КОНТРПРИМЕРЫ К "ГИПОТЕЗЕ О ЯКОБИАНЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ"

С.Ю. Оревков

Анатолию Георгиевичу Витушкину к его 70-летию

Введение

Известная *гипотеза о якобиане* (см. обзоры [17], [3]) заключается в следующем:

Гипотеза о якобиане (JC). *Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлены с комплексными коэффициентами, якобиан которых $P'_xQ'_y - P'_yQ'_x$ тождественно равен единице. Тогда отображение $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, $(x,y) \mapsto (u,v) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ взаимно-однозначно (или на алгебраическом языке: гомоморфизм колец многочленов $\mathbf{C}[u,v] \to \mathbf{C}[x,y]$, $u \mapsto P(x,y)$, $v \mapsto Q(x,y)$ является изоморфизмом).*

Определение 0.1. Пару (U,l), где U — гладкая аналитическая поверхность, и $l \subset U$ — гладкая компактная рациональная (т.е. изоморфная $\mathbf{CP}^1$) кривая с индексом самопересечения $+1$, будем называть $(+1)$-*парой*.

Назовем $(+1)$-пару (U,l) *плоской*, если U биголоморфно эквивалентно подмножеству в $\mathbf{CP}^2$ (ясно, что такой биголоморфизм отобразит l на прямую).

Мероморфным погружением (соответственно, *вложением*) $(+1)$-пары (U,l) в $\mathbf{C}^2$ называется пара мероморфных на U функций, таких что обе функции голоморфны на $U \setminus l$, и задаваемое этими функциями отображение $U \setminus l \to \mathbf{C}^2$ является погружением (соответственно, вложением).

Индексом мероморфного погружения $(+1)$-пары $f : U \setminus l \to \mathbf{C}^2$ назовем степень гауссового отображения $G_f : M \to S^3$, где $M = -\partial V$ — граница трубчатой окрестности V кривой l с обращенной ориентацией (отображение G_f точке $p \in M$ сопоставляет положительную единичную нормаль к плоскости $f_*(T_pM)$).

Гипотеза о якобиане эквивалентно переформулируется следующим образом:

Мероморфное погружение плоской $(+1)$-пары в $\mathbf{C}^2$ является вложением.

Действительно, если (U,l) — плоская $(+1)$-пара, то можно считать, что l — бесконечно удаленная прямая в $\mathbf{C}^2$, а U — ее окрестность. Тогда любая голоморфная на $U \setminus l$ функция по теореме об устранении компактных особенностей продолжается на все $\mathbf{C}^2$, причем если она мероморфна на U, то это многочлен.

Возникает естественный вопрос:[1] можно ли отказаться от условия, что $(+1)$-пара плоская? Другими словами, верна ли следующая

[1]Этот вопрос (возможно, не так конкретно сформулированный) мне предложил А.Г. Витушкин, когда я был его аспирантом.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Слабая гипотеза о якобиане на бесконечности (WJC_∞). *Любое мероморфное погружение* $(+1)$*-пары в* $\mathbf{C}^2$ *является вложением.*

В работе [13] я к этой гипотезе построил контрпример. В дальнейшем, я построил много других аналогичных контрпримеров к WJC_∞ (неопубликовано), но все они не продолжались до контрпримеров к JC, потому что у них был большой индекс.

Однако ясно, что *индекс мероморфного погружения плоской* $(+1)$*-пары равен единице.* Действительно, он равен $DG(F|_{S^3_r})$ при $r \gg 1$, где $F : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ — полиномиальное отображение с якобианом, равным единице, S^3_r — сфера радиуса r (ориентированная как край шара), а через $DG(\varphi)$ обозначена степень гауссового отображения, ассоциированного с погружением φ. Остается заметить, что функция $g(r) = DG(F|_{S^3_r})$ непрерывна, а значит, постоянна, и что $F|_{S^3_r}$ — вложение при $r \ll 1$, т.е. $g(r) = 1$.

В связи с этим я сформулировал новую гипотезу, о которой я сообщал на нескольких конференциях:

Гипотеза о якобиане на бесконечности (JC_∞). *Любое мероморфное погружение* $(+1)$*-пары в* $\mathbf{C}^2$*, индекс которого равен единице, является вложением.*

В настоящей статье к этой гипотезе тоже строится контрпример:

Предложение 0.2. *Существует* $(+1)$*-пара* (U, l) *и ее мероморфное погружение* $f : U \setminus l \to \mathbf{C}^2$ *индекса* 1*, не являющееся вложением.*

Такое мероморфное погружение $(+1)$-пары строится в §3. Построенная $(+1)$-пара (U, l) не является плоской, т.е. из нее не получается контрпримера к JC. Это доказывается в §4, пп. 4.1 – 4.2, анализируя коэффициенты многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, которые могли бы реализовывать данное погружение (в п. 4.3 приводится простое, но нестрогое топологическое объяснение этого факта). Поскольку всегда можно выбрать строго псевдовогнутую трубчатую окрестность кривой l (см. [13; §2]), из непродолжимости построенного контрпримера к JC_∞ до контрпримера к JC вытекает любопытное следствие, для формулировки которого нам потребуется еще одно определение.

Определение 0.3. Погружение f гладкого ориентированного $(2n-1)$-мерного многообразия Z в комплексное n-мерное многообразие Y называется *строго псевдовыпуклым*, если каждая точка $z \in Z$ обладает окрестностью $V \subset Z$, такой что $f(V)$ является частью границы (с учетом ориентации) некоторой строго псевдовыпуклой области в Y. Напомним, что *регулярной гомотопией* называется такая гомотопия $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$, что f_t — погружение при каждом t. Если при этом каждое f_t строго псевдовыпукло, то такую регулярную гомотопию мы назовем *строго псевдовыпуклой.*

Предложение 0.4. *Существует строго псевдовыпуклое погружение сферы* $f : S^3 \to \mathbf{C}^2$*, регулярно гомотопное вложению, но строго псевдовыпукло не гомотопное вложению.*

Это предложение доказывается в §5. Попутно мы доказывем предложение 5.6 о единственности продолжения псевдовыпуклого погружение сферы S^3 до погружения шара.

В статье [13] было дано полное доказательство того, что построенный там пример обладает требуемыми свойствами, но построение излагалось, говоря языком школьной геометрии, без "анализа задачи". Вероятно, это затрудняло понимание того, каким образом пример был найден и как строить другие подобные примеры. В настоящей статье я попытался исправить этот недостаток, добавив п. 2.4. Там же обсуждаются некоторые параллели между нашим подходом к JC и статьями [10] и [9].

На соответствие между [13] и [9] мое внимание обратила П. Кассу-Ногес. Я ей выражаю благодарность за это и за другие полезные обсуждения. Я также признателен своему учителю А.Г. Витушкину, благодаря которому я стал заниматься гипотезой о якобиане.

§1. Предварительные сведения

1.1. Двойственные графы приводимых кривых и сплайс-диаграммы. Пусть D — кривая на гладкой аналитической поверхности, такая что все ее неприводимые компоненты $D_1, \dots, D_n$ изоморфны $\mathbf{CP}^1$, пересекаются между собой трансверсально и не более, чем попарно. *Двойственным графом* или просто *графом* кривой D будем называть граф Γ_D, вершины которого отвечают неприводимым компонентам кривой D, а ребра — их точкам пересечения. Каждой вершине приписывается ее *вес*, равный индексу самопересечения соответствующей компоненты. Если это не ведет к недоразумениям, мы будем одинаково обозначать кривую и ее граф.

Если C — гладкая кривая (необязательно компактная), трансверсально пересекающая D, то *графом кривой C возле D* будем называть граф $\Gamma_{D,C}$, получающийся из графа кривой D добавлением вершин, соответствующих локальным ветвям $C_1, \dots, C_r$ кривой C возле кривой D (эти вершины мы будем изображать в виде стрелок), причем вершина, отвечающая локальной ветви C_i, соединена единственным ребром с вершиной, отвечающей той компоненте D_j, с которой она пересекается. Веса вершин C_i не определены.

Пример. Если D и C — прямая и коника на $\mathbf{CP}^2$, то $\Gamma_{D,C} = \longleftarrow\overset{+1}{\circ}\longrightarrow$.

Определителем кривой D назовем определитель минус матрицы пересечения: $\det D = \det \|-D_i D_j\|_{i,j=1}^n$.

Начиная с этого места, мы будем считать, что граф кривой D — дерево (т.е. связный граф без циклов). Назовем *ветвью дерева D в вершине D_i* компоненту связности замыкания кривой $D \setminus D_i$.

Линейной цепочкой будем называть граф с вершинами $v_1, \dots, v_n$ и ребрами $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3], \dots, [v_{n-1}, v_n]$.

Сплайс-диаграммой кривой D (соответственно, кривой C возле кривой D) мы будем называть граф Δ_D (соответственно, $\Delta_{D,C}$), полученный из Γ_D (соответственно, из $\Gamma_{D,C}$) в результате замены некоторых (например, всех) линейных цепочек одним ребром. Началу каждого ребра, выходящего из неконцевой вершины D_i, мы припишем число, равное определителю ветви графа D в вершине D_i, растущей в направлении данного ребра (это определение немного отличается от первоначального определения сплайс-диаграммы, введенного Эйзенбудом и Нейманом в [6]).

Предложение 1.1. (Формула для определителя ребра; см. [6], [11]). *Пусть Δ_D — сплайс-диаграмма дерева D рациональных кривых с простыми нормальными пересечениями. Пусть u и v — вершины Δ_D, соединенные ребром. Обозначим через E линейную цепочку неприводимых компонент кривой D, соответствующую ребру uv (кривые, отвечающие самим вершинам u и v не включаются в E). Предположим, что Δ_D возле ребра uv устроена как на рис. 1. Тогда*

$$\det D \cdot \det E = a_0 b_0 - (a_1 \dots a_k) \cdot (b_1 \dots b_n).$$

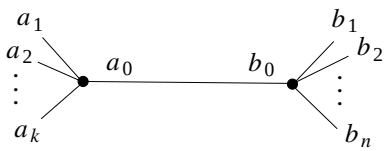


Рис. 1

1.2. Преобразование определителя матрицы пересечения при собственном аналитическом отображении. Цель этого пункта — доказать следующее несложное утверждение (оно использовалось в [5]).

Предложение 1.2. *Пусть $f : \widetilde{X} \to X$ — собственное аналитическое отображение гладких комплексных поверхностей. Пусть $D = D_1 \cup \dots \cup D_r$ — компактные кривые на X, и $\widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \cup \dots \cup \widetilde{D}_{\tilde{r}} = f^{-1}(D)$. Тогда:*

(а). $\det \widetilde{D} = 0$ *если и только если* $\det D = 0$.

(б). Предположим, что $\widetilde{D}_1$ — единственная неприводимая компонента кривой $f^{-1}(D_1)$, которая не стягивается отображением f в одну точку. Обозначим через D' и $\widetilde{D}'$ замыкания кривых $D \setminus D_1$ и $\widetilde{D} \setminus \widetilde{D}_1$ соответственно. Пусть m — степень отображения $f|_{\widetilde{D}_1}$, и n — порядок ветвления отображения f вдоль $\widetilde{D}_1$ (т.е. якобиан f имеет на $\widetilde{D}_1$ нуль порядка $n-1$). Тогда

$$\frac{\det \widetilde{D}'}{\det \widetilde{D}} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\det D'}{\det D}\,, \tag{1}$$

причем если один из знаменателей равен нулю, то другой — тоже.

Доказательство. (а). Докажем сначала, что $\det D = 0$ влечет $\det \widetilde{D} = 0$. Действительно, если $\det D = 0$, то найдется ненулевой дивизор $E = \sum x_i D_i$, такой что $ED_1 = \dots = ED_r = 0$. Тогда $f^*(E)$ — ненулевой дивизор с носителем, содержащимся в $\widetilde{D}$, причем $f^*(E) \cdot \widetilde{D}_j = E \cdot f_*(\widetilde{D}_j) = 0$ при всех j. Следовательно, $\det \widetilde{D} = 0$.

Докажем теперь, что $\det \widetilde{D} = 0$ влечет $\det D = 0$. Действительно, если $\det \widetilde{D} = 0$, то найдется ненулевой дивизор $\widetilde{E} = \sum \tilde{x}_i \widetilde{D}_i$, такой что

$$\widetilde{E}\widetilde{D}_1 = \dots = \widetilde{E}\widetilde{D}_{\tilde{r}} = 0. \tag{2}$$

Тогда $f_*(\widetilde{E})$ — дивизор с носителем, содержащимся в D, причем $f_*(\widetilde{E}) \cdot D_j = \widetilde{E} \cdot f^*(D_j) = 0$ при всех j. Значит, равенство $\det D = 0$ будет следовать из того, что $f_*(\widetilde{E}) \neq 0$. Предположим, что $f_*(\widetilde{E}) = 0$. Это значит, что носитель дивизора $\widetilde{E}$ сосредоточен на прообразе конечного набора точек. Но матрица пересечения неприводимых компонент компактной кривой, стягиваемой в точку аналитическим отображением, отрицательно определена, значит $\widetilde{E}^2 < 0$. Это противоречит (2).

(б). В силу (а), мы можем считать, что оба знаменателя в (1) не равны нулю. Обозначим через $E = \sum x_i D_i$ и $\widetilde{E} = \sum \tilde{x}_i \widetilde{D}_i$ дивизоры с рациональными коэффициентами, двойственные к D_1 и $\widetilde{D}_1$ соответственно, в том смысле, что

$$E \cdot D_1 = 1, \quad E \cdot D_i = 0 \text{ при } i > 1; \qquad \widetilde{E} \cdot \widetilde{D}_1 = 1, \quad \widetilde{E} \cdot \widetilde{D}_i = 0 \text{ при } i > 1. \tag{3}$$

Существование дивизоров E и $\widetilde{E}$ легко следует из невырожденности матриц пересечения. Действительно,

$$(x_1, \dots, x_r) = B(1, 0, \dots, 0), \qquad (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\bar{r}}) = \widetilde{B}(1, 0, \dots, 0), \tag{4}$$

где $B = \|b_{ij}\| = A^{-1}$, $A = \|D_i D_j\|_{i,j=1}^r$, $\widetilde{B} = \|\tilde{b}_{ij}\| = \widetilde{A}^{-1}$ и $\widetilde{A} = \|\widetilde{D}_i \widetilde{D}_j\|_{i,j=1}^{\bar{r}}$.

