

О МНОЖЕСТВЕ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ВЕЩЕСТВЕННОЙ КРИВОЙ

С. Ю. ОРЕВКОВ

Аннотация. Множеством гиперболичности вещественной алгебраической кривой в трехмерном проективном пространстве называется множество прямых, относительно которых кривая гиперболична. Мы строим пример гладкой неприводимой кривой, у которой множество гиперболичности несвязно, но при этом его компоненты связности не различаются индексами зацепления с компонентами связности кривой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть C — вещественная алгебраическая кривая в $\mathbb{R}P^n$. Будем говорить, что она *гиперболична* относительно некоторого $(n - 2)$ -мерного проективного подпространства L , если C не пересекается с L и любая гиперплоскость, содержащая L , имеет только вещественные пересечения с (комплексификацией кривой) C . В этом случае L названа в [5] *сертификатом гиперболичности* (witness to the hyperbolicity) кривой C .

Шамович и Винников поставили вопрос (см. вторую часть вопроса 3.13 в [5]), всегда ли множество сертификатов гиперболичности неприводимой кривой C связно (следуя [2], мы будем его называть *множеством гиперболичности* кривой C и обозначать через $\mathcal{H}(C)$). Очевидно, что это так для $n = 2$. Однако Куммер и Шоу [2] показали, что ответ отрицателен для $n = 3$. Они построили пример гладкой кривой C в $\mathbb{R}P^3$ степени 6 и рода 1, топологически состоящей из двух окружностей A и B , причем C гиперболична относительно каждой из двух прямых L, L' и индексы зацепления A и B с L и L' различны: $(\text{lk}(A, L), \text{lk}(B, L)) \neq (\text{lk}(A, L'), \text{lk}(B, L'))$.

Заметим, что в [3, теорема 3 и лемма 3.12] построена (хотя явно это и не сформулировано) бесконечная серия примеров с любым количеством компонент связности множества $\mathcal{H}(C)$. Это кривые $W_g(a_0, \dots, a_g)$ в обозначениях из [3], в частности, построенная в [2] кривая — это $W_1(2, 2)$. Во всех этих примерах, как и в [2], любые две компоненты множества $\mathcal{H}(C)$ различаются индексами зацепления, что следует из [3, предложение 3.13].

Тем самым, естественно возникает вопрос (см. [2, вопрос 2]): бывает ли так, что $\mathcal{H}(C)$ несвязно, но при этом элементы разных компонент связности имеют одинаковые индексы зацепления со всеми компонентами связности кривой C ? В настоящей заметке дается положительный ответ на этот вопрос для $n = 3$.

При поддержке гранта РФФИ 17-01-00592as

Мы строим рациональную кривую C в \mathbb{RP}^3 степени 8 и две прямые $L, L' \in \mathcal{H}(C)$, которые принадлежат разным компонентам связности множества $\mathcal{H}(C)$, потому что зацепления $C \cup L$ и $C \cup L'$ не изотопны в \mathbb{RP}^3 . Поскольку у кривой только одна компонента связности, индексы зацепления не могут различать компоненты множества $\mathcal{H}(C)$.

2. ПРИМЕР

2.1. Вспомогательная конфигурация прямых. Пусть (x, y, z) — координаты в некоторой аффинной карте на \mathbb{RP}^3 . Обозначим через L ось z , а через L' — общую бесконечно удаленную прямую плоскостей $z = \text{const}$. Пусть R — поворот на 90° вокруг L . Положим: $p_0 = (3, -1, -1)$, $q_0 = (3, 1, 1)$, $p_k = R^k(p_0)$, $q_k = R^k(q_0)$, $\ell_k = (p_k q_k)$, $\ell'_k = (p_k, q_{k+1})$; см. рис. 1, где черные и серые части прямых ℓ_k и ℓ'_k соответствуют знаку z -координаты.

