ТЕОРИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ И НОВЫЕ ЗАПРЕТЫ ДЛЯ M-КРИВЫХ СТЕПЕНИ 9

С.Ю. Оревков

Все известные ограничения на топологию вещественных неособых алгебраических кривых в $\mathbf{RP}^2$ нечетных степеней ≤ 9 получены комбинацией применения теоремы Безу, формулы Рохлина — Мишачева для комплексных ориентаций [1] и теоремы Фидлера [2] о чередовании ориентаций. Этим способом Виро [3] завершил изотопическую классификацию вещественных кривых степени 7. Корчагин [4] систематически применил этот метод к M-кривым степени 9, но его оказалось недостаточно. Пример нового запрета для кривых 9-й степени, приведенный автором в [5; Следствие 1.5.4], по существу, был также получен тем же методом, правда, с использованием новой формулы комплексных ориентаций.

В то же время, имеются довольно мощные методы получения запретов для кривых четных степеней, основанные на построении циклов на двулистном накрытии $\mathbf{CP}^2$, разветвленном вдоль комплексификации кривой (гомологические методы). Они не могут быть применены непосредственно к кривым нечетных степеней по той простой причине, что в этом случае двулистного накрытия не существует. Чтобы обойти эту проблему, можно рассматривать накрытия более высокой степени. Этим путем было получено неравенство Виро — Звонилова [6]. Другой путь, предложенный автором в [5], состоит в том, чтобы рассматривать форму Зейферта некоторого зацепления вместо формы пересечения на двулистном накрытии. В этом случае сигнатурные оценки принимают вид неравенства Мурасуги — Тристрама.

Цель настоящей заметки — показать, что этот метод работает для проективных кривых нечетных степеней. Мы не применяли систематически этот метод ко всем M-схемам 9-й степени, реализуемость которых пока неизвестна (их несколько сотен [4]). Доказываемые здесь запреты — это просто первые найденные нами примеры, в которых гомологический метод работает, в то время как остальные известные методы нет.

Теорема 1. *Не существует M-кривых степени 9 в $\mathbf{RP}^2$ с вещественными схемами*[1]

$$\langle J \sqcup \beta \sqcup 1\langle 1\langle \alpha\rangle\rangle\rangle \qquad \text{где } \alpha+\beta=26, \tag{1}$$

$$\beta = 0,1,2,3,4,5,6,8,10. \tag{2}$$

Следующие две леммы несложны, и мы опускаем их доказательства.

При частичной поддержке грантов РФФИ-96-01-01218 и РФФИ-98-01-00794

[1] Определение и обозначения вещественных и комплексных схем см. в [7].

Лемма 1. *Если комплексная схема, соответствующая (1), (2), удовлетворяет формуле [5; (1.5A)], то* $|\alpha_+ - \alpha_-| \geq 2$ *где* α_+ *(соотв.* α_-*) — число положительных (соотв. отрицательных) овалов среди* α *самых внутренних овалов.*

Лемма 2. *Пусть* P *— выпуклый* n*-угольник в* $\mathbf{RP}^2$*, вершины которого лежат на вещественной кубике. Если* $n > 6$*, то для каждой стороны* $[ab]$ *многоугольника* P*, кроме, быть может, двух, точки* a *и* b *соединены дугой кубики, не содержащей других вершин многоугольника* P*.*