Мы имеем $f_*(\widetilde{D}_1) = mD_1$, поэтому $f_*(\widetilde{E}) = m\tilde{x}_1 D_1 + F$, где $D_1 \notin \operatorname{supp} F$, и значит, согласно (3),

$$E \cdot f_*(\widetilde{E}) = m\tilde{x}_1. \tag{5}$$

Аналогично, $f^*(D_1) = n\widetilde{D}_1 + \widetilde{F}_1$, где $\widetilde{D}_1 \notin \operatorname{supp} \widetilde{F}_1$ а значит $f^*(E) = nx_1\widetilde{D}_1 + \widetilde{F}_2$, где $\widetilde{D}_1 \notin \operatorname{supp} \widetilde{F}_2$. Следовательно, согласно (3), мы имеем

$$f^*(E) \cdot \widetilde{E} = nx_1. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в равенство $E \cdot f_*(\widetilde{E}) = f^*(E) \cdot \widetilde{E}$, получаем $\tilde{x}_1 = (n/m) \cdot x_1$. Заметим, что $x_1 = b_{11}$ и $\tilde{x}_1 = \tilde{b}_{11}$ в силу (4). Наконец, по правилу Крамера мы имеем

$$b_{11} = \frac{\det D'}{\det D} \qquad \text{и} \qquad \tilde{b}_{11} = \frac{\det \widetilde{D}'}{\det \widetilde{D}}.$$

1.3. Формула для канонического класса раздутия (+1)**-пары.** Пусть (U, l) — некоторая (+1)-пара (например, l — бесконечно удаленная прямая аффинной плоскости $\mathbf{C}^2$), и пусть $\sigma : X \to U$ — композиция раздутий "на бесконечности", то есть $\sigma|_{X \setminus L} : X \setminus L \to U \setminus l$ — изоморфизм, где $L = \sigma^{-1}(l)$. Пусть L_0 — собственный прообраз прямой l.

Предложение 1.3. *(а). L — дерево рациональных кривых,* $\det L = -1$.

(б). Определитель любой ветви дерева L в вершине L_0 равен единице.

(в). Если L_1 — некоторая неприводимая компонента кривой L, отличная от L_0, то среди ветвей дерева L в вершине L_1, не содержащих L_0, найдется не более одной, имеющей определитель, не равный единице.

Доказательство. Индукция по числу раздутий. □

Пусть $L_0, \dots, L_n$ — неприводимые компоненты кривой L. Предположим, что канонический класс K_X поверхности X представим дивизором с носителем, содержащимся в L, то есть на X существует мероморфная 2-форма ω, не имеющая ни нулей, ни полюсов вне L. Пусть

$$K_X = \sum k_j L_j.$$

Мы по-прежнему считаем, что L_0 — собственный прообраз прямой l. Неприводимые компоненты занумерованы в произвольном порядке, поэтому в качестве кривой L_1, о которой идет речь в следующем предложении, можно рассматривать любую неприводимую компоненту, отличную от L_0.

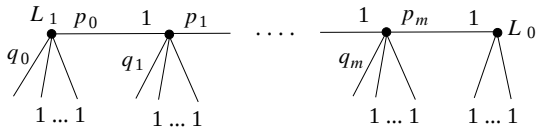


Рис. 2

Предложение 1.4. (см. [14]). *(а).* $k_0 = -3$.

(б). Обозначим веса сплайс-диаграммы кривой L, расположенниые вдоль кратчайшего пути из L_0 в L_1, как на рис. 2 (см. предложение 1.3). Тогда

$$k_1 = -1 - q_0 - p_0 + \sum_{j=1}^{m} q_0 \dots q_{j-1}(q_j - 1)(p_j - 1).$$

1.4. Накрытия, разветвленные вдоль линейных цепочек. Как и в [13], для описания накрытий, разветвленных вдоль линейных цепочек рациональных кривых, мы будем пользоваться языком торических многообразий. Эквивалентное описание без привлечения торических многообразий см. в [2; III, §5]. Поскольку нам потребуется очень малая часть теории торических многообразий, для удобства читателя мы приведем все используемые определения и факты.

1.4.1. Вееры и торические поверхности. Отождествим $\mathbf{Z}^2 \wedge \mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}$, т.е. через $(a, b) \wedge (c, d)$ будем обозначать $ad - cb$. Для $e_1, e_2 \in \mathbf{Z}^2$ обозначим через $\langle e_1, e_2 \rangle$ конус $\{x_1 e_1 + x_2 e_2 \mid x_i \in \mathbf{R}, x_i > 0\}$, и пусть $\langle e \rangle = \langle e, e \rangle$ (луч в направлении e). Вектор $e \in \mathbf{Z}^2$ назымается *примитивным*, если его нельзя представить в виде me', $e' \in \mathbf{Z}^2$, $m \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$. Назовем *веером* набор различных примитивных целочисленных векторов $\Sigma = (e_0, \dots, e_{r+1}) \subset \mathbf{Z}^2$, такой что $e_i \wedge e_{i+1} > 0$ при всех $i = 0, \dots, r$, и конусы $\langle e_0, e_1 \rangle, \dots, \langle e_r, e_{r+1} \rangle$ попарно не пересекаются. Если $e_i \wedge e_{i+1} = 1$ при всех $i = 0, \dots, r$, то веер называется *примитивным*.

Обозначим $u_j = e_j$ и $v_j = e_{j+1}$. *Торической поверхностью, ассоциированной с примитивным веером* Σ, называется гладкая алгебраическая поверхность X_Σ, склеенная из карт $U_0, \dots, U_r$, изоморфных $\mathbf{C}^2$, где карта U_j с координатами (x_j, y_j) отвечает конусу $\langle u_j, v_j \rangle$, и функциями перехода

$$\begin{cases} x_i = x_j^a\, y_j^c \\ y_i = x_j^b\, y_j^d \end{cases} \qquad \text{где} \qquad \begin{cases} u_j = a u_i + b v_i \\ v_j = c u_i + d v_i \end{cases}$$

Ясно, что X содержит открытое по Зарисскому подмножество, изоморфное $\mathbf{T}^2 = (\mathbf{C} \setminus 0)^2$, которое в координатах x_i, y_i задается неравенством $x_i y_i \neq 0$.

Предложение 1.5. *Пусть Σ — примитивный веер, и $E = X_\Sigma \setminus \mathbf{T}^2$. Тогда $E = E_0 \cup \dots \cup E_{r+1}$, причем*

(а). E_j задается уравнением $x_j = 0$ в координатах (x_j, y_j), уравнением $y_{j-1} = 0$ в координатах (x_{j-1}, y_{j-1}), и не пересекается с остальными картами.

(б). $E_0 \cong E_{r+1} \cong \mathbf{C}$ и $E_1 \cong \dots \cong E_r \cong \mathbf{CP}^1$.

(в). Самопересечение E_j^2 кривой E_j равно $-e_{j-1} \wedge e_{j+1}$, $j = 1, \dots, r$.

(д). $\det \|-E_i E_j\|_{i,j=1}^r = e_0 \wedge e_{r+1}$.

Доказательство. (а) – (в) непосредственно вытекает из определения; (д) доказывается индукцией, используя (в). $\square$

1.4.2. Отображения торических поверхностей. Линейному отображению $A : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ и примитивным веерам $\widetilde{\Sigma} = (\tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_{\tilde{r}+1})$ и $\Sigma = (e_0, \dots, e_{r+1})$ мы сопоставим бирациональное отображение $f = A_* : X_{\widetilde{\Sigma}} \to X_\Sigma$, которое в координатах $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ на $X_{\widetilde{\Sigma}}$ и (x_i, y_i) на X_Σ задается формулами

$$f(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) = (x_i, y_i), \qquad \begin{cases} x_i = \tilde{x}_j^a \, \tilde{y}_j^c \\ y_i = \tilde{x}_j^b \, \tilde{y}_j^d \end{cases} \qquad \text{где} \qquad \begin{cases} A(\tilde{u}_j) = a u_i + b v_i \\ A(\tilde{v}_j) = c u_i + d v_i \end{cases}$$

(здесь, как и выше, $u_i = e_i$, $v_i = e_{i+1}$, а также $\tilde{u}_j = \tilde{e}_j$, $\tilde{v}_j = \tilde{e}_{j+1}$). *Регулярным отображением* веера $\widetilde{\Sigma}$ в веер Σ называется линейное отображение $A : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$, такое что для каждого конуса $\langle \widetilde{u}_j, \widetilde{v}_j \rangle$ найдется конус $\langle u_i, v_i \rangle$, такой что $f\big(\langle \tilde{u}_j, \tilde{v}_j \rangle\big) \subset \langle u_i, v_i \rangle$. Легко проверить, что в этом случае A_* — регулярное (т.е. без точек неопределенности) отображение $X_{\widetilde{\Sigma}} \to X_\Sigma$.

Следующие свойства непосредственно вытекают из определений и из предложения 1.5.

Предложение 1.6. *Пусть $A : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ — регулярное отображение примитивных вееров $\widetilde{\Sigma} \to \Sigma$, и пусть $f = A_* : X_{\widetilde{\Sigma}} \to X_\Sigma$. Предположим также, что $A(\langle \tilde{e}_0 \rangle) = \langle e_0 \rangle$ и $A(\langle \tilde{e}_{\tilde{r}+1} \rangle) = \langle e_{r+1} \rangle$. Обозначим:*

N — степень отображения f;

n_0 — порядок ветвления f вдоль кривой $\widetilde{E}_0$;

n_1 — порядок ветвления f вдоль кривой $\widetilde{E}_{\tilde{r}+1}$

(т.е. якобиан f на $\widetilde{E}_0$ имеет нуль порядка $n_0 - 1$, а на $\widetilde{E}_{\tilde{r}+1}$ — порядка $n_1 - 1$);

m_0 — порядок ветвления отображения $f|_{\widetilde{E}_0}$ в точке $\widetilde{E}_0 \cap \widetilde{E}_1$;

m_1 — порядок ветвления отображения $f|_{\widetilde{E}_{\tilde{r}+1}}$ в точке $\widetilde{E}_{\tilde{r}} \cap \widetilde{E}_{\tilde{r}+1}$.

$\Delta = \det \|-E_i E_j\|_{i,j=1}^r, \quad \widetilde{\Delta} = \det \|-\widetilde{E}_i \widetilde{E}_j\|_{i,j=1}^{\tilde{r}}$

Тогда:

(а). $\det A = N = m_0 n_0 = m_1 n_1$;

(б). $A(\tilde{e}_0) = n_0 e_0$ и $A(\tilde{e}_{\tilde{r}+1}) = n_1 e_{r+1}$;

(в).

$$\widetilde{\Delta} = \frac{n_0 n_1}{N} \Delta.$$

Следствие 1.7. *В обозначениях предложения 1.6, если отображение f не имеет ветвления вдоль кривой $\widetilde{E}_{\tilde{r}}$, то $\Delta = m_0\widetilde{\Delta}$.* $\square$

Веер $\Sigma' = (e'_0, \dots, e'_{r'+1})$ называется *подразбиением* веера $\Sigma = (e_0, \dots, e_{r+1})$, если $e'_0 = e_0$, $e'_{r'+1} = e_{r+1}$, и тождественное отображение $\mathrm{id} : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ является регулярным отображением вееров $\Sigma' \to \Sigma$.

Лемма 1.8. *Любой веер Σ имеет примитивное подразбиение Σ'.*

Доказательство. Для каждого двумерного конуса σ добавим к образующим веера все векторы, лежащие на компактных сторонах выпуклой оболочки множества $(\mathbf{Z}^2 \cap \bar{\sigma}) \setminus \{0\}$. $\square$

Предложение 1.9. *Пусть $\widetilde{\Sigma} = (e_0, \dots, \tilde{e}_{\tilde{r}+1})$ и $\Sigma = (e_0, \dots, e_r)$ — два веера, и пусть $A : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}^2$ — линейное отображение, такое что $A(\langle \tilde{e}_0 \rangle) = \langle e_0 \rangle$ и $A(\langle \tilde{e}_{\tilde{r}+1} \rangle) = \langle e_{r+1} \rangle$. Тогда существуют подразбиения $\widetilde{\Sigma}'$ и Σ' вееров $\widetilde{\Sigma}$ и Σ, такие что A является регулярным отображением $\widetilde{\Sigma}' \to \Sigma'$.*

Доказательство.

1). Добавим к Σ целочисленные образующие лучей $A(\langle \tilde{e}_0 \rangle), \dots, A(\langle \tilde{e}_{\tilde{r}_1} \rangle)$, и подразобьем получившийся веер до примитивного веера $\Sigma' = (e'_0, \dots, e'_{r'+1})$.

2). Добавим к $\widetilde{\Sigma}$ целочисленные образующие лучей $A^{-1}(\langle \tilde{e}'_0 \rangle), \dots, A^{-1}(\langle \tilde{e}'_{r'_1} \rangle)$, и подразобьем получившийся веер до примитивного веера $\widetilde{\Sigma}'$. $\square$

§2. Регулярная компактификация на бесконечности мероморфного погружения (+1)-пары

2.1. Компактификация на бесконечности. Дикритические компоненты. Рассмотрим некоторую алгебраическую компактификацию X комплексной плоскости $\mathbf{C}^2$ с простыми нормальными пересечениями кривой на бесконечности, то есть X — компактная проективная поверхность, содержащая кривую L (вообще говоря, приводимую), такую что $X \setminus L = \mathbf{C}^2$. Все такие компактификации получаются из $\mathbf{CP}^2$ с отмеченной бесконечно удаленной прямой путем раздутий и стягиваний на бесконечности. Двойственный граф кривой L — дерево.

Пусть (U, l) — некоторая (+1)-пара, и $U \setminus l \to \mathbf{C}^2$ — ее мероморфное погружение в $\mathbf{C}^2$. Раздувая точки на l, его можно представить в виде $f \circ \sigma^{-1}$, где $\sigma : \widetilde{X} \to U$ — композиция раздутий, и $f : \widetilde{X} \to X$ — голоморфное отображение. Тройка $(\widetilde{X}, X, f)$ называется *регулярной компактификацией мероморфного погружения* (+1)*-пары* (U, l) *в* $\mathbf{C}^2$. Обозначим

$$\widetilde{L} = \sigma^{-1}(l), \qquad \widetilde{L}_\infty = f^{-1}(L), \qquad \widetilde{L}_{FC} = \overline{\widetilde{L} \setminus \widetilde{L}_\infty},$$

$$D = f(\widetilde{L}_{FC}), \qquad \widetilde{D} = \widetilde{D}_1 \cup \dots \cup \widetilde{D}_d, \qquad \widetilde{L}_C = \overline{\widetilde{L}_{FC} \setminus \widetilde{D}},$$

где $\widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_d$ — *дикритические компоненты* отображения f, т.е. неприводимые компоненты кривой $\widetilde{L}_{FC}$, на которых отображение f непостоянно. Кривую D будем называть кривой ветвления.

Предложение 2.1. (ср. [12]) *(а). Неприводимые компоненты кривой $\tilde{L}$ — рациональные кривые, и двойственный граф кривой $\tilde{L}$ — дерево.*

(б). Кривая $\widetilde{L}_\infty$ связна.

(в). $\widetilde{L}_{FC}$ имеет d компонент связности $\widetilde{L}^{(1)}_{FC}, \dots, \widetilde{L}^{(d)}_{FC}$.

(г). Двойственный граф кривой $\widetilde{L}^{(i)}_{(FC)}$ $(i = 1, \dots, d)$ является линейной цепочкой (возможно, с единственной вершиной), одна из концевых вершин которой отвечает дикритической компоненте $\widetilde{D}_i$.

