m-1,$$

$$\alpha_{k,j+1}=R_{n_k}(\alpha_{k,j}),\qquad k=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n_k-1.$$

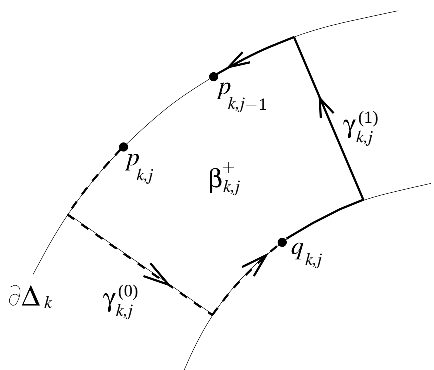


Рис. 2. $\alpha^+_{k,j}=\gamma^{(0)}_{k,j}+\gamma^{(1)}_{k,j}$.

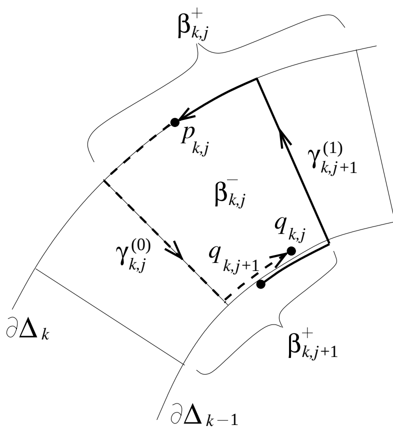


Рис. 3. $\alpha^-_{k,j}=\gamma^{(0)}_{k,j}+\gamma^{(1)}_{k,j+1}$.

Если $\gamma:[0,1]\to\mathbb{P}^1$ — кусочно гладкий путь, и $\tilde p$ — точка на $\mathbb{S}^3$, такие что $\mathrm{pr}(\tilde p)=\gamma(0)$ (как и в §4, через pr здесь обозначается стандартная проекция $\mathbb{S}^3\to\mathbb{P}^1$), то существует единственный лежандров путь $\tilde\gamma:[0,1]\to\mathbb{S}^3$, такой что $\tilde\gamma(0)=\tilde p$ и $\mathrm{pr}\circ\tilde\gamma=\gamma$. Это следует из того, что слои прекции $\mathrm{pr}:\mathbb{S}^3\to\mathbb{P}^1$ трансверсальны полю комплексных касательных $\ker(\eta|_{\mathbb{S}^3})$. Путь $\tilde\gamma$ называется *лежандровым поднятием* пути γ, начинающемся в точке $\tilde p$.

Мы постром лежандровы поднятия $\tilde\alpha^{\pm}_{k,j}$ и $\tilde\alpha_{k,j}$ путей $\alpha^{\pm}_{k,j}$ и $\alpha_{k,j}$ и покажем, что $\{\tilde\alpha_{k,j}\}$ является требуемой лежандровой сетью.

Положим

$$\tilde p_{m,j}=(e^{2\pi ij/n_m},0)\in\mathbb{C}^2,\qquad j=1,\dots,n_m.$$

Точки $p_{m,j}$ лежат на Γ и $\tilde R_{n_m}(p_{m,j})=p_{m,j+1}$. Обозначим через $\tilde\gamma_{m,j}$, $j=1,\dots,n_m$, путь $[(j-1)/n_m,j/n_m]\to\Gamma$, $t\mapsto(e^{it},0)$. Это путь, идущий вдоль Γ из точки $\tilde p_{m,j-1}$ точку в $\tilde p_{m,j}$. Согласно (27), мы имеем $\mathrm{Area}(\beta^+_{m,j})=b^+_m=s_m/n_m=\pi/n_m$. Значит,

$$\int_{\tilde\gamma_{m,j}}\eta=\frac{1}{n_m}\int_\Gamma\eta=\frac{2\pi}{n_m}=2b^+_m.$$

Дальнейшее построение мы будем вести по индукции (последовательно при $k=m,m-1,\dots,1$). Предположим, что для некоторого $k\le m$ мы уже построили точки $\tilde p_{k,j}$ и пути $\tilde\gamma_{k,j}$ на сфере $\mathbb{S}^3$, такие что при всех $j=1,\dots,n_k$ выполнены следующие условия (в силу вышесказанного они выполнены при $k=m$).

