

# ПОСТРОЕНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЙ $M$ -КВАРТИКИ И $M$ -КУБИКИ С МАКСИМАЛЬНО ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОВАЛОМ И НЕЧЕТНОЙ ВЕТВЬЮ

С.Ю. ОРЕВКОВ

— И что же ты с ними делаешь?  
— Распоряжаюсь ими, — ответил делец. — Считаю их и  
пересчитываю. Это очень трудно. Но я человек серьезный.

*А. де Сент Экзюпери.* "Маленький принц"

Математический текст такого стиля (вдохновленный, несомненно, дьяволом) не может не содержать опечаток.

*Дж. Литлвуд.* "Математическая смесь"

1

В настоящей работе мы строим 237 расположений, указанных в заглавии (см. §5). Они включают в себя расположения, ранее построенные в [2, 3, 11]. Все построения заключаются в возмущении различных особых кривых. Почти во всех случаях мы доказываем, что рассмотрены все кривые с таким же набором особенностей, которые могли бы дать указанные в заглавии расположения. В частности, в §1 мы даем полную классификацию (с точностью до изотопии) расположений квартики и кубики с максимально пересекающимися овалом и нечетной ветвью (см. определение 0.2), имеющих неприводимые двойные точки с суммой чисел Милнора, равной шести. В §2 мы даем аналогичную классификацию в двух случаях, когда сумма чисел Милнора равна четырем: симметричные расположения с двумя точками  $A_2$  (п. 2.1) и квартика с точкой  $A_4$  (п. 2.2). В §3 мы даем классификацию расположений квартики и кубики с почти максимально пересекающимися овалом и нечетной ветвью (см. определение 0.2), имеющих неприводимые двойные точки с суммой чисел Милнора, равной шести, за исключением двух случаев: (1) квартика имеет особенность  $A_6$  и (2) квартика имеет особенности  $A_4$  и либо квартика, либо кубика имеет особенность  $A_2$ , причем касание в  $A_2$  немаксимально. Про эти случаи а priori известно, что они ничего не могут добавить в список из §5, так как соответствующие сглаживания получаются как сглаживания кривых из п. 2.2.

В пп. 1.3 и 6.3 мы показываем (см. замечание 1.8 и предложение 6.8), что некоторое взаимное расположение кубики и квартики реализуемо псевдогомоморфно, но нереализуемо алгебраически. Другие примеры алгебраически

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-01-00602.

нереализуемых взаимных расположений на  $\mathbf{R}P^2$  двух трансверсально пересекающихся неособых вещественных псевдоголоморфных кривых были известны ранее (см. [1], [8]), однако рис. 13 — первый известный автору пример такого рода, в котором как построение, так и доказательство алгебраической неререализуемости получаются элементарными средствами и не требуют громоздких вычислений.

Я благодарен Г.М. Полотовскому за многочисленные полезные обсуждения. Настоящая работа была выполнена по его настоянию.

**Определения и обозначения.** Напомним, что кривая имеет *особенность типа  $A_n$*  в точке  $p$ , если она задается уравнением  $y^2 = \pm x^{n+1}$  в некоторых локальных аналитических координатах с началом в точке  $p$ . Такие точки называются *двойными*. Двойная точка  $A_n$  является *приводимой* при нечетном  $n$  и *неприводимой* при четном  $n$ . Число  $n$  является ее *числом Милнора*. *Ветвью* вещественной алгебраической кривой называется образ компоненты связности ее нормализации (неособой модели). Ветвь кривой, лежащей в  $\mathbf{R}P^2$ , называется *четной* (*нечетной*), если она реализует нулевой (ненулевой) класс гомологий в  $H_1(\mathbf{R}P^2; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ .

**Определение 0.1.** Предположим, что в точке  $p$  одна кривая неособа, а другая имеет особенность типа  $A_n$ . Будем говорить, что эти кривые имеют в точке  $p$  *максимальное* (соответственно, *почти максимальное*) пересечение, если локальная кратность пересечения равна  $n + 1$  (соответственно,  $n$ ).

Заметим, что если в точке  $p$  одна кривая неособа, а другая имеет особенность типа  $A_n$ , то пересечение максимально тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки  $p$  одна кривая расположена по обе стороны от другой.

**Определение 0.2.** Пусть  $B_1$  и  $B_2$  — ветви алгебраических кривых  $C_1$  и  $C_2$ , степеней  $d_1$  и  $d_2$  соответственно. Предположим, что каждая из кривых  $C_1, C_2$  в качестве особенностей имеет только неприводимые двойные точки. Будем говорить, что ветви  $B_1$  и  $B_2$  имеют *максимальное взаимное расположение*, если выполнены следующие условия:

- (1) Все особенности кривых  $C_1, C_2$  расположены на ветвях  $B_1, B_2$ ;
- (2)  $C_1 \cap C_2 = B_1 \cap B_2$ .
- (3) У кривых  $C_1$  и  $C_2$  нет общих особых точек.
- (4) Во всех особых точках кривые имеют максимальное пересечение.

Будем говорить, что ветви  $B_1$  и  $B_2$  имеют *почти максимальное взаимное расположение*, если условие (4) заменить на

- (4') в одной особой точке одной из кривых пересечение почти максимально, а в остальных особых точках обеих кривых пересечение максимально.

**Обозначение 0.3.** Пусть  $C$  — кривая в  $\mathbf{R}P^2$  и  $p$  — точка на  $C$ , не являющаяся точкой перегиба. Выберем координаты  $(x : y : z)$  таким образом, чтобы прямая  $z = 0$  была касательной к  $C$  в точке  $p$ . Выберем параметр  $a$  так, чтобы коника  $yz = ax^2$  имела бы с кривой  $C$  пересечение кратности  $\geq 3$  в точке  $p$ . Обозначим через  $f_{C,p}$  бирациональное квадратичное преобразование

$(x : y : z) \mapsto (xz : yz - ax^2 : z^2)$  (преобразование  $(X, Y) \mapsto (X, Y - aX^2)$  в аффинных координатах  $X = x/z, Y = y/z$ ).

**Обозначение 0.4.** Пусть  $p$  и  $q$  — точки в  $\mathbf{R}P^2$  и  $L$  — прямая, проходящая через  $q$  и не проходящая через  $p$ . Выберем координаты  $(x : y : z)$  так, чтобы было  $p = (0 : 1 : 0), q = (0 : 0 : 1), L = \{y = 0\}$ . Обозначим через  $h_{p,q,L}$  бирациональное квадратичное преобразование  $(x : y : z) \mapsto (x^2 : xy : yz)$ . В литературе по топологии вещественных алгебраических кривых это преобразование принято называть *гиперболизмом* (этот термин ввел О.Я. Виро, ссылаясь на Ньютона).

§1. МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ КВАРТИКИ  
И КУБИКИ, ИМЕЮЩИХ НЕПРИВОДИМЫЕ ДВОЙНЫЕ  
ТОЧКИ С СУММОЙ ЧИСЕЛ МИЛНОРА, РАВНОЙ ШЕСТИ

**1.1. Неособая  $M$ -кубика и кватерника с точкой  $A_6$ .**

**Лемма 1.1.** Пусть  $C$  — неособая  $M$ -кубика,  $E$  — коника и  $L$  — прямая. Предположим, что  $E$  пересекает нечетную ветвь  $J$  кривой  $C$  в 6 точках и обозначим одну из этих точек через  $p$ . Предположим, что  $L$  касается  $E$  в точке  $p$ , а также  $L$  касается  $J$  в некоторой точке  $q$ . Тогда  $C \cup E \cup L$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 1.1–1.5, причем все эти способы реализуемы.

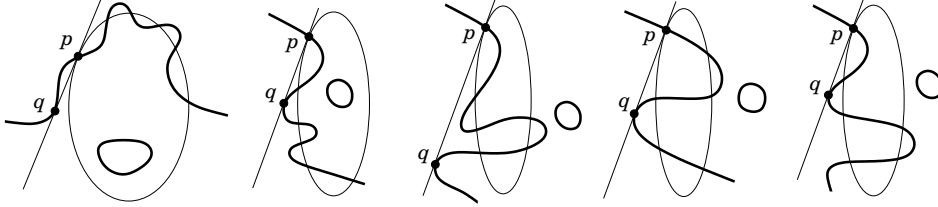


Рис. 1.1

Рис. 1.2

Рис. 1.3

Рис. 1.4

Рис. 1.5

*Доказательство.* Рис. 1.1. Пусть  $x, y$  — аффинные координаты. Положим  $E = \{x^2 + y^2 = 1\}, L = \{5y = 12x + 13\}, C = \{(x^2 + y^2 - 1)y + \alpha f(y) = 0\}, p = (-12/13, 5/13)$  и  $q = (x_q, y_q)$ , где  $f(y) = (y - \frac{5}{13})(2y - 1)(4y - 3), \alpha = \frac{91}{144} - \frac{13}{96}\sqrt{19} \approx 0.0416769, x_q = -(65 + \sqrt{19})/72$  и  $y_q = (13 - \sqrt{19})/30$ .

Для реализации расположений на рис. 1.2 – 1.5 фиксируем  $C, L = \{l = 0\}, p$  и  $q$  требуемым образом и будем строить  $E$ .

Рис. 1.2. Пусть  $L_1 = \{l_1 = 0\}$  — прямая, пересекающая  $J$  в трех точках, лежащих на одной дуге  $pq$ . Положим  $E = \{l_1 l + \varepsilon f\}$ , где  $\{f = 0\}$  — коника, касающаяся  $L$  в точке  $p$  и не имеющая вещественных пересечений с  $L_1$ , и  $|\varepsilon| \ll 1$ .

Рис. 1.3 – 1.5. Пусть  $\{l_1 = 0\}$  — прямая, проходящая через  $p$  и пересекающая  $J$  еще в двух точках. Положим  $E = \{l_1^2 + \varepsilon l_2 l\}$ , где  $\{l_2 = 0\}$  — прямая, близкая к  $L$ , и  $|\varepsilon| \ll 1$ .

То, что другие расположения невозможны, легко следует из классификации Полотовского [10; §3.1] взаимных расположений коники и кубики и теоремы Безу, примененной к вспомогательной прямой.  $\square$

**Предложение 1.2.** Пусть  $C_3$  — неособая  $M$ -кубика и  $C_4$  — кватрика, имеющая в точке  $p$  особенность типа  $A_6$ . Предположим, что  $C_4$  максимально пересекает нечетную ветвь  $J_3$  кривой  $C_3$ . Тогда  $C_3 \cup C_4$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 2, причем все эти способы реализуемы.

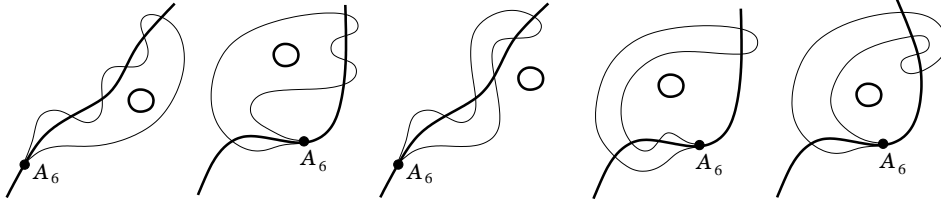


Рис. 2.1

Рис. 2.2

Рис. 2.3

Рис. 2.4

Рис. 2.5

*Доказательство.* Применить  $f_{C,q}$  к конфигурациям из леммы 1.1.  $\square$

### 1.2. Неособая $M$ -кубика и кватрика с точками $A_4$ и $A_2$ .

**Лемма 1.3.** Пусть  $p_1, p_2, q$  — точки, лежащие на нечетной ветви  $J$  неособой  $M$ -кубики  $C$ . Обозначим через  $L_1, L_2, L_3$  прямые  $(p_1q), (p_2q)$  и  $(p_1p_2)$  соответственно. Предположим, что  $C$  касается прямой  $L_1$  в точке  $q$ . Тогда  $C$  расположена относительно  $L_1, L_2, L_3$  как на рис. 3.1–3.5, причем все эти расположения реализуемы.

*Доказательство.* То, что других расположений нет, очевидно. Для реализации расположения на рис. 3.3 выберем  $p_1 \in J$ , построим к  $J$  касательную  $L_1 = (p_1q)$  и в качестве  $L_3$  возьмем близкую к ней прямую.

Для реализации расположения на рис. 3.2 и 3.5 выберем на  $J$  точку  $p_1$  и проведем через нее прямые  $L_1$  и  $L'_3$ , касающиеся ветви  $J$ . В качестве  $L_3$  возьмем прямую, близкую к  $L'_3$ .

Для реализации оставшихся расположений обозначим через  $a$  одну из точек перегиба на нечетной ветви  $J$ . Построим к  $J$  касательные  $ab$  ( $b$  — точка касания),  $bc$  ( $c$  — точка касания) и  $cd$  ( $d$  — точка касания на дуге  $ab$ ). Пусть  $e$  — точка на дуге  $ad$ , а  $f$  — точка на дуге  $bd$ , близкая к  $b$ . Тогда при  $p_1 = b, p_2 = e, q = c$  (соответственно, при  $p_1 = c, p_2 = f, q = d$ ) получается расположение на рис. 3.1 (соответственно, на рис. 3.4).  $\square$

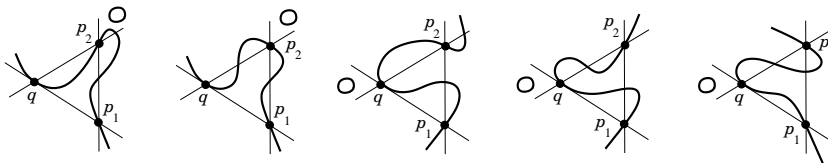


Рис. 3.1

Рис. 3.2

Рис. 3.3

Рис. 3.4

Рис. 3.5

**Лемма 1.4.** Пусть  $C$  — неособая  $M$ -кубика,  $E$  — коника и  $L_1, L_2$  — прямые. Предположим, что  $E$  пересекает нечетную ветвь  $J$  кривой  $C$  в 6 точках и обозначим две из этих точек через  $p_1$  и  $p_2$ . Предположим, что  $L_j$  касается  $E$  в точке  $p_j$ ,  $j = 1, 2$ , а также  $L_1$  касается  $J$  в точке  $q$ , причем прямая  $L_2$  тоже проходит через  $q$ . Тогда  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 4.1–4.8, причем все эти способы реализуемы.

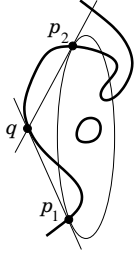


Рис. 4.1

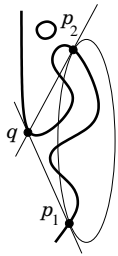


Рис. 4.2



Рис. 4.3



Рис. 4.4

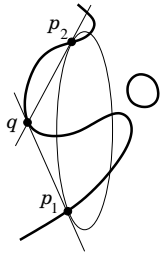


Рис. 4.5

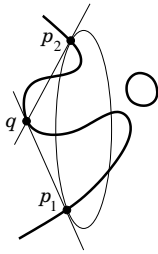


Рис. 4.6

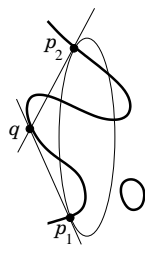


Рис. 4.7

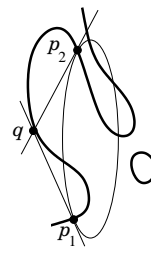


Рис. 4.8

*Доказательство.* Возможные взаимные расположения кривых  $C$ ,  $E$  и  $L_1$  описаны в лемме 1.1. К рис. 1.1 прямую  $L_2$  добавить невозможно, а из рис. 1.2 (соответственно, 1.3; 1.4; 1.5) можно получить только рис. 4.1 (соответственно, 4.2–4.4; 4.5–4.6; 4.7–4.8). Покажем, что все эти возможности реализуемы.

*Расположения на рис. 4.3–4.7.* В лемме 1.3 положим  $E = \{l_3^2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0\}$ , где  $L_j = \{l_j = 0\}$  и  $|\varepsilon| \ll 1$ .

*Расположение на рис. 4.1.* Пусть  $M$ -кубика  $C$  и две прямые  $L$  и  $L_1$  расположены как на рис. 5. Рассмотрим пучок коник  $\{E(t)\}$ , проходящих через  $p_1, r_1$  и  $r_2$ . Пусть  $I$  — отрезок этого пучка между  $L \cup L_1$  и  $(p_1 r_1) \cup (p_1 r_2)$ , проходящий через положение, изображенное на рис. 5. Обозначим через  $L_2(t)$  касательную к  $E(t)$ , проходящую через  $q$ , и пусть  $p_2(t)$  — точка касания. Когда  $t$  пробегает  $I$ , точка  $p_2(t)$  непрерывно движется от  $L \cap L_1$  к  $r_1$  и значит, при некотором значении параметра  $t$  лежит на  $C$ .