(д). Кривая $\widetilde{L}^{(i)}_{FC}$ $(i = 1, \dots, d)$ пересекает $\widetilde{L}_\infty$ в единственной точке, причем эта точка лежит на $\widetilde{D}_i$ $(i = 1, \dots, d)$.

Пусть n_i, $i = 1, \dots, d$, — порядок ветвления отображения f вдоль кривой $\widetilde{D}_i$, т.е. якобиан отображения f обращается в нуль на $\widetilde{D}_i$ с кратностью $n_i - 1$.

Предложение 2.2. *Канонический класс $K_{\widetilde{X}}$ поверхности $\widetilde{X}$ представляется дивизором с носителем на $\widetilde{L}$, причем каждая дикритическая компонента D_i входит в этот дивизор с кратностью $n_i - 1$.*

Доказательство. $K_{\widetilde{X}}$ представляется дивизором формы $f^*(dx \wedge dy)$, где x, y — аффинные координаты в $\mathbf{C}^2$.

2.2. Формула для индекса мероморфного погружения (+1)-пары.

Определение 2.3. *Локальной кратностью в точке $x \in X$* непрерывного отображения топологических пространств $\phi : X \to Y$ называется число $\mu_x\phi = \min_U \deg\left(\phi_{\widetilde{U}(x)}\right)$, где минимум берется по всем окрестностям U точки $\phi(x)$, и через $\widetilde{U}(x)$ обозначена та компонента связности множества $f^{-1}(U)$, которая содержит точку x.

Введем такие же обозначения, как в предыдущем пункте. Пусть X^* — одноточечная компактификация $\mathbf{C}^2$. Обозначим через $\widetilde{X}^*$ особую поверхность, получающуюся из $\widetilde{X}$, если каждую компоненту связности каждого из множеств $f^{-1}(x)$, $x \in X$ стянуть в точку, а также стянуть в точку (которую мы обозначим через ∞) кривую $\widetilde{L}_\infty$. Тогда однозначно определено отображение $f^* : X^* \to X$, такое что следующая диаграмма комутативна

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{X}^* & \xrightarrow{f^*} & X^* \end{array}$$

(вертикальные стрелки — естественные проекции). Обозначим через $\widetilde{D}^*_i$ образ кривой $\widetilde{D}_i$ на $\widetilde{X}^*$.

Пусть, как и в п. 2.1, n_i, — порядок ветвления отображения f вдоль кривой $\widetilde{D}_i$, т.е. $n_i = \mu_x f$ для общей точки $x \in \widetilde{D}_i$.

Предложение 2.4. *Индекс* ind *мероморфного погружения $(U, l) \to \mathbf{C}^2$ равен*

$$\mathrm{ind} = \mu_\infty f^* - \sum_{i=1}^{d} \Big(n_i + \sum_{x \in D^*_i \setminus \{\infty\}} (\mu_x f^* - n_i) \Big). \tag{7}$$

Доказательство. Выберем в $\mathbf{C}^2$ координаты (z, w) таким образом, что прямая $z = 0$ не пересекается на бесконечности с кривой D при стандартном вложении $\mathbf{C}^2$ в $\mathbf{CP}^2$. Обозначим через $\pi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ проекцию $(z, w) \mapsto z$.

Обозначим через $p_1, \dots, p_n$ точки ветвления отображения $\pi|_D : D \to \mathbf{C}$, через m_i, $(i = 1, \dots, n)$, — порядок ветвления вокруг точки p_i, а через m_∞ — степень кривой D. Пусть B_i, $(i = 1, \dots, n)$, — шар достаточно малого радиуса с центром в p_i, и пусть B_∞ — шар достаточно большого радиуса с центром в начале координат.

Обозначим через V трубчатую окрестность кривой D, радиус которой мал по сравнению с радиусами сфер S_i. Пусть $T = B_\infty \cap \big((-\partial V) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)\big)$ и $S = (-\partial B_1) \cup \dots \cup (-\partial B_n) \cup \partial B_\infty$ (знак минус означает обращение ориентации). Обозначим через R_i, $i \in \{1, \dots, n, \infty\}$, гиперповерхность с краем (гомеоморфную нескольким копиям $S^1 \times S^1 \times [0, 1]$), сглаживающую угол между ∂B_i и T как показано на рис. 3.

Каждая сфера ∂B_i имеет одну точку, в которой положительная единичная нормаль равна вектору $(1, 0)$, причем ее индекс (т.е. вклад в степень гауссова отображения) равен -1 при $i = 1, \dots, n$ и $+1$ при $i = \infty$. Если координаты (z, w) выбраны достаточно общим образом, то эта точка лежит вне V. Поверхность T таких точек не имеет, а каждая поверхность R_i имеет m_i таких точек индекса $+1$ при $i = 1, \dots, n$ и -1 при $i = \infty$.

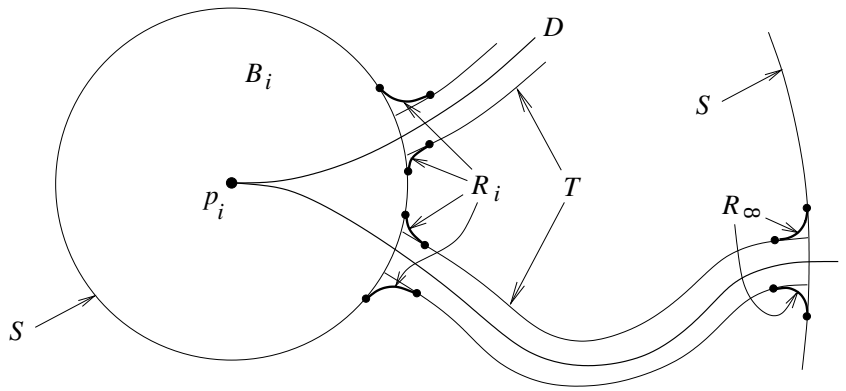


Рис. 3

Согласно определению, ind равен степени гауссового отображения, ассоциированного с $f|_{-M}$, где M — граница трубчатой окрестности кривой l в U или, что то же самое, граница окрестности кривой $\widetilde{D}^*$ в $\widetilde{X}^*$, а знак минус перед M означает обращение ориентации.

Погружение $f|_{-M}$ можно продеформировать в погружение, образ которого лежит в $S \cup R \cup T$. Продолжим отображение $\pi \circ f^*|_{\widetilde{D}_j^* \setminus \infty} : \widetilde{D}_j^* \setminus \infty \to \mathbf{C}$ до отображения $f_j^* : \widetilde{D}_j^* \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Вклады поверхностей в степень гауссового

отображения таковы:

$$S_\infty \to \mu_\infty f^*, \qquad R_\infty \to -\sum_{j=1}^{d} n_j \cdot \mu_\infty f_j^*, \qquad T \to 0,$$

$$S_i \to -\sum_{\substack{x\in\widetilde{D}^* \\ f^*(x)=p_i}} \mu_x f^*, \qquad R_i \to \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{x\in\widetilde{D}_j^* \\ f^*(x)=p_i}} n_j \cdot \mu_x f_j^*.$$

Таким образом, обозначая $P = \{p_1, \dots, p_n\}$, имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind} &= \mu_\infty f^* - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{x\in\widetilde{D}^* \\ f^*(x)=p_i}} \mu_x f^* - \sum_{j=1}^{d} n_j \Big(\mu_\infty f_j^* - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{x\in\widetilde{D}_j^* \\ f^*(x)=p_i}} \mu_x f_j^*\Big) \\
&= \mu_\infty f^* - \sum_{j=1}^{d} \sum_{\substack{x\in\widetilde{D}_j^* \\ f^*(x)\in P}} \mu_x f^* - \sum_{j=1}^{d} n_j \Big(\mu_\infty f_j^* - \sum_{\substack{x\in\widetilde{D}_j^* \\ f^*(x)\in P}} \mu_x f_j^*\Big) \\
&= \mu_\infty f^* - \sum_{j=1}^{d} \Big(\sum_{\substack{x\in\widetilde{D}_j^* \\ f^*(x)\in P}} (\mu_x f^* - n_j) + n_j \Big\{\mu_\infty f_j^* - \sum_{\substack{x\in\widetilde{D}_j^* \\ f^*(x)\in P}} (\mu_x f_j^* - 1)\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Остается заметить, что по формуле Римана – Гурвица, примененной к разветвленному накрытию f_j^*, выражение в фигурных скобках равно единице. □

Замечание. В случае мероморфного погружения плоской (+1)-пары, задаваемого полиномиальным отображением $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ с постоянным якобианом, тот факт, что правая часть (7) равна единице, был доказан в [12] путем подсчета эйлеровой характеристики. Предложение 2.4 является обобщением этой формулы на случай мероморфных погружений в $\mathbf{C}^2$ произвольных (+1)-пар.

2.3. Свойства сплайс-диаграмм кривых L и $\widetilde{L}$.
Мы можем считать, что L трансверсально пересекает D (в противном случае раздуем сколько надо $D \cap L$). Тогда формулы, приведенные в §1 вместе с предложением 2.2 накладывают довольно сильные ограничения на спайс-диаграммы кривых $\widetilde{L}$ и $L \cup D$. Мы применяем формулы из §1 следующим образом:

(1) к сплайс-диаграммам кривых L и $\widetilde{L}$ применяем предложение 1.3;
(2) к каждому ребру сплайс-диаграмм применяем предложение 1.6(в);
(3) к каждому ребру сплайс-диаграмм между вершинами валентности ≥ 3 применяем предложение 1.1;
(4) к дикритическим компонентам применяем предложения 1.4 и 2.2;
(5) к каждой нелинейной компоненте связности графа L, из которого удалены несколько вершин валентности ≥ 3, применяем предложение 1.2 (если оно применимо).

В работах [5], [4] показано, что этих ограничений достаточно, чтобы доказать, что не существует контрпримеров к гипотезе о якобоане, в которых отображение имеет топологическую степень $N \leq 4$ (для $N = 2$ это утверждение очевидно, а для $N = 3$ следует из теоремы Абъянкара – Мо – Сузуки, см. [12]).

2.4. Случай неприводимой кривой ветвления с двумя характеристическими парами. Предположим, что $\widetilde{L}$ имеет одну дикритическую компоненту $\widetilde{D}$, и кривая ветвления $D = f(\widetilde{D})$ имеет две характеристические пары на бесконечности. Это означает, что после разрешения особенности кривой D на бесконечности, ее сплайс-диаграмма возле разрешения L имеет вид $-\circ-\circ\rightarrow$. Кроме того, мы будем считать, что выполнено следующее дополнительное условие:

(∗) Существует неприводимая компонента кривой L, прообраз которой имеет единственную неприводимую компоненту, не стягиваемую отображением f в одну точку (ср. с предложением 1.2(б)).

При этих предположениях сплайс-диаграммы кривой $\widetilde{D}$ возле $\widetilde{L}_\infty$, кривой D возле L и кривой $\widetilde{L}$ имеют вид, изображенный на рис. 4, рис. 5 и рис. 6. Черная вершина обозначает собственный прообраз прямой l при раздутии $\sigma : (\widetilde{X}, \widetilde{L}) \to (U, l)$.

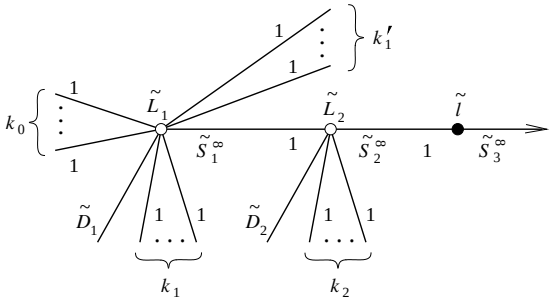


Рис. 4. Сплайс-диаграмма $\Delta_{\widetilde{L}_\infty, \widetilde{D}}$

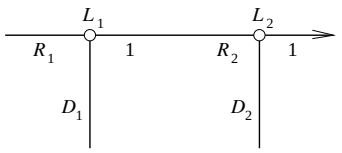


Рис. 5. Сплайс-д. $\Delta_{L,D}$

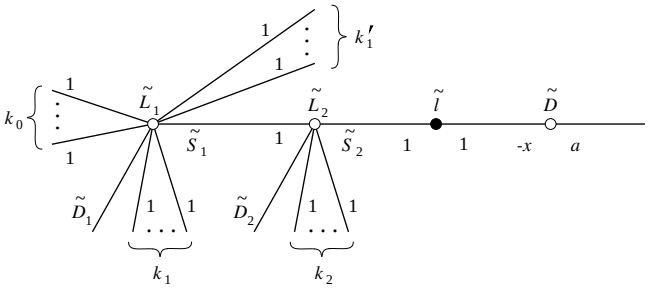


Рис. 6. Сплайс-диаграмма $\Delta_{\widetilde{L}}$

Введем следующие обозначения. Пусть Q_2 и $\widetilde{Q}_2$ — определители ребер L_1L_2 и $\widetilde{L}_1\widetilde{L}_2$ сплайс-диаграмм Δ_L и $\widetilde{\Delta}_L$, т.е. Q_2 (соответственно, $\widetilde{Q}_2$) — определитель той компоненты замыкания кривой $L \setminus (L_1 \cup L_2)$, (кривой $\widetilde{L} \setminus (\widetilde{L}_1 \cup \widetilde{L}_2)$), которая лежит между L_1 и L_2 (между $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$).

Для $j = 1, 2$ обозначим через m_j степень отображения $f|_{\widetilde{L}_j}$, через n_j порядок ветвления отображения f вдоль $\widetilde{L}_1$, а через m'_j (соответственно, d_j) — порядок ветвления отображения $f|_{\widetilde{L}_j}$ в точке пересечения с той ветвью графа $\widetilde{L}$ в вершине L_j, которая содержит $\widetilde{l}$, (соответственно, которая имеет определитель $\widetilde{D}_j$). Обозначим также через m и n степень отображения $f|_{\widetilde{D}}$ и порядок ветвления отображения f вдоль $\widetilde{D}$.