(i) $\partial\tilde\gamma_{k,j}=\tilde p_{k,j}-\tilde p_{k,j-1}$;

(ii) $\mathrm{pr}(\tilde p_{k,j})=p_{k,j}$ и $\mathrm{pr}(\tilde\gamma_{k,j})$ — дуга окружности $\partial\Delta_k$, идущая в положительном направлении от точки $p_{k,j-1}$ к точке $p_{k,j}$, и проходящая каждую точку окружности $\partial\Delta_k$ не более одного раза.

(iii) $\int_{\tilde\gamma_{k,j}}\eta=2b^+_k$;

(iv) $\tilde R_{n_k}(\tilde p_{k,j})=\tilde p_{k,j+1}$ и $\tilde R_{n_k}(\tilde\gamma_{k,j})=\tilde\gamma_{k,j+1}$.

Обозначим через $\tilde\alpha^+_{k,j}$ лежандрово поднятие пути $\alpha^+_{k,j}$, начинающееся в точке $\tilde p_{k,j}$. Покажем, что концом пути $\tilde\alpha^+_{k,j}$ является точка $\tilde p_{k,j-1}$. Действительно, обозначим конец пути $\tilde\alpha^+_{k,j}$ через $\tilde p$, и пусть $[\tilde p,\tilde p_{k,j-1}]$ — дуга окружности $\mathrm{pr}^{-1}(p_{k,j-1})$, идущая из точки $\tilde p$ в точку $\tilde p_{k,j-1}$, выбранная таким образом, что цикл $\tilde\alpha^+_{k,j}+\tilde\gamma_{k,j}+[\tilde p,\tilde p_{k,j-1}]$ гомологичен нулю в сфере $\mathbb{S}^3$. Ясно, что проекция этого цикла на $\mathbb{P}^1$ совпадает с $\partial\beta^+_{k,j}$. Поэтому по лемме 4.1 имеем

$$2b^+_k=2\,\mathrm{Area}(\beta^+_{k,j})=\int_{\tilde\alpha^+_{k,j}}\eta+\int_{\tilde\gamma_{k,j}}\eta+\int_{[\tilde p,\tilde p_{k,j-1}]}\eta=0+2b^+_k+\int_{[\tilde p,\tilde p_{k,j-1}]}\eta.$$

Следовательно, $\int_{[\tilde p,\tilde p_{k,j-1}]}\eta=0$, и значит, $\tilde p=\tilde p_{k,j-1}$.

Покажем, что $\tilde R_{n_k}(\tilde\alpha^+_{k,j})=\tilde\alpha^+_{k,j+1}$. Действительно, пусть $\mathcal{F}_{k,j}$ — поле вещественных касательных прямых на торе $T_{k,j}=\mathrm{pr}^{-1}(\alpha^+_{k,j})$, высекаемое полем комплексных касательных $\ker\eta|_{\mathbb{S}^3}$. Тогда $\tilde\alpha^+_{k,j}$ — интегральная кривая поля

$\mathcal{F}_{k,j}$, проходящая через $\tilde{p}_{k,j}$. Остается заметить, что вращение $\tilde{R}_{n_k}$ отображает $p_{k,j}$ и $T_{k,j}$ в $p_{k,j+1}$ и $T_{k,j+1}$ соответственно, а поскольку $\tilde{R}^*_{n_k}(\eta)=\eta$, оно отображает $\mathcal{F}_{k,j}$ в $\mathcal{F}_{k,j+1}$.

Обозначим через $\tilde{q}_{k,j}$, $j=1,\dots,n_k$, точку на $\tilde{\alpha}^+_{k,j}$, такую что $\mathrm{pr}(\tilde{q}_{k,j})=q_{k,j}$. Положим $\tilde{\alpha}_k=\sum_{j=1}^{n_k}\tilde{\alpha}^+_{k,j}$. Это замкнутая спиралевидная лежандрова кривая на $\mathbb{S}^3$, проходящая через точки $\tilde{p}_{k,j}$ и $\tilde{q}_{k,j}$, и ивариантная при вращении $\tilde{R}_{n_k}$. Пусть $\tilde{\alpha}^-_{k,j}$ — лежандрово поднятие пути $\alpha^-_{k,j}$, начинающееся из точки $\tilde{q}_{k,j+1}$. Тогда $\tilde{\alpha}_k=\sum_{j=1}^{n_k}\tilde{\alpha}^-_{k,j}$. Более того, кривая $\tilde{\alpha}_k$ разбивается точками $\tilde{p}_{k,j}$ на дуги $\tilde{\alpha}^+_{k,j}$, и она же разбивается точками $\tilde{q}_{k,j}$ на дуги $\tilde{\alpha}^-_{k,j}$.