*Расположение на рис. 4.2.* Фиксируем аффинные координаты  $x, y$  и положим  $p_2 = (0, 0)$ ,  $L_0 = \{y = x\}$ . Пусть  $C(t)$ ,  $t > 0$  —  $M$ -кубика, заданная уравнением  $y^2 = x(x+t)(x+2t)$ , и  $J(t)$  — ее нечетная ветвь. Обозначим

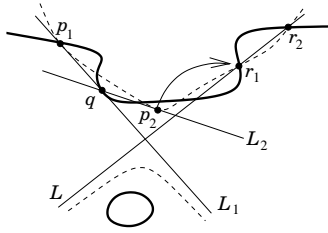


Рис. 5

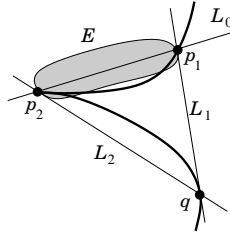


Рис. 6

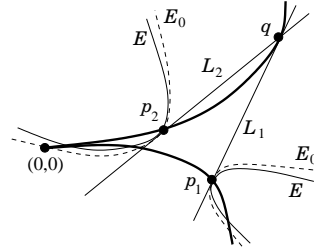


Рис. 7

через  $p_1(t)$  точку пересечения  $C(t)$  и  $L_0$ , имеющую наибольшую координату  $x$ . Пусть  $L_1(t)$  — касательная к  $J(t)$ , проходящая через  $p_1(t)$ ,  $q(t)$  — точка касания, и  $L_2(t)$  — прямая, проходящая через  $p_2(t)$  и  $q(t)$ . При  $t \rightarrow 0$  кубика  $C(t)$  стремится к  $C_0 = \{y^2 = x^3\}$ . Выберем уравнения  $l_j(t) = 0$  кривых  $L_t$ ,  $j = 0, 1, 2$ , так, чтобы  $l_j(t) \rightarrow l_0(t)$  при  $t \rightarrow 0$ . Пусть  $E(t) = \{l_0^2 + \varepsilon l_1 l_2 = 0\}$ . Фиксируем  $\varepsilon$ , при котором коника  $E(0)$  расположена как на рис. 6. Тогда при  $0 < t \ll |\varepsilon|$  кривые  $C(t)$ ,  $E(t)$  и  $L_j(t)$  расположены требуемым образом.

*Расположение на рис. 4.8.* Фиксируем аффинные координаты  $x, y$  и положим  $q = (1, 1)$ ,  $p_1 = (1/4, -1/8)$ ,  $p_2 = (1/25, 1/125)$ . Эти точки лежат на кривой  $C_0 = \{y^2 = x^3\}$ . Пусть  $L_j = \{l_j = 0\}$ , где  $l_1 = 1 - 3x + 2y$ ,  $l_2 = 1 - 31x + 30y$ ,  $l_3 = 1 - 19x - 30y$ , и пусть  $E_0 = \{f_0 = 0\}$ , где  $f_0 = l_3^2 - l_1 l_2 = -4x - 92y + 270x^2 + 988xy + 840y^2$ . Тогда  $E = \{f_0 - \varepsilon l_1 l_2 = 0\}$  при  $0 < \varepsilon \ll 1$  расположена как на рис. 7. В качестве  $C$  возьмем малое (по сравнению с  $\varepsilon$ )  $M$ -сглаживание кривой  $C_0$ .  $\square$

**Предложение 1.5.** Пусть  $C_3$  — неособая  $M$ -кубика и  $C_4$  — кватрика, имеющая две особые точки типов  $A_4$  и  $A_2$ . Предположим, что  $C_4$  максимально пересекает нечетную ветвь  $J_3$  кривой  $C_3$ . Тогда  $C_3 \cup C_4$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 8.1–8.8, причем все эти способы реализуемы.

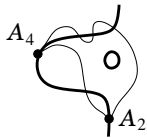


Рис. 8.1

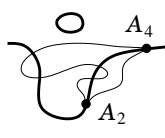


Рис. 8.2

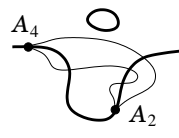


Рис. 8.3

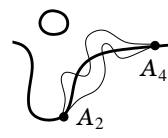


Рис. 8.4

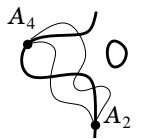


Рис. 8.5

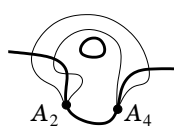


Рис. 8.6

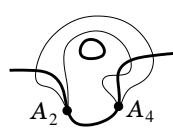


Рис. 8.7

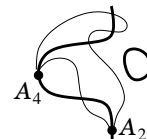


Рис. 8.8

*Доказательство.* Применить к кривым из леммы 1.4 гиперболизм  $h_{p,q,L_1}$ , где  $p$  — отличная от  $p_2$  и  $q$  точка пересечения прямой  $L_2$  с кривой  $C$ .  $\square$

### 1.3. Неособая $M$ -кубика и кватрика с тремя точками $A_2$ .

**Лемма 1.6.** Пусть  $p_1, p_2, p_3$  — точки, лежащие на нечетной ветви  $J$  неособой  $M$ -кубики  $C$ . Обозначим через  $L_1, L_2, L_3$  прямые  $(p_2p_3), (p_3p_1)$  и  $(p_1p_2)$  соответственно. Пусть  $E$  — некоторая коника, касающаяся прямых  $L_1, L_2, L_3$  в точках  $q_1, q_2, q_3$  соответственно. Предположим, что  $J$  пересекает  $E$  в шести точках, тремя из которых являются точки  $q_1, q_2, q_3$ . Тогда  $C$  расположена относительно  $E, L_1, L_2, L_3$  как на рис. 9.1 с точностью до перенумерации точек  $p_1, p_2, p_3$ , причем это расположение реализуемо алгебраически.

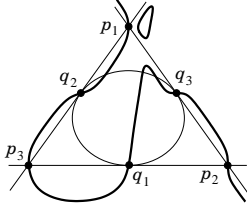


Рис. 9.1

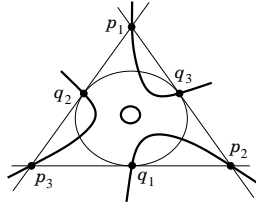


Рис. 9.2

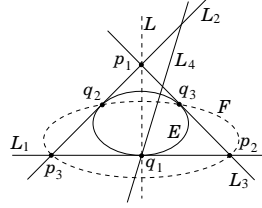


Рис. 10

*Доказательство.* Рассмотрим две коники  $E$  и  $F$ , а также пять прямых  $L_1, \dots, L_4$  и  $L$ , расположенные как на рис. 10. Пусть  $l_2l_3l_4 = 0$  и  $lf = 0$  — уравнения кривых  $L_2 \cup L_3 \cup L_4$  и  $L \cup F$  соответственно. Тогда кривая  $C = \{l_2l_3l_4 + \varepsilon lf = 0\}$  при должном выборе знака малого параметра  $\varepsilon$  расположена относительно  $L_1, L_2, L_3$  и  $E$  как на рис. 9.1

Из классификации Полотовского [10] взаимных расположений коники и кубики и теоремы Безу, примененной к вспомогательной прямой, легко следует, что невозможны никакие расположения кроме изображенных на рис. 9.1 и на рис. 9.2. Покажем, что расположение на рис. 9.2 также невозможно. Действительно, каждая из прямых  $(p_1q)$ , где  $q$  пробегает отрезок<sup>2</sup>  $[q_1p_2]$ , пересекает  $J$  в трех точках. Следовательно, овал  $O$  кубики  $C$  не может пересекать треугольник  $T_1 = [q_1p_1p_2]$ . Аналогично,  $O$  не может пересекать треугольники  $T_2 = [q_2p_2p_3]$  и  $T_3 = [q_3p_3p_1]$ . Но поскольку прямые  $(p_1q_1), (p_2q_2)$  и  $(p_3q_3)$  пересекаются в одной точке, объединение треугольников  $T_1, T_2$  и  $T_3$  совпадает с треугольником  $[p_1p_2p_3]$ .  $\square$

**Предложение 1.7.** Пусть  $C_3$  — неособая  $M$ -кубика и  $C_4$  — кватрика, имеющая три особые точки типа  $A_2$ . Предположим, что  $C_4$  максимально пересекает нечетную ветвь  $J_3$  кривой  $C_3$ . Тогда  $C_3 \cup C_4$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  как на рис. 11.1, причем это расположение реализуемо.

*Доказательство.* Применить к кривой из леммы 1.6 квадратичное преобразование  $(x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_1x_2 : x_2x_3 : x_3x_1)$ , где  $L_i = \{x_i = 0\}$ .  $\square$

<sup>2</sup>Говоря об отрезках и треугольниках, мы имеем в виду аффинную карту, соответствующую рис. 9.2.

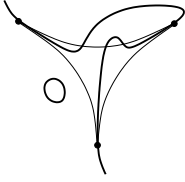


Рис. 11.1

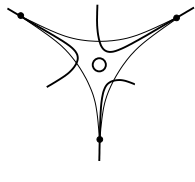


Рис. 11.2

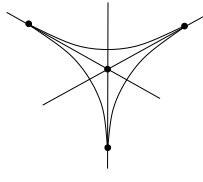


Рис. 12

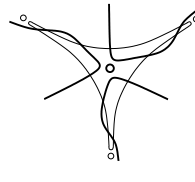


Рис. 13

*Замечание 1.8.* Касательные в особых точках вещественной трехкаспидальной кватрики пересекаются в одной точке (см. рис. 12). Нереализуемость расположения на рис. 11.2 означает, что тройная точка на рис. 12 не допускает  $M$ -сглаживания, при котором сохраняются остальные особенности. Такое сглаживание, очевидно, реализуется псевдоголоморфными кривыми (см. определение в [1, 6, 8]). Сглаживая далее особенности кватрики на рис. 11.2, можно получить псевдоголоморфную реализацию расположения  $M$ -кубики и  $M$ -кватрики, изображенного на рис. 13. Ниже, в п. 6.3 (предложение 6.8), мы докажем алгебраическую нереализуемость этого расположения.

Это дает новый пример алгебраически нереализуемого взаимного расположения на  $\mathbf{R}P^2$  двух трансверсально пересекающихся неособых вещественных псевдоголоморфных кривых. Подобные примеры имеются в [1], [8], однако рис. 13 — первый известных автору пример такого рода, в котором как построение, так и доказательство алгебраической нереализуемости получаются элементарными средствами и не требуют громоздких вычислений.

#### 1.4. Каспидальная кубика и двухкомпонентная кватрика с точкой типа $A_4$ .

**Лемма 1.9.** Пусть  $p_1, p_2, q$  — точки, лежащие на нечетной ветви  $J$  неособой  $M$ -кубики  $C$ . Обозначим через  $L_1, L_2, L_3$  прямые  $(p_1q)$ ,  $(p_2q)$  и  $(p_1p_2)$  соответственно. Предположим, что  $C$  касается прямой  $L_1$  в точке  $q$  и прямой  $L_2$  в точке  $p_2$ . Тогда  $C$  расположена относительно  $L_1, L_2, L_3$  как на рис. 14.1 или как на рис. 14.2, причем оба эти расположения реализуемы.

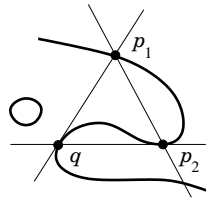


Рис. 14.1

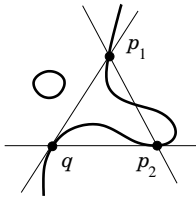


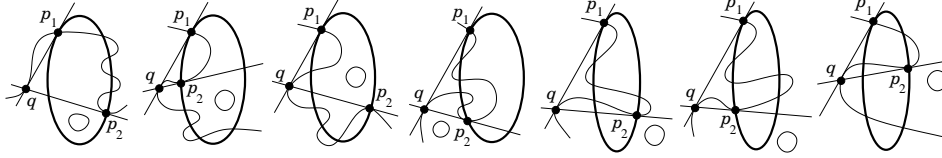
Рис. 14.2

*Доказательство.* То, что нет других расположений, очевидно. Покажем, что рис. 14.1 и 14.2 реализуемы. Пусть  $a$  — точка перегиба неособой  $M$ -кубики,  $L$  — касательная в точке  $a$ , и  $L'$  — прямая, проходящая через  $a$  и касающаяся нечетной ветви в другой точке. Пусть  $q$  — точка, близкая к  $a$ . Выбирая

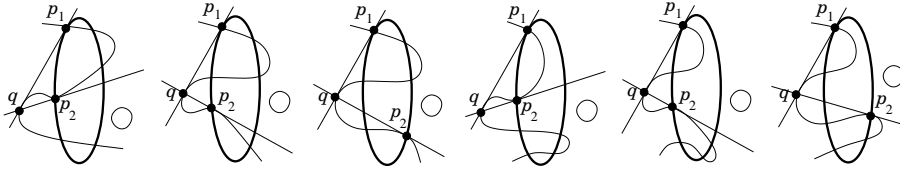


в качестве  $L_2$  касательную, близкую к  $L$  (соответственно, к  $L'$ ), получаем рис. 14.1 (соответственно, рис. 14.2).  $\square$

**Лемма 1.10.** Пусть  $C$  — неособая  $M$ -кубика,  $E$  — коника и  $L_1, L_2$  — прямые. Предположим, что  $E$  пересекает нечетную ветвь  $J$  кривой  $C$  в 6 точках, и обозначим две из этих точек через  $p_1$  и  $p_2$ . Предположим, что  $L_1$  касается  $E$  в точке  $p_1$  и касается  $J$  в точке  $q$ , а также  $L_2$  касается  $C$  в точке  $p_2$  и проходит через  $q$ . Тогда  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 15.1–15.13, причем все эти способы реализуемы.



15.1      15.2      15.3      15.4      15.5      15.6      15.7



15.8      15.9      15.10      15.11      15.12      15.13

*Доказательство.* Возможные взаимные расположения кривых  $C$ ,  $E$ , и  $L_1$  описаны в лемме 1.1. Из рис. 1.1 (соответственно, 1.2; 1.3; 1.4; 1.5) можно получить только рис. 15.1 (соответственно, 15.2–15.3; 15.4–15.6; 15.7–15.10; 15.11–15.13). Покажем, что все эти возможности реализуемы.

*Расположения на рис. 15.5–15.10, 15.12, 15.13.* В лемме 1.9 положим  $E = \{l_3^2 + \varepsilon l_1(l_3 + \delta l_2) = 0\}$ , где  $L_j = \{l_j = 0\}$  и  $|\delta| \ll |\varepsilon| \ll 1$ .

*Расположения на рис. 15.1 и 15.4* Рассмотрим две коники, расположенные относительно координатных осей как на рис. 16.1 ( $C$  получается возмущением удвоенной прямой  $ab$ ). Применяя квадратичное преобразование  $(x : y : z) \mapsto (xy : yz : zx)$ , получаем рис. 16.2, возмущение которого дает рис. 15.1 и 15.4.

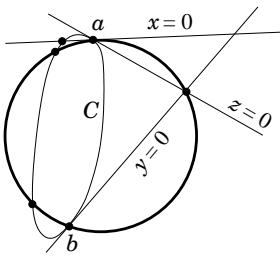


Рис. 16.1

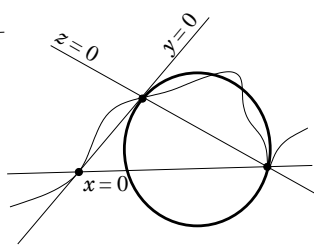


Рис. 16.2

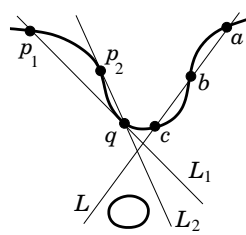
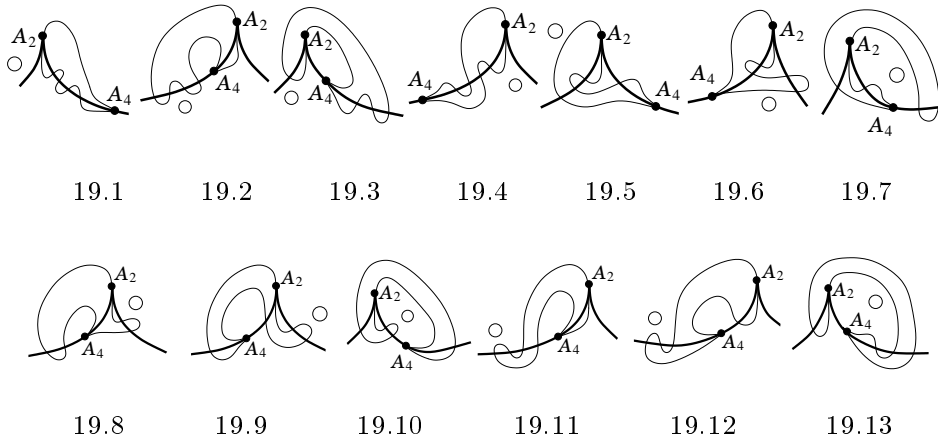


Рис. 17

*Расположение на рис. 15.2 и 15.11.* Рассмотрим  $M$ -кубику  $C$ , расположенную относительно прямых  $L$ ,  $L_1$  и  $L_2$  как показано на рис. 17. Пусть  $E$  — коника, проходящая через точки  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $a$ ,  $b$ , касающаяся прямой  $L_1$  в точке  $p_1$ . Обозначим через  $p_0$  точку перегиба на дуге  $qp_2$ , а через  $L_0$  — касательную в этой точке. Фиксируем  $C$  и  $L$  и будем непрерывно двигать точку  $q$  по дуге  $qp_0$ , непрерывно перемещая  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$  и  $E$  с сохранением условий инцидентности и касания. Тогда  $E \rightarrow L_0 \cup L$  при  $q \rightarrow p_0$ , и значит, начиная с некоторого момента, мы получим расположение на рис. 15.2. Когда точка  $q$  пройдет через точку перегиба, мы получим рис. 15.11 (при этом порядок точек вдоль  $J$  станет таким:  $a, b, c, p_1, p_2, q$ ).