Все введенные целые числа положительны (по поводу положительности чисел R_j см. [11]; из теории приближенных корней [1] следует также, что $R_j > 1$). Они удовлетворяют следующим соотношениям.

$$\gcd(D_1, R_1) = \gcd(D_2, R_2) = 1, \tag{8}$$

формула определителя ребра (предложение 1.1) дает

$$-Q_2 = R_2 - R_1D_1D_2 \qquad (\text{ребро } L_1L_2 \text{ в } L), \tag{9}$$

$$-x\,\widetilde{Q}_2 = \widetilde{S}_1^\infty - \widetilde{S}_2^\infty \widetilde{D}_1\widetilde{D}_2 \qquad (\text{ребро } \widetilde{L}_1\widetilde{L}_2 \text{ в } \widetilde{L}_\infty). \tag{10}$$

По предложению 1.6 и следствию 1.7, мы имеем

$$D_1 = d_1\widetilde{D}_1, \quad D_2 = d_2\widetilde{D}_2, \quad \frac{\widetilde{Q}_2}{Q_2} = \frac{n_1}{m_2} = \frac{n_2}{m'_1}, \quad \widetilde{S}_2^\infty = \frac{n_2}{m} = \frac{n}{m'_2}, \tag{11}$$

а также видим, что порядки ветвлений в точках кривых $\widetilde{L}_1$ и $\widetilde{L}_2$, отвечающих ребрам сплайс-диаграмм, таковы:

$$\underbrace{R_1, \dots, R_1}_{k_0}, \qquad d_1, \underbrace{D_1, \dots, D_1}_{k_1}, \qquad m'_1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k'_1} \qquad \text{для кривой } \widetilde{L}_1,$$

$$m_2, \qquad d_2, \underbrace{D_2, \dots, D_2}_{k_2}, \qquad m'_2 \qquad \text{для кривой } \widetilde{L}_2,$$

откуда вытекает

$$k_0R_1 = d_1 + k_1D_1 = m'_1 + k'_1 = m_1, \qquad d_2 + k_2D_2 = m_2, \tag{12}$$

$$m'_1 = k_1 + k_0; \qquad m'_2 = k_2 + 1 \tag{13}$$

(соотношения (13) получаются из (12) и формулы Римана – Гурвица).

Применяя предложение 1.2 к само́й кривой L, а также к ее ветви в вершине L_1, содержащей L_2, получаем

$$\frac{\widetilde{D}_1\widetilde{S}_1^\infty}{x} = \frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{R_1D_1}{1}, \qquad \frac{\widetilde{D}_2\widetilde{Q}_2\widetilde{S}_2^\infty}{\widetilde{S}_1^\infty} = \frac{n_2}{m_2} \cdot \frac{Q_2D_2}{1}. \tag{14}$$

Наконец, по предложению 2.2, порядок якобиана отображения f на $\widetilde{D}$ равен $n-1$, а по предложению 1.4, он равен $-1-a+x$, т.е.

$$x = a + n. \tag{15}$$

Если рассматриваемое мероморфное погружение реализуется многочленами $P(x,y)$, $Q(x,y)$, то (см. п. 4.1)

$$\deg P(x,y) = k_0\widetilde{D}_1\widetilde{D}_2 + aD_1D_2; \quad \deg Q(x,y) = k_1\widetilde{D}_1\widetilde{D}_2 + \widetilde{D}_2 + aR_1D_2. \tag{16}$$

Первое наугад найденное решение системы уравнений (8) – (15) позволило мне построить в [13] контрпример к WJC_∞.

Предложение 2.5. *Система уравнений (8) – (15) имеет конечное число решений в положительных целых числах при условии, что* $m_1n_1 = N = \mathrm{const}$.

Доказательство. Из уравнений (11), (14) и $k_0R_0 = m_1$ (см. (12)) находим $m_1 = mxd_1d_2R_1$, $n_1 = md_2\widetilde{S}_1^\infty$, значит $m^2xd_1d_2^2R_1\widetilde{S}_1^\infty = N$. Остальные параметры тоже легко оцениваются через N. $\square$

Я написал простенькую компьютерную программу, которая по заданному $N = m_1n_1$ находит все положительные целочисленные решения системы уравнений (8) – (15). При $N < 9$ решений нет. При $N = 9$ имеется единственное решение

$$\begin{array}{llllll} R_1 = 3, & D_1 = \widetilde{D}_1 = 4, & m_1 = 9, & n_1 = 1, & \widetilde{Q}_2 = 5, & n = 2, \\ R_2 = 23, & D_2 = \widetilde{D}_2 = 4, & m_2 = 5, & n_2 = 1, & Q_2 = 25, & a = 1. \end{array} \tag{17}$$

Это решение позволяет построить простейший контрпример к (WJC_∞). Если бы это решение давало контрпример к JC, то по (16), степени полиномов P и Q равнялись бы 48 и 64. Это решение обсуждается в [9; §3]. Имеется ровно четыре решения, для которых $\max(\deg P, \deg Q) < 100$. Они в точности соответствуют четырем трудным случаям в статье Мо [10].

Пример, который мы строим в §3, отвечает решению

$$\begin{array}{llllll} R_1 = 3, & D_1 = \widetilde{D}_1 = 20, & m_1 = 21, & n_1 = 1, & \widetilde{Q}_2 = 17, & n = 4, \\ R_2 = 112, & D_2 = \widetilde{D}_2 = 3, & m_2 = 4, & n_2 = 2, & Q_2 = 68, & a = 3. \end{array}$$

§3. Построение примера

3.1. Отображение графов. Мы будем строить мероморфное погружение (+1)-пары в $\mathbf{C}^2$ с единственной дикритической компонентой $\widetilde{D}$, образ которой $D = f(\widetilde{D})$ имеет две характеристические пары на бесконечности, и регулярная компактификация которого индуцирует отображение графов кривых $\widetilde{L}$ и $D \cup L$, изображенное на рис. 7. Черные вершины "$\bullet$" на рис. 7 отвечают кривым, которые отображением f стягиваются в точку. Отображение линейных цепочек $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ дано в п. 3.3.2. На рис. 7 изображены также разрешения особых локальных ветвей кривой D и регуляризация отображения f над ними.

На изображении графа кривой $\widetilde{L}$ (рис. 7, сверху) мы поместили также следующую дополнительную информацию, касающуюся отображения f. Пометка

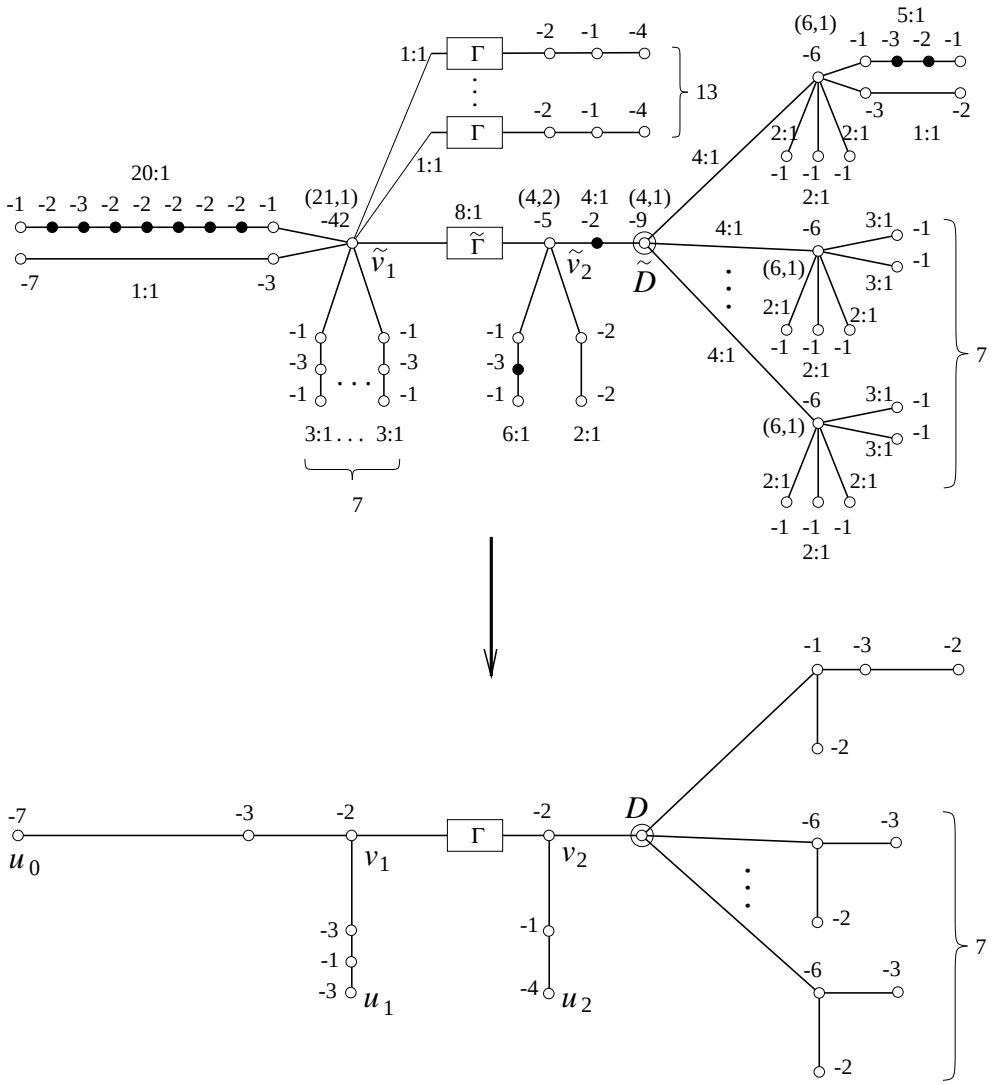


Рис. 7

вида $N:1$ возле линейной цепочки (ребра сплайс-диаграммы) означает, что степень отображения f в ее окрестности равна N. Пометка вида (m,n) возле вершины валентности ≥ 3 (обозначим через A соответствующую ей кривую) означает, что $f|_A$ имеет степень m, и f имеет ветвление порядка n вдоль A.

3.2. Построение кривой ветвления.

Лемма 3.1. *Существует кривая D, параметризованная полиномиальным отображением $g:\mathbf{C}\to\mathbf{C}^2$, $t\mapsto\big(p(t),q(t)\big)$, где $p(t)$ и $q(t)$ — многочлены степеней 60 и 9 соответственно, и попарно различные точки $t_1,\dots,t_7\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, такие что*

(а). *$g(0) = (0,0)$, и $g|_{\mathbf{C}\setminus\{0,t_1,\dots,t_7\}}$ — погружение, т.е. $p'(t) \neq 0$ и $q'(t) \neq 0$ при $t \notin \{0, t_1, \dots, t_7\}$;*

(б). *кривая D имеет на бесконечности сплайс-диаграмму, изображенную на рис. 8;*

(в). *локальная ветвь кривой D, параметризованная окрестностью нуля, имеет в начале координат сплайс-диаграмму, изображенную на рис. 9, т.е. имеет особенность, задаваемую уравнением $u^2 = v^5$ в некоторых локальных координатах (особенность A_4);*

(г). *при всех $k = 1, \dots, 7$, локальная ветвь кривой D, параметризованная окрестностью точки t_k, имеет в начале координат сплайс-диаграмму, изображенную на рис. 10, т.е. имеет особенность, задаваемую уравнением $u^2 = v^3$ в некоторых локальных координатах (особенность A_2).*

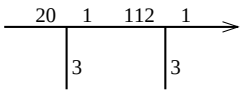


Рис. 8 ($t = \infty$)

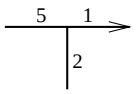


Рис. 9 ($t = 0$)

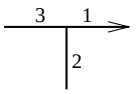


Рис. 10 ($t = t_k$)

Условия (б) и (в) леммы 3.1 эквивалентны тому, что граф разрешения кривой на бесконечности (особой ветви при $t = 0$, при $t = t_k$) такой, как на рис. 11 (на рис. 12, на рис. 13).

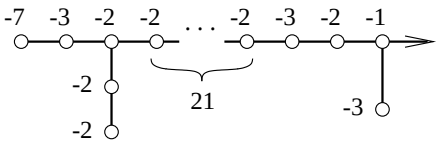


Рис. 11 ($t = \infty$)

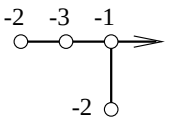


Рис. 12 ($t = 0$)

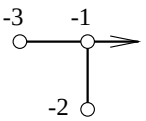


Рис. 13 ($t = t_k$)

Доказательство. Линейными заменами координат можно привести многочлены p и q к виду $p(t) = t^{60} + \dots$ и $q(t) = t^9 + \dots$. Условие (б) леммы 3.1 означает, что существует многочлен $G(u,v)$ вида

$$G(u,v) = u^3 - v^{20} + \sum_{\substack{20i+3j<60 \\ i,j\geq 0}} C_{ij} u^i v^j$$

такой что

$$\deg_t G\big(p(t), q(t)\big) = 112. \tag{18}$$

Условие (в) леммы 3.1 означает, что существуют константы c_1 и c_2, такие что

$$\operatorname{ord}_{t=0}\big(\, p(t) - c_1 q(t) - c_1 q(t)^2 \,\big) = 5. \tag{19}$$

Условие (г) леммы 3.1 означает, что при $k = 1, \dots, 7$

$$p'(t_k) = q'(t_k) = 0, \tag{20}$$

$$p''(t_k)q'''(t_k) \neq q''(t_k)p'''(t_k). \tag{21}$$

Поскольку $\deg q' = 8$ и $q'(0) = 0$, условие (20) эквивалентно тому, что $\{0, t_1, \ldots, t_7\}$ — корни многочлена q', и существует многочлен $r(t)$ степени 51, такой что

$$p'(t) = r(t) \cdot q'(t). \tag{22}$$

Условия (18), (19), (21) и (22) дают систему уравнений и неравенств на неизвестные c_1, c_2 и на коэффициенты многочленов q, r и G (коэффициенты многочлена p выражаются из условий (22) и $p(0) = 0$).

