

С. Ю. Оревков

О ростках отображений $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

В статье описаны ростки отображений $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, с ветвлением вдоль ростка неприводимой кривой, образ которого имеет вид $x^p = y^q$.

Настоящая статья является дополнением к статье Вик. С. Куликова [6]. В [6; теорема 4] описаны ростки отображений $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, с квадратичным ветвлением вдоль ростка неприводимой кривой, образ которого имеет одну характеристическую пару. В настоящей статье дается другое доказательство этого результата, основанное на технике из [8; §1], а также его обобщение на произвольный порядок ветвления.

Кроме того, в §6 экстрасвойство (см. [6; п. 0.1]) доказывается для более широкого класса ростков, и тем самым (см. [6; следствие 1]) на этот класс ростков распространяются результаты из [5], обобщающие гипотезу Кизини о том, когда поверхность S однозначно определяется образом кривой ветвления регулярного отображения $S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Я признателен М. Г. Зайденбергу, А. К. Звонкину и Вик. С. Куликову за полезные обсуждения и советы по улучшению рукописи.

§ 1. Основной контекст

Пусть U — открытый шар в \mathbb{C}^2 с центром в начале координат и C — кривая $u^{d_1} = v^{d_2}$, $\text{НОД}(d_1, d_2) = 1$, $\min(d_1, d_2) > 1$. Пусть $F : \tilde{U} \rightarrow U$ — накрытие конечной степени N , разветвленное в C , и пусть $\tilde{C} \subset \tilde{U}$ множество особых точек отображения F (множество точек, в которых F не является локальным диффеоморфизмом). Предположим, что выполнены следующие условия:

- (A1) \tilde{U} является областью в \mathbb{C}^2 , отображение F аналитично и $F(0) = 0$;
- (A2) ограничение отображения F на каждую неприводимую компоненту множества $f^{-1}(C)$ (в частности, на \tilde{C}) биективно.

Обозначим через n порядок ветвления отображения F вдоль \tilde{C} . Это значит, что дивизор якобиана отображения F равен $(n-1)\tilde{C}$.

Пусть $f : \tilde{X} \rightarrow X$ — модель с простыми нормальными пересечениями (SNC-модель) отображения F в том смысле, что $\sigma : X \rightarrow U$ и $\tilde{\sigma} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{U}$ — композиции раздутий в начале координат и в его бесконечно близких точках, $\sigma^{-1}(C)$ — кривая с простыми нормальными пересечениями (SNC-кривая) и $f : \tilde{X} \rightarrow X$ — голоморфное отображение, такое, что $F \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ f$. Будем считать, что эта SNC-модель минимальна, т.е. $E := \sigma^{-1}(0)$ не содержит (-1) -кривых валентности 1 или 2 в $\sigma^{-1}(C)$ и $\tilde{E} := \tilde{\sigma}^{-1}(0)$ не содержит (-1) -кривых, стягиваемых отображением f точку.

Известно, что минимальная SNC-модель существует и единственна с точностью до эквивалентности. Для ее построения надо сначала построить минимальное SNC-разрешение особенности кривой C , а затем раздутиями устранить точки неопределенности отображения F . Мы сохраняем обозначения C и \tilde{C} для собственных прообразов кривых C и \tilde{C} на X и \tilde{X} соответственно.

Для компактной SNC-кривой $D = D_1 + \dots + D_k$, где D_i неприводимы, положим

$$d(D) = \det \| -D_i \cdot D_j \|_{i,j=1,\dots,k}.$$

Будем говорить, что D — рациональная линейная цепочка, если все D_i рациональны, $D_i \cdot D_{i+1} = 1$ при всех i и $D_i \cdot D_j = 0$ при $|i - j| > 1$. В этом случае кривые D_1 и D_k назовем концами цепочки D .

Легко видеть, что E — рациональная линейная цепочка. Обозначим ее неприводимую компоненту, пересекающую C , через E_0 , а замыкания компонент связности дополнения $E \setminus E_0$ — через E_1 и E_2 (это тоже рациональные линейные цепочки). Обозначим точки пересечения: $p_0 = E_0 \cap C$, $p_i = E_0 \cap E_i$, $i = 1, 2$. Хорошо известно (см., например, [4; ch. 5]), что $d(E_i) = d_i$, $i = 1, 2$ (напомним, что $C = \{u^{d_1} = v^{d_2}\}$). Этот факт также непосредственно вытекает из предложения 1.5(г) работы [8], примененного к торическому разрешению (см., например, [2; §8.2]) особенности кривой C .

§ 2. Функции Белого и теорема Заниера

Обозначим через $\hat{\mathbb{C}}$ сферу Римана $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Нам потребуется следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. (Заниер [11; теорема 1].) Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ — два набора положительных целых чисел, таких, что $\sum \alpha_i = \sum \beta_j = N$, $n \leq N$, где $n = k + l - 1$, и $\text{НОД}(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l) = 1$. Тогда существует рациональная функция $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ с тремя критическими значениями,¹ такая, что наборы ее кратностей в их прообразах суть α, β и $(n, 1, \dots, 1)$.

