

Об элементах степени g в разбивающей полугруппе вещественной кривой рода g .

Г. Б. Михалкин, С. Ю. Оревков

16 августа 2026 г.

1 Введение

Под вещественной кривой (C, conj) мы понимаем связную замкнутую риманову поверхность рода g , оснащенную инволюцией комплексного сопряжения conj , переводящую умножение касательных векторов на i в их умножение на $-i$. Множество неподвижных точек $\mathbb{R}C$ такой инволюции – набор из $r \leq g + 1$ гладких окружностей.

Вещественные кривые делятся на два типа: те, у которых множество $C \setminus \mathbb{R}C$ несвязно, относятся к типу I, а остальные – к типу II. Риманова поверхность C канонически ориентирована своей комплексной ориентацией. Для кривых типа I (также называемых *разбивающими*), множество $\mathbb{R}C$ наследует две противоположные ориентации от двух компонент дополнения $C \setminus \mathbb{R}C$. Тем самым, среди 2^r возможных ориентаций многокомпонентной кривой $\mathbb{R}C$ имеются две предпочтительные ориентации. Каждая из них называется *комплексной ориентацией* множества $\mathbb{R}C$.

Рациональная функция $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *вещественна*, если она эквивариантна по отношению к conj , т.е. если $f \circ \text{conj} = \text{conj} \circ f$. Она называется *вполне вещественной*, если $f^{-1}(\widehat{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}C$, где $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. В этом случае ограничение $f|_{\mathbb{R}C} : \mathbb{R}C \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ является ориентированным накрытием для стандартной ориентации $\widehat{\mathbb{R}}$ и одной из комплексных ориентаций множества $\mathbb{R}C$. Такое накрытие имеет *полистепень* $\delta = (d_1, \dots, d_r) \in \mathbb{N}^r$, составленную из степеней d_j ограничений накрытия на компоненты множества $\mathbb{R}C$ (которые мы считаем пронумерованными).

Ясно, что если f вполне вещественна, то C разбивающая. Более того, Л. Альфорс [1] показал, что на разбивающей кривой всегда можно

найти вполне вещественную рациональную функцию. Поэтому вполне вещественные функции, рассматриваемые как морфизмы $C \rightarrow \mathbb{P}^1$, названы в [2] *разбивающими морфизмами*. Дивизор, состоящий только из вещественных точек, называется *вполне вещественным*, а дивизор нулей вполне вещественной рациональной функции называется *разбивающим*. Легко видеть, что разбивающий дивизор не может содержать кратных точек, поэтому, допуская некоторую вольность речи, мы не всегда будем различать разбивающие дивизоры и их носители.

М. Куммер и К. Шоу [2] рассмотрели подмножество

$$\text{Sep}(C) = \{d(f) \mid f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \text{ вполне вещественна}\} \subset \mathbb{Z}^r$$

составленное из всех полистепеней разбивающих дивизоров на вещественной кривой C , и показали что оно замкнуто по сложению. Это подмножество называется *разбивающей полугруппой* вещественной кривой C . Разбивающие полугруппы M -кривых, гиперэллиптических кривых и кривых рода ≤ 4 вычислены в [2, 3, 5].

Определение 1 Элемент $\delta \in \text{Sep}(C)$ называется *дополняемым*, если

$$\delta + \mathbb{N}_0^r \subset \text{Sep}(C), \quad \text{где } \mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}.$$

Куммер и Шоу доказали, что если разбивающий дивизор D неспециален, то его полистепень – дополняемый элемент в $\text{Sep}(C)$. Основной результат нашей статьи дает достаточное условие дополняемости элементов соответствующим специальному случаю, т. е. случаю $h^1((f)_0) > 0$.

Теорема 1 Пусть C – разбивающая вещественная алгебраическая кривая рода g , а $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ – вполне вещественная рациональная функция степени g , такая, что ее дивизор нулей $(f)_0$ имеет проективный ранг 1, т.е. $h^0((f)_0) = 2$. Тогда для всех, за исключением конечного числа, точек $y \in \widehat{\mathbb{R}}$ прообраз $f^{-1}(y)$ задает дивизор $D = (f)_y$ со следующим свойством.

Для достаточно малой дуги $A \subset \widehat{\mathbb{R}C}$ с центром в любой точке $p \in f^{-1}(y)$, и для любого выбора точек $p', p'' \in A$, содержащихся в разных компонентах дополнения $A \setminus \{p\}$, дивизор $D - p + p' + p''$ – разбивающий неспециальный дивизор степени $g + 1$ и проективного ранга 1.