Эта система имеет решение:

$$c_1 = -\frac{32368762111892400}{90684846733}, \qquad c_2 = \frac{30833889663060}{410338673},$$

$$q(t) = t^9 + 3\,t^6 + \tfrac{54}{17}\,t^3 + 3\beta t^2, \qquad \text{где} \quad \beta = -\tfrac{36}{17}\sqrt[3]{\tfrac{147}{34}}$$

$$\begin{aligned}
r(t) = {} & \tfrac{20}{3}\big(t^{51} + 17\,t^{48} + 137\,t^{45} + 17\beta\,t^{44} + 681\,t^{42} + 238\beta\,t^{41} + \tfrac{501054}{221}\,t^{39} + \\
& + 1561\beta\,t^{38} + 119\beta^2\,t^{37} + \tfrac{86262}{17}\,t^{36} + 6160\beta\,t^{35} + 1309\beta^2\,t^{34} + \tfrac{1932222}{289}\,t^{33} + \\
& + \tfrac{263516}{17}\beta\,t^{32} + 6622\beta^2\,t^{31} - \tfrac{90093894}{4913}\,t^{30} + \tfrac{397232}{17}\beta\,t^{29} + 19250\beta^2\,t^{28} - \\
& - \tfrac{846133035}{4913}\,t^{27} + \tfrac{3005266}{289}\beta\,t^{26} + \tfrac{543884}{17}\beta^2\,t^{25} - \tfrac{49957930891}{83521}\,t^{24} - \\
& - \tfrac{420538624}{4913}\beta\,t^{23} + \tfrac{353276}{17}\beta^2\,t^{22} - \tfrac{91298290787}{83521}\,t^{21} - \tfrac{101367959}{289}\beta\,t^{20} - \\
& - \tfrac{9780232}{289}\beta^2\,t^{19} - \tfrac{1162052993707}{1419857}\,t^{18} - \tfrac{56603024170}{83521}\beta\,t^{17} - \tfrac{807377032}{4913}\beta^2\,t^{16} \\
& + \tfrac{766218083922}{1419857}\,t^{15} - \tfrac{45450918051}{83521}\beta\,t^{14} - \tfrac{1442603701}{4913}\beta^2\,t^{13} + \tfrac{46921116263706}{24137569}\,t^{12} + \\
& + \tfrac{230339555352}{1419857}\beta\,t^{11} - \tfrac{19395246255}{83521}\beta^2\,t^{10} + \tfrac{1413944975064438}{410338673}\,t^9 + \\
& + \tfrac{621393338592}{1419857}\beta\,t^8 + \tfrac{6245611218}{83521}\beta^2\,t^7 + \tfrac{554559678398538}{410338673}\,t^6 + \\
& + \tfrac{8204586193656}{24137569}\beta\,t^5 + \tfrac{4273175790}{83521}\beta^2\,t^4 - \tfrac{3524860866785148}{6975757441}\,t^3 + \\
& + \tfrac{27750500696754}{410338673}\beta\,t^2 - \tfrac{4855314316783860}{90684846733}\big)\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(u,v) = {} & u^3 + \tfrac{125694347226670235997}{52415841411674}\,u^2 + \\
& + u \cdot \big(\tfrac{36795}{442}\,v^{12} + \tfrac{143479380}{63869}\,v^{11} - \tfrac{67444266186}{1085773}\,v^{10} - \tfrac{137300874259560}{313788397}\,v^9 + \\
& + \tfrac{2580726046707594885}{181369693466}\,v^8 + \tfrac{12847251951061921800}{1541642394461}\,v^7 - \tfrac{111218151239283334485 00}{34271896307633}\,v^6\big) - \\
& - v^{20} + \tfrac{440}{17}\,v^{19} + \tfrac{137380}{289}\,v^{18} - \tfrac{1557031600}{83521}\,v^{17} + \tfrac{78582704594145}{24955406632}\,v^{16} + \\
& + \tfrac{5956885860588398964}{901514064581}\,v^{15} + \tfrac{1505594652045877386 7110}{260537564663909}\,v^{14} - \\
& - \tfrac{32867584146876876273273720}{75295356187869701}\,v^{13}\,.
\end{aligned}$$

Можно проверить, что многочлен $t^{-1}q'(t)$ неприводим над полем $\mathbf{Q}(\beta)$, значит, его корни $t_1, \ldots, t_7$ различны. Лемма 3.1 доказана $\square$

Замечание 3.2. После замены переменных $t = \beta s$ коэффициенты многочленов $p(t)$ и $q(t)$ становятся рациональными.

Замечание 3.3. В системе уравнений (18), (19), (22) число неизвестных превышает число уравнений. Поэтому, для упрощения вычислений мы с самого начала положили равными нулю коэффициенты многочлена $q(t)$ при t^8, t^7, t^5 и t^4.

3.3. Построение накрытия над ребрами сплайс-диаграммы. Для каждой линейной цепочки графов на рис. 11– 13 мы построим накрытие над окрестностью объединения соответствующих кривых.

3.3.1. Накрытие над ребром $\overset{-7}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}$ *(рис. 11).*
В соответствии с предложением 1.5, окрестность соответствующей кривой вкладывается в торическую поверхность, отвечающую вееру

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & 7 & 20 \end{bmatrix}, \qquad \text{и пусть} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее вееры записываются матрицами, столбцы которых отвечают векторам. Применяя к A, $\widetilde{\Sigma}$ и Σ процедуру из предложения 1.9, получаем примитивные вееры

$$\Sigma' = \Sigma \quad \text{и} \quad \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее в веере $\widetilde{\Sigma}'$ жирным шрифтом выделены те векторы $\tilde{e}'_j$, для которых $A(\mathbf{R}\tilde{e}'_j) = \mathbf{R}e'_i$ для некоторого $e'_i \in \Sigma'$. Отображение графов имеет вид:

$$\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ} \qquad \xrightarrow{20:1} \qquad \overset{-7}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}\,.$$

Здесь и далее в пп.3.3.1 – 3.3.8 черные вершины соответствуют неприводимым компонентам, которые при рассматриваемом отображении стягиваются в точку. Согласно предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 20$, $m_0 = m_1 = 20$, $n_0 = n_1 = 1$.

3.3.2. Накрытие над ребром $\underbrace{\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\cdots\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}}_{21}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}$ *(рис. 11).*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \dots & 21 & 22 & 45 & 68 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \dots & 21 & 64 & 43 & 22 & 67 & 112 & 45 & 68 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{8} & 7 & 6 & 5 & \mathbf{4} & 3 & \mathbf{8} & 5 & \mathbf{2} & 5 & \mathbf{8} & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{8} & 7 & 6 & 5 & \mathbf{4} & 3 & \mathbf{8} & 5 & \mathbf{2} & 5 & \mathbf{8} & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & \mathbf{8} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{3} & 2 & \mathbf{1} & 3 & \mathbf{5} & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{9} & 8 & 7 & 6 & \mathbf{5} & 4 & \mathbf{11} & 7 & \mathbf{3} & 8 & \mathbf{13} & 5 & \mathbf{7} & 9 & 11 & 13 & \mathbf{15} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{8} & 7 & 6 & 5 & \mathbf{4} & 3 & \mathbf{8} & 5 & \mathbf{2} & 5 & \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{16} & 13 & 10 & 7 & \mathbf{4} & 9 & 14 & 19 & \mathbf{24} & \mathbf{5} & \mathbf{16} & 11 & \mathbf{6} \\ \mathbf{17} & 15 & 13 & 11 & \mathbf{9} & 7 & \mathbf{19} & 12 & \mathbf{5} & 13 & \mathbf{21} & \mathbf{8} & \mathbf{43} & 35 & 27 & 19 & \mathbf{11} & 25 & 39 & 53 & \mathbf{67} & \mathbf{14} & \mathbf{45} & 31 & \mathbf{17} \end{bmatrix}$$

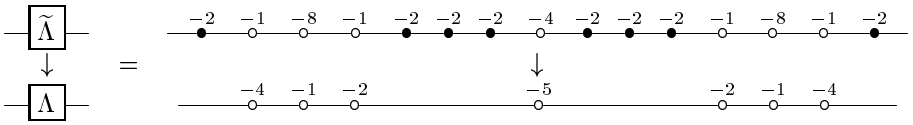
Отображение графов имеет вид:

$$\begin{tikzcd}
-\boxed{\widetilde{\Gamma}_1}\!\!-\overset{-5}{\circ}\!\!-\boxed{\widetilde{\Gamma}_2}\!\!-\overset{-16}{\circ}\!\!-\boxed{\widetilde{\Gamma}_1}\!\!-\overset{-5}{\circ}\!\!-\boxed{\widetilde{\Gamma}_2}\!\!-\overset{-16}{\circ}\!\!-\boxed{\widetilde{\Gamma}_1}\!\!-\overset{-5}{\circ}\!\!-\boxed{\widetilde{\Lambda}}\!\!- \arrow[d, "8:1"] \\
-\boxed{\Gamma_1}\!\!-\overset{-2}{\circ}\!\!-\boxed{\Gamma_2}\!\!-\overset{-2}{\circ}\!\!-\boxed{\Gamma_1}\!\!-\overset{-2}{\circ}\!\!-\boxed{\Gamma_2}\!\!-\overset{-2}{\circ}\!\!-\boxed{\Gamma_1}\!\!-\overset{-2}{\circ}\!\!-\boxed{\Lambda}\!\!-
\end{tikzcd}$$

где

$$\begin{tikzcd}
-\boxed{\widetilde{\Gamma}_1}\!\!- \arrow[d] & = & \overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-4}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet} \arrow[d] \\
-\boxed{\Gamma_1}\!\!- & & \overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!

Γ_2, $\widetilde{\Gamma}_2$ являются зеркальными образами Γ_1, $\widetilde{\Gamma}_1$, и



По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 8$, $m_0 = 8$, $m_1 = 4$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$.

3.3.3. Накрытие над вертикальным ребром $\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}$ *(рис. 11).*

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Отображение графов имеет вид $\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\xrightarrow{3:1}\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}$.
По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 3$, $m_0 = m_1 = 3$, $n_0 = n_1 = 1$.

3.3.4. Два накрытия над вертикальным ребром $\overset{-3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$ *(рис. 11).*
Первое накрытие:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Отображение графов имеет вид $\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\xrightarrow{6:1}\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-4}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$.
По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 6$, $m_0 = 6$, $m_1 = 3$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$.

Второе накрытие:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}, \quad \Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Отображение графов имеет вид $\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\xrightarrow{2:1}\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-4}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$.
По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 2$, $m_0 = 2$, $m_1 = 1$, $n_0 = 1$, $n_1 = 2$.

3.3.5. Накрытие над ребром "$\longrightarrow$" (рис. 11).

$$\Sigma = \Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Отображение графов имеет вид $-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\xrightarrow{4:1}\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$.
По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 4$, $m_0 = 2$, $m_1 = 1$, $n_0 = 2$, $n_1 = 4$.

3.3.6. Накрытие над ребром $\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-$ *(рис. 12).*

$$\Sigma = \Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & 2 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & 1 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Отображение графов имеет вид: $\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\bullet}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\xrightarrow{5:1}\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-3}{\circ}$
По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 5$, $m_0 = m_1 = 5$, $n_0 = n_1 = 1$.

3.3.7. Накрытие над вертикальным ребром $\overset{-2}{\circ\!\!-}$ *(рис. 12 и рис. 13).*

$$\Sigma = \Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Отображение графов имеет вид: $\overset{-1}{\circ\!\!-} \xrightarrow{2:1} \overset{-2}{\circ\!\!-}$.
По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 2$, $m_0 = m_1 = 2$, $n_0 = n_1 = 1$.

3.3.8. Накрытие над ребром $\overset{-3}{\circ\!\!-}$ *(рис. 13).*

$$\Sigma = \Sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Sigma}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Отображение графов имеет вид: $\overset{-1}{\circ\!\!-} \xrightarrow{3:1} \overset{-3}{\circ\!\!-}$.
По предложению 1.6, мы имеем $N = \det A = 3$, $m_0 = m_1 = 3$, $n_0 = n_1 = 1$.

3.4. Накрытие над трехвалентными вершинами сплайс-диаграммы.

Лемма 3.4. *Пусть* $(m_1^{(1)}, \dots, m_{k_1}^{(1)};\ m_1^{(2)}, \dots, m_{k_2}^{(2)};\ m_1^{(3)}, \dots, m_{k_3}^{(3)})$ *— один из следующих наборов целых чисел (здесь* n^m *означает* m *раз* $n, \dots, n$*):*

$$(20, 1;\ 3^7;\ 8, 1^{13}), \quad (4;\ 3, 1;\ 2, 1^2), \quad (5, 1;\ 2^3;\ 4, 1^2), \quad (3^2;\ 2^3;\ 4, 1^2).$$

Тогда существует разветвленное накрытие $\varphi : S^2 \to S^2$*, имеющее три критических значения* p_1*,* p_2*,* p_3*, то есть* φ *не разветвлено вне* $\varphi^{-1}(\{p_1, p_2, p_3\})$*, такое что* $m_1^{(i)}, \dots, m_{k_i}^{(i)}$ *— кратности отображения* φ *в прообразах точки* p_i*.*

Доказательство. Соединим точки p_2 и p_3 вложенным отрезком I. Пусть Γ — граф, вложенный в S^2 одним из способов, изображенных на рис. 14. Зададим отображение $\varphi : \Gamma \to I$ так, чтобы черные вершины отображались в p_2, белые — в p_3, а ребра — гомеоморфно на I. Продолжим φ на всю сферу так, чтобы все компоненты дополнения к Γ накрывали $S^2 \setminus I$ с ветвлением только над p_1. $\square$

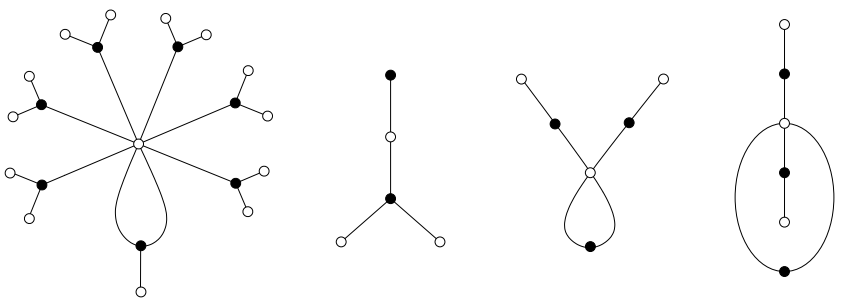


Рис. 14

Для всех трехвалентных вершин графа на рис. 7(внизу) кроме v_2, накрытие сферы, построенное в лемме 3.4, продолжим до накрытия, имеющего ветвление только вдоль кривых, отвечающих соседним вершинам, и не имеющего ветвления вдоль кривой, соответствующей самой трехвалентной вершине.

Для вершины v_2 надо продолжать накрытие более внимательно. Оно должно иметь ветвление второго порядка вдоль кривой, соответствующей вершине v_2 (обозначим ее A), так как $n_1 = 2$ в накрытиях 3.3.2, 3.3.4 и $n_0 = 2$ в накрытии 3.3.5. Пусть B_1, B_2, B_3 — кривые, отвечающие соседним с v_2 вершинам, и V — достаточно малая трубчатая окрестность кривой A. Пусть α, β_1, β_2, β_3 — элементы группы $\Pi = \pi_1\big(V \setminus (A \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3)\big)$, задаваемые меридианами кривых A, B_1, B_2 и B_3 соответственно (меридианом называется обход вдоль края малого трансверсального диска). Поскольку $A^2 = -2$, при некотором выборе путей, соединяющим меридианы с общей базисной точкой, имеем соотношения

$$\alpha^2 = \beta_1\beta_2\beta_3, \qquad \alpha\beta_j = \beta_j\alpha, \quad j = 1, 2, 3 \tag{23}$$

Накрытие определяется гомоморфизмом в группу перестановок $\Pi \to S(8)$, то есть действием группы Π на прообразах базисной точки.

Анализируя накрытия 3.3.2, 3.3.4 и 3.3.5, мы видим, что над окрестностями точек $A \cap B_i$ монодромия накрытия устроена как на рис. 15. Остается установить соответствие между точками так, чтобы выполнялись соотношения (23). Это достигается нумерацией вершин, изображенной на рис. 15.

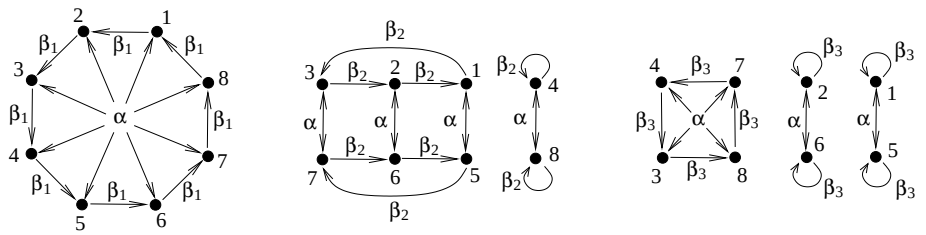


Рис. 15

3.5. Доказательство предложения 0.2. Тем же способом, что и в [13] (или любым другим), можно убедиться в том что полиномиальное погружение $\mathbf{C} \to \mathbf{C}^2$, построенное в пункте 3.2, продолжается до погружения некоторой окрестности кривой $\tilde{D}$ (см. рис. 7). Для этого надо сосчитать степень нормального расслоения кривой D на поверхности, отвечающей нижнему графу на рис. 7 (на этой поверхности D является образом погружения сферы).