Пусть $\gamma^-_{k,0}$ — дуга окружности $\partial\Delta_{k-1}$, идущая в положительном направлении от точки $q_{k,0}$ к точке $q_{k,1}$, и проходящая каждую точку окружности $\partial\Delta_{k-1}$ не более одного раза. Выберем (нележандрово) поднятие $\tilde{\gamma}^-_{k,0}$ пути $\gamma^-_{k,0}$, идущее из точки $\tilde{q}_{k,0}$ в точку $\tilde{q}_{k,1}$, таким образом, чтобы цикл $\tilde{\alpha}^-_{k,0}+\tilde{\gamma}^-_{k,0}$ был бы гомологичен нулю в сфере $\mathbb{S}^3$. Проекция этого цикла на $\mathbb{P}^1$ совпадает с $\partial\beta^-_{k,0}$, следовательно, по лемме 4.1 имеем

$$2b^-_k=2\,\mathrm{Area}(\beta^-_{k,0})=\int_{\tilde{\alpha}^-_{k,0}}\eta+\int_{\tilde{\gamma}^-_{k,0}}\eta=0+\int_{\tilde{\gamma}^-_{k,0}}\eta. \tag{29}$$

Положим $\tilde{\gamma}^-_{k,j}=\tilde{R}^j_{n_k}(\tilde{\gamma}^-_{k,0})$, $j=1,\dots,n_k$, а также

$$\tilde{p}_{k-1,0}=\tilde{q}_{k,0},\qquad \tilde{\gamma}_{k-1,1}=\sum_{j=0}^{\mu_{k-1}-1}\tilde{\gamma}^-_{k,j},$$

$$\tilde{p}_{k-1,j+1}=\tilde{R}_{n_{k-1}}(\tilde{p}_{k-1,j})\quad\text{и}\quad \tilde{\gamma}_{k-1,j+1}=\tilde{R}_{n_{k-1}}(\tilde{\gamma}_{k-1,j}).$$

Для завершения индуктивного построения нам осталось проверить, что условия (i)–(iv) выполнены для точек $\tilde{p}_{k-1,j}$ и путей $\tilde{\gamma}_{k-1,j}$. Согласно (29) мы имеем

$$\int_{\tilde{\gamma}_{k-1,1}}\eta=\sum_{j=0}^{\mu_{k-1}-1}\int_{\tilde{\gamma}^-_{k,j}}\eta=2\mu_{k-1}b^-_k.$$

Подставляя в это равенство (28) и $\mu_{k-1}=n_k/n_{k-1}$, получаем условие (iii) для $\tilde{\gamma}_{k-1,j}$. Остальные условия очевидны.

Наконец, положим при $k=m$:

$$\tilde{\alpha}_{m,j}=\tilde{\alpha}^{\mathrm{leg}}_{m,j}+\tilde{\alpha}^{\mathrm{pt}}_{m,j},\qquad\text{где}\qquad \tilde{\alpha}^{\mathrm{leg}}_{m,j}=\tilde{\alpha}^+_{m,j},\ \ \tilde{\alpha}^{\mathrm{pt}}_{m,j}=\tilde{\gamma}_{m,j},\quad j=1,\dots,n_m,$$

и при $k<m$:

$$\tilde{\alpha}_{k,1}=\tilde{\alpha}^{\mathrm{leg}}_{k,1}=\tilde{\alpha}^+_{k,1}-\sum_{j=0}^{\mu_k-1}\tilde{\alpha}^-_{k+1,j},$$

$$\tilde{\alpha}_{k,j+1}=\tilde{\alpha}^{\mathrm{leg}}_{k,j+1}=\tilde{R}_{n_k}(\tilde{\alpha}_{k,j}),\quad j=1,\dots,n_k-1.$$