Следствие 2 В предположениях теоремы 1 полистепень дивизора D – дополняемый элемент полугруппы $\text{Sep}(C)$.

2 Дивизоры проективного ранга 1

Следующее утверждение является адаптацией наблюдения, сделанного в [4] для кривых, вложенных в поверхности, на случай абстрактных вещественных кривых. Пусть C – разбивающая вещественная кривая, а $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ – вещественная рациональная функция на ней. Пусть ω – вещественная голоморфная форма на кривой C , а $(\omega)_0$ – дивизор ее нулей.

Предложение 3 *Предположим, что $p', p'' \in f^{-1}(0)$ – две различные точки, такие что дивизор $(\omega)_0 - (f)_0$ неэффективен, но дивизор $(\omega)_0 - (f)_0 + p' + p''$ эффективен. Тогда дивизоры $(\omega)_0 - (f)_0 + p'$ и $(\omega)_0 - (f)_0 + p''$ неэффективны, т.е. в каждой из точек p', p'' порядок нуля функции f на единицу выше порядка нуля формы ω . Более того, ориентации на $\mathbb{R}C$, определенные формами ω и df , в окрестности одной из точек p', p'' совпадают, а в окрестности другой точки противоположны.*

Доказательство. Прообраз $f^{-1}([- \varepsilon, \varepsilon])$, $\varepsilon > 0$, задает систему путей на C . В точках прообраза $f^{-1}(0)$, отличных от p' и p'' , порядок нуля ω не меньше порядка нуля f , а значит, интеграл формы ω по соответствующим компонентам системы путей есть $o(\varepsilon)$. В одной из точек p', p'' или в них обеих порядок нуля ω на единицу меньше порядка нуля f , следовательно, интеграл формы ω по соответствующим компонентам системы путей существенен, т.е. имеет порядок ε . По той же причине в этой точке (в каждой из этих точек) порядки нулей форм ω и df равны, и тем самым задаваемые ими ориентации либо совпадают либо противоположны.

По теореме Абеля интеграл от ω по всей системе путей $f^{-1}([- \varepsilon, \varepsilon])$ равен нулю, а значит, существенных интегралов должно быть два и их знаки в общей сумме должны быть противоположными. $\square$

Это утверждение особенно удобно применять к мобильным дивизорам проективного ранга 1, как показывает следующее наблюдение (предложение 4). Начиная с этого наблюдения, в этом разделе нам не будет важно, является ли C разбивающей или даже вещественной кривой. Напомним, что *мобильный дивизор* – это эффективный дивизор D , линейная система $|D|$ которого не имеет базисных точек.

Предложение 4 *Пусть D – эффективный дивизор проективного ранга 1 (т.е. $h^0(D) = 2$), не имеющий кратных точек. Тогда для любых*

двух различных точек p', p'' носителя дивизора D существует форма ω , обращающаяся в нуль на всем $D \setminus \{p', p''\}$, но не на всем D , причем $\omega(p') \neq 0$ и $\omega(p'') \neq 0$, если дивизор D мобилен.

Если D – вещественный дивизор, то форма ω может быть выбрана вещественной.

Доказательство. Положим $D'' = D - p' - p''$, $d = \deg D$, $d'' = \deg D''$. Заметим, что $\dim \Omega^1(D) = h^0(K - D)$, где $\Omega^1(D)$ – пространство голоморфных форм, обращающихся в нуль на D . Поэтому нам надо доказать, что $h^0(K - D'') \geq 1$ и $\Omega^1(D'') \not\subset \Omega^1(D)$. Оба эти утверждения следуют из теоремы Римана–Роха. В самом деле, поскольку $h^0(D) = 2$ и $h^0(D'') > 0$, мы имеем

$$\begin{aligned} h^0(K - D'') &= h^0(D'') + g - d'' - 1 = h^0(D'') + g - d + 1 \\ &> g - d + 1 = h^0(K - D) - h^0(D) + 2 = h^0(K - D). \end{aligned} \quad (1)$$

Следовательно, $\dim \Omega^1(D'') > \dim \Omega^1(D)$, т.е. существует форма $\omega \in \Omega^1(D'') \setminus \Omega^1(D)$.

