НОВАЯ M-КРИВАЯ СТЕПЕНИ 8

С.Ю. Оревков

Вещественная алгебраическая кривая в $\mathbf{RP}^2$ называется *M-кривой*, если она имеет максимально возможное число $(m-1)(m-2)/2+1$ компонент связности, где m — степень. *В настоящей заметке мы строим M-кривую степени* 8, *расположенную с точностью до изотопии как на рис. 1*, где $\langle n\rangle$ обозначает n овалов, лежащих вне друг друга в соответствующей области. Реализуемость этого расположения ранее была неизвестна. После этого результата (вместе с недавними результатами [1, 3] и более ранними результатами Фидлера, Виро, Корчагина и Шустина, см. обзор [2]) остается 6 расположений 22 овалов, реализуемость которых M-кривыми неизвестна.

Обозначим $\mathbf{RP}^1\times\mathbf{RP}^1$ через $\mathbf{R}\Sigma_0$, а $\mathbf{RP}^2$, раздутую в одной точке, — через $\mathbf{R}\Sigma_1$. Мы будем изображать $\mathbf{R}\Sigma_n$ в виде прямоугольника, противоположные стороны которого отождествлены в соответствии со стрелками. Если $n=0$, то стороны суть $x\times\mathbf{RP}^1$ и $\mathbf{RP}^1\times y$; если $n=1$, то горизонтальные стороны представляют исключительную кривую, а вертикальные — слой (собственный прообраз прямой, проходящей через центр раздутия).

Лемма 1. *Существует вещественная алгебраическая кривая C_0 на $\mathbf{R}\Sigma_0$ бистепени $(2,4)$, расположенная относительно горизонтальных прямых L_1, L_2, L_3 и вертикальных прямых $L_4,\dots,L_7$ как на рис. 2, (в частности, $(C_0\cdot L_1)_{p_3}=3$), имеющая в p_0 простую двойную точку с невещественными касательными, а также имеющая два каспа в точках p_1 и p_5.*

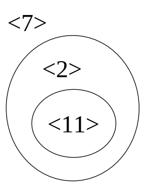

Рис. 1

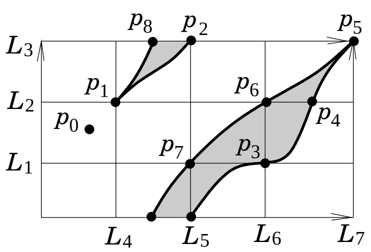

Рис. 2

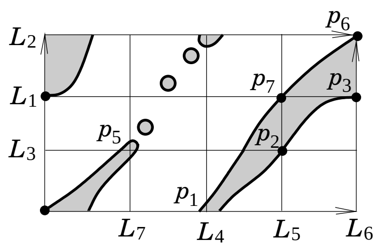

Рис. 3

Доказательство. Из формулы рода следует, что C_0 должна быть рациональной. Поэтому мы зададим ее параметрически $f:\mathbf{RP}^1\to\mathbf{R}\Sigma_0$, $f(t:1)=\big((x:$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$u),(y:z)\big)$, где

$$x=t^2,\qquad u=1,\qquad y=t^2(t+1)(t-t_3),\qquad z=(t-t_1)(t-t_2),$$
$$t_1=\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}\approx 0.219\,,\qquad t_2=\tfrac{2-\sqrt{17}}{13}\approx -0.163\,,\qquad t_3=\tfrac{11+\sqrt{17}}{4}\approx 3.781\,.$$

Введем аффинные координаты $X=x/u$, $Y=y/z$. Можно проверить, что

$$y(t)+\alpha z(t)=(t+t_1)(t-1)^3,\quad Y(t_0)=Y(-t_0)=-\tfrac{\alpha}{3},\quad Y(1)=Y(-t_1)=-\alpha,$$
$$\text{где}\qquad t_0=i\sqrt{\tfrac{-4+\sqrt{17}}{3}}\approx 0.203\,i,\qquad \alpha=2+\sqrt{17}\approx 6.123\,.$$

Зададим прямые $L_1=\{y+\alpha z=0\}$, $L_2=\{y=0\}$, $L_3=\{z=0\}$, $L_4=\{x=0\}$, $L_5=\{x=t_1^2u\}$, $L_6=\{x=u\}$, $L_7=\{u=0\}$ и точки (в аффиных координатах) $p_0=(t_0^2,-\frac{\alpha}{3})$, $p_1=(0,0)$, $p_2=(t_1^2,\infty)$, $p_3=(1,-\alpha)$, $p_4=(t_3^2,0)$ $p_5=(\infty,\infty)$, $p_6=(1,0)$, $p_7=(t_1^2,-\alpha)$, $p_8=(t_2^2,\infty)$. Из вышеприведенных формул вытекает, что $(\pm t_0,0,t_1,1,t_3,\infty,-1,-t_1,t_2)\mapsto(p_0,\dots,p_8)$. Поскольку $L_j\cdot C_0=4$ или 2, мы имеем $C_0\cap\big(\bigcup L_j\big)=\{p_1,\dots,p_8\}$. К тому же, по формуле рода C_0 не имеет самопересечений кроме p_0. Таким образом, C_0 можно провести единственным способом. $\square$