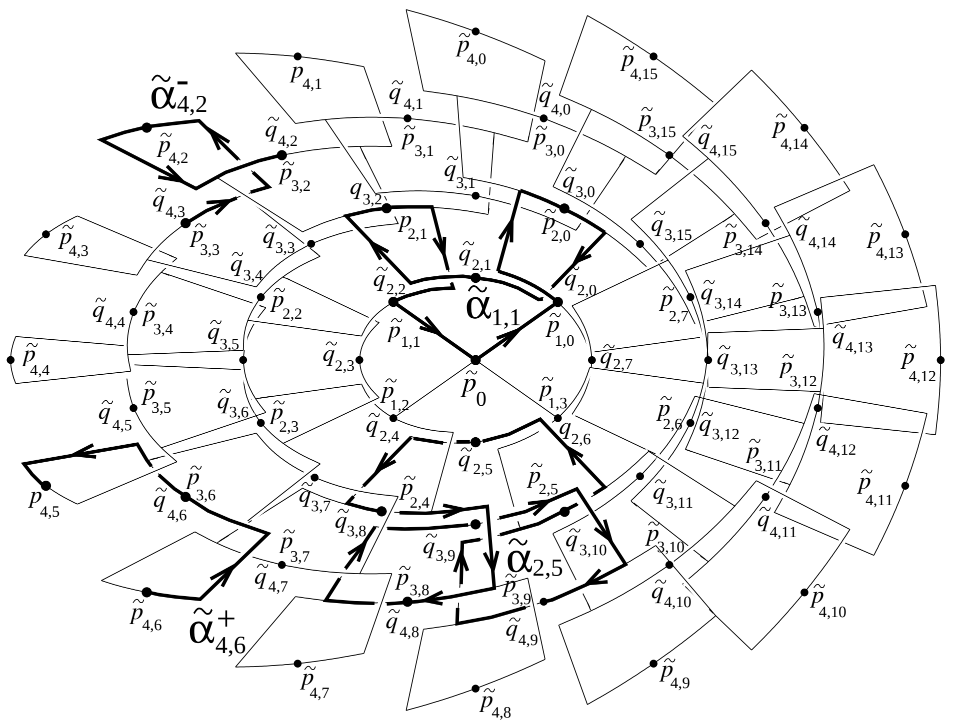


Рис. 4. $\operatorname{supp}(\tilde{\alpha}_1 + \dots + \tilde{\alpha}_4)$ при $(\nu_1, \dots, \nu_4) = (2, 3, 4, 4)$.

$$\tilde{\alpha}^{\mathrm{pt}}_{k,j} = 0, \qquad j = 1, \dots, n_k.$$

(см. рис. 4).

Обозначим $\mathcal{A}_\varepsilon = \{\tilde{\alpha}_{k,j} \mid 1 \le k \le m,\ 1 \le j \le n_k\}$.

Предложение 6.1. *$\mathcal{A}_\varepsilon$ является лежандровой сетью, натянутой на* Γ.

Доказательство. Легко видеть, что цепи $\tilde{\alpha}_{k,j}$ являются циклами. Поскольку цепи $\tilde{\alpha}^{\mathrm{leg}}_{k,j}$ (соответственно, $\tilde{\alpha}^{\mathrm{pt}}_{k,j}$) лежандровы (соответственно, положительно трансверсальны) по построению, остается проверить, что $\sum \tilde{\alpha}_{k,j} = \Gamma$. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n_m} \tilde{\alpha}_{m,j} = \sum_{j=1}^{n_m} \tilde{\alpha}^+_{m,j} + \sum_{j=1}^{n_m} \tilde{\gamma}_{m,j} = \tilde{\alpha}_m + \Gamma,$$

а при $k < m$, поскольку $\tilde{R}_{n_k} = \tilde{R}^{\mu_k}_{n_{k+1}}$, мы имеем

$$\tilde{R}^j_{n_k}(\tilde{\alpha}^-_{k+1,j'}) = \tilde{R}^{\mu_k j}_{n_{k+1}}(\tilde{\alpha}^-_{k+1,j'}) = \tilde{\alpha}^-_{k+1,j'+\mu_k j}, \qquad \text{и значит,}$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} \tilde{\alpha}_{k,j} = \sum_{j=1}^{n_k} \tilde{\alpha}^+_{k,j} - \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{j'=0}^{\mu_k - 1} \tilde{R}^j_{n_k}(\tilde{\alpha}^-_{k+1,j'}) = \sum_{j=1}^{n_k} \tilde{\alpha}^+_{k,j} - \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \tilde{\alpha}^-_{k+1,j} = \tilde{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_{k+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k,j} \tilde{\alpha}_{k,j} = (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) + (\tilde{\alpha}_2 - \tilde{\alpha}_3) + \cdots + (\tilde{\alpha}_{m-1} - \tilde{\alpha}_m) + (\tilde{\alpha}_m + \Gamma) = \tilde{\alpha}_1 + \Gamma.$$

Остается заметить, что $\tilde{\alpha}_1 = 0$ (см. рис. 4), так как $\beta^-_{1,j}$ является отрезком геодезической между точками $p_{0,j} = p_0$ и $p_{1,j}$, и значит $\tilde{\alpha}^-_{1,j} = 0$ при всех $j = 1, \ldots, n_1$. $\square$

Предложение 6.2. $\operatorname{len} \tilde{\alpha}_{k,j} < \varepsilon$ *при всех* k, j.