Докажем, что $\omega(p') = 0$ влечет $\omega(p'') = 0$, если дивизор D мобилен. Это можно вывести либо из теоремы Абеля (как в доказательстве предложения 3), либо опять из теоремы Римана–Роха. Действительно, положим $D' = D - p'$. Из мобильности дивизора D следует, что $h^0(D') = h^0(D) - 1$. Поэтому $h^0(K - D') = h^0(K - D)$ (ср. с (1)), а поскольку $\Omega^1(D) \subset \Omega^1(D')$, мы заключаем, что $\Omega^1(D) = \Omega^1(D')$, т.е. $\omega(p'') = 0$ влечет $\omega(p') = 0$.

В вещественном случае пространство $\Omega^1(D - p' - p'')$ и его подпространство $\Omega^1(D)$ вещественны, а значит и форму ω можно выбрать вещественной. $\square$

Верно и обратное утверждение.

Предложение 5 *Предположим, что D эффективный мобильный дивизор без кратных точек, такой, что для любых двух различных точек p', p'' носителя дивизора D существует форма ω , обращающаяся в нуль на $D \setminus \{p', p''\}$, но не в p' . Тогда проективный ранг дивизора D равен единице.*

Доказательство. Проективный ранг мобильного дивизора положителен. Если он больше единицы, то для любой точки $p' \in \text{Supp}(D)$, существует деформация дивизора D , оставляющая точку p' неподвижной. Если

$p'' \in \text{Supp}(D)$ – точка, движущаяся при этой деформации, то существование формы ω из посылки теоремы противоречит теореме Абеля (ср. с доказательством предложения 4). $\square$

3 Удваивание точек на разбивающих специальных дивизорах проективного ранга 1

Пусть теперь кривая C вещественная разбивающая. Если D – вполне вещественный дивизор на C (т.е. $\text{Supp}(D) \subset \mathbb{R}C$), причем D мобилен, без кратных точек, то, как было замечено в [5], предложение 3 иногда дает как необходимые, так и достаточные условия того, что дивизор D разбивающий. Как оказывается, это наблюдение удобнее всего применять, когда D имеет проективный ранг 1.

Заметим, что линейная система такого дивизора D задает вещественную рациональную функцию f такую, что $D = (f)_0$, причем 0 – регулярное значение этой функции. Эта функция определена однозначно с точностью до автоморфизма $\widehat{\mathbb{R}}$. Возрастание функции f задает ориентацию в окрестности прообраза $f^{-1}(0)$.

Предложение 6 (ср. с [2, предложение 2.11]) *Пусть $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ вещественная рациональная функция с вполне вещественным дивизором нулей $(f)_0$ без кратных точек. Ориентация окрестности прообраза $f^{-1}(0)$, задаваемая формой df , продолжается до ориентации на всем $\mathbb{R}C$ тогда и только тогда, когда f вполне вещественна.*

Доказательство. По определению все $d = \deg f$ точек вполне вещественного дивизора вещественны. Если условие продолжения ориентации выполнено, то степень отображения $f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}C \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$ в полученной ориентации кривой $\mathbb{R}C$ равна $\pm d$. Тем самым, это вполне вещественное отображение. Наоборот, если функция f вполне вещественна, то df задает ориентацию на $\mathbb{R}C$. $\square$

Следствие 7 *Если ориентация окрестности прообраза $f^{-1}(0)$, задаваемая формой df , продолжается до ориентации на всем $\mathbb{R}C$, то она совпадает с одной из комплексных ориентаций кривой $\mathbb{R}C$.*

Доказательство. По предложению 6 функция f вполне вещественна. Поэтому ориентация на $\mathbb{R}C$, задаваемая формой df , является комплексной

ориентацией, так как она совпадает с граничной ориентацией, индуцированной с прообраза верхней полуплоскости. $\square$

Собирая доказанные утверждения вместе, получаем следующие два факта.

Предложение 8 Пусть D разбивающий дивизор, а $p', p'' \in \text{Supp}(D)$ две точки. Тогда любая голоморфная форма, обращающаяся в нуль на всем $\text{Supp}(D) \setminus \{p', p''\}$, но не в p' , определяет локальные ориентации в точках p' и p'' , не согласованные с комплексной ориентацией множества $\mathbb{R}C$.