Стягивая последовательно (-1)-вершины на рис. 7(вверху), мы получим линейный граф $\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\tilde{v}_2}{\overset{0}{\circ}}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\tilde{D}}{\overset{-1}{\circ}}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{-2}{\circ}$.

Раздувая четыре раза точку, отвечающую ребру справа от $\tilde{v}_2$, получим граф на рис. 16. Этот граф стягивается к единственной $(+1)$-вершине $\tilde{l}$. Таким образом, мы получили мероморфное погружение $(+1)$-пары.

Остается заметить, что по предложению 2.4 индекс построенного погружения равен единице. Действительно, в обозначениях из п. 2.2, мы имеем

$$\mu_\infty f^* = 21, \quad d = 1, \quad n_1 = 4, \quad \text{и} \sum_{x \in D_1^* \setminus \{\infty\}} (\mu_x f^* - n_1) = 8 \times (6 - 4).$$

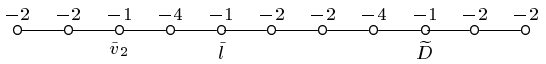


Рис. 16

§4. Невозможность контр-примера к гипотезе о якобиане с данным поведением на бесконечности

В этом параграфе мы докажем

Предложение 4.1. *Не существует полиномиального отображения* $\mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$, *реализующего построенное в §3 мероморфное погружение. В частности,* (+1)-*пара, построенная в §3, не является плоской.*

4.1. Сведение к системе уравнений и неравенств. Предположим, существуют многочлены $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, такие что $P'_x Q'_y - P'_y Q'_x = 1$, и отображение $(x,y) \mapsto (u,v) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ устроено на бесконечности как в §3. Линейными заменами координат можно добиться того, что прямые $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ трансверсально пересекают кривые, отвечающие вершинам u_0 и u_1 на рис. 7(внизу).

Согласно 3.3.1, 3.3.3, ограничение f на каждую из кривых, соответствующих прообразам вершин u_0 и u_1, взаимно однозначно. Поэтому каждый прообраз v_0 (соответственно v_1) однократно и трансверсально пересекает кривую $P(x,y) = \mathrm{const}$ (соответственно, $Q(x,y) = \mathrm{const}$). Все остальные пересечения кривых $P = \mathrm{const}$ и $Q = \mathrm{const}$ с бесконечностью сосредоточены на дикритической компоненте $\tilde{D}$. Причем, поскольку многочлены, параметризующие кривую ветвления D, имеют степени 9 и 60, то кривые $P = \mathrm{const}$ и $Q = \mathrm{const}$ имеют 9 и 60 пересечений с $\tilde{D}$.

Стягивая последовательно лишние (-1)-кривые на рис. 7(вверху), мы получим совместный граф разрешения кривых $P = \mathrm{const}$ и $Q = \mathrm{const}$ на бесконечности, изображенный на рис. 17. Поэтому сплайс-диаграммы этих кривых на бесконечности такие, как на рисунках 18 и 19. Из этого в частности следует (см. [11]), что

$$\deg P(x,y) = 600, \qquad \deg Q(x,y) = 90. \tag{24}$$

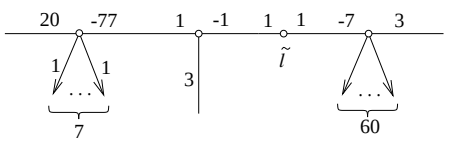


Рис. 18

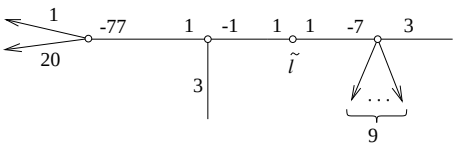


Рис. 19

Пусть

$$X_{19} \xrightarrow{\sigma_{19}} X_{18} \xrightarrow{\sigma_{18}} \dots \xrightarrow{\sigma_2} X_1 \xrightarrow{\sigma_1} X_0 = \mathbf{CP}^2$$

— последовательность σ-процессов, стягивающая последовательно все вершины графа на рис. 17 кроме вершины $\tilde{l}$. Обозначим бесконечно удаленную

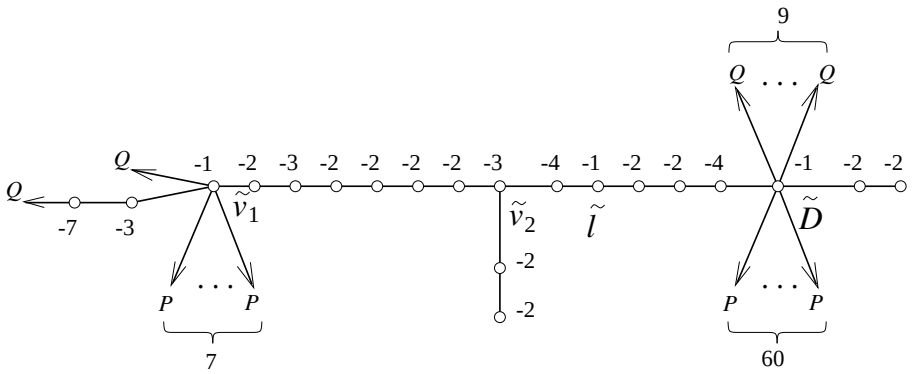


Рис. 17

прямую на $\mathbf{CP}^2$ через E_0, и пусть E_j — исключительная кривая σ-процесса (раздутия) σ_j, $j = 1, \dots, 19$. Мы будем одинаково обозначать кривую и все ее собственные образы на других поверхностях. Взаимное расположение кривых E_j показано на рис. 20. Числа в скобках возле вершин имеют следующий смысл. $P \circ \sigma_{19}$ и $Q \circ \sigma_{19}$ являются рациональными функциями на X_{19}. Пусть (P) и (Q) — их дивизоры. Они имеют вид

$$(P) = (P)_0^{\mathrm{aff}} - \sum_{j=0}^{19} p_j E_j, \qquad (Q) = (Q)_0^{\mathrm{aff}} - \sum_{j=0}^{19} q_j E_j,$$

где $(P)_0^{\mathrm{aff}}$ и $(Q)_0^{\mathrm{aff}}$ — замыкания аффинных кривых $\{P = 0\}$ и $\{Q = 0\}$. На рис. 20 в скобках возле вершины E_j указаны числа (p_j, q_j).

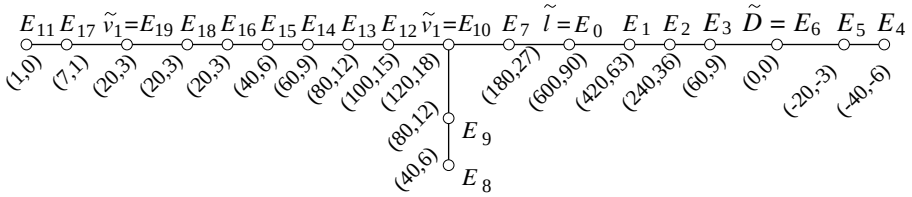


Рис. 20

Выберем координаты x, y в $\mathbf{C}^2$ так, чтобы центр раздутий σ_1 и σ_2 был в бесконечно удаленной точке оси $y = 0$, а центры раздутий σ_7 и σ_8 — в бесконечно удаленной точке оси $x = 0$. Выберем на поверхностях X_j системы координатных карт, которые мы будем называть *стандартными*, следующим образом. В качестве стандартных карт на $X_0 = \mathbf{CP}^2$ выберем (x, y), $(1/x, y/x)$ и $(x/y, 1/y)$. Если центр раздутия σ_j находится в начале координат одной из стандартных координатных карт (x', y') на X_{j-1}, то на X_j эта карта заменяется на две карты $(x'/y', y')$ и $(x', y'/x')$. Единственные три раздутия, для которых выбор стандартных координат неоднозначен, это σ_3, σ_4 и σ_{11}.

Пусть (x_2, y_2) — стандартные координаты на X_2, в которых $E_2 = \{x_2 = 0\}$ и $\{y = 0\} = \{y_2 = 0\}$, то есть $x_2 = x^{-1}$, $y_2 = xy$. В этих координатах кривая E_2 является координатной осью $x_2 = 0$. Поскольку центр раздутия σ_3 лежит на E_2, он имеет координаты $(x_2, y_2) = (0, \alpha_2)$. Выберем в качестве стандартных координат в этой точке координаты $x_{2'} = x_2 = x^{-1}$ и $y_{2'} = y_2 - \alpha_2 = xy - \alpha_2$. Пусть (x_3, y_3) — стандартные координаты на X_3, такие что $x_3 = x_{2'} = x^{-1}$ и $y_3 = y_{2'}/x_{2'} = (xy - \alpha_2)x$. В этих координатах кривая E_3 является координатной осью $x_3 = 0$. Поскольку центр раздутия σ_4 лежит на E_3, он имеет координаты $(x_3, y_3) = (0, \alpha_3)$. Выберем в качестве стандартных координат в этой точке координаты $x_{3'} = x_3 = x^{-1}$ и $y_{3'} = y_3 - \alpha_3 = x^2y - \alpha_2 x - \alpha_3$.

Аналогично, пусть (x_{10}, y_{10}) — стандартные координаты на X_{10}, в которых $E_{10} = \{x_{10} = 0\}$ и $E_7 = \{y_{10} = 0\}$, то есть $x_{10} = x$, $y_{10} = x^{-3}y^{-1}$. Делая, если надо, растяжение вдоль оси x, можно считать, что центр раздутия σ_{11} находится в точке $(x_{10}, y_{10}) = (0, 1) \in E_{10}$. Выберем в качестве стандартных координат в этой точке координаты $x_{10'} = x_{10}$ и $y_{10'} = y_{10} - 1$.

При изображении многоугольников Ньютона на рисунках мы будем пользоваться следующим соглашением. Если известна не вся информация об изображаемом многоугольнике Δ, то мы изображаем на рисунке многоугольник, содержащий Δ, причем те вершины, про которые нам известно, что они являются вершинами многоугольника Δ, мы изображаем в виде черного кружка "$\bullet$".

Лемма 4.1. *Пусть R заменяет одну из букв P или Q, при этом положим $a = 20$ в случае $R = P$, и $a = 3$ в случае $R = Q$.*

(а). Многоугольником Ньютона многочлена $R(x, y)$ является четырехугольник, изображенный на рис. 21 (слева вверху).

(б). При переходе к координатам (x_j, y_j), при $j = 2, 2', 3, 3'$ или 10, многочлен R превращается в многочлен Лорана, который мы обозначим через $R_j(x_j, y_j)$. Многоугольники Ньютона этих многочленов Лорана изображены на рис. 21.

(в). При переходе к координатам $(x_{10'}, y_{10'})$, многочлен R превращается в рациональную функцию вида $(1 + y_{10'})^{-6a} R_{10'}(x_{10'}, y_{10'})$, где $R_{10'}$ — многочлен Лорана, многоугольник Ньютона которого изображен на рис. 22.

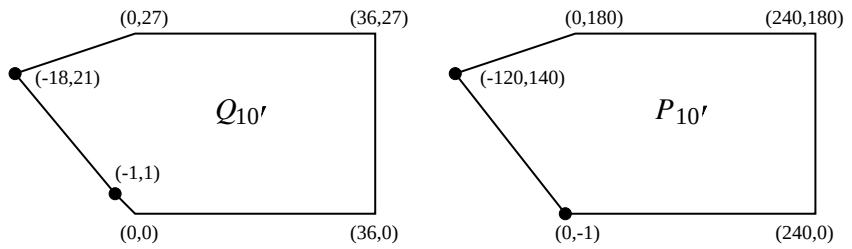


Рис. 22

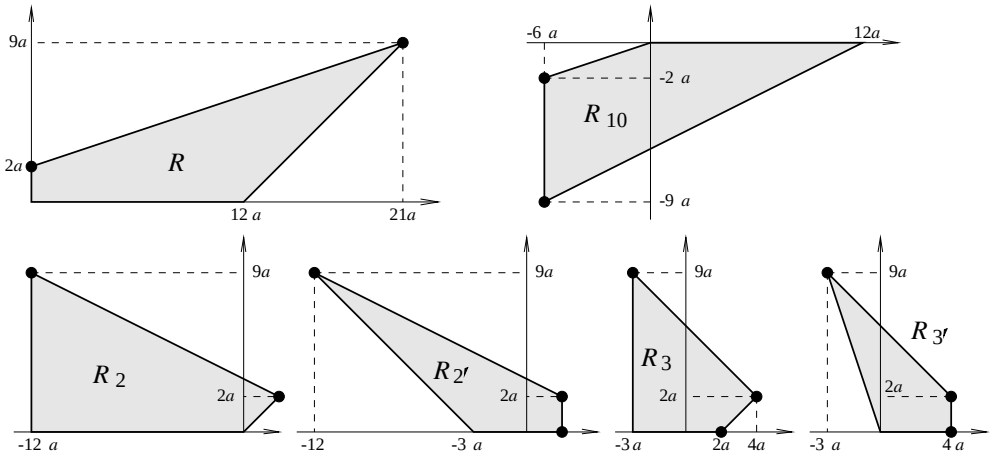


Рис. 21

Доказательство. Достаточно записать в координатах все раздутия и проследить за кратностями многочленов P и Q на исключительных кривых. Например, поскольку $q_0 = 90$ и $q_1 = 27$, дивизор $(Q)_0^{\mathrm{aff}}$ имеет кратность 27 в центре раздутия σ_1. Поэтому многоугольник Ньютона многочлена Q содержится в области $x \le 63$, $x + y \le 90$. Дальнейшие рассуждения аналогичны. $\square$

Условие того, что коэффициенты многочленов $Q_{3'}$ и $Q_{10'}$ равны нулю вне многоугольников на рисунках 21 и 22 дает систему уравнений на коэффициенты многочлена $Q(x, y)$. Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что эта система не имеет решений, при которых не равны нулю коэффициенты в вершинах, отмеченных точками "$\bullet$" на рисунках 21 и 22. Это доказывает предложение 4.1. В следующем пункте мы покажем, как доказать отсутствие решений без громоздких вычислений. Идея доказательства заимствована из статьи Хайтмана [9].