Лемма 2. *Существует вещественная алгебраическая кривая C_1 на $\mathbf{R}\Sigma_0$ бистепени $(4,4)$, расположенная относительно горизонтальных прямых L_1, E_2 и вертикальных прямых L_3,E_7 как на рис. 8, причем $(C_1\cdot L_1)_{q_6}=4$, и C_1 имеет особенность типа X_{10} (простое касание трех гладких ветвей) в q_5.*

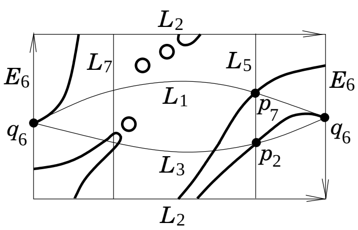

Рис. 4

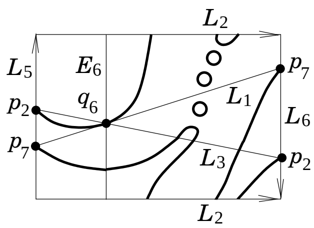

Рис. 5

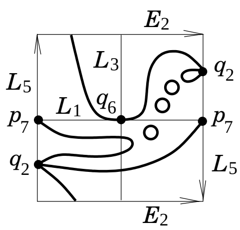

Рис. 6

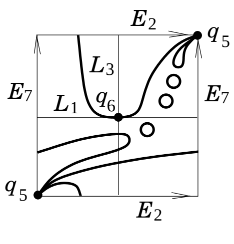

Рис. 7

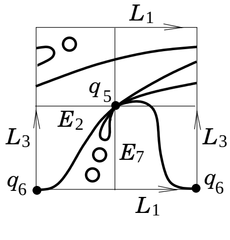

Рис. 8

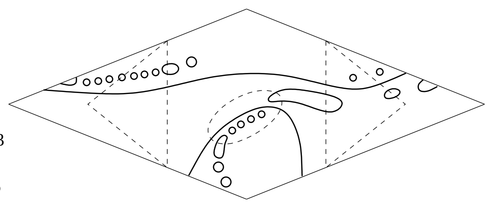

Рис. 9

Доказательство. Раздутие (соответственно, стягивание), преобразующее точку p в прямую E (соответственно, наоборот), будет обозначаться ниже через $p \uparrow E$ (соответственно, $E \downarrow p$).

Шаг 1. Сгладим C_0 как на рис. 3.

Шаг 2. $p_6 \uparrow E_6$, затем $L_6 \downarrow q_6$ (получим $\mathbf{R}\Sigma_1$ на рис. 4 и 5).

Шаг 3. $p_2 \uparrow E_2$, затем $L_2 \downarrow q_2$ (получим $\mathbf{R}\Sigma_1$ на рис. 6).

Шаг 4. $p_7 \uparrow E_7$, затем $L_5 \downarrow q_5$ (получим $\mathbf{R}\Sigma_0$ на рис. 7 и 8). $\square$

Сглаживая особенность X_{10} на рис. 8 (для обоснования выполнимости сглаживания мы отсылаем читателя к [4]), можно получить кривую, задаваемую многочленом с многогранником Ньютона $[(0,0),(4,0),(4,3),(0,4)]$, карта которой в смысле [5] изображена в центральном шестиугольнике на рис. 9. Склеивая ее с картами треугольников $[(4,0),(10,0),(4,3)]$ и $[(10,0),(16,0),(4,3)]$, мы получаем карту треугольника $[(0,0),(16,0),(0,4)]$, изображенную на рис. 9. Использованные карты треугольников взяты из [5, 6]; они обе являются бирациональными преобразованиями одного и того же сглаживания особенности X_{10}.

Для завершения построения кривой на рис. 1 мы поступим как в [1]. А именно, возьмем четыре вещественные коники в $\mathbf{RP}^2$, попарно максимально касающиеся в одной и той же точке, и вклеим в точку касания карту, изображенную на рис. 9.

Список литературы

1. Б. Шевалье, *Четыре М-кривые степени* 8, Функц. анализ и его прилож. (в печати).
2. A.B. Korchagin, *The first part of Hilbert's sixteenth problem: history and main results*, Math. Series, Texas Tech University **19** (1997), 85–140.
3. S.Yu. Orevkov, *Classification of Flexible M-curves of Degree 8 up to Isotopy*, http://picard.ups-tlse.fr/~orevkov.
4. E.I. Shustin, *Lower deformations of isolated hypersurface singularities*, Алгебра и анализ **11** (1999), no. 5, 221–249.
5. О.Я. Виро, *Вещественные алгебраические многообразич с предписанными топологическими свойствами*, Дисс... д.ф.-м.н., Ленинград, 1983; Англ. перевод 1-й главы, *Patchworking real algebraic varieties*, http://www.math.uu.se/~oleg.
6. О.Я. Виро, *Вещественные алгебраические кривые: построения с контролируемой топологией*, Алгебра и анализ **1** (1990), no. 5, 1–73.

Университет им. Поля Сабатье (Тулуза)
E-mail address: orevkov@picard.ups-tlse.fr

МИ РАН им. В.А. Стеклова
E-mail address: orevkov@mi.ras.ru