Неприводимость лемнискат

С. Ю. Оревков[1]

Лемнискатой (или *полиномиальной лемнискатой*) называется вещественная кривая в $\mathbb{C}$, заданная уравнением $|P(z)| = 1$, где $P(z)$ — отличный от константы многочлен с комплексными коэффициентами.

Будем говорить, что подмножество $X \subset \mathbb{R}^2$ есть *неприводимая вещественная алгебраическая кривая*, если это множество нулей неприводимого над $\mathbb{C}$ вещественного многочлена от двух переменных. В настоящей заметке мы доказываем, что

любая лемниската есть неприводимая вещественная алгебраическая кривая в $\mathbb{C}$

(при стандартном отождествлении $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$). Этот факт непосредственно вытекает из нижеприведенного следствия 1 (в самом деле, поскольку $\{|P| = 1\} = \{|P^d| = 1\}$, любую лемниската можно задать многочленом, не являющимся степенью другого).

Теорема 1. *Пусть P и Q — многочлены от одной переменной с комплексными коэффициентами. Тогда многочлен $P(z)Q(w) - 1$ приводим тогда и только тогда, когда $P(z) = P_1(z)^d$ и $Q(w) = Q_1(w)^d$ для $d > 1$ и некоторых многочленов $P_1(z)$ и $Q_1(w)$.*

Следствие 1. *Пусть $P(z)$ — многочлен от одной переменной с комплексными коэффициентами, и $f(x, y)$ — вещественный многочлен $f(x, y) = P(x + iy)\bar{P}(x - iy) - 1$, где $\bar{P}$ — многочлен, коэффициенты которого сопряжены коэффициентам многочлена P. Тогда $f(x, y)$ приводим над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $P(z) = P_1(z)^d$ для $d > 1$ и некоторого многочлена $P_1(z)$.*

Доказательство. Применить теорему к P и $\bar{P}$ после линейной замены переменных $z = x + iy$, $w = x - iy$ в $\mathbb{C}^2$.

Замечание 1. (Ф. Б. Пакович). Если $P(z)$ и $Q(w)$ — произвольные рациональные функции, то вопрос о приводимости алгебраической кривой $P(z)Q(w) = 1$ представляется чрезвычайно трудным. Например, в другом частном случае (в некотором смысле, противоположном нашему), когда $P(z)$ и $1/Q(w)$ многочлены, эта задача решена в [2] (с точностью до конечного числа возможных исключений) и в [1] (окончательно), однако решение использует классификацию простых конечных групп.

Оставшаяся часть заметки посвящена доказательству теоремы 1. Пусть

$$P(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{p_j}, \quad \deg P = p, \quad \text{и} \quad Q(w) = \prod_{j=1}^{l} (w - w_j)^{q_j}, \quad \deg Q = q,$$

где $z_1, \dots, z_k$ и $w_1, \dots, w_l$ — два набора попарно различных комплексных чисел. Обозначим через C замыкание в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ аффинной алгебраической кривой в $\mathbb{C}^2$, заданной уравнением $P(z)Q(w) = 1$ (здесь $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$).

Предположим, что $P(z)Q(w) - 1 = f'(z, w)f''(z, w)$ с непостоянными многочленами f' и f''. Пусть C' и C'' — соответствующие подмножества C. Их локальные индексы пересечения с бесконечно удаленными прямыми $L_1 = \mathbb{P}^1 \times \{\infty\}$ и $L_2 = \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$ обозначим

$$\begin{aligned} (C' \cdot L_1)_{(z_j, \infty)} &= p'_j, \qquad (C'' \cdot L_1)_{(z_j, \infty)} = p''_j, \qquad (j = 1, \dots, k), \\ (C' \cdot L_2)_{(\infty, w_j)} &= q'_j, \qquad (C'' \cdot L_2)_{(\infty, w_j)} = q''_j, \qquad (j = 1, \dots, l). \end{aligned}$$

Пусть (p', q') и (p'', q'') — бистепени кривых C' и C'' соответственно. Тогда

$$p = p' + p'', \quad q = q' + q'', \quad p_j = p'_j + p''_j, \quad q_j = q'_j + q''_j.$$

[1]При поддержке гранта РФФИ 17-01-00592а.

Росток кривой C в (z_j,∞) задан уравнением $u^q=v^{p_j}$ в некоторых локальных аналитических координатах (u,v). Поэтому он имеет НОД(q,p_j) локальных ветвей, распределенных в некоторой пропорции между C' и C''. Сравнивая степени проекций ростков C' и C'' на координатные оси, получаем $p'_j/p''_j=q'/q''$. Аналогично, $q'_j/q''_j=p'/p''$. Обозначим эти дроби через α и β соответственно. Из $\sum p'_j=p'$ и $\sum p''_j=p''$ получаем

$$\beta p''=p'=p'_1+\dots+p'_k=\alpha p''_1+\dots+\alpha p''_k=\alpha p'',$$

следовательно $\alpha=\beta$. Пусть $\alpha=d'/d''$, НОД$(d',d'')=1$. Из

$$\frac{p'_1}{p''_1}=\dots=\frac{p'_k}{p''_k}=\frac{q'_1}{q''_1}=\dots=\frac{q'_l}{q''_l}=\frac{d'}{d''}$$

следует, что $p'_j=a_jd'$, $p''_j=a_jd''$ и $q'_j=b_jd'$, $q''_j=b_jd''$ для некоторых целых чисел $a_1,\dots,a_k$ и $b_1,\dots,b_l$. Поэтому $p_j=p'_j+p''_j=a_jd$ и $q_j=b_jd$ для $d=d'+d''$, и тем самым, $P(z)=P_1(z)^d$ и $Q(w)=Q_1(w)^d$ для

$$P_1(z)=\prod_{j=1}^{k}(z-z_j)^{a_j}\quad \text{и}\quad Q_1(w)=\prod_{j=1}^{l}(w-w_j)^{b_j}.$$

Я благодарю Ф. Б. Паковича за постановку задачи и стимулирующие обсуждения.

Цитированая литература

[1] Pi. Cassou-Noguès, J.-M. Couveignes, *Factorisations explicites de $g(y)-h(z)$,* Acta Arith., **87**(1999), no. 4, 291–317.

[2] W. Feit, *On symmetric balanced incomplete block designs with doubly transitive automorphism groups,* J. Combin. Theory Ser. A, **14**(1973), 221–247.

Математический институт им. В. А. Стеклова, ул. Губкина 8, Москва 119991, Россия

IMT, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, Toulouse 31062, France