Доказательство теоремы 1. Из леммы 1 и правила чередования ориентаций [2] следует, что найдется прямая, проходящая через два внешних пустых овала[2] o_1, o_2, разделяющая некоторые два внутренние пустые овала o_3, o_4 (это уже доказывает теорему при $\beta = 0, 1$). Любая коника, проходящая через $o_1, ..., o_4$ пересекает два непустых овала в ≥ 8 точках, значит, если она пересекает еще один пустой овал, то она не может пересекать нечетную компоненту J. Следовательно, все пустые овалы лежат вокруг вершин некоторого выпуклого 26-угольника Q, не пересекающегося с J (в каждом пустом овале одна вершина). Обозначим через Q_{inn} (соотв. Q_{out}) множество вершин многоугольника Q, лежащих во внутренних (соотв. внешних) пустых овалах. Если число сторон многоугольника Q, соединяющих Q_{inn} с Q_{out} было бы > 6, то существовал бы выпуклый восьмиугольник P, каждая сторона которого соединяет Q_{inn} с Q_{out}. Тогда, по лемме 2, кубика, проходящая через вершины многоугольника P и еще одну вершину Q пересекала бы кривую в ≥ 28 точках. Таким образом, если выбрать точку $p \in Q_{inn}$, соединенную с Q_{out} стороной многоугольника Q, то, в обозначениях [5, § 3.5], схема расположения кривой относительно пучка прямых, проходящих через p, имеет вид

$$[\supset_7 o_7^{\alpha_1 - 2} o_5^{\beta_1} o_7^{\alpha_2} o_5^{\beta_2} o_7^{\alpha_3} o_5^{\beta_3} \subset_2], \qquad \sum \alpha_i = \alpha, \ \sum \beta_i = \beta. \tag{3}$$

Обозначим через $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ стандартные образующие группы кос B_m. Положим $\pi_{k,l} = \sigma_k \dots \sigma_l$, $\tau_{k,l} = \pi_{l,k-1}^{-1} \pi_{k,l+1}$ $(k > l)$, и $\Delta_m = \pi_{1,m-1}\pi_{1,m-2} \dots \pi_{1,1}$. Применяя к (3) процедуру, описанную в [5; §3.5], получаем косу

$$b = b_{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_3, \beta_3} = \sigma_7 \Big(\prod_{i=1}^{3} \sigma_7^{-\alpha_i} \tau_{7,5} \sigma_5^{-\beta_i} \tau_{7,5}^{-1} \Big) \tau_{7,2} \Delta_9 \in B_9. \tag{4}$$

В [5] показано, что если (3) реализуемо, то должно выполняться неравенство Мурасуги — Тристрама, которое можно переписать в виде

$$n(\hat{b}) \geq |\sigma(\hat{b})| + m - e(b) \tag{5}$$

где $m = 9$ — степень, $e(b) = 11$ — сумма показателей косы b, и $\sigma(\hat{b})$, $n(\hat{b})$ — соответственно сигнатура и дефект (nullity) зацепления $\hat{b}$, являющегося замыканием косы b. Согласно [5; §2.6], имеем $\sigma(\hat{b}_{\alpha_1 \dots \beta_3}) = \sum \alpha_i + \sum \beta_i + \sigma(W)$

[2] Овал называется пустым, если внутри него нет других овалов.

и $\det\hat{b} = \det W$ где W — матрица, явно выписываемая по представлению (4), все элементы которой — константы, не зависящие от α_i, β_i, кроме шести диагональных элементов, равных $\alpha_1,\dots,\beta_3$. Вычисление показывает, что $\det W = 16(\Sigma\alpha_i + \Sigma\beta_i)$ и $\sigma(\hat{b}_{26,0,\dots,0}) = -5$. Поскольку $\det W \neq 0$, когда точка $(\alpha_1,...,\beta_3)$ принадлежит гиперплоскости $\sum\alpha_i + \sum\beta_i = 26$, сигнатура матрицы W постоянна вдоль этой гиперплоскости. Следовательно, $\sigma(\hat{b}) = -5$ для всех b. Тот факт, что $\det W \neq 0$ означает $n(\hat{b}) = 1$. Это противоречит (5). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Не существует M-кривых степени 9 в $\mathbf{RP}^2$ с вещественными схемами (1) при четных положительных α.*