*Расположение на рис. 15.3.* Фиксируем неособую  $M$ -кубику  $C$  и точку  $q$  на ее нечетной ветви  $J$ . Пусть  $L_1$  — касательная в точке  $q$ , и  $p_1$  — ее точка пересечения с  $J$ . Пусть  $L_2$  — прямая, проходящая через  $q$  и касающаяся в точке  $p_2$  той дуги  $qp_1$ , которая содержит две точки перегиба. Пусть  $a$  — точка на той дуге  $qp_2$ , которая не содержит точки  $p_1$ . Обозначим прямые  $(p_1p_2)$ ,  $(p_1a)$  и  $(p_2a)$  через  $L_3$ ,  $L_4$  и  $L_5$  соответственно. Положим  $E = \{l_1l_5 + \varepsilon l_3l_4 = 0\}$ , где  $L_j = \{l_j = 0\}$  и  $|\varepsilon| \ll 1$ .  $\square$

**Предложение 1.11.** Пусть  $C_3$  — каспидальная кубика и  $C_4$  — двухкомпонентная кватрика, имеющая особую точку типа  $A_4$ . Предположим, что особая ветвь кривой  $C_4$  максимально пересекает кривую  $C_3$ . Тогда  $C_3 \cup C_4$  расположено на  $\mathbf{RP}^2$  одним из способов, изображенных на рис. 19.1–19.13, причем все эти способы реализуемы.



*Доказательство.* Применить к кривым из леммы 1.10 гиперболизм  $h_{p,q,L_1}$ , где  $p$  — отличная от  $p_2$  точка пересечения прямой  $L_2$  с коникой  $E$ .  $\square$

### 1.5. Каспидальная кубика и двухкомпонентная кватрика с двумя точками $A_2$ .

**Лемма 1.12.** Пусть  $C$  — неособая  $M$ -кубика и  $L_1, L_2, L_3$  — прямые. Обозначим  $p_1 = L_2 \cap L_3$ ,  $p_2 = L_3 \cap L_1$ ,  $p_3 = L_1 \cap L_2$ , и пусть  $q_1, q_2, q_3$  — точки, лежащие на  $L_1, L_2, L_3$  соответственно и отличные от  $p_1, p_2, p_3$ . Пусть  $E$  — коника, проходящая через  $p_1, q_2, q_3$  и касающаяся прямой  $L_1$  в точке  $q_1$ . Предположим, что

$E$  пересекает нечетную ветвь  $J$  кривой  $C$  в 6 точках, в том числе в  $q_1, q_2, q_3$ . Предположим также, что  $J$  проходит через  $p_2, p_3$  и касается прямых  $L_2, L_3$  в точках  $q_2, q_3$ . Тогда  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 20.1–20.3 с точностью до перестановки индексов 2 и 3, причем все эти способы реализуемы.

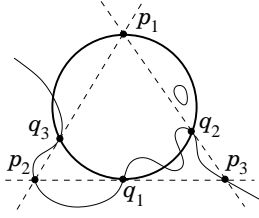


Рис. 20.1

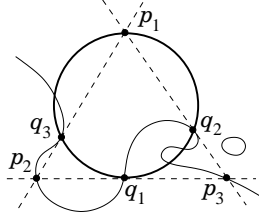


Рис. 20.2

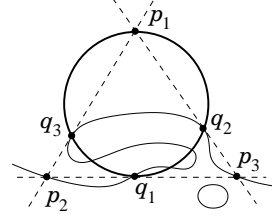


Рис. 20.3

*Доказательство.* То, что другие расположения невозможны, легко следует из классификации Полотовского [10] взаимных расположений коники и кубики и теоремы Безу, примененной к вспомогательной прямой. Покажем, что расположения на рис. 20.1–20.3 реализуемы.

*Расположения на рис. 20.1 и 20.2.* Фиксируем аффинные координаты  $x, y$ . Тогда точки  $p_1 = (10/7, 2/7)$ ,  $p_2 = (1, -1)$ ,  $p_3 = (1/25, 1/125)$ ,  $q_1 = (1/16, -1/64)$ ,  $q_2 = (0, 0)$ ,  $q_3 = (4, 8)$ , кубика  $C_0 = \{y^2 = x^3\}$ , коника  $E = \{8y^2 - 18xy + 3x^2 + y = 0\}$  и прямые  $L_1 = (p_2p_3) = \{21x + 20y = 1\}$ ,  $L_2 = (p_3p_1) = \{x - 5y = 0\}$ ,  $L_3 = (p_1p_2) = \{3x - y = -4\}$  расположены как на рис. 21. Возмущая особую точку кубики  $C_0$ , получаем рис. 20.1 и 20.2. В том, что требуемые возмущения существуют, легко убедиться непосредственно. А именно, фиксируем  $C_0, L_3, q_2, q_3, p_2$  как выше, построим  $p_3, q_1, p_1$  согласно рис. 21, и пусть  $E$  — коника, проходящая через  $p_1, p_2, q_2$  и касающаяся прямой  $L_3$  в точке  $q_3$ . Тогда  $E = \{t(5t - 1)x - (3t^2 - t - 1)y + \dots = 0\}$ . Поэтому при  $t = 1/5$  мы получаем рис. 21, при  $0 < t < 1/5$  (при  $1/5 < t < 1/4$ ) возмущение кривой  $C_0$  дает рис. 20.1 (рис. 20.2).

*Расположение на рис. 20.3.* Пусть  $L_1, L_2, L_3, p_1, p_2, p_3, q_2$  и  $q_3$  расположены требуемым образом. Фиксируем аффинную карту, соответствующую рисунку 20.3. Пусть  $F = \{f = 0\}$  — эллипс, касающийся прямых  $L_2, L_3$  в точках  $q_2, q_3$ , и пересекающий отрезок  $[p_2p_3]$  в двух точках. Выберем точку  $q_1 \in [p_2p_3]$  так, что  $L_1 \cap F \subset [q_1p_2]$  и построим эллипс  $E$  требуемым образом. Наконец, положим  $C = \{l_1f + \varepsilon l_2l_3l_4 = 0\}$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$  и  $\{l_4 = 0\}$  — прямая, проходящая через  $q_1$  и не пересекающая  $F$ .  $\square$

**Предложение 1.13.** Пусть  $C_3$  — каспидальная кубика и  $C_4$  — двухкомпонентная квартика, одна из ветвей которой имеет две особые точки типа  $A_2$ . Предположим, что особая ветвь кривой  $C_4$  максимально пересекает кривую  $C_3$ . Тогда  $C_3 \cup C_4$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 22.1–22.3, причем все эти способы реализуемы.

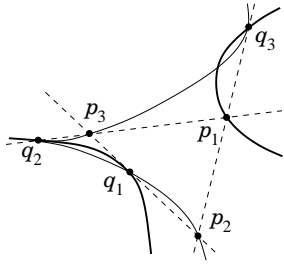


Рис. 21

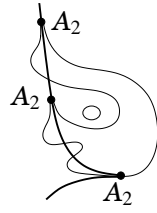


Рис. 22.1

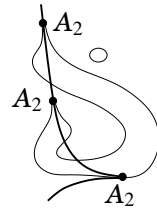


Рис. 22.2

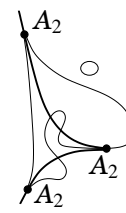


Рис. 22.3

*Доказательство.* Применить к кривым из леммы 1.12 квадратичное преобразование  $(x : y : z) \mapsto (xy : yz : zx)$  относительно координат, в которых прямые  $L_1, L_2, L_3$  служат координатными осями.  $\square$

§2. НЕКОТОРЫЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ  
КВАРТИКИ И КУБИКИ, ИМЕЮЩИХ НЕПРИВОДИМЫЕ ДВОЙНЫЕ  
ТОЧКИ С СУММОЙ ЧИСЕЛ МИЛНОРА, РАВНОЙ ЧЕТЫРЕМ

**2.1. Симметричные расположения  $M$ -кубики и двухкомпонентной квартики с двумя точками  $A_2$ .** В этом пункте мы применим способ, при помощи которого строилась кривая  $A_2|---|A_2$  в статье [7].

**Лемма 2.1.** Существуют взаимные расположения прямой  $L$  и трех коник  $C$ ,  $E$  и  $H$ , изображенные на рис. 23.1–23.4.

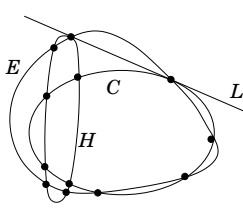


Рис. 23.1

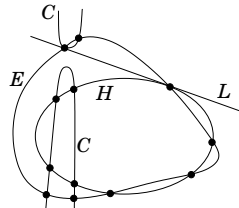


Рис. 23.2

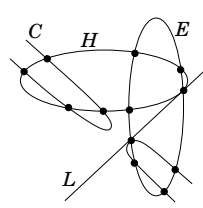


Рис. 23.3

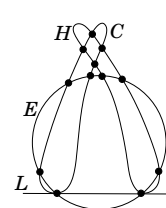


Рис. 23.4

*Доказательство.* Первые два расположения строятся как в статье [7]: в случае 23.1 надо изменить знак  $\delta$ , а в случае 23.2 поменять местами  $C$  и  $H$ . Расположения 23.3 и 23.4 строятся очевидным образом.  $\square$

**Предложение 2.2.** Пусть  $C_3$  —  $M$ -кубика и  $C_4$  — двухкомпонентная квартика, имеющая две особенности типа  $A_2$  на одной ветви, и максимально пересекающая нечетную ветвь кубики  $C_3$ . Предположим, что обе кривые симметричны относительно одной и той же оси  $L$ . Тогда  $C_3 \cup C_4 \cup L$  расположено на  $\mathbf{RP}^2$  одним из способов, изображенных на рис. 24.1–24.4, причем все эти способы реализуемы.

*Доказательство.* Применить конструкцию из [7] к рис. 23.1–23.4.  $\square$

**2.2. Неособая  $M$ -кубика и двухкомпонентная квартика с точкой  $A_4$ .**

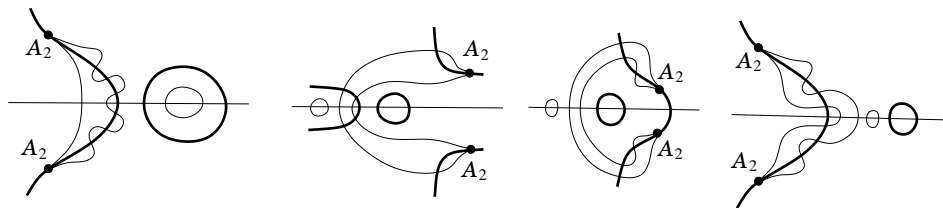


Рис. 24.1

Рис. 24.2

Рис. 24.3

Рис. 24.4

**Предложение 2.3.** Пусть  $C_3$  — неособая М-кубика и  $C_4$  — двухкомпонентная кватрика, имеющая особую точку типа  $A_4$ . Предположим, что особая ветвь кривой  $C_4$  максимально пересекает нечетную ветвь  $J_3$  кривой  $C_3$ . Тогда либо  $C_3 \cup C_4$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из двух способов, изображенных на рис. 25.1 и 25.2, либо  $C_3 \cup C_4$  реализует одно из 31 расположений, которые получаются из рис. 2.1–2.5, 8.1–8.8, 19.1–19.13 модификациями, изображенными на рис. 26.<sup>3</sup> Все эти  $2 + 31 = 33$  расположения реализуемы.

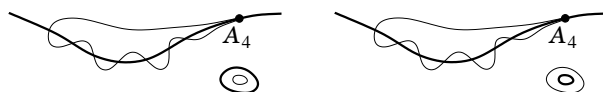


Рис. 25.1

Рис. 25.2

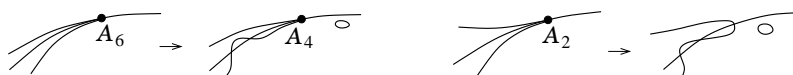
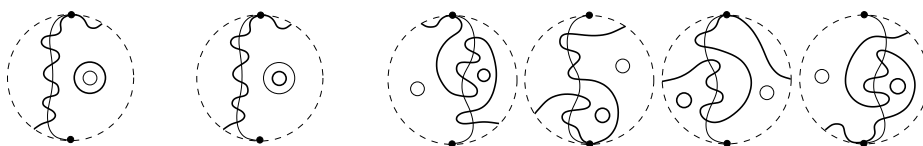


Рис. 26

**Предложение 2.4.** Пусть  $C$  и  $C'$  — две неособые М-кубики, у которых нечетные ветви  $J$  и  $J'$  имеют простое касание в точке  $p$  и трансверсально пересекаются еще в семи точках. Предположим, что  $C'$  имеет точку перегиба в точке  $p$  и пусть  $L$  — касательная к  $C'$  в этой точке. Тогда  $C \cup C' \cup L$  расположено на  $\mathbf{R}P^2$  одним из способов, изображенных на рис. 27.1–27.33, причем все эти способы реализуемы. На рис. 27.1–27.33 мы изображаем  $\mathbf{R}P^2$  в виде диска, у которого противоположные точки края отождествлены; прямая  $L$  соответствует краю диска.



27.1

27.2

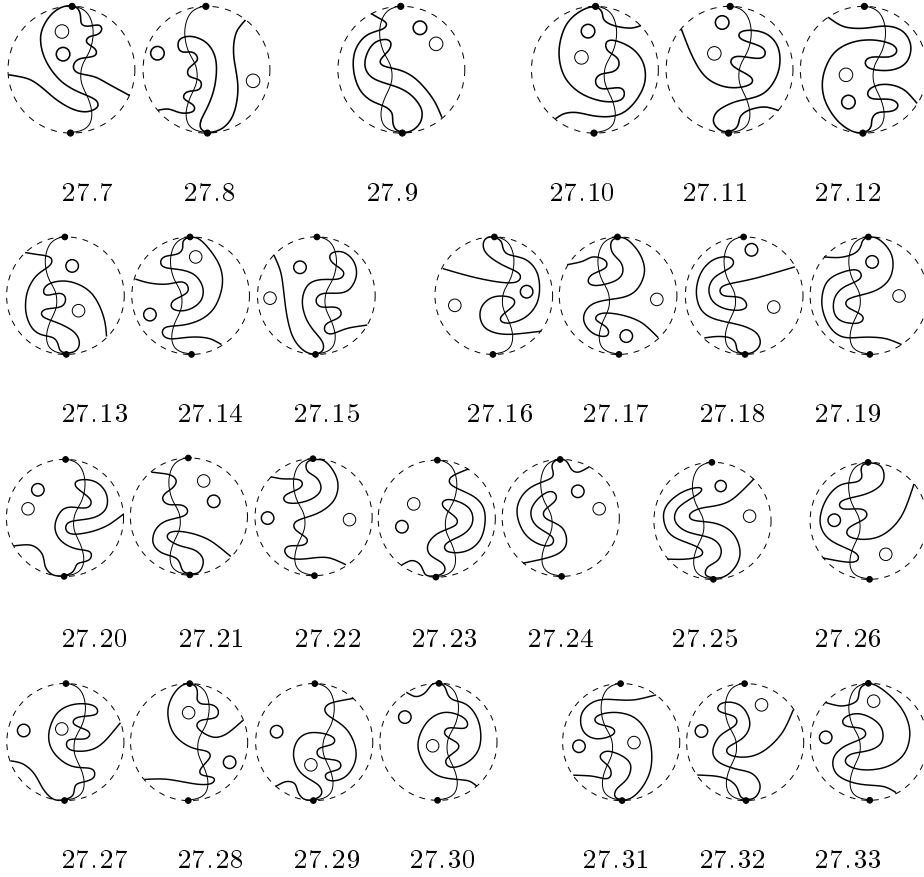
27.3

27.4

27.5

27.6

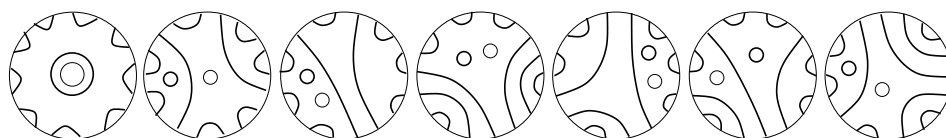
<sup>3</sup>Каждую из этих модификаций можно применить двумя способами, учитывая отражение относительно неособой локальной ветви.



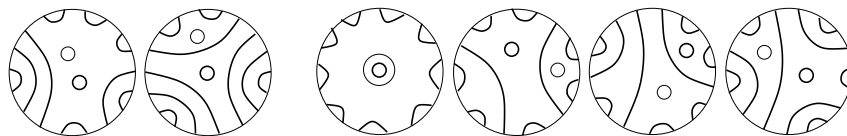
*Доказательство предложений 2.3 и 2.4.* Преобразование  $f_{C,p}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между расположениями из предложений 2.4 и 2.3. При этом рис. 27.1 и рис. 27.2 преобразуются в рис. 25.1 и рис. 25.2. Таким образом, достаточно реализовать только рис. 27.1 и 27.2. Для этого мы фиксируем  $C'$  и  $L$ , удовлетворяющие требуемым условиям, и положим  $C = \{f + \varepsilon l_1 l_2 l_3 = 0\}$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ , где  $f = 0$  — уравнение кривой  $C'$  и  $L_i = \{l_i = 0\}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — прямые, каждая из которых пересекает  $J'$  в трех точках, причем прямые  $L_1$  и  $L_2$  проходят через  $p$ .