Эта теорема доказана в [11] в терминах произведений перестановок (см. также [3]). Очень простое и изящное доказательство, основанное на технике *dessins d'enfants* найдено в [9; теорема 3.3], [1; теорема 3.3].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пакович и Звонкин в [9] нашли все пары (α, β) из теоремы 1, которые задают функцию g однозначно с точностью до автоморфизмов $\hat{\mathbb{C}}$, а в [10] для каждой такой пары нашли явный вид функции g .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В условиях теоремы 1 координаты на $\hat{\mathbb{C}}$ можно выбрать так, чтобы $0, 1, \infty$ были критическими значениями и $(n, 1, \dots, 1)$ — кратностями точек из $g^{-1}(\infty)$, причем n — кратностью точки ∞ . Тогда $g = P/Q$, где $P(t) = \prod (t - a_i)^{\alpha_i}$, $Q(t) = \prod (t - b_i)^{\beta_i}$ и $\deg(P - Q) = N - n$. Такие пары многочленов (P, Q) названы в [1, 10] парами Давенпорта–Заниера (DZ-парами).

¹Такие функции называются функциями Белого.

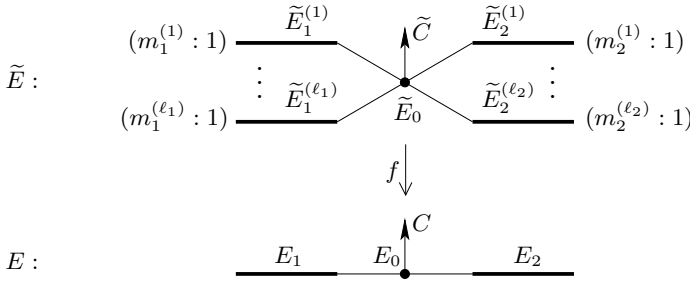


Рис. 1. Графы кривых E и \tilde{E} . Жирные линии — линейные цепочки; $m_i^{(j)}$ — степень ограничения отображения f на j -ю компоненту связности прообраза малой окрестности линейной цепочки E_i .

§ 3. Основная лемма: применение результатов из [8; §1]

Мы не приводим здесь определения и формулировки из [8; §1], так как §1 той статьи полностью независим от остальной ее части, и к тому же он почти только и состоит из определений, обозначений и формулировок.

ЛЕММА 3.1. (См. рис. 1.) *Существуют неприводимая компонента \tilde{E}_0 кривой \tilde{E} , такая, что:*

- (i) \tilde{E}_0 — замыкание множества $f^{-1}(E \setminus (E_1 \cup E_2 \cup C))$.
- (ii) $f^{-1}(E_i)$, $i = 1, 2$, — объединение непересекающихся рациональных линейных цепочек $\tilde{E}_i^{(1)}, \dots, \tilde{E}_i^{(\ell_i)}$. Каждая цепочка $\tilde{E}_i^{(j)}$ трансверсально пересекает \tilde{E}_0 в точке $p_i^{(j)}$, лежащей на одном из концов цепочки $\tilde{E}_i^{(j)}$.
- (iii) $f^{-1}(p_0)$ — конечное множество точек, одна из которых есть $\tilde{p}_0 := \tilde{C} \cap \tilde{E}_0$ (напомним, что $p_0 = E_0 \cap C$).
- (iv) f не разветвлено вдоль \tilde{E}_0 .
- (v) Числа $d_i^{(j)} := d(\tilde{E}_i^{(j)})$ положительны, попарно взаимно просты и все, кроме, быть может, двух, равны 1;
- (vi) Ограничение $f|_{\tilde{E}_0}$ — разветвленное накрытие степени N с ветвлением в точках $p_i^{(j)}$ и \tilde{p}_0 (эти точки определены в (ii), (iii)). Обозначим порядки ветвления отображения $f|_{\tilde{E}_0}$ через $m_i^{(j)}$ и m_0 соответственно. Напомним, что n — порядок ветвления отображения f вдоль \tilde{C} . Тогда

$$m_1^{(1)} + \dots + m_1^{(\ell_1)} = m_2^{(1)} + \dots + m_2^{(\ell_2)} = N, \quad m_0 = n, \quad (3.1)$$

$$\ell_1 + \ell_2 = n + 1, \quad (3.2)$$

$$m_i^{(j)} d_i^{(j)} = d_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, \ell_i, \quad (3.3)$$

$$N \left(d_1^{(1)} \dots d_1^{(\ell_1)} \right) \left(d_2^{(1)} \dots d_2^{(\ell_2)} \right) = d_1 d_2. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i)–(iv). Если D — рациональная линейная цепочка с отрицательно определенной формой пересечения и V — объединение малых трубчатых окрестностей ее компонент, то $\pi_1(V \setminus D) \cong \mathbb{Z}_{d(D)}$ (см. [7; §II]). Поэтому собственное аналитическое отображение гладкой поверхности $\tilde{V} \rightarrow V$,

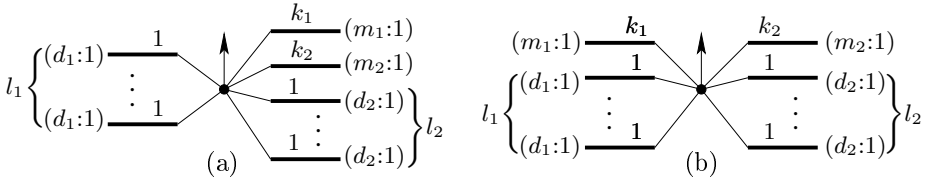


Рис. 2. Граф кривой \tilde{E} в случаях (a) и (b) теоремы 2 (ср. с рис. 1).
Пометка возле линейной цепочки $\tilde{E}_i^{(j)}$ — это $d(\tilde{E}_i^{(j)})$.