4.2. Доказательство отсутствия решений. Мы будем действовать по аналогии с [9; §3]. Переобозначим для удобства координаты $(x_{3'}, y_{3'})$ через (t, u), а координаты $(x_{10'}, y_{10'})$ через (x, z):

$$x = t^{-1}, \qquad y = \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + u t^2, \qquad y = x^{-3}(1+z)^{-1};$$
$$t = x^{-1}, \qquad u = x^2 y - \alpha_2 x - \alpha_3, \qquad z = x^{-3} y^{-1} - 1.$$

Положим

$$\tau = xu - 1, \qquad \sigma = u^3 - 2xyu + y + 2\alpha_2 u + \alpha_3 xy - \alpha_2\alpha_3, \qquad \rho = \sigma^2\tau^3.$$

Эти функции являются многочленами от (x, y) и многочленами Лорана от (t, u), их многоугольники Ньютона изображены на рис. 23. В координатах (x, z) функции $(1+z)\tau(x, z)$, $(1+z)^3\sigma(x, z)$ и $(1+z)^9\rho(x, z)$ являются многочленами Лорана, их многоугольники Ньютона также изображены на рис. 23. В

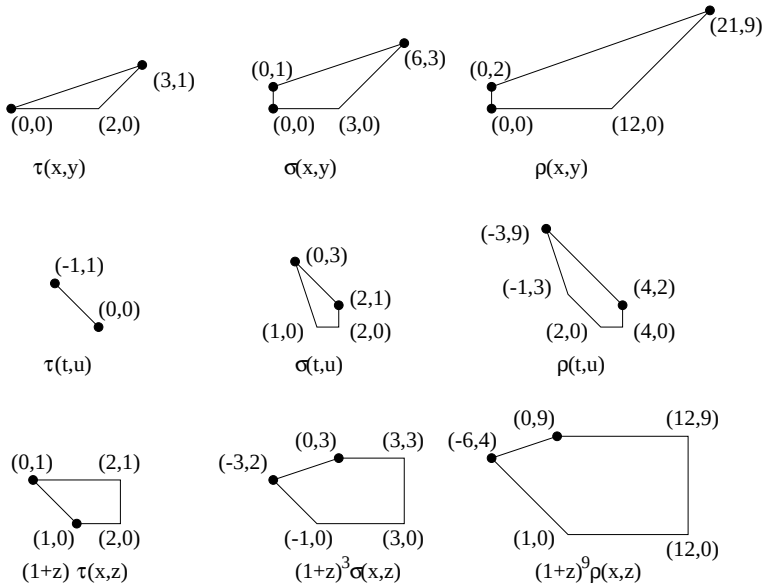


Рис. 23

частности, мы видим, что многоугольники Ньютона ρ^3 во всех трех системах координат (x,y), (x,z), (t,u) лежат внутри многоугольников Ньютона Q.

Для многочлена Лорана $c(t) = \sum_{k=m}^{n} c_k t^k$, такого что $c_m \neq 0$ и $c_n \neq 0$, обозначим $\operatorname{ord}_t c = m$ и $\deg_t c = n$.

Лемма 4.2. *Пусть a — целое положительное число, и $R(x,y)$ — многочлен, многоугольник Ньютона которого содержится в четырехугольнике $[(0,0), (12a,0), (21a,9a), (0,2a)]$. Пусть $R(t,u)$ и $R(x,z)$ результат подстановки в $R(x,y)$ выражений (x,y) через (x,z) и (t,u). Предположим, что многоугольник Ньютона многочлена Лорана $R(t,u)$ содержится в многоугольнике $[(0,0), (4a,0), (4a,2a), (-3a,9a)]$ (ср. с рис. 21). Пусть*

$$(1+z)^{9a} R(x,z) = \sum_{k=-6a}^{12a} b_k(z)\, x^k.$$

Предположим, что $b_k = 0$ при $k < m$. Тогда

$$\deg_z b_m - \operatorname{ord}_z b_m \geq 3/2\,(m+6a),$$

и в случае равенства имеем $b_m(z) = z^{-7/6\,m}(1+z)^{3/2\,(m+6a)}$.

Доказательство. Поскольку $b_k = 0$ при $k < m$, многоугольник Ньютона многочлена Лорана $(1+z)^{9a} R(x,z)$ лежит правее вертикальной прямой $x = m$. В координатах (x, y_{10}) это условие означает, что многоугольник Ньютона многочлена Лорана $y_{10}^{9a} R(x, y_{10})$ лежит в области, заштрихованной на рис. 24 слева. Переходя от координат (x, y_{10}) к координатам (t,u) (см. рис. 24) и обратно

(см. рис. 25), можно проследить, что многоугольник Ньютона многочлена Лорана R все время должен оставаться в заштрихованной области. Следовательно, все ненулевые мономы многочлена Лорана $y_{10}^{9a}R(x, y_{10})$, лежащие на вертикальной прямой $x = m$, должны лежать выше отрезка $[(-6a, 0), (0, 9a)]$ (он изображен пунктиром на рисунках 24 и 25), т.е. $\operatorname{ord}_{y_{10}} c_m \geq 3/2\,(m + 6a)$, где $c_m(y_{10})$ — коэффициент при x^m в многочлене Лорана $y_{10}^{9a}R(x, y_{10})$. Остается заметить, что $b_m(z) = c_m(1 + z)$, и значит, $\deg_z b_m - \operatorname{ord}_z b_m \geq \operatorname{ord}_{y_{10}} c_m$. $\square$

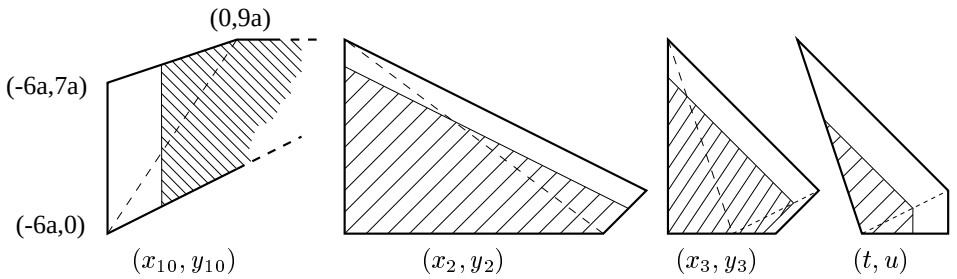


Рис. 24

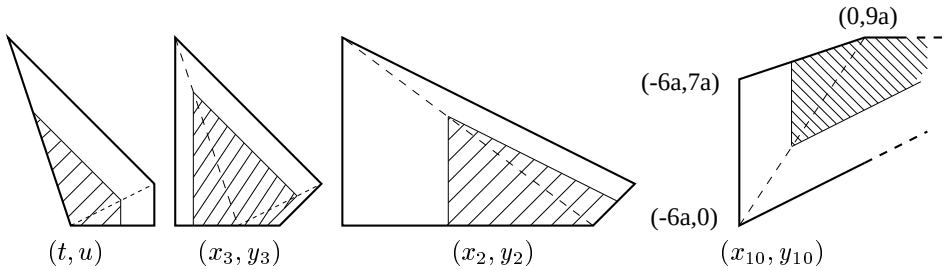


Рис. 25

Без ограничения общности можно считать, что коэффициент при $x^{63}y^{27}$ в многочлене $Q(x, y)$ равен единице. Применяя лемму 4.2 к многочлену $Q - \rho^3$, последовательно убеждаемся, что в координатах (x, z) все его коэффициенты при $x^{-18}, \ldots, x^{-13}$ равны нулю, а коэффициент при x^{-12} равен $c_2\, z^{14}\,(z + 1)^9$ для некоторой константы c_2.

Продолжая применять лемму 4.2, на этот раз к многочлену $Q - \rho^3 - c_2\rho^2$, убеждаемся, что все его коэффициенты при $x^{-12}, \ldots, x^{-7}$ тоже равны нулю, а коэффициент при x^{-6} равен $c_1\, z^7\,(z + 1)^{18}$ для некоторой константы c_1.

Наконец, применяя последовательно лемму 4.2 к многочлену $Q - \rho^3 - c_2\rho^2 - c_1\rho$, убеждаемся, что он тождественно равен нулю, то есть

$$Q = \rho^3 + c_2\rho^2 + c_1\rho.$$

Остается заметить, что у этого многочлена коэффициент при $x^{-1}z$ равен нулю, тогда как по лемме 4.1 это должно быть не так (см. рис. 22, слева). Полученное противоречие доказывает предложение 4.1.

4.3. Второе доказательство предложения 4.1 (простое, но нестрогое). При построении кривой ветвления D в п. 3.2 мы решали недоопределенную систему уравнений (число неизвестных было больше числа уравнений: см. замечание 3.3). Поэтому естественно предположить, что D допускает деформации в классе кривых с данным набором особенностей, и значит, ее можно еще сильнее выродить.

Если при этом произойдет вырождение, при котором особенность типа A_2, сливаясь с простой двойной точкой, превращается в особенность типа A_4, как в семействе кривых

$$C_t = \{y^2 = x^3(x-t)^2\} \qquad \text{при } t \to 0, \tag{26}$$

то контр-пример к гипотезе о якобиане невозможен по следующей простой причине топологической природы. Действительно, в этом случае найдется диск Δ, непрерывно вложенный в $\mathbf{C}^2$, такой что

(i) Δ пересекается с D по своему краю: $\Delta \cap D = \partial\Delta$;

(ii) кривая $\partial\Delta$ проходит через простую двойную точку кривой D, причем переходит в этой точке с одной локальной ветви на другую.

Например, для кривой (26) при $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$, таким диском является $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le t,\, y^2 \le x^3(x-t)^2\}$. Поскольку этот диск поднимается на накрытие, прообразы обеих локальных ветвей в простой двойной точке пересекаются на накрытии, что невозможно.

Строго доказать существование вырождения вида (26) у кривой D, несомненно, должно быть очень трудно (если вообще возможно). Однако кривую, удовлетворяющую условиям леммы 3.1, по-видимому, можно получить, применяя три вырождения вида (26) к кривой D', удовлетворяющей условиям (а) и (б) леммы 3.1, и имеющей четыре особенности типа A_2 и столько же типа A_4. Такие кривые D' существуют, причем среди них имеется кривая с симметрией четвертого порядка.

§5. Псевдо-выпуклые погружения

Теперь мы докажем предложение 0.4.

5.1. Погружения $S^3 \to \mathbf{C}^2$ с точностью до регулярной гомотопии. Обозначим через $\mathrm{Imm}(X,Y)$ пространство погружений многообразия X в многообразие Y. По теореме Смейла [16] связные компоненты пространства $\mathrm{Imm}(S^k, \mathbf{R}^n)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами гомотопической группы $\pi_k(SO(n))$. Поэтому

$$\pi_0\big(\,\mathrm{Imm}(S^3, \mathbf{R}^4)\big) \cong \pi_3(SO(4)) \cong \mathbf{Z}^2. \tag{27}$$

В этом пункте мы дадим явное геометрическое описание этого изоморфизма если $\mathbf{R}^4$ снабжено комплексной структурой (отождествлено с $\mathbf{C}^2$).

Для $f \in \mathrm{Imm}(S^3, \mathbf{C}^2)$, обозначим через $DG(f)$ степень гауссового отображения (см. определение 0.1), а через $CS(f)$ — гомотопический класс обратного образа поля комплексных касательных, т.е. поля двумерных касательных плоскостей

$$q \mapsto f_*^{-1}(T \cap iT), \qquad \text{где } q \in S^3 \text{ и } T = f_*(T_q S^3).$$

Предложение 5.1. *Два погружения* $f_1, f_2 \in \operatorname{Imm}(S^3, \mathbf{C}^2)$ *регулярно гомотопны тогда и только тогда, когда* $DG(f_1) = DG(f_2)$ *и* $CS(f_1) = CS(f_2)$.

Доказательство. Поскольку сфера S^3 параллелезуема, изоморфизм Смейла (27), а также инварианты $DG(f)$ и $CS(f)$ допускают следующую интерпретацию. Отождествим $\mathbf{C}^2$ с телом кватернионов $\mathbf{H}$ посредством отображения $(z, w) \mapsto z + wj$. Тогда $S^3 = \{q \in \mathbf{H} \mid q\bar{q} = 1\}$. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — касательные векторные поля на S^3, линейно независимые в каждой точке, а $\vec{n}$ — поле внешних единичных нормалей, заданные формулами

$$\vec{i}(q) = qi, \quad \vec{j}(q) = qj, \quad \vec{k}(q) = qk, \quad \vec{n}(q) = q, \qquad \text{где} \quad q \in S^3.$$

Погружению $f : S^3 \to \mathbf{H}$ мы сопоставим отображение $\alpha(f) : S^3 \to SO(4)$ следующим образом. Продолжим f до сохраняющего ориентацию погружения некоторой окрестности сферы S^3, причем так, чтобы вектор $f_*(\vec{n}(q))$ был ортогонален к $f_*(T_q S^3)$. Тогда $\alpha(f) : q \mapsto Q \in SO(4)$, где $q \in S^3$ и Q — матрица, отображающая репер $(1, i, j, k)$ на ортогонализацию репера $f_*\big(\vec{n}(q), \vec{i}(q), \vec{j}(q), \vec{k}(q)\big)$. По теореме Смейла отображение α индуцирует биекцию $\alpha_* : \pi_0\big(\operatorname{Imm}(S^3, \mathbf{R}^4)\big) \to \pi_3(SO(4))$.

Мы будем рассматривать S^3 как подгруппу мультипликативной группы $\mathbf{H} \setminus 0$, и пусть $S^2 = S^3 \cap (i\mathbf{R} + j\mathbf{R} + k\mathbf{R})$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\iota_1, \iota_2 : S^3 \to S^3 \times S^3, && \iota_1(s) = (s, 1), \quad \iota_2(r) = (1, r),\\
&\tau : S^3 \times S^3 \to SO(4), && \tau(s, r) : q \mapsto s\, q\, \bar{r},\\
&\sigma : SO(4) \to S^3, && \sigma(Q) = Q(1),\\
&\rho : SO(4) \to S^2, && \rho(Q) = Q(i) \cdot \overline{Q(1)},
\end{aligned}$$

($Q \in SO(4)$ рассматривается как ортогональный оператор $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$). Фиксируем естественные отождествления $\pi_3(S^3) = \pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$. Отображение τ — двулистное накрытие, так как это гомоморфизм групп и $\operatorname{Ker} \tau = \{\pm 1\}$. Оно инуцирует изоморфизм

$$\tau_* : \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = \pi_3(S^3 \times S^3) \to \pi_3(SO(4)).$$

Поскольку $\sigma\tau(s, r) = s\,\bar{r}$, имеем

$$\sigma_*\tau_* : \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = \pi_3(S^3 \times S^3) \to \pi_3(S^3) = \mathbf{Z}, \qquad (m, n) \mapsto m - n. \tag{28}$$

Легко видеть, что $\rho\tau\iota_1 : S^3 \to S^2$ отображает s в $s\,i\,\bar{s}$. Это — расслоение Хопфа. Действительно, $s_1\, i\, \bar{s}_1 = s_2\, i\, \bar{s}_2$ тогда и только тогда, когда $s_1 = s_2 \cdot (x + iy)$ для некоторых $x, y \in \mathbf{R}$. Поэтому имеет место изоморфизм

$$(\rho\tau\iota_1)_* : \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2).$$

Ясно также, что $\rho\tau\iota_2 : S^3 \to S^2$ — постоянное отображение $r \mapsto i$, т.е.

$$\operatorname{im}\Big((\rho\tau\iota_2)_* : \pi_3(S^3) \to \pi_3(S^2)\Big) = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\rho_*\tau_* : \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} = \pi_3(S^3 \times S^3) \to \pi_3(S^2) = \mathbf{Z}, \qquad (m,n) \mapsto m. \tag{29}$$

По определению, $DG(f) = \sigma_*([\alpha(f)]) \in \pi_3(S^3) = \mathbf{Z}$, и $CS(f)$ задается гомотопическим классом векторного поля $q \mapsto f_*^{-1}\big(i\, f_*(\vec{n}(q))\big)$. В силу параллелизуемости сферы S^3, ненулевые векторные поля отождествляются с отображениями $S^3 \to S^2 \subset T_1(S^3)$. При этом отождествлении $CS(f)$ отвечает гомотопическому классу $\rho_*([\alpha(f)]) \in \pi_3(S^2)$. Из (28) и (29) следует, что $[\alpha(f)]$ определяется своими образами при гомоморфизмах σ_* и ρ_*. $\square$

5.2. О продолжаемости погружения сферы до погружения шара. Пусть X и Y — связные n-мерные многообразия, причем X компактно и с краем (необязательно связным), например, $X = B^n$, $Y = \mathbf{R}^n$. В этом пункте дадим одно достаточное условие для того, чтобы погружение края $\partial X \to Y$ продолжалось до погружения $X \to Y$. При $n = 2$ оно было доказано Франсисом [8].