Докажем, что в предпосылках предложения 2.4 никакие другие расположения невозможны. Полотовский [9] расклассифицировал все взаимные расположения двух  $M$ -кубик с максимально пересекающимися нечетными ветвями. Разрезая  $\mathbf{R}P^2$  вдоль нечетной ветви первой кубики, мы получаем диск, на котором расположена вторая кубика и овал первой. Все получающиеся таким образом расположения приведены на рис. 28.1–28.13 (смена ролей кубик задает соответствие  $1 \leftrightarrow 10, 2 \leftrightarrow 11, 3 \leftrightarrow 3, 4 \leftrightarrow 4, 5 \leftrightarrow 5, 6 \leftrightarrow 12, 7 \leftrightarrow 13, 8 \leftrightarrow 8, 9 \leftrightarrow 9$ ).

Все расположения, которые могли бы удовлетворять предпосылкам предложения 2.4, должны получаться из рис. 28.1–28.13 в результате замены одного из двуугольников на простое касание с последующим добавлением прямой  $L$ ,



28.1 28.2 28.3 28.4 28.5 28.6 28.7



28.8 28.9 28.10 28.11 28.12 28.13

имеющей касание 3-го порядка с краем диска и не пересекающей овалов. Сделаем это всеми способами так, чтобы  $L$  пересекала нечетные ветви обеих кубик в трех точках (с учетом кратностей). Исключая сразу конфигурации, противоречащие теореме Безу для вспомогательной прямой, проходящей через точку касания и овал одной из кубик, мы получаем рис. 27.1–27.33, а также рис. 29.1–29.13. Соответствие между рисунками следующее:

28.1	→ 27.1	28.8	→ 27.20–27.24, 29.7–29.9
28.2	→ 27.3–27.6, 29.1	28.9	→ 27.25
28.3	→ 27.7, 27.8, 29.2	28.10	→ 27.2
28.4	→ 27.9, 29.3	28.11	→ 27.27–27.30, 29.10, 29.11
28.5	→ 27.10–27.12, 29.4	28.12	→ 27.26, 29.12, 29.13
28.6	→ 27.13–27.15, 29.5	28.13	→ 27.31–27.33, 29.6
28.7	→ 27.16–27.19		



29.1 29.2 29.3 29.4 29.5 29.6



29.7 29.8 29.9 29.10 29.11 29.12 29.13

Расположения на рис. 29.3, 29.5–29.9, 29.13 противоречат теореме Безу для вспомогательной прямой  $pq$ .

Оставшиеся 6 расположений можно исключить методом, предложенным в [4]. Выберем точку  $q$  внутри овала кривой  $C'$ . Обозначим через  $\mathcal{L}_q$  пучок прямых, проходящих через  $q$ . Конфигурации 29.1, 29.2, 29.4 и 29.10–29.12 определяют расположения кривых  $C, C', L$  относительно пучка прямых  $\mathcal{L}_q$ , изображенные на 30.1–30.6 соответственно (на этих рисунках прямым из пучка  $\mathcal{L}_q$  отвечают вертикальные прямые). Соответствующие косы будут совпадать с косами, отвечающими кривым, полученным применением любой из модификаций, изображенных на рис. 31. Все они не удовлетворяют неравенству Мурасуги—Тристрама (подробности см. в [4]).

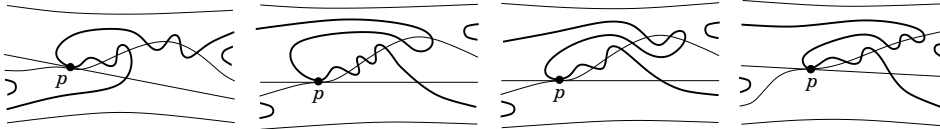


Рис. 30.1

Рис. 30.2

Рис. 30.3

Рис. 30.4

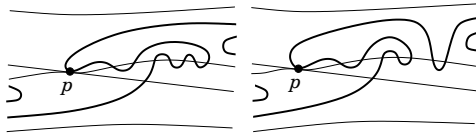


Рис. 30.5

Рис. 30.6

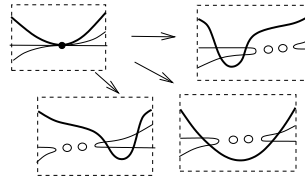


Рис. 31

□

### §3. Почти МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ КВАРТИКИ И КУБИКИ, ИМЕЮЩИХ НЕПРИВОДИМЫЕ ДВОЙНЫЕ ТОЧКИ С СУММОЙ ЧИСЕЛ МИЛНОРА, РАВНОЙ ШЕСТИ

#### 3.1. Неособая $M$ -кубика и кватерника с точками $A_4$ и $A_2$ . (Ср. с п. 1.2.)

**Лемма 3.1.** Пусть  $C$  — неособая  $M$ -кубика,  $E$  — коника,  $L_1, L_2$  — касательные к  $E$  в точках  $p_1, p_2$  соответственно, и  $q = L_1 \cap L_2$ . Предположим, что нечетная ветвь  $J$  кривой  $C$  пересекает  $E$  в шести точках, в том числе в  $p_1$ . Предположим также, что  $J$  касается  $L_1$  в точке  $q$  и пересекает  $L_2$  еще в двух точках, отличных от  $p_2$ . Тогда либо расположение  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2$  на  $\mathbf{R}P^2$  такое, как на рис. 32, либо оно получается из рис. 4.1–4.8 возмущением кубики возле точки  $p_2$ , причем все эти способы реализуемы.

*Доказательство.* Пусть  $J$  — нечетная ветвь  $M$ -кубики  $C$  и  $L = (p_1 r) = \{l = 0\}$  — прямая, близкая к касательной в точке перегиба и пересекающая  $J$  в трех точках. Тогда несложно построить прямые  $L_j = \{l_j = 0\}$ ,  $j = 1, 2$ , как на рис. 33. Добавляя конику  $E = \{l^2 = \varepsilon l_1 l_2\}$ ,  $|\varepsilon| \ll 1$ , получаем рис. 32.



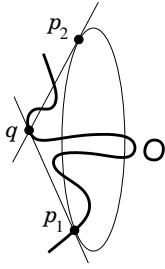


Рис. 32

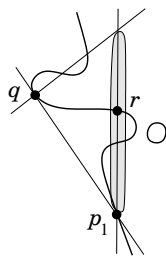


Рис. 33

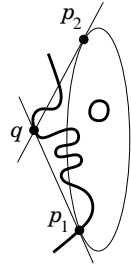


Рис. 34.1



Рис. 34.2

Применяя теорему Безу для вспомогательных прямых и лемму 1.1, несложно исключить все расположения кроме рис. 32, возмущений рис. 4.1–4.8, а также рис. 34.1 и 34.2. Чтобы запретить последние два случая, мы как и в доказательстве предложений 2.3 и 2.4 применим неравенство Мурасуги—Тристрама. Расположение кривой  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2$  относительно пучка прямых с центром внутри овала кубики имеет вид  $\times_2^2 \times_5^5 (\times_5 \times_4 \times_5^2) \times_3^2 (\times_4^2 \times_3 \times_4)$  в случае рис. 34.1 и  $\times_4^2 \supset_5 C_3 \times_2^3 \times_3^2 (\times_3 \times_4 \times_3^2) \times_5^2 (\times_4^2 \times_5 \times_4)$  в случае рис. 34.2 (описание кодировки см. в [4], [6] или [7]; фрагменты в скобках отвечают точкам  $p_1$  и  $q$ ). Далее см. [4] или [7].  $\square$

**Предложение 3.2.** Пусть  $C_3$  — неособая М-кубика и  $C_4$  — кватерника, имеющая две особые точки типов  $A_4$  и  $A_2$ . Предположим, что  $C_4$  почти максимально пересекает нечетную ветвь  $J_3$  кривой  $C_3$ , имея максимальное касание в  $A_2$  и почти максимальное касание в  $A_4$ . Тогда либо расположение  $C_3 \cup C_4$  на  $\mathbf{R}P^2$  такое, как на рис. 35.1–35.8, либо оно получается из рис. 8.1–8.8 модификацией, изображенной на рис. 36, причем все эти способы реализуемы.

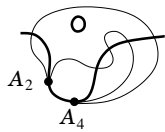


Рис. 35.1

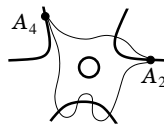


Рис. 35.2

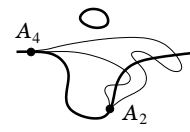


Рис. 35.3

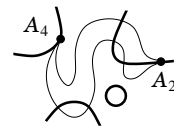


Рис. 35.4

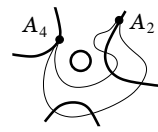


Рис. 35.5

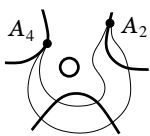


Рис. 35.6

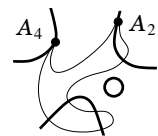


Рис. 35.7

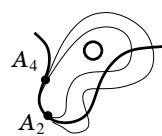


Рис. 35.8

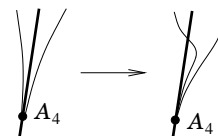


Рис. 36

*Доказательство.* Применим к расположениям из леммы 3.1 гиперболизм  $h_{p,q,L_1}$ , где  $p$  — одна из двух отличных от  $q$  точек пересечения прямой  $L_2$  с кривой  $C$  (другую точку обозначим через  $p'$ ). В случае, когда дополнение к  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2$

содержит криволинейный треугольник, примыкающий к отрезку  $[p'p_2]$  мы, очевидно, получаем возмущения кривых рис. 8.1–8.8.

В остальных случаях соответствие рисунков следующее (штрих означает возмущение)  $4.1' \rightarrow 35.1-2$ ;  $4.2' \rightarrow 8.2'$ ;  $4.3' \rightarrow 8.3'$ ;  $4.4' \rightarrow 35.3$ ;  $4.5' \rightarrow 35.4$ ;  $4.6' \rightarrow 35.5$ ;  $4.7' \rightarrow 35.6$ ;  $4.8' \rightarrow 35.7$ ;  $32 \rightarrow 35.8$ .  $\square$

### 3.2. Почти максимальные расположения неособой $M$ -кубики и кватерники с тремя точками $A_2$ . (Ср. с п. 1.3.)

**Лемма 3.3.** Пусть  $p_1, p_2, p_3$  — точки, лежащие на нечетной ветви  $J$  неособой  $M$ -кубики  $C$ . Обозначим через  $L_1, L_2, L_3$  прямые  $(p_2p_3), (p_3p_1)$  и  $(p_1p_2)$  соответственно. Пусть  $E$  — некоторая коника, касающаяся прямых  $L_1, L_2, L_3$  в точках  $q_1, q_2, q_3$  соответственно. Предположим, что  $J$  не проходит через  $q_1$  и пересекает  $E$  в шести точках, двумя из которых являются точки  $q_2, q_3$ . Тогда (точностью до перенумерации точек  $p_1, p_2, p_3$ ) для расположения кубики  $C$  относительно  $E, L_1, L_2, L_3$  имеет место одна из следующих возможностей: (а) оно такое как на рис. 37.1–37.4; (б) оно получено из рис. 9.1 возмущением кубики возле одной из точек  $q_1, q_2, q_3$ ; (в) оно получено из рис. 9.2 сдвигом кубики вправо возле точки  $q_1$ ; (г) оно получено из расположений, отвечающих случаям (а)–(в) применением (возможно, неоднократным) модификации, изображенной на рис. 38. Расположения, отвечающие случаям (а)–(в) реализуемы.

*Замечание.* Вопрос о реализуемости в случае (г) мы не изучали.

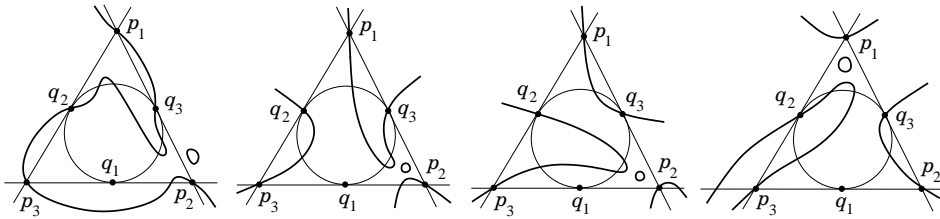


Рис. 37.1

Рис. 37.2

Рис. 37.3

Рис. 37.4

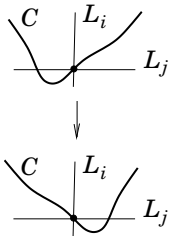


Рис. 38

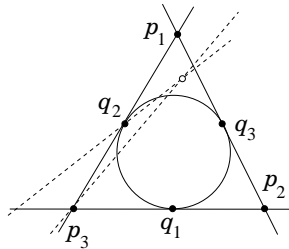


Рис. 39.2

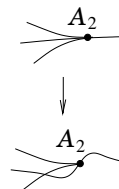


Рис. 40

*Доказательство.* С помощью теоремы Безу для вспомогательной прямой и классификации Полотовского [10] взаимных расположений кубики и коники, несложно убедиться в том, что все другие расположения невозможны кроме,

быть может, того, которое получается из рис. 9.2 сдвигом кубики влево возле точки  $q_1$ . Последнее расположение исключается так же, как и в доказательстве леммы 1.6. Покажем, что расположения на рис. 37.1–37.4 реализуемы. Пусть  $L_j = \{x_j = 0\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , и  $E = \{e = 0\}$ , где  $e = \sum x_j^2 - 2 \sum_{j < k} x_j x_k$ .

*Расположение на рис. 37.1.*  $C = \{f x_3 + \delta x_2^2 (x_1 - x_3) = 0\}$ , где  $f = x_2 x_3 - \varepsilon x_1 (x_1 - \frac{1}{2} x_2 - x_3)$  и  $0 \ll \delta \ll \varepsilon \ll 1$ .

*Расположение на рис. 37.2.*  $C = \{(l_1 + \delta x_2) f = \eta x_1^2 l_2\}$ , где  $f = x_2 x_3 + \varepsilon x_1 l_2$ ,  $l_2 = x_1 - x_2 - x_3$ ,  $\{l_1 = 0\}$  — проходящая через  $p_1$  касательная к конике  $\{f = 0\}$  и  $|\eta| \ll |\delta| \ll \varepsilon \ll 1$ .

*Расположение на рис. 37.3.*  $C = \{x_3(x_3 - x_1)(x_1 - \varepsilon x_2) = \delta x_2(x_3 + x_1)(x_2 - x_1)\}$ , где  $|\delta| \ll \varepsilon \ll 1$ .

*Расположение на рис. 37.4.*  $C = \{x_3 l_1 l_2 = \varepsilon x_1 x_2 (x_1 + x_2 - x_3)\}$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$  и  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 0$  — уравнения пунктирных прямых на рис. 39.

Наконец, покажем, что на рис. 9.2 кубикю можно сдвинуть вправо возле точки  $q_1$ . Действительно, в качестве новой кубики можно взять малое возмущение объединения прямых  $(p_1 q'_1)$ ,  $(p_2 q_2)$  и  $(p_3 q_3)$ , где  $q'_1 \in ]q_1, p_2[$ .  $\square$

**Предложение 3.4.** Пусть  $C_3$  — неособая М-кубика и  $C_4$  — кватерника, имеющая три особые точки типа  $A_2$ . Предположим, что  $C_4$  почти максимально пересекает нечетную ветвь  $J_3$  кривой  $C_3$ . Тогда либо расположение  $C_3 \cup C_4$  на  $\mathbf{R}P^2$  такое, как на рис. 41.1–41.5, либо оно получается из рис. 11.1 модификацией, изображенной на рис. 40, причем все эти способы реализуемы.