Доказательство. Пусть $D = (f)_0$, где f – вполне вещественная функция. По предложению 3 ориентации, задаваемые формами ω и df , не согласованы в точках p' и p'' . При этом ориентация, заданная формой df для вполне вещественной функции f , является комплексной ориентацией. $\square$

Предложение 9 Пусть D – мобильный вполне вещественный дивизор без кратных точек. Предположим, что для любых различных точек $p', p'' \in \text{Supp}(D)$ найдется голоморфная форма $\omega_{p', p''}$, обращающаяся в нуль на $\text{Supp}(D) \setminus \{p', p''\}$, но не в p' , которая определяет локальные ориентации в точках p' и p'' не согласованные с комплексной ориентацией множества $\mathbb{R}C$. Тогда дивизор D разбивающий.

Доказательство. Поскольку D мобилен, $D = (f)_0$, где f – вещественная рациональная функция. Для любых $p', p'' \in D$ ориентация, задаваемая формой $\omega_{p', p''}$, не согласована в окрестностях этих точек ни с комплексной ориентацией (по условию), ни с ориентацией, задаваемой формой df (по предложению 3). Следовательно, последние две ориентации согласованы, и значит, f вполне вещественна по предложению 6. $\square$

Удобно ввести следующие обозначения. Фиксируем на C комплексную ориентацию и для вещественной голоморфной формы ω на C и для точки $p \in \mathbb{R}C$ положим $\text{sign}_\omega(p) = \text{sign } \omega(v)$, где v – касательный вектор к $\mathbb{R}C$ в точке p , положительно ориентированный относительно выбранной комплексной ориентации.

Аналогично, для вещественной рациональной функции $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ положим $\text{sign}_{df}(p) = \text{sign}_\eta(f_*(v))$, где $\eta = dy/(1 + y^2)$ – форма Фубини–Штуди на $\widehat{\mathbb{R}}$. В частности, $\text{sign}_{df}(p) = 1$, если локальная ориентация на

$\mathbb{R}C$ в окрестности p , заданная возрастанием функции f , совпадает с выбранной комплексной ориентацией и $\text{sign}_{df}(p) = -1$, если эти ориентации противоположны.

В этих обозначениях предложение 6 и следствие 7 принимают следующий вид.

Предложение 10 Пусть $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ вещественная рациональная функция $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ с вполне вещественным дивизором нулей $D = (f)_0$ без кратных точек. Функция f вполне вещественна тогда и только тогда, когда для любых точек $p', p'' \in \text{Supp}(D)$ имеет место равенство

$$\text{sign}_{df}(p') = \text{sign}_{df}(p''). \quad (2)$$

Для проверки условия (2) удобно использовать следующий факт, непосредственно вытекающий из предложений 3 и 10.

Предложение 11 Пусть f и D такие, как в предложении 10. Пусть $p', p'' \in \text{Supp}(D)$ и ω – вещественная голоморфная форма на C , обращающаяся в нуль всюду на $f^{-1}(0) \setminus \{p', p''\}$, но не в p' . Тогда условие (2) эквивалентно условию

$$\text{sign}_{\omega}(p') \neq \text{sign}_{\omega}(p''). \quad (3)$$

4 Доказательство основной теоремы

Лемма 12 Пусть $f : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ рациональная функция степени $d \leq g$ такая, что дивизор $D = (f)_0$ имеет проективный ранг 1. Тогда для всех, кроме конечного числа, значений $y \in \widehat{\mathbb{C}}$ существует форма ω_y , имеющая нули первого порядка во всех точках множества $f^{-1}(y)$.

Доказательство. По теореме Римана–Роха $h^0(K - D) = g - d + 1 \geq 1$. Следовательно, существует дивизор E такой, что $K_y = E + (f)_y$ лежит в каноническом классе при всех y . Поэтому если y – регулярное значение функции f и $y \notin f(\text{Supp}(E))$, то голоморфная форма ω_y , отвечающая дивизору K_y , обладает требуемым свойством. Действительно, в этом случае дивизоры $(f)_y$ и E не имеют общих точек, значит, в каждой точке из $f^{-1}(y)$ кратность нуля формы ω_y равна кратности нуля функции f , а поскольку y – регулярное значение, эти кратности равны единице. $\square$

Доказательство Теоремы 1. Пусть $f : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ вполне вещественная рациональная функция степени g и проективного ранга 1, а $D = (f)_y$, $y \in \mathbb{R}$. Поскольку тогда $h^1(D) = h^0(K - D) = 1$, то существует единственная (с точностью до умножения на константу) голоморфная форма ω_D , обращающаяся в ноль на $\text{Supp}(D)$. Заметим что, поскольку дивизор D мобилен, точка p не является его базисной точкой, а значит, $h^0(D - p) < h^0(D)$, и тем самым, $h^1(D - p) = 1$, т. е. любая форма, обращающаяся в ноль на $\text{Supp}(D) \setminus \{p\}$ также пропорциональна форме ω_D . Если дуга A достаточно мала, то эта форма не обращается в ноль в p' , и тем самым дивизор $D^+ = D - p + p' + p''$ степени $g + 1$ неспециален и имеет проективный ранг 1, так же как и дивизор D .