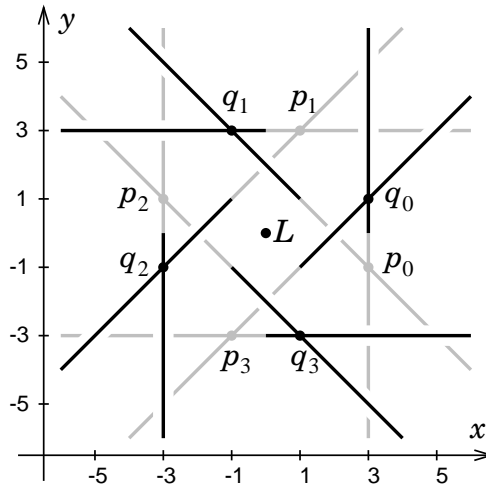


Рис. 1. Проекция на Oxy

На рис. 2 изображена та же конфигурация прямых, но в проекции на плоскость Oxz . Здесь цвет отвечает знаку y -координаты. Заметим, что поскольку рис. 2 получен из рис. 1 поворотом вокруг оси Ox , направление оси Oy на рис. 2 противоположно направлению оси Oz на рис. 1.

Ориентируем прямые ℓ_k и ℓ'_k так, что на них $dz > 0$. Заметим, что в этом случае на них также будет $d\theta > 0$, где $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Это означает, что при надлежащем выборе ориентаций на L и L' обе эти прямые положительно зацеплены с каждой из прямых ℓ_k, ℓ'_k .

2.2. Построение кривой C . Возмутим объединение построенных в §2.1 восьми прямых так, чтобы возле q_0 оно преобразовалось бы как на рис. 3(слева), а возле остальных двойных точек (q_1, q_2, q_3 и p_0, \dots, p_3) — как на рис. 3(справа). Такое возмущение возможно согласно [1, теорема 2.4] — надо прямые добавлять одну за другой. Легко видеть, что $L, L' \in \mathcal{H}(C)$.

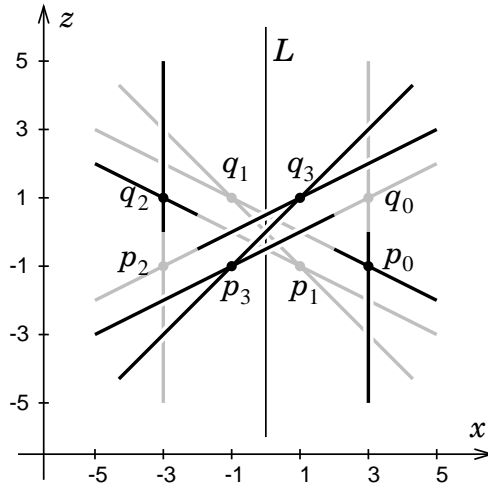


Рис. 2. Проекция на Oxy

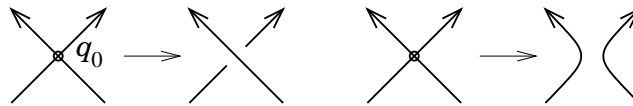


Рис. 3. Возмущения в q_0 (слева) и в других точках (справа)

2.3. Доказательство того, что L и L' лежат в разных компонентах связности множества $\mathcal{H}(C)$. Достаточно показать, что ориентированные зацепления $C \cup L$ и $C \cup L'$ не изотопны в $\mathbb{R}P^3$. Действительно, их поднятия на трехмерную сферу (обозначим их Λ и Λ') имеют разные *определители*, т. е. определители симметризованной матрицы Зейферта (значения в -1 многочлена Александера), а именно, $\det(\Lambda) = 64$ и $\det(\Lambda') = 0$.

Для вычислений использовалась программа из [4, Appendix], доступная на веб-странице <http://picard.ups-tlse.fr/~orevkov/sm.mat>. Поскольку ее входные данные должны быть представлены в виде кос, для удобства читателя приведем косы β и β' , замыкания которых дают зацепления Λ и Λ' соответственно.