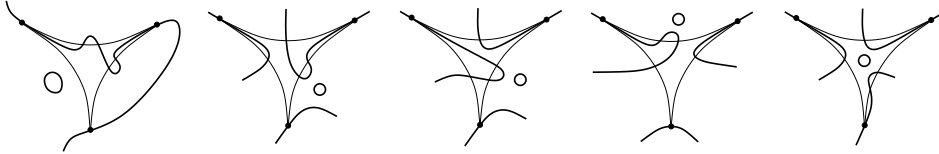


Рис. 41.1    Рис. 41.2    Рис. 41.3    Рис. 41.4    Рис. 41.5

*Доказательство.* Применить к кривым из леммы 3.3 квадратичное преобразование  $(x : y : z) \mapsto (xy : yz : zx)$  относительно координат, в которых прямые  $L_1, L_2, L_3$  служат координатными осями. При этом рис. 37.1–37.4 дадут рис. 41.1–41.4 соответственно, возмущение рисунка 9.2 (см. (в) в лемме 3.3) даст рис. 41.5. Модификация на рис. 38 не меняет изотопический тип кривой  $C_3 \cup C_4$ .  $\square$

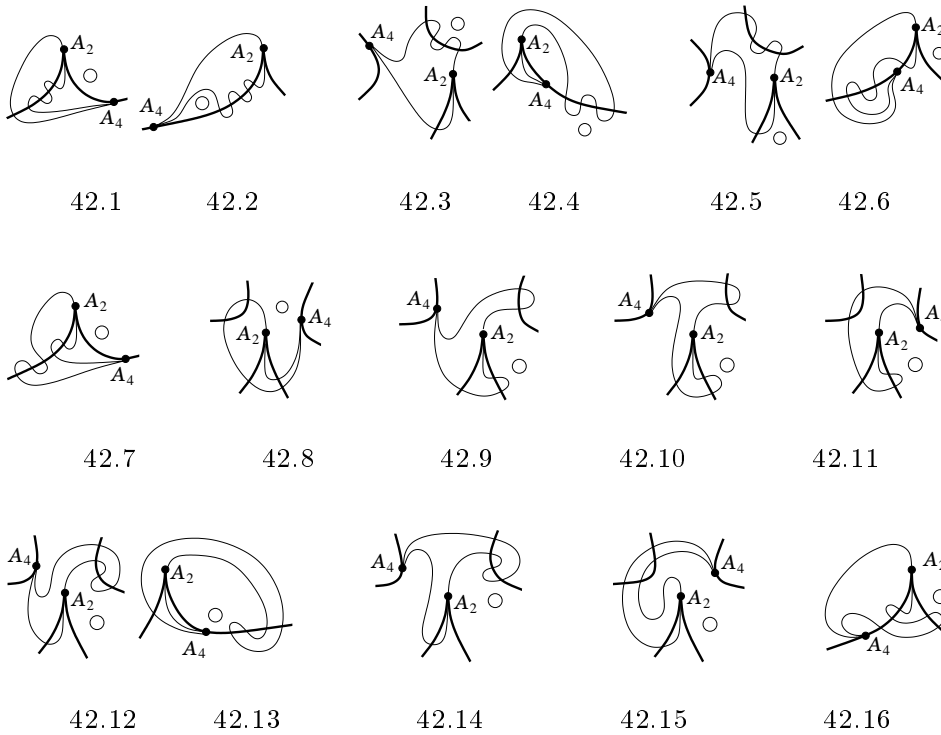
**3.3. Почти максимальные расположения каспидальной кубики и двухкомпонентной кватерники с точкой  $A_4$ .** (Ср. с п. 1.4.)

**Лемма 3.5.** Пусть  $C$  — неособая М-кубика,  $E$  — коника, и  $L_1, L_2$  — прямые. Предположим, что  $E$  пересекает нечетную ветвь  $J$  кривой  $C$  в 6 точках, обозначим одну из этих точек через  $p_1$ , пусть  $p_2$  — некоторая точка на  $J$ , но не на  $E$ . Предположим, что  $L_1$  касается  $E$  в точке  $p_1$  и касается  $J$  в точке  $q$ . Предположим также, что  $L_2$  касается  $C$  в точке  $p_2$ , проходит через  $q$  и пересекает  $E$  в двух вещественных точках. Тогда либо расположение  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2$  на  $\mathbf{R}P^2$  получается из рис. 32 поворотом прямой  $L_2$  вокруг  $q$  по часовой стрелке

до первого касания с  $J$ , либо оно получается из рис. 15.1–15.13 возмущением коники возле точки  $p_2$ , причем все эти способы реализуемы.

*Доказательство.* Применяя теорему Безу для вспомогательных прямых и лемму 1.1, несложно исключить все расположения кроме тех, которые перечислены в лемме 3.5, а также тех, из которых вращением прямой  $L_2$  вокруг  $q$  получались бы рис. 34.1–34.2. Нереализуемость последних двух случаев доказана в лемме 3.1.

**Предложение 3.6.** Пусть  $C_3$  — каспидальная кубика и  $C_4$  — двухкомпонентная кватрика, имеющая особую точку типа  $A_4$ . Предположим, что особая ветвь кривой  $C_4$  почти максимально пересекает кривую  $C_3$ , имея максимальное касание в  $A_2$  и почти максимальное касание в  $A_4$ . Тогда либо расположение  $C_3 \cup C_4$  на  $\mathbf{R}P^2$  такое, как на рис. 42.1–42.16, либо оно получается из рис. 19.1–19.13 модификацией, изображенной на рис. 36, причем все эти способы реализуемы.



*Доказательство.* Применим к расположениям из леммы 3.5 гиперболизм  $h_{p,q,L_1}$ , где  $p$  — одна из точек пересечения прямой  $L_2$  с коникой  $E$  (другую точку обозначим через  $p'$ ). В случае, когда дополнение к  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2$  содержит криволинейный треугольник, примыкающий к отрезку  $[p'p_2]$ , мы, очевидно, получаем возмущения кривых рис. 19.1–19.13.

В остальных случаях соответствие рисунков следующее (штрих означает возмущение) 15.1'  $\rightarrow$  42.1–2; 15.2'  $\rightarrow$  42.3–4; 15.3'  $\rightarrow$  42.5–6; 15.4'  $\rightarrow$  42.7; 15.5'  $\rightarrow$  19.5';

15.6'  $\rightarrow$  19.6'; 15.7'  $\rightarrow$  42.8; 15.8'  $\rightarrow$  42.9; 15.9'  $\rightarrow$  42.10; 15.10'  $\rightarrow$  42.11; 15.11'  $\rightarrow$  42.12–13; 15.12'  $\rightarrow$  42.14; 15.13'  $\rightarrow$  42.15; 32  $\rightarrow$  42.16.  $\square$

**3.4. Каспидальная кубика и двухкомпонентная кватрика с двумя точками  $A_2$ : немаксимальное касание в каспе кубики.** (Ср. с п. 1.5.)

**Лемма 3.7.** Пусть  $C$  — неособая  $M$ -кубика и  $L_1, L_2, L_3$  — прямые. Обозначим  $p_1 = L_2 \cap L_3, p_2 = L_3 \cap L_1, p_3 = L_1 \cap L_2$ , и пусть  $q_1, q_2, q_3$  — точки, лежащие на  $L_1, L_2, L_3$  соответственно и отличные от  $p_1, p_2, p_3$ . Пусть  $E$  — коника, проходящая через  $p_1, q_2, q_3$  и касающаяся прямой  $L_1$  в точке  $q_1$ . Предположим, что  $E$  пересекает нечетную ветвь  $J$  кривой  $C$  в 6 точках, в том числе в  $q_2, q_3$ . Предположим также, что  $J$  проходит через  $p_2, p_3$ , не проходит через  $q_1$  и касается прямых  $L_2, L_3$  в точках  $q_2, q_3$ . Тогда (с точностью до перестановки индексов 2 и 3) либо расположение  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$  на  $\mathbf{R}P^2$  такое, как на рис. 43.1–43.3, либо оно получается из рис. 20.1–20.3 возмущением кубики возле точки  $q_1$ , причем все эти способы реализуемы.

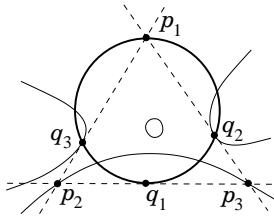


Рис. 43.1

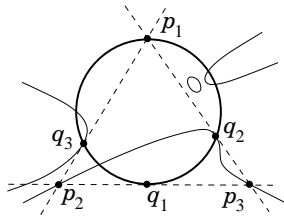


Рис. 43.2

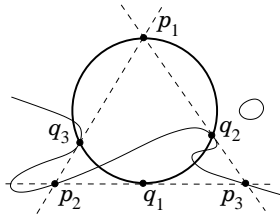


Рис. 43.3

*Доказательство.* Из классификации Полотовского [10] взаимных расположений коники и кубики и теоремы Безу, примененной к вспомогательной прямой, легко следует, что невозможны никакие расположения кроме тех, которые перечислены в лемме и тех, которые изображены на рис. 44.1 и на рис. 44.2. Чтобы запретить последние два случая, мы как и в доказательстве предложений 2.3, 2.4 и леммы 3.1 применим неравенство Мурасуги—Тристрама. Расположение кривой  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$  относительно пучка прямых с центром внутри овала кубики имеет вид

$$(\times_5 \times_6 \times_5)(\times_5^2 \times_6 \times_5) \times_4^2 (\times_2^2) \supset_3 (\times_2 \times_3 \times_2) \subset_4 \times_3 \times_4 (\times_5 \times_6 \times_5) \times_6 (\times_5^2 \times_6 \times_5) \quad [\text{p.44.1}],$$

$$(\times_5 \times_6 \times_5)(\times_5^2 \times_6 \times_5)(\times_2^2) \supset_3 (\times_2 \times_3 \times_2) (\times_3 \times_4 \times_3) \times_4 \subset_4 \times_5^3 \times_4 (\times_3^2 \times_4 \times_3) \quad [\text{p.44.2}].$$

Фрагменты в скобках отвечают точкам  $p_1, q_2, q_1, p_3, p_2, q_3$  в этом порядке. Далее см. [4] или [7].

Теперь покажем, что расположения на рис. 43.1–43.3 реализуемы.

*Расположение на рис. 43.1.* Фиксируем аффинные координаты  $x, y$  и положим  $C = \{y^2 = x(x+1)(x+2)\}$  и  $p_1 = (x_0, 0), x_0 > 0$ . Пусть  $L_2, L_3$  — касательные к  $J$ , проведенные через  $p_1$ . Определим  $q_2, q_3, p_2, p_3, L_1$  согласно условиям леммы, и пусть  $q_1$  — точка пересечения прямых  $L_1$  и  $\{y = 0\}$ . Тогда гипербола  $E$ , проходящая через  $p_1, q_2, q_3$  и касающаяся прямой  $L_1$  в точке  $q_1$ , расположена требуемым образом.

*Расположение на рис. 43.2.* Можно проверить, что точки  $p_1 = (3:6:4)$ ,  $p_2 = (36:75:64)$ ,  $p_3 = (0:0:1)$ ,  $q_1 = (25:12:108)$ ,  $q_2 = (1:2:1)$ ,  $q_3 = (2:5:8)$ , прямые  $L_1 = \{12y = 25x\}$ ,  $L_2 = \{y = 2x\}$ ,  $L_3 = \{16y = 28x + 3z\}$ , кубика  $C = \{y^2z = x(x+1)^2\}$  и коника  $E = \{12332x^2 - 9336xy + 1584y^2 - 1121xz + 564yz - 3z^2 = 0\}$  расположены требуемым образом (кубика  $C$  имеет в  $(-1:0:1)$  простую двойную точку с мнимыми касательными; возмущение этой точки дает овал).

*Расположение на рис. 43.3.* Фиксируем  $C$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  как на рис. 43.3. Тогда, если выбрать точку  $q_1$  на отрезке  $[p_2p_3]$  достаточно близко к  $p_3$ , то коника  $E$ , проходящая через  $p_1, q_2, q_3$  и касающаяся прямой  $L_1$  в точке  $q_1$ , расположена требуемым образом.  $\square$

**Предложение 3.8.** Пусть  $C_3$  — каспидальная кубика и  $C_4$  — двухкомпонентная кватрика, имеющая две особые точки типа  $A_2$ . Предположим, что особая ветвь кривой  $C_4$  почти максимально пересекает кривую  $C_3$ , имея максимальное касание в особых точках кривой  $C_4$  и почти максимальное касание в особой точке кривой  $C_3$ . Тогда либо расположение  $C_3 \cup C_4$  на  $\mathbf{RP}^2$  такое, как на рис. 45.1–45.2, либо оно получается из рис. 22.1–22.3 модификацией, изображенной на рис. 40, причем все эти способы реализуемы.

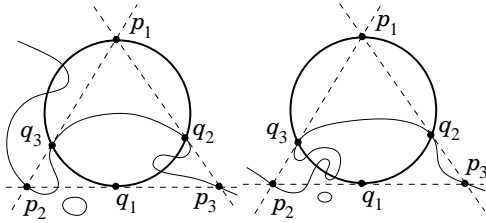


Рис. 44.1

Рис. 44.2

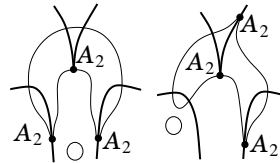


Рис. 45.1 Рис. 45.2

*Доказательство.* Применить к кривым из леммы 3.7 квадратичное преобразование  $(x : y : z) \mapsto (xy : yz : zx)$  относительно координат, в которых прямые  $L_1, L_2, L_3$  служат координатными осями. При этом рис. 43.3 даст рис. 22.2, к которому применена модификация на рис. 40.  $\square$

**3.5. Каспидальная кубика и двухкомпонентная кватрика с двумя точками  $A_2$ : немаксимальное касание в одном из каспов кватрики.** (Ср. с пп. 1.5, 3.4.)

**Лемма 3.9.** Пусть  $C$  — неособая  $M$ -кубика и  $L_1, L_2, L_3$  — прямые. Обозначим  $p_1 = L_2 \cap L_3$ ,  $p_2 = L_3 \cap L_1$ ,  $p_3 = L_1 \cap L_2$ , и пусть  $q_1, q_2, q_3$  — точки, лежащие на  $L_1, L_2, L_3$  соответственно и отличные от  $p_1, p_2, p_3$ . Пусть  $E$  — коника, проходящая через  $p_1, q_2, q_3$  и касающаяся прямой  $L_1$  в точке  $q_1$ . Предположим, что  $E$  пересекает нечетную ветвь  $J$  кривой  $C$  в 6 точках, в том числе в  $q_1, q_2$ . Предположим также, что  $J$  проходит через  $p_2, p_3$ , касается прямой  $L_2$  в точке  $q_2$  и касается прямой  $L_3$  в точке, отличной от точек  $p_1, p_2, q_3$ . Тогда либо расположение  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$  на  $\mathbf{RP}^2$  такое, как на рис. 46.1–46.4, либо оно получается из рис. 20.1–20.3 возмущением кубики возле точки  $q_3$  или  $q_2$ . Все эти способы реализуемы кроме, быть может, рис. 46.3–46.4.

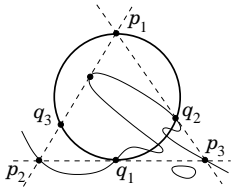


Рис. 46.1

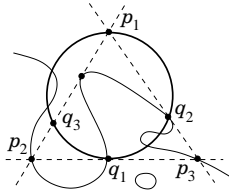


Рис. 46.2

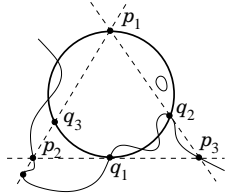


Рис. 46.3

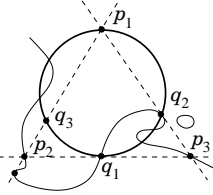


Рис. 46.4

*Доказательство.* Из классификации Полотовского [10] взаимных расположений коники и кубики и теоремы Безу, примененной к вспомогательной прямой, легко следует, что невозможны никакие расположения кроме тех, которые перечислены в лемме и еще шести расположений, для запрета которых мы как и в доказательстве предложений 2.3, 2.4 и лемм 3.1, 3.7, применим неравенство Мурасуги—Тристрама. Расположения кривой  $C \cup E \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$  относительно пучка прямых с центром внутри овала кубики имеют вид

$$\begin{aligned}
 & (\times_5 \times_6 \times_5) \times_4 (\times_5^2) \times_4^3 \times_5 (\times_5^2 \times_4 \times_5) (\times_6^2 \times_5 \times_6) (\times_4 \times_5 \times_4); \\
 & \times_5 \times_4 (\times_2 \times_3 \times_2) \times_4 (\times_3^2 \times_2 \times_3) \times_3^2 (\times_4^2) (\times_5 \times_6 \times_5) (\times_4^2 \times_3 \times_4) \supset_5 (\times_2 \times_3 \times_2) \subset_4; \\
 & (\times_2 \times_3 \times_2) \times_4 (\times_3^2 \times_2 \times_3) \times_4^2 (\times_5 \times_6 \times_5) (\times_4^2 \times_5 \times_4) \times_4 \times_3^2 \times_4 \supset_3 (\times_2 \times_3 \times_2) \subset_3; \\
 & (\times_3 \times_4 \times_3) (\times_3^2 \times_2 \times_3) \times_3^4 (\times_4^2 \times_3 \times_4) (\times_4 \times_5 \times_4) (\times_4^2) \times_3 (\times_2 \times_3 \times_2); \\
 & (\times_5 \times_6 \times_5) \times_4 (\times_3^2) (\times_2 \times_3 \times_2) (\times_4^2 \times_3 \times_4) \times_4^2 (\times_5^2 \times_6 \times_5) \times_5^2 \supset_4 (\times_3 \times_4 \times_3) \subset_4; \\
 & (\times_5 \times_6 \times_5) \times_4 (\times_3^2) (\times_2 \times_3 \times_2) (\times_4^2 \times_3 \times_4) (\times_5^2 \times_6 \times_5) \times_5 \times_4^3 \supset_5 (\times_3 \times_4 \times_3) \subset_4.
 \end{aligned}$$

Фрагменты в скобках отвечают точкам  $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2$  и точке касания  $L_3$  и  $C$  (не обязательно в этом порядке). Далее см. [4] или [7].

Теперь покажем, что расположения на рис. 46.1–46.2 реализуемы.