Докажем, что дивизор D^+ мобилен. В самом деле, если q – его базисная точка, то $h^0(D^+ - q) = h^0(D^+) = 2$, следовательно, дивизор $D^+ - q$ специален, т.е. существует голоморфная форма ω_q , обращающаяся в ноль всюду на $\text{Supp}(D^+) \setminus \{q\}$. Если $q = p''$, то ω_q обращается в ноль на $\text{Supp}(D) \setminus \{p\}$, но тогда, как показано выше, ω_q не может обращаться в ноль в точке p' . Случай $q = p'$ аналогичен. Предположим теперь, что $q \notin \{p', p''\}$. Если такая форма ω_q существует для любых сколь угодно близких к p точек p', p'' , то, переходя к пределу, мы получим голоморфную форму, обращающуюся в ноль всюду на $\text{Supp}(D) \setminus \{q\}$ и имеющую кратный ноль в точке p . Как показано выше, такая форма пропорциональна форме ω_D , а в силу леммы 12 мы можем считать, что ω_D имеет в p ноль первого порядка. Полученное противоречие показывает, что дивизор D^+ мобилен. Пусть f^+ – вещественная рациональная функция такая, что $D^+ = (f^+)_0$.

Так как векторное пространство форм, обращающихся в ноль на $\text{Supp}(D)$, определено над $\mathbb{R}$, мы можем считать, что форма ω_D вещественна. Пусть $q \in \text{Supp}(D) \setminus \{p\}$. Рассмотрим вещественную голоморфную форму ω для пары точек q и p в дивизоре D , предоставляемую предложением 4. Поскольку D разбивающий, в силу предложений 10 и 11 мы имеем

$$\text{sign}_\omega(p) \neq \text{sign}_\omega(q). \quad (4)$$

Точка p'' является нулем формы $\tilde{\omega} = \omega_D + \varepsilon\omega$ для некоторого $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Если дуга A достаточно мала, то ε тоже мало, и тогда

$$\text{sign}_{\tilde{\omega}}(p') = \text{sign}_{\tilde{\omega}}(p) = \text{sign}_\omega(p) \quad (5)$$

(поскольку p – простой ноль формы ω_D) и

$$\text{sign}_{\tilde{\omega}}(q) = \text{sign}_\omega(q). \quad (6)$$

Из (4)–(6) следует, что

$$\operatorname{sign}_{\tilde{\omega}}(p') = \operatorname{sign}_{\omega}(p) \neq \operatorname{sign}_{\omega}(q) = \operatorname{sign}_{\tilde{\omega}}(q).$$

Форма $\tilde{\omega}$ обращается в нуль на $\operatorname{Supp}(D^+) \setminus \{p', q\}$, но не в q . Следовательно, $\operatorname{sign}_{df^+}(p') = \operatorname{sign}_{df^+}(q)$ по предложению 11. Аналогично $\operatorname{sign}_{df^+}(p'') = \operatorname{sign}_{df^+}(q)$. Поскольку q – любая точка из $\operatorname{Supp}(D^+) \setminus \{p', p''\}$, мы заключаем, что функция $\operatorname{sign}_{df^+}$ постоянна на $\operatorname{Supp}(D^+)$, и теорема вытекает из предложения 10. $\square$

Список литературы

- [1] L. V. Ahlfors. *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions*, Comment. Math. Helv. **24** (1950), 100–134.
- [2] M. Kummer, K. Shaw *The separating semigroup of a real curve*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse. Mathématiques (6), **29** (2020), 79–96.
- [3] С. Ю. Оревков *Разбивающая полугруппа гиперэллиптических кривых и кривых рода 3*. Алгебра и анализ, **31**:1 (2019), 108–113.
- [4] S. Yu. Orevkov *Algebraically unrealizable complex orientations of plane real pseudoholomorphic curves*, GAFA – Geom. Funct. Anal., **31**, (2021), 930–947.
- [5] С. Ю. Оревков *Разбивающая полугруппа кривых рода 4*, Функц. анализ и его прилож., **59**:4, (2025), 40–51.