Чтобы найти β' , надо на рис. 1 вращать прямую на 360° вокруг начала координат и выписывать вклады пересечений, последовательно сканируемых этой прямой (в том числе и пересечения на бесконечности). Это дает $\beta' = \beta'_{1/2} \tau_9(\beta'_{1/2})$, где $\beta'_{1/2}$ — вклад вращения прямой на 180° начиная с горизонтального положения, а $\tau_n : B_n \rightarrow B_n$ — автоморфизм группы кос, заданный на образующих как $\sigma_i \mapsto \sigma_{n-i}$; его надо применять на втором полуобороте вращающейся прямой, так как ориентация на ней

меняется на противоположную (см. также [3, §§4.3–4.5]). Мы получаем

$$\begin{array}{ll}
\beta'_{1/2} = \sigma_1 \Delta_{45} \sigma_8 & \pm(2, 0), (\infty, 0) \\
\times \sigma_2^{-1} & (3, 1) \quad (\text{нет вклада от } (-3, -1)) \\
\times \sigma_3 \sigma_6 & \pm(5, 3) \\
\times \sigma_2 \Delta_{45} \sigma_7 & \pm(3, 3), (\infty, \infty) \\
\times \sigma_3 \sigma_6 & \pm(3, 5) \\
\times \sigma_1 \Delta_{45} \sigma_8 & \pm(0, 2), (0, \infty) \\
\times \sigma_3 \sigma_6 & \pm(-3, 5) \\
\times \sigma_2 \Delta_{45} \sigma_7 & \pm(-3, 3), (-\infty, \infty) \\
\times \sigma_3 \sigma_6, & \pm(-5, 3)
\end{array}$$

где $\Delta_{45} = \sigma_4 \sigma_5 \sigma_4$ — вклад каждого из тройных пересечений на бесконечности (в комментариях в правой колонке указаны координаты сканируемых пересечений согласно рис. 1).

Аналогично, $\beta = \beta_{1/2} \tau_9(\beta_{1/2})$ с

$$\begin{aligned}
\beta_{1/2} = & (\sigma_1 \sigma_4 \sigma_7) \sigma_2^{-1} (\sigma_3 \sigma_5) (\sigma_2 \sigma_4 \sigma_6) (\sigma_3 \sigma_5) \\
& \times (\sigma_1 \sigma_4 \sigma_7) (\sigma_3 \sigma_5) (\sigma_2 \sigma_4 \sigma_6) (\sigma_3 \sigma_5) \\
& (\sigma_8 \sigma_7 \dots \sigma_1),
\end{aligned}$$

где первые две строки соответствуют кривой C , а третья строка — прямой L' .

Замечание. Если отрицательное пересечение на рис. 3(слева) заменить на положительное (что отвечает замене σ_2^{-1} на σ_2 в вышеприведенных косах), то множество $\mathcal{H}(C)$ станет связным в силу [3, предложение 3.13], так как получающаяся кривая 8-й степени будет максимально закрученной (*maximally writhed*).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. Björklund, *Real algebraic knots of low degree*, J. Knot Theory and Ramifications **20** (2011), 1285–1309.
2. M. Kummer, K. Shaw, *The separating semigroup of a real curve*, Ann. de la fac. des sci. de Toulouse. Mathématiques (6) (to appear); arxiv:1707.08227.
3. G. Mikhalkin, S. Orevkov, *Maximally writhed real algebraic links*, arxiv:1710.00013.
4. S. Yu. Orevkov, *Classification of flexible M-curves of degree 8 up to isotopy*, GAFA – Geom. and Funct. Anal. **12** (2002), 723–755.
5. E. Shamovich, V. Vinnikov, *Livsic-type determinantal representations and hyperbolicity*, arxiv:1410.2826.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА РАН. МОСКВА, РОССИЯ

IMT, L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118 ROUTE DE NARBONNE, TOULOUSE, FRANCE
E-mail address: orevkov@math.ups-tlse.fr