являющееся накрытием над $V \setminus D$, однозначно с точностью до эквивалентности определяется степенью, если на \tilde{V} нет (-1) -кривых. Из этого легко вывести, что все такие накрытия эквивалентны отображениям торических поверхностей, описанным в [8; §1.4], откуда следуют условия (i)–(iv).

В самом деле, D задается веером Σ , который является примитивным разбиением конуса, порожденного векторами $(1, 0)$ и (e, d) , $d = d(D)$, $\text{НОД}(e, d) = 1$ (см. [8; предл. 1.5(д)]). Для любого делителя m числа d рассмотрим гомоморфизм $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $(x, y) \mapsto (x, my)$, и зададим $\tilde{\Sigma}$ как примитивное подразбиение веера $A^{-1}(\Sigma)$. Тогда $A_* : X_{\tilde{\Sigma}} \rightarrow X_{\Sigma}$ — отображение торических поверхностей, являющееся накрытием степени m над дополнением к D (см. [8; предл. 1.6]).

(v). Положительность чисел $d_i^{(j)}$ следует из отрицательной определенности формы пересечения. То, что все они, кроме двух, равны 1, доказывается индукцией по числу раздутий, так как $d(\sigma^{-1}(D)) = d(D)$, если $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ — раздутие точки на SNC-кривой D (см., также [4; ch. 5]).

(vi). Равенство (3.1) очевидно; (3.2) следует из формулы Римана–Гурвица; (3.3) следует из [8; предл. 1.6]; (3.4) следует из [8; предл. 1.2].²

§ 4. Основная теорема

ТЕОРЕМА 2. (I). *Предположим, что имеет место один из следующих двух случаев (a) или (b).*

(a). $l_1, k_1, k_2 \geq 1$, $l_2 \geq 0$, $l_1 k_1 k_2 \geq 2$ и $\text{НОД}(k_1, k_2) = \text{НОД}(l_1, d_1) = 1$, где $d_1 = k_1 + k_2 + l_2 k_1 k_2$. Положим тогда $d_2 = l_1 k_1 k_2$, $m_1 = l_1 k_2$, $m_2 = l_1 k_1$, $N = l_1 d_1$ и $n = l_1 + l_2 + 1$.

(b). $k_1, k_2 \geq 1$, $l_1, l_2 \geq 0$, $k_1 + l_2 > 1$, $k_2 + l_1 > 1$ и $\text{НОД}(k_1, k_2) = \text{НОД}(m_1, m_2) = 1$, где $m_1 = k_2 l_2 + 1$, $m_2 = k_1 l_1 + 1$. Положим тогда $d_1 = k_1 m_1$, $d_2 = k_2 m_2$, $N = m_1 m_2$ и $n = l_1 + l_2 + 1$.

Пусть $g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ — функция Белого (см. теорему 1) с критическими значениями $\infty, 1, 0$ и порядками ветвлений α , $(n, 1, \dots, 1)$, β соответственно, где

$$(\alpha; \beta) = \begin{cases} (\mathbf{d}_1; m_1, m_2, \mathbf{d}_2) & \text{в случае (a),} \\ (m_1, \mathbf{d}_1; m_2, \mathbf{d}_2) & \text{в случае (b),} \end{cases} \quad \mathbf{d}_i = \underbrace{d_i, \dots, d_i}_{l_i}$$

²В [8; §1.2] есть опечатка: через n обозначены два разных числа. Она исправлена в версии статьи, доступной по ссылке <https://www.math.univ-toulouse.fr/~orevkov/jci.pdf>.

причем m_1, m_2 и n — порядки ветвления в точках $\infty, 0$ и 1 соответственно. Тем самым $g(t) = t^{m_2} g_2(t)^{d_2} / g_1(t)^{d_1}$, где g_i — многочлен степени l_i ($i = 1, 2$), $g_1(1) = g_2(1) = 1$ и числитель рациональной функции $g(t) - 1$ кратен $(t - 1)^n$. Положим $G_i(x, y) = g_i(y^{k_2}/x^{k_1})x^{k_1 l_i}$ ($i = 1, 2$).

Тогда отображение $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(x, y) \mapsto (u, v)$, заданное формулами

$$u = x^\nu G_1(x, y), \quad v = x^{1-\nu} y G_2(x, y), \quad \nu = \begin{cases} 0 & \text{в случае (а),} \\ 1 & \text{в случае (б),} \end{cases}$$

является накрытием степени N , разветвленным над кривой $C = \{u^{d_1} = v^{d_2}\}$ с ветвлением порядка n вдоль кривой $\tilde{C} = \{x^{k_1} = y^{k_2}\}$. SNC-модель отображения F в обозначениях леммы 3.1 имеет параметры, соответственно (см. рис. 2),

$$(a). \quad \ell_1 = l_1, \quad \ell_2 = l_2 + 2; \quad d_2^{(j)} = k_j, \quad m_2^{(j)} = m_j \quad (j = 1, 2);$$

$$d_1^{(j)} = 1, \quad m_1^{(j)} = d_1 \quad (1 \leq j \leq \ell_1); \quad d_2^{(j)} = 1, \quad m_2^{(j)} = d_2 \quad (3 \leq j \leq \ell_2).$$

$$(b). \quad \ell_i = l_i + 1, \quad d_i^{(1)} = k_i, \quad m_i^{(1)} = m_i, \quad d_i^{(j)} = 1, \quad m_i^{(j)} = d_i \quad (i = 1, 2; \quad 2 \leq j \leq \ell_i).$$