*Расположение на рис. 46.1.* Рассмотрим коники  $E, F$  и прямые  $L_1, L_2, L_3$ , расположенные как на рис. 47.1 ( $p_1 = E \cap L_2 \cap L_3$ ;  $p_2 = L_1 \cap L_3$ ;  $p_3 = L_1 \cap L_2$ ;  $q_2 = E \cap F \cap L_2$ ;  $E$  касается  $L_1$  в  $q_1$ ;  $F$  касается  $L_j$  в  $q_j$  при  $j = 1, 2$ ). Положим  $C = \{l_1 f + \varepsilon l_3 l_4 l_5\}$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$ ,  $F = \{f = 0\}$ ,  $L_j = \{l_j = 0\}$ , причем  $L_3 = (q_1 q_2)$ ,  $L_2 = (q_2 q_3)$ .

*Расположение на рис. 46.2.* См. рис. 47.2.  $\square$

**Предложение 3.10.** Пусть  $C_3$  — каспидальная кубика и  $C_4$  — двухкомпонентная кватерника, имеющая две особые точки типа  $A_2$ . Предположим, что особая ветвь кривой  $C_4$  почти максимально пересекает кривую  $C_3$ , имея максимальное касание в особой точке кривой  $C_3$  и в одной из особых точек кривой  $C_4$ , а также имея почти максимальное касание в другой особой точке кривой  $C_4$ . Тогда либо расположение  $C_3 \cup C_4$  на  $\mathbf{R}P^2$  такое, как на рис. 48.1–48.2, либо оно получается из рис. 22.1–22.3 модификацией, изображенной на рис. 40, причем все эти способы реализуемы.

*Доказательство.* Применить к кривым из леммы 3.9 квадратичное преобразование  $(x : y : z) \mapsto (xy : yz : zx)$  относительно координат, в которых прямые  $L_1, L_2, L_3$  служат координатными осями. При этом рис. 46.3–46.4 дадут рис. 22.1–22.2, к которым применена модификация на рис. 40.  $\square$

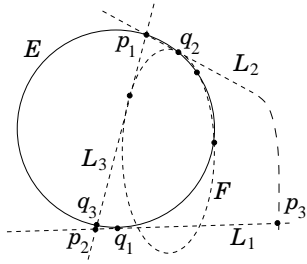


Рис. 47.1

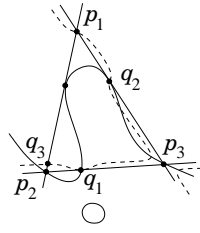


Рис. 47.2

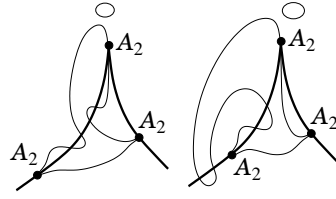


Рис. 48.1

Рис. 48.2

§4. ДРУГИЕ ПОСТРОЕНИЯ

4.1. Особая кватрика, коника и прямая.

**Предложение 4.1.** (а). Существует кватрика с особой точкой  $A_6$ , расположенная относительно прямой  $L$  и коники  $C$  как на рис. 49.

(б). Существует кватрика с особыми точками  $A_4$  и  $A_2$ , расположенная относительно прямой и коники как на рис. 50.

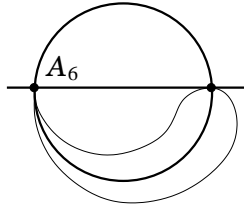


Рис. 49

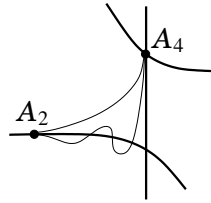


Рис. 50

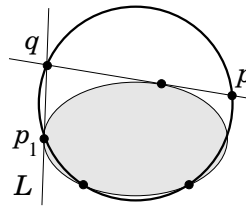


Рис. 51

*Доказательство.* (а).  $f_{C,p}$  преобразует кватрику в окружность, а  $L$  и  $C$  — в две касающиеся ее прямые.

(б).  $h_{p,q,L}$  преобразует рис. 51 в рис. 50.  $\square$

**4.2.  $M$ -кубика, полученная возмущением простой и двойной прямых, и  $M$ -кватрика.** Предположим, что каждая из прямых  $L_1 = \{l_1 = 0\}$ ,  $L_2 = \{l_2 = 0\}$  пересекает в четырех точках  $O_4$  — овал  $M$ -кватрики  $C_4$ . С точностью до изотопии все такие расположения приведены на рис. 52.1–52.11 (это легко следует из классификации Полотовского [9, 10] взаимных расположений кватрики и коники).

*Первое построение* (см. рис. 53). Фиксируем точку  $p \in L_1$  вне  $C_4$ . Пусть  $\{l_3 = 0\}$  и  $\{l_4 = 0\}$  — прямые, пересекающие  $L_1$  достаточно близко от  $p$ . Положим  $C_2 = \{c_2 = 0\}$ , где  $c_2 = l_1 l_2 + \varepsilon l_3 l_4$  и  $|\varepsilon| \ll 1$ , и пусть  $C_3 = \{c_2 l_1 + \delta l_2^3\}$ , где  $|\delta| \ll |\varepsilon|$ . В зависимости от знака параметра  $\varepsilon$  получаются два а priori различных расположения кривых  $C_4$  и  $C_3$ .

*Второе построение* (см. рис. 54). Среди компонент множества  $\mathbf{R}P^2 \setminus (C_4 \cup L_1 \cup L_2)$  выберем двуугольник  $D$ , ограниченный дугой овала  $O_4$  и отрезком прямой  $L_1$ . Легко проверить, что во всех случаях можно выбрать третью



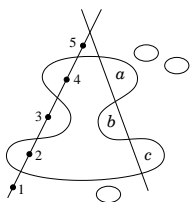


Рис. 52.1

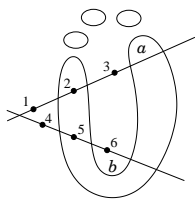


Рис. 52.2

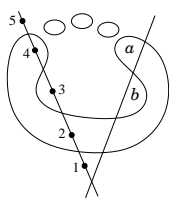


Рис. 52.3

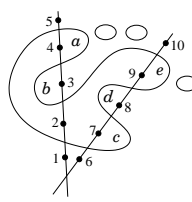


Рис. 52.4

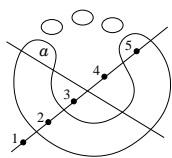


Рис. 52.5

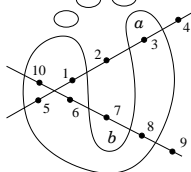


Рис. 52.6

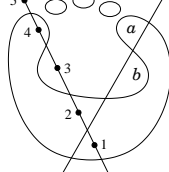


Рис. 52.7

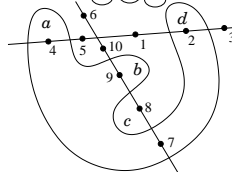


Рис. 52.8

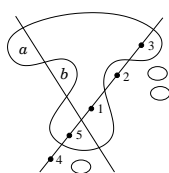


Рис. 52.9

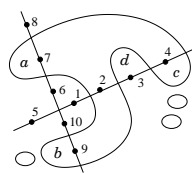


Рис. 52.10

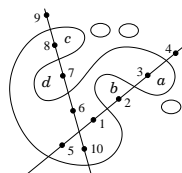


Рис. 52.11

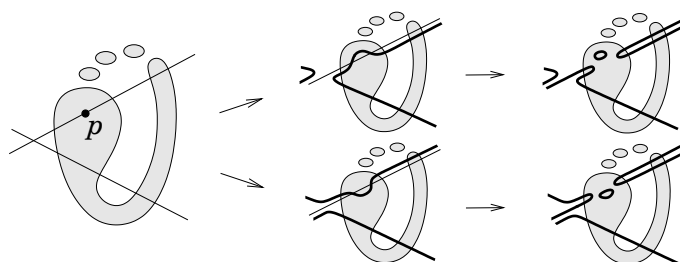


Рис. 53

точку пересечения овала  $O_4$  с прямой  $L_1$  таким образом, что при вращении прямой  $L_1$  вокруг нее  $D$  исчезает, превращаясь в точку касания (обозначим ее через  $p$ ), и при этом все остальные точки пересечения не исчезают и не переставляются.

Пусть  $\{l_0 = 0\}$  — прямая, пересекающая  $L_1$  в точке  $p$ . Положим  $C_2 = \{c_2 = 0\}$ , где  $c_2 = l_1 l_2 + \varepsilon l_0^2$  и  $|\varepsilon| \ll 1$ , и пусть  $C'_3 = \{c_3 l_1 + \delta l_0^3\}$ , где  $|\delta| \ll |\varepsilon|$ . В зависимости от знаков параметров  $\varepsilon$  и  $\delta$  получаются четыре а priori различных расположения кривых  $C_4$  и  $C'_3$ . Кривая  $C'_3$  имеет в точке  $p$  особенность типа  $A_2$  (обыкновенный касп) и она имеет максимальное пересечение с овалом  $O_4$ . Эту особенность мы возьмем как изображено на рис. 26 (справа). Получен-

ную  $M$ -кубику обозначим через  $C_3$ . Данную модификацию можно применить двумя способами (учитывая отражение относительно  $O_4$ ). Мы будем применять только тот способ, при котором все четыре точки пересечения  $O_4$  с  $J_3$ , образовавшиеся из точки касания  $C_2$  с  $L_1$ , расположены на  $J_3$  в том же порядке, что и на  $O_4$  (другой способ сводится к первому построению).

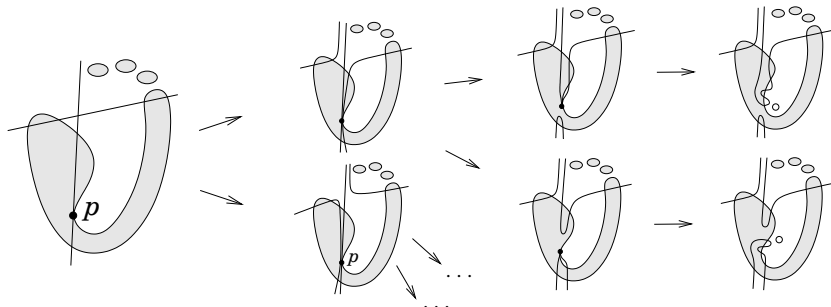


Рис. 54

**4.3. Еще одно построение.** Рассмотрим конику  $C$  и прямые  $L_0, L_1, L_2$  ( $L_i = \{l_i = 0\}$ ), расположенные относительно координатных осей  $x = 0, y = 0, z = 0$  как на рис. 55.1. Тогда при  $|\delta| \ll |\varepsilon| \ll 1$  коника  $E = \{l_0^2 + \varepsilon l_1 l_2 + \delta l_1^2 = 0\}$  расположена как изображено пунктиром на рис. 55.1. Применяя преобразование  $(x : y : z) \mapsto (yz : zx : xy)$ , получаем рис. 55.2, из которого, возмущая особенности, последовательно получаем рис. 55.3 и рис. 55.4.

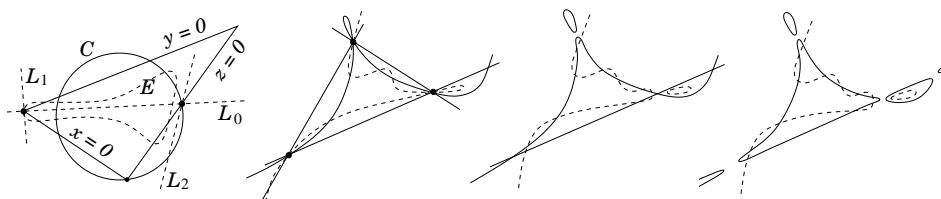


Рис. 55.1

Рис. 55.2

Рис. 55.3

Рис. 55.4

### §5. ИТОГОВЫЙ СПИСОК ВСЕХ ПОСТРОЕННЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ $M$ -КУБИКИ И $M$ -КВАРТИКИ С МАКСИМАЛЬНО ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОВАЛОМ И НЕЧЕТНОЙ ВЕТВЬЮ

В этом параграфе мы приведем список всех взаимных расположений  $M$ -кубики и  $M$ -квартики с максимально пересекающимися овалом и нечетной ветвью, построенных в пп. 4.2–4.3, и тех расположений которые получаются возмущением особых кривых, построенных в §§1–3 и в п. 4.1. Этот список включает в себя все расположения, построенные другими способами в статьях [11], [2], [3] (заметим, что расположения под номерами 5, 10 и 11 в статье [3] нарисованы неверно).

**5.1. Применяемые возмущения.** В случае расположений, изображенных на рис. 27.1–27.33, мы применяем возмущения, изображенные на рис. 31.

В случае максимального касания гладкой ветви с ветвью, имеющей неприводимую двойную точку, мы применяем (последовательно) возмущения, изображенные на рис. 26 и рис. 56.1 (подробности см. [7]).

В случае расположений на рис. 49 и рис. 50 мы применяем возмущения, изображенные на рис. 26 и рис. 56.1, а на последнем этапе — рис. 56.2.

В случае не максимального касания гладкой ветви с ветвью, имеющей точку  $A_4$ , мы применяем возмущение, изображенное на рис. 56.3.

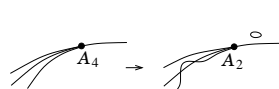


Рис. 56.1



Рис. 56.2

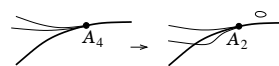


Рис. 56.3

**5.2. Кодировка взаимного расположения пересекающихся ветвей.** Для обозначения изотопического типа взаимного расположения пересекающихся ветвей  $J_3$  и  $O_4$  (нечетной ветви кубики и овала квартики соответственно) мы применяем кодировку, предложенную Полотовским. А именно, пусть  $\Gamma_\infty$  — псевдо-прямая (т.е. простая замкнутая кривая в  $\mathbf{R}P^2$ , не гомологичная нулю), не пересекающаяся с  $O_4$  и пересекающаяся с  $J_3$  в минимально возможном числе точек (во всех рассматриваемых случаях это число равно 1 или 3). Точки из  $\Gamma_\infty \cap J_3$  мы будем называть *проходами через бесконечность*.

Занумеруем точки множества  $O_4 \cap J_3$  символами<sup>4</sup>  $1, \dots, 9, a, b, c$ , в порядке их расположения вдоль  $O_4$ , причем так, чтобы точка 1 являлась концом некоторой компоненты множества  $J_3 \setminus (O_4 \cap J_3)$ , пересекающей  $\Gamma_\infty$ , а точка 2 не являлась. Расположение множества  $O_4 \cup J_3$  на  $\mathbf{R}P^2$  мы будем кодировать словом, состоящим из символов  $1, \dots, c$ , стоящих в том порядке, в котором соответствующие точки расположены на  $J_3$ . Из всех возможных слов, кодирующих один и тот же изотопический тип (если нет симметрий, то таких слов  $2k$ , где  $k$  — число проходов через бесконечность), мы будем всегда выбирать наименьшее относительно лексикографического порядка. Для удобства мы будем обозначать проходы через бесконечность косой чертой ”/”.

В итоговом списке сначала идут расположения с одним проходом через бесконечность, затем с тремя. И те и другие упорядочены лексикографически (без учета символа ”/”). Расположения с изотопными  $J_3 \cup O_4$  идут в произвольном порядке. Точки  $1, \dots, c$  на рисунках не помечены, но всегда подразумевается, что они расположены на  $O_4$  по часовой стрелке, причем точка 1 всегда самая левая. В случае одного прохода через бесконечность не изображаются свободные овалы ”на бесконечности” (т.е. в компоненте дополнения к  $J_3 \cup O_4$ , замыкание которой неориентировано).

<sup>4</sup>В программировании символами  $a, b, c, d, e, f$  принято обозначать шестнадцатичные цифры  $10, \dots, 15$ .

**5.3. Кодировка способов построения.** Под каждым расположением указаны способы его построения. Это либо номер рисунка, на котором изображена возмущаемая кривая, либо ссылка на статью,<sup>5</sup> в которой это расположение построено, либо одно из выражений  $2+3$ ,  $2+4$ ,  $x^y$ , смысл которых объяснен ниже.

$2+3$ . (см. [11]).  $C_4 = \{c_2^2 = \varepsilon f\}$ , где  $\{c_2 = 0\}$  — коника, пересекающая  $J_3$  в шести точках.

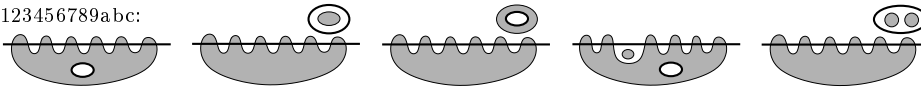
$2+4$ . Кубика  $C_3$  получается как малое возмущение кривой  $C_2 \cup L$ , где  $C_2$  — некоторая коника, пересекающая  $O_4$  в восьми точках, и  $L$  — прямая, выбранная как указано в [11]. Эти построения были сделаны Г.М. Полотовским.

$x^y$ , где  $x = 1, \dots, 11$ ,  $y = 1, 2, \dots$ . Первое построение из п. 4.2, в котором в качестве точки  $p$  выбрана точка, помеченная номером  $y$  на рис. 52. $x$ . Например,  $2^2$  обозначает построение, изображенное на рис. 53.

$x^y$ , где  $x = 1, \dots, 11$ ,  $y = a, b, \dots$ . Второе построение из п. 4.2, в котором в качестве двуугольника  $D$  выбран двуугольник, помеченный буквой  $y$  на рис. 52. $x$ . Например,  $8^c$  обозначает построение, изображенное на рис. 54.