Замечания. **1.** Схема (1) при $\alpha = 0,1$ реализуема; нереализуемость (1) при $\beta = 0,1$ была известна (см. [4]).
2. Комплексные схемы

$$\langle J \sqcup (\tfrac{\beta+7}{2})_+ \sqcup (\tfrac{\beta-7}{2})_- \sqcup 1_-\langle 1_-\langle (\tfrac{\alpha+1}{2})_+ \sqcup (\tfrac{\alpha-1}{2})_-\rangle\rangle\rangle,$$

$$\langle J \sqcup (\tfrac{\beta+12}{2})_+ \sqcup (\tfrac{\beta-12}{2})_- \sqcup 1_-\langle 1_-\langle (\tfrac{\alpha}{2})_+ \sqcup (\tfrac{\alpha}{2})_-\rangle\rangle\rangle \qquad (6)$$

показывают, что лемма 1 не верна при значениях β, не перечисленных в (2).
3. Единственным известным автору ограничением для нечетных степеней, полученным методами, не упомянутыми во введении, является запрет M-схем $\langle J \sqcup 1\langle\alpha\rangle\rangle$, доказанный В.Харламовым (неопубликовано) с использованием вещественных θ-характеристик, связанных с расслоениями на коники.

Набросок доказательства теоремы 2. Комплексные схемы (6) — единственные, для которых не проходит доказательство теоремы 1. Выберем опять пучок прямых, проходящих через точку внутри одного из овалов $\langle\alpha\rangle$. Используя теорему Безу для вспомогательных коник, можно показать, что остальные овалы из $\langle\alpha\rangle$ не разделяются прямыми этого пучка, проходящими через овалы $\langle\beta\rangle$. Таким образом, схемы расположения относительно пучка имеют вид $[\supset_7 o_7^{\alpha-2} w_1 \dots w_h \subset_2]$, где $w_i = o_5^{\beta_i} o_4^{\beta_i'}$, $\sum(\beta_i + \beta_i') = \beta$ и $\beta_i, \beta_i' > 0$. Соответствующие косы:

$$b = \sigma_7^{1-\alpha}\tau_{7,5}\Bigl(\prod_{i=1}^{h}\sigma_5^{-\beta_i}\tau_{5,4}\sigma_4^{-\beta_i'}\tau_{4,5}\Bigr)\tau_{5,2}\Delta_9\,.$$

Очевидно, $h \leq \beta - 1$, и из (6) следует, что $h \geq 12$. При каждом данном h можно вычислить $\det\hat{b}$ как полином от α, β_i, β_i'. Если все переменные ≥ 1, то он не обращается в нуль. Поэтому, как и в доказательстве теоремы 1, можно показать, что $\sigma(\hat{b})$ постоянна при каждом h. Вычисляя $\sigma(\hat{b})$ при $\beta_i = \beta_i' = 1$, мы видим, что она равна $2h - 7$. Поскольку $n(\hat{b}) = 1$, это противоречит (5).

Прямолинейное вычисление $\det\hat{b}$ при $h > 20$ настолько громоздко, что его навряд ли можно выполнить даже при помощи компьютера. Однако, используя дополнительные топологические соображения, можно вычислить сигнатуру более простым и естественным способом. Подробности будут опубликованы в другой статье.

Цитированная литература

1. В.А. Рохлин, *Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых*, УМН, Т. 33,, N 5 (1978), 77–89.
2. Т. Фидлер, *Пучки прямых и топология вещественных алгебраических кривых*, Изв. АН СССР, сер. мат., Т. 46, N 6 (1982), 853–863.
3. О.Я. Виро, *Плоские вещественные кривые степеней 7 и 8: новые запреты*, Изв. АН СССР, сер. мат., Т. 47, N 5 (1983), 1135–1150.
4. A.B. Korchagin, *Construction of new M-curves of 9th degree*, Lect. Notes. Math. **1524** (1991), 407–426.
5. S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology (в печати).
6. О.Я. Виро, В.И. Звонилов, *Неравенство на число непустых овалов кривой нечетной степени*, Алгебра и Анализ **4** (1993), 539–548.
7. О.Я. Виро, *Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет*, УМН, Т. 41, вып. 3 (1986), 43–67.

Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН, Губкина 8, Москва, 117966, Россия