(II). С точностью до замены обозначений $d_1 \leftrightarrow d_2$, любое разветвленное накрытие, удовлетворяющее условиям (A1) и (A2), — такое, как в части (I) данной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (I). Из того, что g не имеет критических значений, кроме $0, 1, \infty$, и при этом функция $g(t) - 1$ имеет n -кратный нуль при $t = 1$, а остальные ее нули простые, следует, что $g' = \lambda t^\alpha g_1^\beta g_2^\gamma (t - 1)^{n-1}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. А поскольку

$$g' = t^{m_2-1} g_1^{-d_1-1} g_2^{d_2-1} h, \quad \text{где} \quad h = m_2 g_1 g_2 - d_1 t g_1' g_2 + d_2 t g_1 g_2'$$

и многочлен h взаимно прост с $t g_1 g_2$, мы заключаем, что $h(t) = \mu(t - 1)^{n-1}$, $\mu \in \mathbb{C}^\times$. Вычисление показывает, что в обоих случаях (а) и (б) мы имеем

$$J(F) := \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = x^{k_1(n-1)} h\left(\frac{y^{k_2}}{x^{k_1}}\right), \quad \text{откуда} \quad J(F) = \mu(y^{k_2} - x^{k_1})^{n-1},$$

и $F(s^{k_2}, s^{k_1}) = (s^{d_2}, s^{d_1})$, т.е. F — накрытие, разветвленное над $\{u^{d_1} = v^{d_2}\}$ с ветвлением порядка n вдоль $\{x^{k_1} = y^{k_2}\}$. Легко видеть, что точка $(1, 0)$ имеет N прообразов, значит, степень отображения F равна N .

Чтобы найти параметры SNC-модели, разложим σ и $\tilde{\sigma}$ в композицию

$$X \xrightarrow{\sigma_2} X_\Sigma \xrightarrow{\sigma_1} \mathbb{C}^2, \quad \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{\sigma}_2} X_{\tilde{\Sigma}} \xrightarrow{\tilde{\sigma}_1} \mathbb{C}^2,$$

где X_Σ и $X_{\tilde{\Sigma}}$ — торические разрешения особенностей (см., например, [2; §8.2]) кривых C и \tilde{C} . В обозначениях из [8; §1.4] это означает, что координаты (x, y) и (u, v) в \mathbb{C}^2 отвечают конусу $\langle e_1, e_2 \rangle$, где e_1, e_2 — базис в \mathbb{Z}^2 , а Σ и $\tilde{\Sigma}$ — минимальные примитивные подразделения вееров (e_1, e_0, e_2) и (e_1, \tilde{e}_0, e_2) , где $e_0 = d_2 e_1 + d_1 e_2$ и $\tilde{e}_0 = k_2 e_1 + k_1 e_2$. Отображения σ_1 и $\tilde{\sigma}_1$ индуцированы тождественным отображением $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$. Тогда E_0 и \tilde{E}_0 — дивизоры на X_Σ и $X_{\tilde{\Sigma}}$, отвечающие векторам e_0 и \tilde{e}_0 соответственно.

Пусть $e_0^+ = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in \Sigma$ и $\tilde{e}_0^+ = b_1 e_1 + b_2 e_2 \in \tilde{\Sigma}$ такие, что $e_0 \wedge e_0^+ = \tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_0^+ = 1$. Обозначим через (z, w) координаты на X_Σ , а через (s, t) — на $X_{\tilde{\Sigma}}$, отвечающие конусам $\langle e_0, e_0^+ \rangle$ и $\langle \tilde{e}_0, \tilde{e}_0^+ \rangle$ соответственно. В этих координатах: $E_0 = \{z = 0\}$, $C = \{w = 1\}$, $\tilde{E}_0 = \{s = 0\}$, $\tilde{C} = \{t = 1\}$, тем самым w — координата на E_0 и t — координата на \tilde{E}_0 . Отображения $\tilde{\sigma}_1 : (s, t) \mapsto (x, y)$ и $\sigma_1^{-1} : (u, v) \mapsto (z, w)$ имеют вид (см. [8; §1.4.1])

$$\begin{cases} x = s^{k_2} t^{a_2}, \\ y = s^{k_1} t^{a_1}, \end{cases} \quad \begin{cases} z = u^{b_1} v^{-b_2}, \\ w = u^{-d_1} v^{d_2}. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в формулу, задающую F , после упрощений в обоих случаях (а) и (б) получаем $\sigma_1^{-1}(F(\tilde{\sigma}_1(s, t))) = (s \phi(t), g(t))$, где ϕ — некоторая рациональная функция. В частности, $f|_{\tilde{E}_0}$ (в координатах t на \tilde{E}_0 и w на E_0) имеет вид $w = g(t)$, а значит, имеет требуемые порядки ветвления.

(II). Следует из леммы 3.1. В самом деле, в силу условия (v) один из следующих двух случаев (а), (б) имеет место с точностью до замены $d_1 \leftrightarrow d_2$.