#### 5.4. Итоговый список.

123456789abc:



2.1; 19.1

24.1; 25.1; 27.1

25.2; 27.2

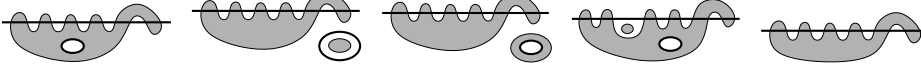
2.2; 8.1;

49; [11; 7.1]

[11; 8.c]

19.2,3; 22.1; 42.2

123456789cba:



2.1; 19.1

24.1; 25.1

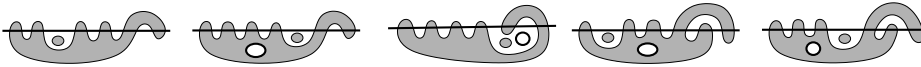
$1^c$ ; 25.2

$1^a$ ; 19.12

2.3; 19.1

12345678ba9c:

1234567abc98:



8.8; 19.2; 22.1

8.1; 19.11;

2.5; 19.3

$1^2$ ; 19.8

$1^4$ ; 19.9

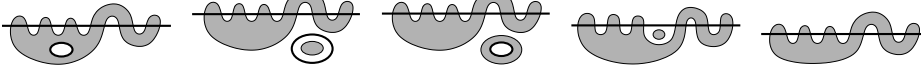
42.2

27.8; 22.1; 42.2

[3;3]

[3;7]

1234567cb89a:



2.1; 19.1

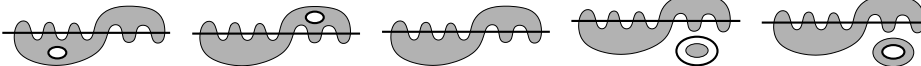
25.1; 27.1; 49

25.2; 27.2

8.5

2.3; 8.4; 19.4

1234567cba98:



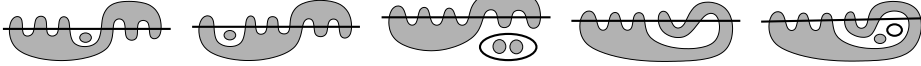
2.1; 19.1

2.1; 19.4

8.4

25.1

25.2



$1^b$ ; 8.5; 19.9

$1^b$ ; 19.8

50

8.3; 19.5

8.6

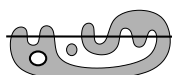
<sup>5</sup>[3;n] означает рис. 5.n в статье [3].

123456ba789c:	123456ba987c:			123458769abc:
$4^2$ ; 19.10; [11; 7.2]	8.3	$4^b$ ; 8.6; 19.10	19.5	2.2; 8.1; 19.2,3 22.1
123458769cba:	12345876ba9c:	1234589abc76:		
$4^c$ ; 8.1; 19.11 22.1	2.5; 19.3	8.2; 19.8	$1^c 9^a$ ; 19.6	$1^a$ ; 42.16
1234589cba76:		12345a9678bc:	12345a9876bc:	
$1^1 9^4$ ; 8.2; 19.6,8; 27.21; [11;10.1], [2;2]	$1^5$ ; 42.16; [2;4]	8.2; 19.6; 41.1	8.2; 41.1	19.6
12345c789ab6:		12345c987ab6:	12345c9ab876:	12345cb6789a:
8.3,5; 19.9;	$4^a 11^c$ ; 19.5	$4^5 11^4$ ; 8.3,5; 19.5,9; 27.11	$4^d$ ; 8.5; 19.9	49
		12345cb67a98:		12345cb89a76:
2.1; 19.4	8.4; 24.4	$2^a$ ; 2.1; 27.3; 19.4	2.3; 8.4; 24.4; 27.29; 19.4	$4^d$ ; 19.8
12345cba9678:			123476589cba:	
2.1; 19.4	2.3; 8.4; 19.1	49	$4^e$ ; 19.12	8.8; 19.2; 22.1
123478965abc:		123478965cba:		1234789ab65c:
$10^a$ ; 2.2; 8.1; 19.2,3; 22.2	11.1; 22.3; 35.3; 42.7	$10^b$ ; 19.12; 27.26	$7^5$ ; 8.8; 11.1; 22.2,3; 19.2; 27.13,20	$4^a$ ; 2.2; 19.13
	1234985cb67a:	123498765abc:		
8.7; 35.8	$4^1$	2.2; 8.1; 19.2,3 22.2	11.1; 35.3	22.3; 42.7
123498765cba:			1234987ab65c:	
19.12	8.8; 11.1; 19.2; 22.2; 27.27	$7^a$ ; 22.3; 27.5	$3^a$ ; 2.2; 19.13	8.7; 35.8

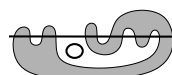
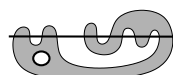
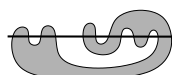
12349ab8567c:


 $2^5 8^a$ ; 27.22; 35.1;  
42.4,6; [11; 7.4]

12349ab8765c:

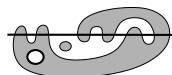


2,2; 19.13; 27.28


 $2^b$ ; 27.4;  
8.7; 42.4
 $8^d$ 

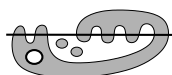
42.1

1234ba98567c:

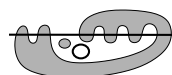


35.1;42.4,6;[11; 7.11]

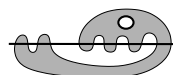
1234ba98765c:



2,2; 19.13

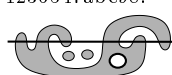


8.7; 42.4



42.1

1236547abc98:

 $4^7$ ; 19.9

1236547cb89a:

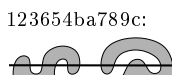
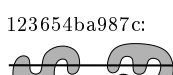


8.5

1236549ab87c:



8.6

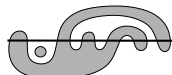
 $3^2$ ; 19.10; [11;7.12] $3^b$ ; 8.6; 19.10

1236789abc54:



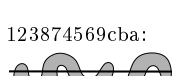
27.8

1236789cba54:

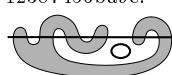


27.15

12367cb8549a:

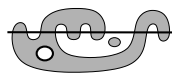
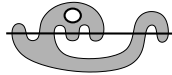
 $6^9 8^6$ ; [2;1]8.1; 19.11  
22.2
 $2+4$ ;  $10^8 11^9$ ; 11.1; 22.3;  
27.23,24; 35.3; 42.7; [3;9]

12387456ba9c:

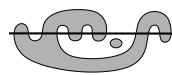


2,5; 19.3

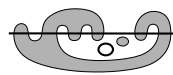
123876549cba:

8.1; 19.11  
22.210<sup>b</sup>11<sup>a</sup>; 27.3,6
 $10^b 11^a$ ; 27.3,6  
22.3; 42.7

11.1; 27.29,30;

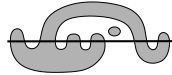
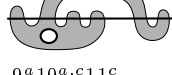

 11.1; 27.29,30;  
35.3

12387654ba9c:

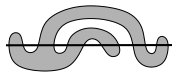


2,5; 19.3

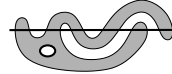
12389abc7456:

8.8; 11.1;  
19.11,12; 22.29<sup>a</sup>10<sup>a,c</sup>11<sup>c</sup>
 $9^a 10^{a,c} 11^c$   
22.3;

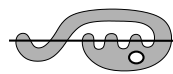
12389cba7456:


 $9^4 10^{5,8} 11^4$ ; 8.8; 11.1;  
19.11,12; 22.2,3; 27.9; [3;4]

123a9458bc76:

 $2^2$ ; [3;12]

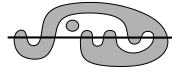
123c56789ab4:

 $8^a$ ; 27.8; 42.1

123c5678ba94:

 $6^a 8^d$ 

123c76589ab4:

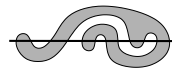


42.6

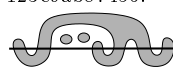
123c7658ba94:

 $2+4$ ;  $8^3$ ; 27.15

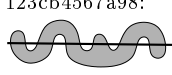
123c9ab87456:


 $6^4 8^3$ ; 27.17;  
42.1,6; [3;2]

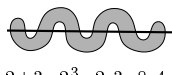
123cb4567a98:


 $4^8$ ; 8.8;  
19.11,12; 22.1

123cb4567a98:

2,3; 8.4;  
19.1,4

123cb45a9678:


 $2+3$ ;  $2^3$ ; 2.3; 8.4;  
19.4; 24.4; 27.23; 49

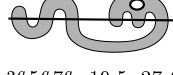
123cb478965a:


 $2+3$ ;  $3^5 5^1 7^5$ ; 8.3,5;  
19.5; 27.18,24

123cb498765a:



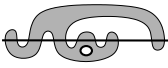
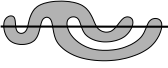
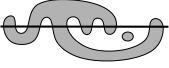
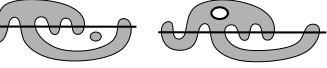


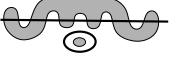
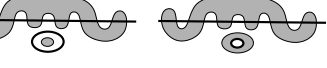
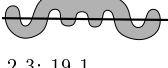
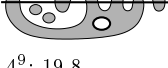

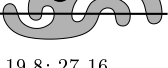

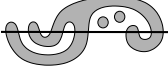
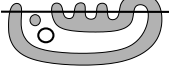
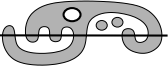

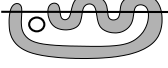
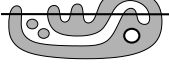
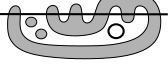


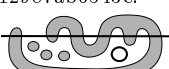
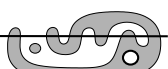
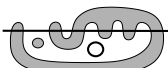
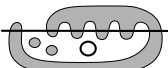
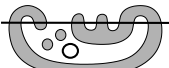

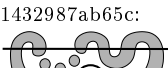
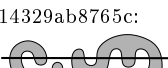
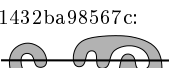
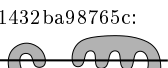
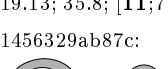
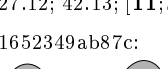
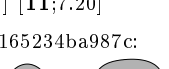
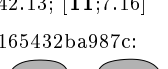
8.3,5; 27.30;

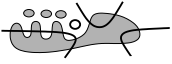
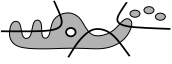





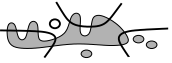
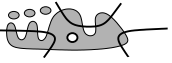





















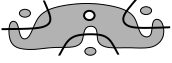



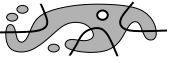


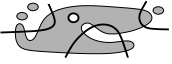
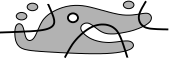

3<sup>a</sup>5<sup>a</sup>7<sup>a</sup>; 19.5; 27.6;
 $3^a 5^a 7^a$ ; 19.5; 27.6;  
8.2; 27.29,30

123cb6789a54:


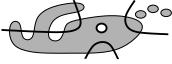









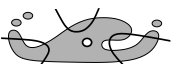


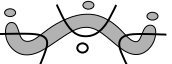


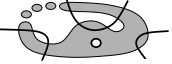

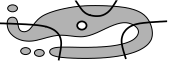











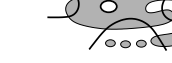







41.1

	123cb67a9854:		123cb874569a:		123cb876549a:		1254389cba76:
19.6; 27.3,6	8.2; 19.6; 27.23,24; 41.1	$4^{10}11^9$ ; 8.2; 19.6; 27.20	8.2; 27.27	$4^e 11^a$ ; 19.6; 27.5			
	123cba567894:		123cba765894:		123cba987456:		1254389cba76:
8.3; 27.27	19.5; 27.5	8.3; 19.5; 27.20	24.1; 49	55.4			
	12543c789ab6:		12543c987ab6:		1256743c9ab8:		1256789ab43c:
2.3; 19.1	$1^3$ ; 8.8; 19.11,12; 22.1; 27.15; 42.2	$4^9$ ; 19.8	19.8	19.8; 27.16			
	1276589ab43c:		1278963cb45a:		1278965ab43c:		12789ab6345c:
19.9	19.9; 27.32	$4^6$ ; 42.16	2.4	$4^c$ ; 42.16			
	1298763cb45a:		12987ab6345c:		12987ab6543c:		129ab876345c:
2.4	$2+3$ ; $2^1 2^4 5^1 6^4 6^9$ ; 27.25	$2+3$ ; 2.4; [11; 8.b]	$4^4$ ; 19.7; [11; 7.3]	$4^b$ ; 2.4; 19.7			
	129ab876543c:		12ba9876345c:		1432789ab65c:		1432985cb67a:
$2^a 5^a 6^a$	2.4	$3^4$ ; 19.7; [11; 7.15]	$3^b$ ; 2.4; 19.7	19.7; 27.14; [11; 7.13]			
	1432987ab65c:		14329ab8567c:		1432ba98567c:		1432ba98765c:
2.4; 19.7; 27.7	19.7; [11; 7.19]	2.4; 19.7	$4^3$ ; 2.5; 8.7; 19.13; 35.8; [11; 7.5]	$2+3$ ; $3^1$			
	1456329ab87c:		1652349ab87c:		165234ba987c:		165432ba987c:
$2+3$ ; $3^3$ ; 2.5; 8.7; 19.13; 35.8; [11; 7.9]	27.31; 35.1; 42.13; [11; 7.10]	2.5; 8.7; 19.13; 27.12; 42.13; [11; 7.7]	35.1; 42.13; [11; 7.20]	2.5; 8.7; 19.13; 42.13; [11; 7.16]			
	1456329ab87c:		1652349ab87c:		165234ba987c:		165432ba987c:
19.10; 27.33; [11; 7.14]	19.10; [11; 7.18]	$2+3$ ; $2^6$ ; 8.6; 24.3; 27.19; [11; 7.5]	8.6; 24.3; 19.10; 27.10; [11; 7.8]	8.6; 24.3; 19.10; [11; 7.17]			

1234567c/98/ba:  7 <sup>b</sup> , 27.7	123456/b87c/9a:  8 <sup>b</sup>	12345c/76/9ab8:  4 <sup>d</sup> 11 <sup>b</sup> ; 27.10,11; 35.4; 41.2; 42.10	12345c/76/b89a:  4 <sup>d</sup> 11 <sup>b</sup> ; 27.7; 42.9	12345c/76/ba98:  1 <sup>b</sup> 9 <sup>b</sup> ; 35.4; 42.9	
	12345c/9678/ba:  1 <sup>b</sup> 9 <sup>b</sup> 10 <sup>d</sup> ; 41.2; 42.10;	12345c/9876/ba:  2+4; 7 <sup>3</sup> 3 <sup>b</sup> 7 <sup>b</sup> ; 35.5; 27.10–12; 41.4; 42.11	12345c/9876/ba:  4 <sup>b</sup> 10 <sup>d</sup> 11 <sup>d</sup> ; 27.4 35.5; 41.4; 42.11;	12345cba/76/98:  7 <sup>a</sup> ; 27.28	12345cba/76/98:  8 <sup>c</sup>
1234765c/98/ba:  7 <sup>4</sup> ; 27.14	1234/78/5abc96:  2+4; 8 <sup>9</sup> 8 <sup>a</sup>	1234/78/5c9ab6:  2+4; 4 <sup>4</sup> 11 <sup>3</sup> ; 42.8;	1234/78/5cba96:  4 <sup>b</sup> 11 <sup>d</sup> ; 42.8;	1234/78/5cba96:  6 <sup>a</sup> 8 <sup>d</sup>	
	1234/789a/5cb6:  8 <sup>c</sup>	1234/789a/5cb6:  4 <sup>a</sup> 11 <sup>c</sup> ; 42.15	123478/bc/965a:  24.2; 35.6	123478/bc/965a:  5 <sup>2</sup> 7 <sup>1</sup> 8 <sup>b</sup>	1234/7a98/5cb6:  2 <sup>a</sup> 5 <sup>a</sup> 6 <sup>a</sup> ; 27.26; 35.6; 42.15
	1234/7abc98/56:  4 <sup>3</sup> 11 <sup>2</sup> ; 27.13 42.15	1234/7cb89a/56:  4 <sup>2</sup> 10 <sup>2</sup> 11 <sup>1</sup> ; 27.22; 42.11; [2;6]	1234/7cb89a/56:  10 <sup>c</sup> 11 <sup>c</sup>	1234/965abc/78:  35.5; 41.4;	1234/965abc/78:  9 <sup>a</sup> 10 <sup>a</sup> 10 <sup>c</sup>
1234/965abc/78:  41.3; 45.2	1234/965cba/78:  27.13; 41.3; 45.2	1234/987a/5cb6:  10 <sup>b</sup> 11 <sup>a</sup> ; 27.26	1234/987a/5cb6:  24.2	1234/9ab87c/56:  35.4, 41.2	
1234/9abc/5678:  35.2; 11.5; 42.3,5	1234/9abc/5876:  1 <sup>a</sup> ; 27.22; 35.2; 11.5; 42.3,5,12	1234/9abc/5876:  1 <sup>c</sup> 9 <sup>a</sup> ; 42.14	1234/9abc/5876:  35.7; 42.3,5	1234/9cba/5876:  4 <sup>c</sup> ; 27.31; 35.2; 11.5; 42.12	
1234/9cba/7658:  27.4; 35.7 42.3	1234/9cba/7658:  4 <sup>e</sup> 11 <sup>a</sup> ; 27.28; 42.14	1234/ba789c/56:  1 <sup>4</sup> 9 <sup>1</sup> 10 <sup>2</sup> ; 42.10; [2;5]	1234/ba789c/56:  1 <sup>2</sup> 9 <sup>3</sup> ; 42.9;	1234/ba9c/5876:  1 <sup>3</sup> 9 <sup>2</sup> ; 27.17; 35.7; 42.5,12,14	