Доказательство. Из (12) следует, что длина пути на $\mathbb{P}^1$ равна длине его лежандрова поднятия на $\mathbb{S}^3$. Поэтому

$$\operatorname{len} \tilde{\alpha}_{k,j} = \begin{cases} \operatorname{len} \partial\beta^+_{m,j} + \operatorname{len} \tilde{\gamma}_{m,j}, & k = m, \\ \operatorname{len} \partial\beta^+_{k,j} + \mu_k \operatorname{len} \partial\beta^-_{k+1,j'} & k < m. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\operatorname{len} \partial\beta^\pm_{k,j} \le 2\ell^\pm_k + 2 \cdot (\text{ширина полосы } A_k) \le 2\ell^\pm_k + \frac{\pi}{m} \le 2 \cdot \frac{\varepsilon}{20} + \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5},$$

и из (26) вытекает, что $\mu_k \le 4$ при всех k. Следовательно, при $k < m$ мы имеем

$$\operatorname{len} \tilde{\alpha}_{k,j} \le (1 + \mu_k)\frac{\varepsilon}{5} \le \varepsilon.$$

Из (24) и (25) следует, что

$$\frac{1}{n_m} \le \frac{\varepsilon a_m}{20 s_m \ell_m} = \frac{\varepsilon(1 - \cos(\pi/m))}{20\pi \sin(\pi/m)} = \varepsilon \cdot O(1/m) = O(\varepsilon^2).$$

Поэтому $\operatorname{len} \tilde{\alpha}_{m,j} \le \operatorname{len} \partial\beta^+_{m,j} + O(\varepsilon^2) \le (\varepsilon/5) + O(\varepsilon^2) \le \varepsilon$. $\square$

Следствие 6.3. *Имеет место верхняя оценка* $n(\varepsilon) \le \operatorname{Card} \mathcal{A}_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$.

Доказательство. Из (26) следует, что $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_m$, следовательно, $\operatorname{Card} \mathcal{A}_\varepsilon \le m n_m$. Ясно, что $m = O(\varepsilon)$, и из (25) легко следует, что $n_m = O(\varepsilon^{-2})$. Из этого следует оценка $\operatorname{Card} \mathcal{A}_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$.

Неравенство $n(\varepsilon) \le \operatorname{Card} \mathcal{A}_\varepsilon$ вытекает из конструкции, изложенной в §3. $\square$

Замечание 6.4. В силу предложения 2.7, мы можем не интересоваться тем, является ли сеть $\mathcal{A}_\varepsilon$ сетью в общем положении. Тем не менее, она таковой является всюду, кроме точки p_0 (см. рис. 4). Если немного изменить параметры конструкции сети $\mathcal{A}_\varepsilon$, несложно добиться того, что $n_1 \le 3$. В этом случае $\mathcal{A}_\varepsilon$ станет сетью общего положения всюду, включая точку p_0.

Цитированная литература

1. В.К. Белошапка, *Об одном метрическом свойстве аналитических множеств*, Изв. АН СССР **40** (1976), 1409–1414.
2. Е.М. Чирка, *Некоторые нерешенные задачи многомерного комплексного анализа*, в кн.: "Комплексный анализ в современной математике. К 80-летию со дня рождения Б.В. Шабата", (ред. Е.М. Чирка), М., Фазис, 2001, С. 265–272.
3. О.Г. Ерошкин, *Об одном свойстве края аналитического подмножества строго псевдовыпуклой области в* $\mathbb{C}^2$, Мат. Заметки **49** (1991), no. 5, 149–151.
4. B. Jöricke, *A Cantor set in the unit sphere in* $\mathbb{C}^2$ *with large polynomial hull*, Michigan Math. J. **53** (2005), 189–207.

Математический институт РАН им. В.А. Стеклова

Университет им. Поля Сабатье (Тулуза-III)