(а). $d_1^{(1)} = \dots = d_1^{(\ell_1)} = d_2^{(3)} = \dots = d_2^{(\ell_2)} = 1$. Положим $l_1 = \ell_1$, $l_2 = \ell_2 - 2$, $m_j = m_2^{(j)}$, $k_j = d_2^{(j)}$, $j = 1, 2$. Тогда $m_1^{(j)} = d_1$ ($1 \leq j \leq \ell_1$) и $k_1 m_1 = k_2 m_2 = m_2^{(j)} = d_2$ ($3 \leq j \leq \ell_2$) в силу (3.3). Поскольку $\text{НОД}(k_1, k_2) = 1$ (см. (v)), из $k_1 m_1 = k_2 m_2$ следует $m_1 = a k_2$, $m_2 = a k_1$, $a \in \mathbb{Z}$. Поэтому $d_2 = a k_1 k_2$. К тому же, $N = d_1 l_1$ (см. (3.1)), и значит, (3.4) принимает вид $(d_1 l_1)(k_1 k_2) = d_1 (a k_1 k_2)$, откуда $a = l_1$. Наконец, $d_1 l_1 = N = m_1 + m_2 + l_2 d_2 = a k_1 + a k_2 + l_2 a k_1 k_2$ (см. (3.1)), следовательно, $d_1 = k_1 + k_2 + l_2 k_1 k_2$, так как $a = l_1$.

(б). $d_1^{(2)} = \dots = d_1^{(\ell_1)} = d_2^{(2)} = \dots = d_2^{(\ell_2)} = 1$. Положим $k_i = d_i^{(1)}$, $m_i = m_i^{(1)}$ и $l_i = \ell_i - 1$, $i = 1, 2$. Тогда $d_i = k_i m_i$ (см. (3.3)), значит, $\text{НОД}(m_1, m_2) = 1$. Поскольку $N = m_i k_i l_i + m_i$ (см. (3.1)), из взаимной простоты m_1 и m_2 следует $k_i l_i + 1 = a m_{3-i}$, $a \in \mathbb{Z}$, и значит, $N = a m_1 m_2$. Поэтому (3.4) принимает вид $(a m_1 m_2)(k_1 k_2) = d_1 d_2$, откуда $a = 1$, что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидно, что накрытие для случая (а) при $k_1 = 1$ эквивалентно накрытию для случая (б) при $k_1 = 1$ и тем же k_2 (с очевидной коррекцией параметров l_1 и l_2), а также, что накрытия будут эквивалентны, если поменять местами k_1 и k_2 в случае (а) или поменять местами все индексы 1 и 2 в случае (б). Эта неоднозначность устраняется, если ввести дополнительные ограничения $k_1 \leq k_2$ (в обоих случаях) и $k_1 \geq 2$ в случае (а). Несложно проверить, что при этом ограничении все накрытия попарно неэквивалентны, а также, что тип накрытия ((а) или (б)) и его параметры k_1, k_2, l_1, l_2 однозначно определяются величинами d_1, d_2, N и n (например, тип (б) характеризуется тем, что d_1 делит N).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В таблице 1 приведены все случаи, когда накрытие $f|_{\tilde{E}_0}$ однозначно с точностью до эквивалентности определено порядками ветвления, а значит, F однозначно задается величинами d_1, d_2, N и n . Этот факт легко вывести из [9; теорема 5.1] (см. замечание 1). В частности, мы видим, что единственность всегда имеет место при $n = 2$, что в совокупности с теоремой 2 завершает доказательство теоремы 4 из [6].

ТАБЛИЦА 1. (Параметр r определен в [10; §5.3] как $\#(-\circ-\overset{t}{-})$ на [10; рис. 15].)

	серия в [9, 10]	параметры s, t, k, l, r в [9, 10]
(a), $l_2 = 0$	E_4 , но допускается $k = 0$ и $l = 0$, т.е. в E_4 включены B_2 и E_2	$r = 1$; s, t, k, l заданы через деление с остатком: $m_2 = d_1 k + s$, $m_1 = d_1 l + t$
(b), $l_2 = 0$	A	$s = k_1$, $t = 1$, $k = l_1$
(b), $d_1 = 5$, $d_2 = 3$, $(k_1, k_2; l_1, l_2) = (1, 1; 2, 4)$	P	

§ 5. Явные формулы для отображения F в некоторых частных случаях

В случаях из таблицы 1 явные формулы для отображения F получаются при надлежащей замене координат из формул для DZ-пар из статьи [10] (см. замечания 1, 2).

Для 1-й строки таблицы 1 отображение $F : (x, y) \mapsto (u, v)$ имеет вид [10; §5.3]

$$u = J_{l_1} \left(-\frac{m_1}{d_1}, -\frac{m_2}{d_1}; \frac{y^{k_2} + x^{k_1}}{y^{k_2} - x^{k_1}} \right) (y^{k_2} - x^{k_1})^{l_1}, \quad v = xy,$$

где $J_k(a, b; x)$ — k -й многочлен Якоби. С помощью формулы [10; (5.2)] это выражение для u можно преобразовать к виду $u = x^{m_2} S(y^{k_2}/x^{k_1} - 1)$, где $S(T)$ — это l_1 -струя ряда $(1+T)^{m_2/d_1}$. В частности, $u = (k_1 y^{k_2} + k_2 x^{k_1}) / (k_1 + k_2)$ при $l_1 = 1$, т.е. когда F имеет ветвление второго порядка.