123654/b87c/9a:  2+4; 8 <sup>8</sup>	12367854/bc/9a:  8 <sup>7</sup>	1236789c/54/ba:  11 <sup>b</sup> ; 27.21; [3;8]	123874/ba9c/56:  9 <sup>2</sup> 10 <sup>3,6</sup> ; 27.25; 41.3; 45.2	123874/bc/569a:  10 <sup>7</sup> 11 <sup>10</sup> ; [2;3]
1238769c/54/ba:  10 <sup>9</sup> 11 <sup>8</sup> ; 27.16	12389a74/bc/56:  2+3; 9 <sup>3</sup> 10 <sup>4</sup> 10 <sup>7</sup> ; [3;1]	12389c/54/ba76:  9 <sup>5</sup> 10 <sup>9</sup> ; [2;10]	12389c/5674/ba:  10 <sup>10</sup> 11 <sup>7</sup> ; 27.9; 41.3; 45.2	123a9874/bc/56:  9 <sup>b</sup> 10 <sup>d</sup>
123c/54/78ba96:  27.17	123c/54/b8769a:  4 <sup>9</sup> 11 <sup>8</sup> ; 27.14 42.9;	123c/5674/b89a:  2+4; 4 <sup>8</sup> 11 <sup>7</sup> ; 27.12; 35.7; 42.12, 14;	123c/569874/ba:  4 <sup>7</sup> 11 <sup>6</sup> ; 27.32, 33; 42.10; [2;7]	123c/5ab4/9678:  24.2
123c/765894/ba:  27.18, 19; 35.4 41.2	123c/945876/ba:  10 <sup>3</sup> 11 <sup>2</sup> ; 27.18, 19; 35.5; 41.4	123c/965478/ba:  2+4; 3 <sup>2</sup> 7 <sup>2</sup> ; 27.31-33; 42.11;	123c/9678/b45a:  2+3; 3 <sup>3</sup> 2 <sup>3</sup> 5 <sup>4</sup> 6 <sup>2</sup> 7 <sup>3</sup> ; 3 <sup>a</sup> 7 <sup>a</sup> ; 27.9; 35.6; 42.15	123c98/54/7ab6:  11 <sup>5</sup> ; [2;8]
123c/98/b4567a:  2+4; 6 <sup>2</sup> 8 <sup>1</sup> 3 <sup>b</sup> 7 <sup>b</sup> ; 27.21; 42.8;	123c/98/b4765a:  2+4; 3 <sup>4</sup> 5 <sup>5</sup> 7 <sup>4</sup> ; 27.16; 42.8;	123c/98/b6547a:  2+4; 8 <sup>5</sup>	123c9ab4/78/56:  2+4; 10 <sup>4</sup> 11 <sup>3</sup>	123cba94/78/56:  10 <sup>d</sup> 11 <sup>d</sup>
12/56/389abc74:  2+4; 8 <sup>4</sup> 8 <sup>b</sup>	12/56/389cba74:  2+4; 8 <sup>10</sup> ; [3;6]	12/56/3a98bc74:  2+4; 6 <sup>3</sup> 8 <sup>2</sup>	12/56ba789c/34:  2+4; 6 <sup>8</sup> 8 <sup>7</sup>	12/56ba987c/34:  6 <sup>b</sup> 8 <sup>c</sup>
12/56ba9c/3874:  2+4; 6 <sup>7</sup> 8 <sup>8</sup>	12/56bc/389a74:  2+4; 2 <sup>5</sup> 5 <sup>2</sup> 6 <sup>5</sup> 6 <sup>6,8</sup> 8 <sup>4,9</sup> ; [2;9]	12/56bc/3a9874:  2 <sup>b</sup> 6 <sup>b</sup> 8 <sup>c</sup>	 8 <sup>2</sup>	
1258943c/76/ba:  10 <sup>1</sup> ; 27.25	12/58bc76/3a94:  2+4; 2 <sup>2</sup> 5 <sup>5</sup> 6 <sup>1</sup> 6 <sup>3</sup> 6 <sup>10</sup> ; [2;11]	1278/b43c/965a:  2+3; 2 <sup>6</sup> 5 <sup>3</sup> 6 <sup>7</sup>		

## §6. НЕКОТОРЫЕ ЗАПРЕТЫ

**6.1. Случай вложенных свободных овалов.** Напомним, что при рассмотрении взаимного расположения двух кривых овал одной из кривых называется *свободным*, если он не пересекается с другой кривой.

**Предложение 6.1.** *Предположим, что нечетная ветвь  $M$ -кубики пересекает овал  $M$ -квартики в 12 точках, и при этом хотя бы один свободный овал одной из кривых лежит внутри свободного овала другой кривой. Тогда невозможны никакие расположения кроме тех, которые содержатся в списке, приведенном в §5.*

*Доказательство.* Мы применим метод, предложенный в [6; §3.3]. Выберем пучок прямых с центром во внутреннем из вложенных свободных овалов. Тогда расположение объединения кривых относительно этого пучка прямых имеет вид  $\times_{i_1}^2 \dots \times_{i_5}^2 \times_3 \supset_4 o_{j_1} o_{j_2} \subset_4 \times_3$ , где  $i_1, \dots, i_5 \in \{3, 4\}$  и  $j_1, j_2 \in \{2, 3, 4, 5\}$  (описание кодировки см. в [4], [6] или [7]). Вычисляя в каждом из  $2^5 \cdot 4^2 = 512$  случаев многочлен Александра соответствующей косы, получаем противоречие с обобщенной теоремой Фокса—Милнора для всех расположений, не перечисленных в §5. Подробности, в том числе компьютерную программу вычисления многочлена Александра, см. в [6].

**6.2. Овал кубики вне овала квартики, но "не на бесконечности".**

**Предложение 6.2.** *Предположим, что нечетная ветвь  $M$ -кубики  $C_3$  пересекает овал  $M$ -квартики  $C_4$  в 12 точках, причем имеется компонента связности  $D$  множества  $\mathbf{R}P^2 \setminus (J_3 \cup C_4)$ , замыкание которой неориентируемо. Тогда если овал  $O_3$  кубики  $C_3$  находится вне овалов квартики, а также  $O_3 \not\subset D$ , то невозможны никакие расположения кроме тех которые содержатся в списке, приведенном в §5.*

*Доказательство.* Воспользуемся методом доказательства из статьи [4]. Расположение кривой  $C_3 \cup C_4$  относительно пучка прямых с центром внутри  $O_3$  имеет вид

$$\times_3 \times_{i_1}^2 \dots \times_{i_a}^2 \times_3 \supset_2 o_{j_1} o_{j_2} o_{j_3} \subset_2 \times_3 \times_{k_1}^2 \dots \times_{k_b}^2 \times_3,$$

где  $a + b = 4$ ,  $i_1, \dots, i_a, k_1, \dots, k_b \in \{2, 3\}$ ,  $j_1, j_2, j_3 \in \{2, 3, 5\}$ , значит надо рассмотреть  $5 \cdot 2^4 \cdot 3^3 = 2160$  вариантов (в силу симметрии число вариантов можно сократить почти вдвое). Для каждого набора чисел  $(a; i_1, \dots, i_a; j_1, j_2, j_3)$  мы находим косу, отвечающую пучку прямых с центром в овале кубики. Сумма показателей этой косы равна 5. Во всех случаях, которые не соответствуют расположениям из §5, либо не удовлетворяется неравенство Мурасуги—Тристрама для обычной сигнатуры, либо многочлен Александра не равен тождественно нулю.

**6.3. Алгебраическая нереализуемость гибкой кривой на рис. 13.**

**Определение 6.3.** Пусть  $n$  — целое положительное число и  $R(X, Z) = Z^3 + b_1(X)Z^2 + b_2(X)Z + b_3(X)$ , где  $a_k(X)$  — многочлен от  $X$  с вещественными

коэффициентами степени  $kn$ . Назовем интервал  $I = [X_1, X_2]$  *альтернирующим интервалом для многочлена  $R$* , если выполнены следующие условия:

- (1) каждый из многочленов  $R(X_1, Y)$ ,  $R(X_2, Y)$  имеет один кратный корень и один простой корень;
- (2) многочлен  $F(X_0, Y)$  имеет ровно один вещественный корень при  $X_1 < X_0 < X_2$ ;
- (3) у одного из многочленов  $F(X_1, Y)$ ,  $F(X_2, Y)$  кратный корень меньше простого корня, а у другого — больше.

**Определение 6.4.** Пусть  $n$  — целое положительное число и  $F(X, Y) = Y^4 + a_1(X)Y^3 + a_2(X)Y^2 + a_3(X)Y + a_4(X)$ , где  $a_k(X)$  — многочлен от  $X$  с вещественными коэффициентами степени  $kn$ . Назовем интервал  $I = [X_1, X_2]$  *альтернирующим интервалом для многочлена  $F$* , если выполнены следующие условия:

- (1) каждый из многочленов  $F(X_1, Y)$ ,  $F(X_2, Y)$  имеет один кратный корень и два простых вещественных корня;
- (2) многочлен  $F(X_0, Y)$  имеет ровно два вещественных корня при  $X_1 < X_0 < X_2$ ;
- (3) у одного из многочленов  $F(X_1, Y)$ ,  $F(X_2, Y)$  кратный корень лежит внутри отрезка, ограниченного простыми корнями, а у другого — вне.

**Лемма 6.5.** Пусть  $R(Z) = Z^3 + b_2Z + b_3$  — многочлен с вещественными коэффициентами, имеющий простой корень  $Z = Z_1$  и кратный корень  $Z = Z_2$ . Тогда если  $Z_1 < Z_2$ , то  $b_3 > 0$ , а если  $Z_2 < Z_1$ , то  $b_3 < 0$ .

*Доказательство.*  $R(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2)^2$ . Поэтому  $b_3 = R(0) = -Z_1Z_2^2$ , то есть  $\text{sign } b_3 = -\text{sign } Z_1$ . Остается заметить, что  $Z_1 + 2Z_2 = 0$ , так как коэффициент при  $Z^2$  равен нулю.  $\square$

**Лемма 6.6.** Пусть  $R(X, Z)$  такой, как в определении 6.3. Тогда он не может иметь больше чем  $n$  альтернирующих интервалов.

*Доказательство.* Делая, если надо, подстановку  $Z' = Z - b_1(X)$ , мы можем считать, что  $b_1 = 0$ . Пусть  $D(X) = 4a_2^3 + 27a_3^2$  — дискриминант многочлена  $R$  относительно переменной  $Z$ . Пусть  $[X_1, X_2]$  — альтернирующий интервал для  $R$ . Тогда из условий (1)–(3) определения 6.3 и леммы 6.5 следует, что

- (4)  $D(X_1) = D(X_2) = 0$ ;
- (5)  $D(X) > 0$  при  $X_1 < X < X_2$ ;
- (6)  $\text{sign } b_3(X_1) = -\text{sign } b_3(X_2)$ .

Из условия (6) следует, что существует  $X_0 \in [X_1, X_2]$  такое, что  $b_3(X_0) = 0$ . Поэтому, из условия (5) мы имеем  $4b_2(X_0)^3 = D(X_0) - 27b_3(X_0)^2 = D(X_0) > 0$ , значит  $b_2(X_0) > 0$ . Кроме того, из условия (4) следует, что при  $j = 1, 2$  мы имеем  $4b_2(X_j)^3 = D(X_j) - 27b_3(X_j)^2 = -27b_3(X_j)^2 < 0$ , значит  $b_2(X_j) < 0$ . Таким образом, интервал  $[X_1, X_2]$  содержит по меньшей мере два корня многочлена  $b_2(X)$ : один между  $X_1$  и  $X_0$ , а другой между  $X_0$  и  $X_2$ . Остается вспомнить, что  $\deg b_2(X) = 2n$ .  $\square$

**Лемма 6.7.** Пусть  $R(X, Y)$  такой, как в определении 6.4. Тогда он не может иметь больше чем  $2n$  альтернирующих интервалов.

*Доказательство.* Делая, если надо, подстановку  $Y' = Y - a_1(X)$ , мы можем считать, что  $a_1 = 0$ . Пусть  $R(X, Y)$  — кубическая резольвента многочлена  $F(X, Y)$  относительно переменной  $Y$ . Напомним ее определение. При каждом фиксированном значении  $X$  обозначим через  $Y_1, \dots, Y_4$  корни многочлена  $F(X, Y)$  и положим

$$Z_1 = (Y_1 - Y_2)(Y_3 - Y_4), \quad Z_2 = (Y_1 - Y_3)(Y_2 - Y_4), \quad Z_3 = (Y_1 - Y_4)(Y_2 - Y_3),$$

$$R = (Z - Z_1)(Z - Z_2)(Z - Z_3) = Z^3 + b_1Z^2 + b_2Z + b_3.$$

Коэффициенты  $b_1, b_2, b_3$  — симметрические многочлены от  $Y_1, \dots, Y_4$ , значит их можно полиномиально выразить через  $a_2, a_3, a_4$  (явные формулы см., например, в [12]). При этом получается, что  $b_k$  — многочлен от  $X$  степени  $2kn$ . Поэтому, по лемме 6.6,  $R$  имеет не более  $2n$  альтернирующих интервалов.

Остается убедиться в том, что интервал является альтернирующим для  $R(X, Z)$  тогда и только тогда, когда он является альтернирующим для  $F(X, Y)$ . Это легко доказать, пользуясь формулами, задающими  $Z_1, Z_2, Z_3$ , а также соотношением  $Y_1 + \dots + Y_4 = 0$ .  $\square$

**Предложение 6.8.** Вещественная алгебраическая  $M$ -кубика  $C_3$  не может быть расположена относительно вещественной алгебраической  $M$ -квартики  $C_4$  так, как изображено на рис. 13.

*Доказательство.* Предположим, что  $C_3$  расположена относительно  $O_4$  как изображено на рис. 13. Введем на  $\mathbf{R}P^2$  координаты  $(x : y : z)$  так, чтобы точка  $(0 : 1 : 0)$  находилась внутри овала кубики и пусть  $X = x/z, Y = y/z$  — аффинные координаты в карте  $z \neq 0$ . Из того, что координата  $X$  монотонна на всех ветвях кубики, следует, что при должном выборе бесконечно удаленной прямой кривая  $C_4$  расположена относительно некоторых шести вертикальных прямых как на рис. 57. Поэтому обязательно найдутся три альтернирующих интервала для многочлена  $F(X, Y)$ , задающего кватику  $C_4$ . Однако по лемме 6.7 не может быть больше двух альтернирующих интервалов.  $\square$

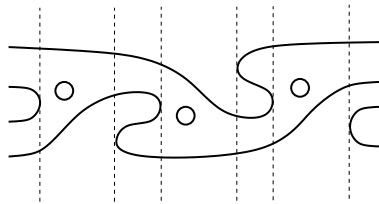


Рис. 57

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. S. Fiedler-LeTouzé, S.Yu. Orevkov, *A flexible affine  $M$ -sextic which is algebraically unrealizable*, J. of Alg. Geometry (to appear).
2. М.А. Гуцин, А.Н. Коробейников, Г.М. Полотовский, *Построения взаимных расположений кубики и quartики методом кусочного конструирования*, Записки научн. семин. ПОМИ, Т.267, 2000, 119–132.
3. А.Н. Коробейников, *Новые построения распадающихся кривых*, Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского "Математическое моделирование и оптимальное управление", вып. 1(23), 2001, 17–27.
4. S.Yu. Orevkov, *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves*, Topology **38** (1999), 779–810.
5. С.Ю. Оревкин, *Проективные коники и  $M$ -квинтики в общем положении с максимальной пересекающейся парой овалов*, Мат. Заметки, 65:4, 1999, 632–636.
6. S.Yu. Orevkov, *Classification of flexible  $M$ -curves of degree 8 up to isotopy*, GAFA – Geom. and Funct. Anal. (to appear).
7. С.Ю. Оревкин, Г.М. Полотовский, *Проективные  $M$ -кубики и  $M$ -квартики в общем положении с максимальной пересекающейся парой овалов*, Алгебра и Анализ, Т.11:5, 1999, 166–184.
8. S.Yu. Orevkov, E.I. Shustin, *Flexible, algebraically unrealizable curves: rehabilitation of Hilbert-Rohn-Gudkov approach*, J. reine und angew. Math. (to appear).
9. Г.М. Полотовский, *Каталог  $M$ -распадающихся кривых 6-го порядка*, ДАН СССР, Т.263, вып.3, 1977, 548–551.
10. Г.М. Полотовский, *Топологическая классификация распадающихся кривых 6-го порядка*, Дисс... к.ф.-м.н., Горький, 1979.
11. G.M. Polotovskii, *On the classification of decomposable 7-th degree curves*, Contemporary Math. **253** (2000), 219–234.
12. Б.Л. ван дер Варден, *Алгебра*, М., Наука, 1976.