Определение. Пусть Z и Y — многообразия разменостей $n-1$ и n соответственно.

1. Погружение $f : Z \to Y$ называется *морсовским*, если для любых точек $z, z' \in Z$ таких что $f(z) = f(z')$ и $f_*(T_zZ) = f_*(T_{z'}Z)$ (такие пары точек мы будем называть *самокасаниями погружения* f), найдутся окрестности U и U', на которых f — вложение, окрестность V точки $y = f(z)$ и гладкая функция $\varphi : V \to \mathbf{R}$, такие что $\{\varphi = 0\} = V \cup f(U')$ и при этом $\varphi \circ f|_U$ — морсовская функция.

2. *Нормальным расслоением* погружения $f : Z \to Y$ называется одномерное линейное расслоение $N_f \to Z$, слой которого над точкой z равен $T_{f(z)}Y/f_*(T_zZ)$. *Коориентацией* погружения f называется ориентация его нормального расслоения.

3. Предположим, что $f : Z \to Y$ — коориентированное морсовское погружение, и $z, z' \in Z$ — его точки самокасания. Самокасание в точках $z, z' \in Z$ называется *попутным*, если коориентации в них индуцированы одной и той же ориентацией пространства $T_{f(z)}Y/f_*(T_zZ) = T_{f(z')}Y/f_*(T_{z'}Z)$, и *встречным* в противном случае.

4. *Индексом* встречного самокасания коориентированного морсовского погружения называется индекс особой точки функции $\varphi \circ f|_U$ (см. выше) при условии, что градиент функции φ задает поле положительных нормалей к $V \cap f(U')$ (в случае попутного самокасания или в случае некоориентируемого погружения индекс определен лишь с точностью до отождествления k и $n-k-1$).

5. Регулярная гомотопия $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ называется *морсовской*, если при всех $t \in [0,1]$ погружение h_t морсовское. Тройка z, z', t, где $z, z' \in Z$ — точки самокасания погружения h_t называется *прохождением самокасания*.

6. Прохождение самокасания z, z', t регулярной гомотопии $\{h_t\}$ называется *трансверсальным*, если найдутся окрестности точек (z,t), (z',t), образы которых при отображении $(z,t) \mapsto (h_t(z), t)$ трансверсальны в $Y \times [0,1]$. Регулярная гомотопия называется *трансверсальной*, если все ее прохождения самокасаний трансверсальны.

7. Прохождение встречного самокасания коориентированной регулярной гомотопии называется *положительным* (*отрицательным*) если скорость каждой ветви по отношению к другой положительна (отрицательна) в смысле коориентации.

Рис. 23 иллюстрирует определения видов самокасаний. На рис. 24 изображены положительные прохождения самокасаний различных индексов (отрицательные из них получаются при обращении направления движения, т.е. при $\varepsilon < 0$). Стрелками на обоих рисунках обозначены коориентации.

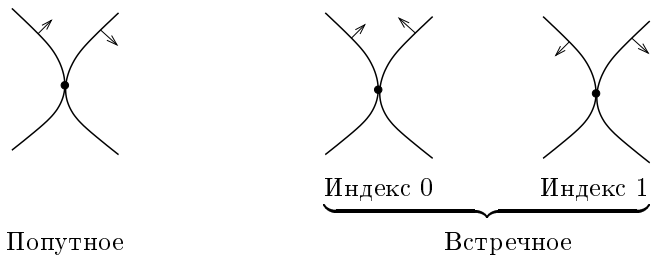


Рис. 23. Самокасания

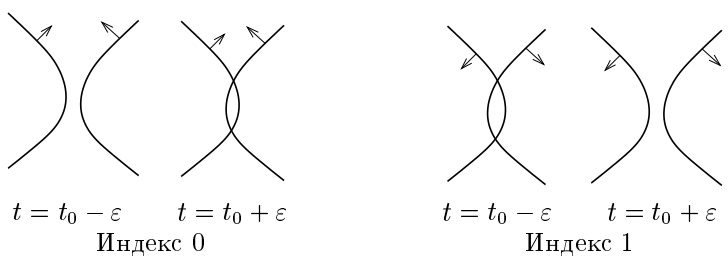


Рис. 24. Положительные прохождения самокасаний ($\varepsilon > 0$)

Предложение 5.2. *Пусть X и Y — связные n-мерные многообразия, причем X компактно и имеет край $Z = \partial X$. Пусть $H : X \to Y$ — погружение, и $h_t : Z \to Y$, $t \in [0,1]$ — трансверсальная морсовская гомотопия, такая что $h_0 = H|_Z$. Фиксируем коориентацию h_0, задаваемую образом поля внешних нормалей к Z при отображении H_* (она непрерывно продолжается на все h_t). Если все прохождения встречных самокасаний индекса $n-1$ положительны, то существует гомотопия $H_t : X \to Y$, такая что $H_t|_Z = h_t$ и $H_0 = H$.*

В случае $n = 2$ предложение 5.2 доказано в [8]. В общем случае доказательство более или менее аналогично, и мы его опускаем.

Пример. На рис. 25 изображена регулярная гомотопия окружности $\{h_t\}$, такая что h_0 продолжается до погружения диска, а h_1 — нет. Видно, что продолжаемость нарушается в момент отрицательного прохождения точки встречного касания индекса 1. Согласно предложению 5.2, это единственная причина, которая может нарушить продолжаемость.

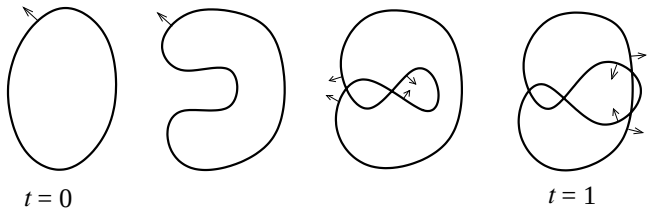


Рис. 25

Определение 5.3. Пусть X, Y — связные компактные n-мерные многообразия, X компактно, и $f : Z = \partial X \to Y$ — погружение. Два продолжения $F, G : X \to Y$ погружения f называются *эквивалентными,* если существует изотопия $H_t : X \to Z$, $t \in [0,1]$, такая что $H_0 = F$, $H_1 = G$, и $H_t|_Z = f$ при всех t.

Следствие 5.4. *Пусть X, Y — связные компактные n-мерные многообразия, X компактно, и $Z = \partial X$. Предположим, что $h_t : Z \to Y$ — трансверсальная морсовская регулярная гомотопия, не имеющая встречных самокасаний индекса $n-1$. Тогда погружения h_0 и h_1 имеют одинаковые количества продолжений на X с точностью до эквивалентности из определения 5.3.* □

Теперь мы применим предложение 5.2 к задаче о продолжении строго псевдовыпуклой гомотопии края (см. определение 0.3) до регулярной гомотопии всего многообразия.

Следствие 5.5. *Пусть Y — гладкое комплексное (или почти комплексное) многообразие комплексной размерности $k \geq 2$, и пусть X — гладкое компактное ориентируемое многообразие вещественной размерности $n = 2k$ с краем $Z = \partial X$. Пусть $H : X \to Y$ — погружение, и $h_t : Z \to Y$, $t \in [0,1]$ — строго псевдовыпуклая гомотопия, такая что $h_0 = H|_Z$. Тогда существует регулярная гомотопия $H_t : X \to Y$, такая что $H_t|_Z = h_t$ и $H_0 = H$.*

Доказательство. Малым шевелением гомотопию $\{h_t\}$ можно сделать морсовской и трансверсальной. Если шевеление достаточно мало, то она останется строго псевдовыпуклой. Сравнивая формы Леви касающихся ветвей, легко видеть, что у морсовских псевдовыпуклых погружений невозможны встречные самокасания индекса $n-1$. Поэтому предложение 5.5 вытекает из предложения 5.2. □

Следствие 5.6. *Пусть Y гладкая комплексная поверхность и Пусть $f : S^3 \to Y$ строго псевдовыпуклое погружение. Тогда:*

(а). *Погружение f продожлается до погружения шара тогда и только тогда когда оно строго псевдовыпукло гомотопно стандартному вложению.*

(б). *С точностью до эквивалентности (см. определение 5.3) существует не более одного продолжения f до погружения шара $B^4 \to Y$.*

Доказательство. Предположим, f продолжается до погружения $F : B^4 \to Y$. По теореме Элиашберга [7], на B^4 существует плюрисубгармоническая (относительно комплексной структуры, поднятой с Y) функция с единственным

минимумом. Поверхностей уровня этой функции задают строго псевдовыпуклую гомотопию между f и некоторым вложением. Поскольку вложение сферы продолжается до вложения шара единственным образом, доказываемое утверждение вытекает из следствия 5.4. $\square$

Замечание. При $k = 1$ утверждение следствия 5.6(б) неверно: на рис. 26 приведен пример погружения $S^1 \to \mathbf{R}^2$, неоднозначно продолжаемого до погружения диска. В работе [15] этот пример назван примером Милнора. В 50-е годы этот пример независимо построил Н.Н. Константинов. Вращая кривую на рис. 27 вокруг оси, мы получим примеры неоднозначно продолжаемых погружений $S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ при всех $n \geq 2$, т.е. утверждение следствия 5.6(б) неверно без условия псевдовыпуклости погружения f.

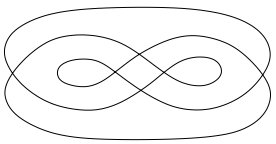


Рис. 26

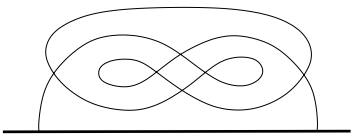


Рис. 27

5.3. Доказательство предложения 0.4.

Из предложения 5.1 следует, что погружение f сферы $-M$ (см. определение 0.1), отвечающее мероморфному погружению (+1)-пары, построенному в §3, регулярно гомотопно стандартному вложению. Действительно, $DG(f) = 1$ по построению, и $CS(f) = 1$, так как будучи голоморфным, отображение f сохраняет поле комплексных касательных.

Докажем, что не существует строго псевдовыпуклой гомотопии между f и стандартным вложением. Предположим, что такая гомотопия существует. Тогда по предложению 5.6(а) f продолжалось бы до погружения шара. Приклеивая шар к M, получаем четырехмерное многообразие X, диффеоморфное $\mathbf{CP}^2$, вложенную в него двумерную сферу L и погружение $X \setminus L \to \mathbf{C}^2$, причем X имеет комплексную структуру в окрестности L, относительно которой L — комплексная кривая, и функции, задающие погружение в $\mathbf{C}^2$, мероморфны. Поднимем с $\mathbf{C}^2$ комплексную структуру на все X. Тогда получившаяся комплексная поверхность изоморфна $\mathbf{CP}^2$, и значит, описанная конструкция дала бы контр-пример к гипотезе о якобиане, что невозможно по предложению 4.1.

Цитированная литература

1. S.S. Abhyankar, T.-T. Moh, *Generalised Tschirnhausen transformation and approximation roots. I*, J. Reine und Angew. Math. **260** (1973), 47–83.
2. W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer-Verlag, 1984.
3. H. Bass, E.H. Connell, D. Wright, *The Jacobian Conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Amer. Math. Soc., Ser. 2 **7** (1982), 287–330.
4. А.В. Домрина, *О четырехлистных полиномиальных отображениях* $\mathbf{C}^2$. *II. Общий случай*, Изв. РАН, сер. мат. **64** (2000), no. 1, 3–36.
5. А.В. Домрина, С.Ю. Оревков, *О четырехлистных полиномиальных отображениях* $\mathbf{C}^2$. *I. Случай неприводимой кривой ветвления*, Мат. заметки **64** (1998), no. 6, 847–862.

6. D. Eisenbud, W.D. Neumann, *Three dimentional link theory and invariants of plane curve singularities*, Ann. Math. Studies, vol. 110, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.
7. Y. Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its application*, In: Geometry of low-dimentional manifolds, 2 (Durham, 1989), London Math. Soc. Lecture Notes Ser., vol. 151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, pp. 45–67.
8. G.K. Francis, *Titus' homotopies of normal curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **30** (1971), 511–518.
9. R.C. Heitmann, *On the Jacobian Conjecture*, J. Pure and Appl. Algebra **64** (1990), 35–72.
10. T.-T. Moh, *On the Jacobian Conjecture and the configuration of roots*, J. Reine und Angew. Math. **340** (1983), 140–212.
11. W.D. Neumann, *Complex algebraic plane curves via their links at infinity*, Inv. Math. **89** (1989), 445–489.
12. С.Ю. Оревков, *О трехлистных полиномиальных отображениях* $\mathbf{C}^2$, Изв. АН СССР, сер. мат. **50** (1986), no. 6, 1231–1240.
13. С.Ю. Оревков, *Один пример в связи с гипотезой о якобиане*, Мат. заметки **47** (1990), no. 1, 127-136; *Письмо в редакцию*, там же **49** (1991), no. 6, 148.
14. С.Ю. Оревков, *Когда цепочка раздутий задает автоморфизм* $\mathbf{C}^2$, Мат. заметки **67** (2000), no. 4, 638-640.
15. V. Poenaru, *Extension des immersions en codimension 1 (d'après Samuel Blank)*, Séminaire Bourbaki, 20e année 1967/68, exposé no. 342, 1-33.
16. S. Smale, *The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces*, Ann. of Math. (2) **69** (1959), 327–244.
17. A.G. Vitushkin, *On polynomial transformations of* $\mathbf{C}^n$, In: Manifolds, Tokyo 1973, Tokyo Univ. Press, 1975.