Для 2-й строки таблицы 1 отображение F имеет вид $(x, y) \mapsto (u(x, y), y)$, где $u'_x = \lambda(x^{k_1} - y^{k_2})^{n-1}$, $u(0, y) = 0$ и $u(1, 1) = 1$, т.е. $J(F) = \lambda(x^{k_1} - y^{k_2})^{n-1}$. В частности, $u = ((k_1 + 1)y^{k_2} - x^{k_1})x/k_1$ при $l_1 = 1$, т.е. при $n = 2$.

Для 3-й строки таблицы 1 отображение $F : (x, y) \mapsto (u, v)$ имеет вид

$$u = x^3 + 9xy^2 + 9y^3, \quad v = x^5 + 15x^3y^2 + 15x^2y^3 + 45xy^4 + 90y^5$$

(см. [10; §9.6]; в этом случае $\tilde{C} = \{y = 0\}$).

В частности, это дает явный вид отображения F во всех случаях для $n = 2$ и в половине случаев для $n = 3$. Разберем остальные случаи для $n = 3$.

В случае (a) при $l_1 = l_2 = 1$ отображение $F : (x, y) \mapsto (u, v)$ имеет вид

$$\begin{cases} u = A - d_2 B / s, \\ v = xy(A + sB), \end{cases} \quad A = \frac{k_2 x^{k_1} + k_1 y^{k_2}}{k_1 + k_2}, \quad B = \frac{x^{k_1} - y^{k_2}}{k_1 + k_2},$$

где $s = \pm\sqrt{-d_1}$ (напомним, что $d_1 = k_1 + k_2 + k_1 k_2$ и $d_2 = k_1 k_2$).

В случае (b) при $l_1 = l_2 = 1$ отображение $F : (x, y) \mapsto (u, v)$ имеет вид

$$\begin{cases} u = x(ay^{k_2} + (1-a)x^{k_1}), \\ v = y(bx^{k_1} + (1-b)y^{k_2}), \end{cases} \quad a = \frac{(k_1 + 1)(k_1 + s)}{k_1(k_1 - k_2)}, \quad b = \frac{(k_2 + 1)(k_2 + s)}{k_2(k_2 - k_1)},$$

где $s = \pm\sqrt{k_1 k_2}$.

§ 6. Экстра-свойство в случае (b) теоремы 2 при $(l_1, l_2) = (1, 0)$

Пусть $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — отображение $(x, y) \mapsto (u, v)$, $u = (p+1)xy^q - x^{p+1}$, $v = y$. С точностью до множителя это случай (b) теоремы 2 с параметрами $(k_1, k_2) = (p, q)$, $(l_1, l_2) = (1, 0)$, $(d_1, d_2) = (qp + q, p)$, $n = 2$, $N = p + 1$ (см. §5).

В этом пункте мы докажем, что f удовлетворяет *экстра-свойству* (см. конец п. 0.1 в [6]) и тем самым [6; следствие 1] остается верным, если заменить $\mathcal{G}_{2, \mathbb{N}}$ на $\mathcal{G}_{2, \mathcal{D}}$.

Введем обозначения примерно такие, как в [6; п. 0.1], а именно, обозначим кривую ветвления $\{x^p = y^q\}$ (множество нулей якобиана) через R , ее образ — через B , положим $C = f^{-1}(B) \setminus R$ и рассмотрим расслоенное произведение двух копий накрытия f :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \times_f \mathbb{C}^2 &= \{(x_1, y_1; x_2, y_2) \mid f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)\} \\ &\cong \{(x_1, x_2, y) \mid (p+1)x_1y^q - x_1^{p+1} = (p+1)x_2y^q - x_2^{p+1}\} = W' \cup W'', \end{aligned}$$

где $W' = \{x_1 = x_2\}$, $W'' = \{\Phi(x_1, x_2) = y^q\}$ и

$$(p+1)\Phi(x_1, x_2) = \frac{x_1^{p+1} - x_2^{p+1}}{x_1 - x_2} = x_1^p + x_1^{p-1}x_2 + \cdots + x_1x_2^{p-1} + x_2^p.$$

Пусть $g_1, g_2 : \mathbb{C}^2 \times_f \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — естественные проекции, заданные как $g_i(x_1, x_2, y) = (x_i, y)$, $i = 1, 2$, и пусть $\nu : \widetilde{W} \rightarrow W''$ — разрешение особенности поверхности W . Положим $h_i = g_i \circ \nu$. Собственный прообраз кривой R при отображении h_1 распадается в несвязное объединение кривых \overline{R} и \overline{C} , таких, что $h_2(\overline{R}) = R$ и $h_2(\overline{C}) = C$. Дивизор $h_1^*(R)$ имеет вид

$$h_1^*(R) = E + \overline{R} + \overline{C}, \quad \text{supp } E = h_1^{-1}(0) = h_2^{-1}(0). \quad (6.1)$$

Экстра-свойство накрытия f , которое мы собираемся доказать, заключается в том, что E раскладывается в сумму эффективных дивизоров $E = E_{\overline{R}} + E_{\overline{C}}$, таких, что

$$(E_{\overline{R}} + \overline{R}, E_{\overline{C}} + \overline{C})_{\widetilde{W}} \leq 2\delta_{(0,0)}(R) + \text{mult}_{(0,0)}(B) - 1, \quad (6.2)$$

где $(,)_{\widetilde{W}}$ — индекс пересечения, $\delta_{(0,0)}(R)$ — дельта-инвариант особенности кривой R и $\text{mult}_{(0,0)}(B)$ кратность кривой B в начале координат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $E_{\overline{R}} = \frac{1}{p}E$ и $E_{\overline{C}} = \frac{p-1}{p}E$ (априори это дивизоры с рациональными коэффициентами). Тогда

- (a) имеет место равенство в (6.2);
- (b) $E_{\overline{R}}$ и $E_{\overline{C}}$ являются дивизорами с целыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем $2\delta_{(0,0)}(R) = (p-1)(q-1)$ и $\text{mult}_{(0,0)}(B) = p$, следовательно, правая часть в (6.2) равна $pq - q$. Докажем, что левая часть тоже равна $pq - q$.

Пусть $\tau : X_{\Sigma} \rightarrow \mathbb{C}^3$ — торическое разрешение особенности поверхности W'' (см. [2; §8.2]), т.е. веер Σ — примитивное подразбиение положительного октанта в \mathbb{R}^3 , содержащее одномерный конус $\langle e_0 \rangle$, где $e_0 = (q, q, p)$ — вектор, ортогональный единственной компактной грани диаграммы Ньютона многочлена

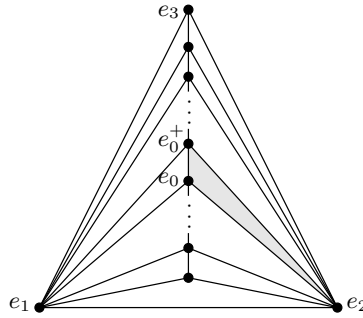


Рис. 3. Плоское сечение веера Σ .

$\Phi(x_1, x_2) - y^q$. В качестве такого Σ мы выберем веер, устроенный следующим образом. Пусть $X_{\Sigma'} \rightarrow \mathbb{C}^2$ — торическое разрешение особенности кривой $y^q = x^p$, как в доказательстве части (I) теоремы 2, т.е. веер Σ' — минимальное примитивное подразбиение веера (e'_1, e'_0, e'_2) , где (e'_1, e'_2) — базис \mathbb{Z}^2 и $e'_0 = qe'_1 + pe'_2$. Тогда одномерные конусы веера Σ — это положительные координатные полуоси $\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle$ и образы всех одномерных конусов веера Σ' , кроме конуса $\langle e'_1 \rangle$, при вложении $\iota : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3, (x, y) \mapsto (x, x, y)$, в частности, $e_0 = \iota(e'_0)$. Двумерные и трехмерные конусы веера Σ представлены на рис. 3 отрезками и треугольниками. Замыкание двумерной орбиты тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^3$, отвечающей конусу $\langle e \rangle$, будем обозначать через $X(e)$. Собственный прообраз поверхности W' обозначим через \widetilde{W}' (напомним, что \widetilde{W} — собственный прообраз W''). Взаимное расположение двумерных орбит, а также кривые, отсекаемые на них поверхностями \widetilde{W} и \widetilde{W}' , схематически изображены на рис. 4.

Пусть $e_0^+ = (a, a, b)$, где $qb - pa = 1$. Это соседняя с e_0 образующая одномерного конуса веера Σ , расположенная между e_0 и e_3 . Рассмотрим координаты (ξ_1, ξ_2, η) на X_{Σ} , отвечающие конусу $\langle e_0, e_2, e_0^+ \rangle$ (серый треугольник на рис. 3). В этих координатах $X(e_0)$ и $X(e_0^+)$ заданы уравнениями $\xi_1 = 0$ и $\eta = 0$ соответственно (см. рис. 4).

Отображение τ имеет вид $(\xi_1, \xi_2, \eta) \mapsto (x_1, x_2, y), x_1 = \xi_1^q \eta^a, x_2 = \xi_1^q \xi_2 \eta^a, y = \xi_1^p \eta^b$, поэтому \widetilde{W} и \widetilde{W}' задаются уравнениями $\eta = \varphi(\xi_2)$ и $\xi_2 = 1$ соответственно, где $\varphi(x) = \Phi(1, x)$. Следовательно, $\widetilde{W} \cap X(e_0)$ — гладкая рациональная кривая (обозначим ее E_0), которая в координатах (ξ_2, η) на поверхности $X(e_0)$ задана уравнением $\eta = \varphi(\xi_2)$, а $\widetilde{W}' \cap X(e_0^+)$ в координатах (ξ_1, ξ_2) на поверхности $X(e_0^+)$ задано уравнением $\varphi(\xi_2) = 0$, т.е. это p вертикальных прямых $\xi_2 = e^{2\pi i k / (p+1)}, k = 1, \dots, p$. Аналогичные вычисления в остальных координатных картах, отвечающих треугольникам на рис. 3, показывают, что $\widetilde{W} \cap \tau^{-1}(0)$ устроено, как на рис. 4.

Напомним, что $R = \{x^p = y^q\}$. Поэтому кривая $(\overline{R} \cup \overline{C}) \setminus E_0$ в координатах (ξ_1, ξ_2, η) задается уравнениями $(\xi_1^q \eta^a)^p = (\xi_1^p \eta^b)^q, \varphi(\xi_2) = \eta$ и неравенством $\eta \neq 0$. Поскольку $bq = ap + 1$, решая эту систему, получаем, что $\overline{R} \cup \overline{C}$ состоит из p компонент, имеющих параметризацию $t \mapsto (\xi_1, \xi_2, \eta) = (t, \alpha_k, \varphi(\alpha_k))$, где $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ — корни многочлена $\varphi(x) - 1$. При этом $\overline{R} = \widetilde{W} \cap \widetilde{W}'$ отвечает

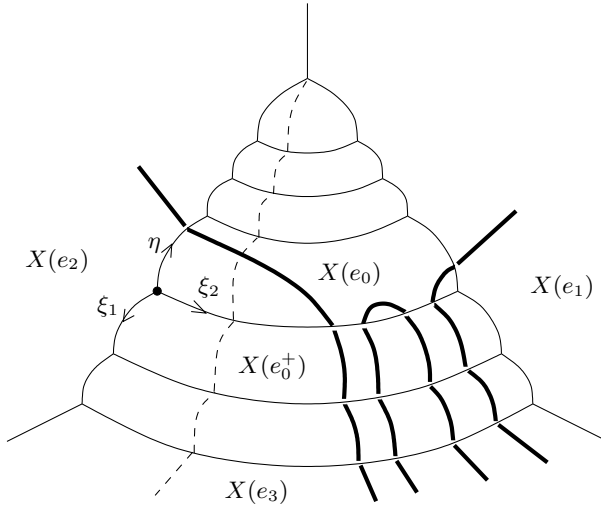


Рис. 4. Двумерные орбиты на X_Σ и их пересечения с \widetilde{W} и \widetilde{W}' .

корню $\alpha_1 = 1$, а \overline{C} — остальным корням (поскольку $\varphi(x) = (x-1)\psi'(x)$, где $\psi(x) = \Phi(x, 1)$), отображение h_2 имеет ветвление вдоль \overline{C} .

Таким образом, $(\overline{R}, E_0)_{\widetilde{W}} = 1$, $(\overline{C}, E_0)_{\widetilde{W}} = p-1$ и $\overline{R} \cup \overline{C}$ не пересекается с другими компонентами дивизора E . Рассмотрим кривую $D = \{cx^p = y^q\} \subset \mathbb{C}^2$, где число c трансцендентно. Пусть \overline{D} — собственный прообраз кривой D при отображении h_1 . Несложно проверить, что \overline{D} имеет такие же пересечения с компонентами дивизора E , что и $\overline{R} + \overline{C}$. Более того, $h_1^*(D) = E + \overline{D}$ (ср. с (6.1)). Следовательно,

$$p(\overline{R} + E_{\overline{R}}, \overline{C} + E_{\overline{C}})_{\widetilde{W}} = (p-1)(\overline{R}, h_1^*(D))_{\widetilde{W}} = (p-1)(R, D)_{\mathbb{C}^2} = (p-1)pq,$$

что доказывает утверждение (а). Утверждение (б) легко вывести из явного вида дивизора $h_1^*(R)$, записанного в картах, отвечающих конусам веера Σ .

Список литературы

- [1] N. M. Adrianov, F. Pakovich, A. K. Zvonkin, *Davenport-Zannier Polynomials and Dessins d'Enfants*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2020.
- [2] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов*, Наука, М., 1984.
- [3] G. Vercara, “Cycles comme produit de deux permutations de classes données”, *Discrete Mathematics*, **38**:2–3 (1982), 129–142.
- [4] D. Eisenbud, W. D. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Ann. of Math. Studies 110, Princeton University Press, 1985.
- [5] Вик. С. Куликов, “О квазиобщих накрытиях проективной плоскости”, *Матем. сб.*, **215**:2 (2024), 73–102.
- [6] Вик. С. Куликов, “О неприводимых ростках общих морфизмов”, *Матем. сб.*, (в печати); arxiv:2503.07099.

- [7] Д. Мамфорд, “Топология нормальных особенностей алгебраической поверхности и критерий простоты”, *Математика*, **10**:6 (1966), 3–24; *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 1961, 5–22.
- [8] С. Ю. Оревков, “Контрпримеры к «гипотезе о якобиане на бесконечности»”, *Труды МИАН*, **235** (2001), 181–210.
- [9] F. Pakovich and A. K. Zvonkin, “Minimum degree of the difference of two polynomials over \mathbb{Q} , and weighted plane trees”, *Selecta Math. (N.S.)*, **20**:4 (2014), 1003–1065.
- [10] F. Pakovich and A. K. Zvonkin, “Davenport–Zannier polynomials over \mathbb{Q} ”, *Int. J. Number Theory*, **14**:4 (2018), 925–974.
- [11] U. Zannier, “On Davenport’s bound for the degree of $f^3 - g^2$ and Riemann’s existence theorem”, *Acta Arithmetica*, **71**:2 (1995), 107–137.

С. Ю. Оревков (S. Yu. Orevkov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: orevkov@mi.ras.ru

С. Ю. Оревков (S. Yu. Orevkov)

IMT, l’université de Toulouse, Toulouse, France

E-mail: orevkov@math.ups-tlse.fr