

ОБ АЛЬТЕРНИРОВАННЫХ КВАЗИПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЯХ

С. Ю. ОРЕВКОВ^{123*}

Приводится эффективный признак квазиположительности зацеплений. В частности, доказано, что если квазиположительное зацепление представимо альтернированной диаграммой, у которой нет пары окружностей Зейферта соединенных одним единственным пересечением, то диаграмма положительна, и значит зацепление сильно квазиположительно.

Ключевые слова: квазиположительное зацепление, альтернированное зацепление, окружность Зейферта

1. ВВЕДЕНИЕ

Коса из n нитей называется *квазиположительной*, если она является произведением кос, сопряженных стандартным образующим $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ группы кос B_n . Коса называется *сильно квазиположительной*, если она является произведением кос вида $\tau_{k,j}\sigma_j\tau_{k,j}^{-1}$, $j \leq k$, где $\tau_{k,j} = \sigma_k\sigma_{k-1}\dots\sigma_j$. Все зацепления в данной статье предполагаются ориентированными зацеплениями в трехмерной сфере S^3 . Зацепление называется (*сильно*) *квазиположительным*, если оно представимо (*сильно*) квазиположительной косой. Этот класс зацеплений очень важен для изучения плоских алгебраических кривых. Как показано в [3], зацепление квазиположительно тогда и только тогда, когда оно высекается комплексной алгебраической кривой на стандартно вложенной трехмерной сфере в \mathbb{C}^2 . В [3] также доказано, что зацепление, высекаемое комплексной алгебраической кривой на любой гладко вложенной трехмерной сфере, являющейся границей строго псевдовыпуклой области в \mathbb{C}^2 , квазиположительно. Критерии квазиположительности играют существенную роль в изучении плоских вещественных алгебраических кривых (2-я часть 16-й проблемы Гильберта), см., например, [11].

Диаграмма зацепления называется *положительной*, если все ее пересечения положительны. При устранении пересечений с учетом ориентаций (т.е. при замене \nearrow или \nwarrow на \smile) диаграмма распадается на непересекающиеся простые замкнутые кривые, которые называются *окружностями Зейферта*, см., например, [9, 14, 15].

С. Баадер [1, с. 268, вопрос (4)] поставил вопрос: *Верно ли, что альтернированные квазиположительные зацепления имеют положительные диаграммы?* Заметим, что

*Представлено академиком РАН В.А.Васильевым 12.07.2020 г. Поступило 16.07.2020 г.

¹Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

²L'université Paul Sabatier, Toulouse, France

³Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская область, Россия

все положительные диаграммы представляют сильно квазиположительные зацепления (см. [10, 13]) и что все альтернированные сильно квазиположительные зацепления представимы положительными альтернированными диаграммами в силу [2, Cor. 7.3]. Отметим также, что положительные альтернированные диаграммы специальные (диаграмма называется *специальной* [9], если ее окружности Зейферта ограничивают непересекающиеся диски).

В настоящей заметке мы на этот вопрос даем утвердительный ответ для широкого класса альтернированных зацеплений — для зацеплений, обладающих альтернированной диаграммой, у которой число окружностей Зейферта равно *брэйд-индексу* (т. е. минимально возможному числу нитей представляющей косы). Такие диаграммы мы будем называть *диаграммами Дяо-Хетьея-Лю* или *DHL-диаграммами* (а соответствующие зацепления — *DHL-зацеплениями*), так как эти авторы в работе [5] дали им следующую очень простую и изящную характеристику.

Теорема 1 [5, Thm. 1.1]. *Альтернированная диаграмма является DHL-диаграммой тогда и только тогда, когда она не имеет пары окружностей Зейферта, соединенных через одно единственное пересечение.*

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 2. *Пусть D — DHL-диаграмма квазиположительного зацепления. Тогда D положительна.*

Доказательство этой теоремы получается сочетанием результатов из [6, 7, 9, 14, 15] (см. раздел 2). Теоремы 1 и 2 позволяют без каких-либо вычислений строить многочисленные примеры неквазиположительных зацеплений (см. рис. 1).

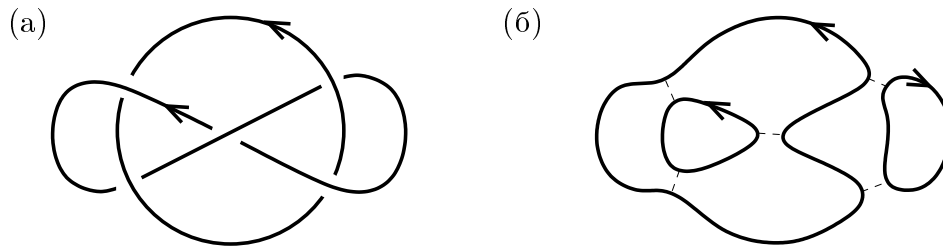


Рис. 1. (а) Пример зацепления, которое неквазиположительно по теоремам 1 и 2. (б) Его окружности Зейферта.

Поскольку все положительные диаграммы представляют сильно квазиположительные зацепления (см. [10, 13]), мы получаем:

Следствие 1. *Пусть L — DHL-зацепление. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (i) L квазиположительно;
- (ii) L сильно квазиположительно;
- (iii) L имеет положительную альтернированную диаграмму.

В разделе 3 мы обобщаем теорему 2 на все альтернированные зацепления, брэйд-индекс которых вычислен в [4]; см. теорему 4 и замечание 2.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Пусть D — связная диаграмма некоторого зацепления. *Графом Зейферта* диаграммы D назовем граф G_D , вершины которого отвечают окружностям Зейферта, а ребра — пересечениям. Определим знаки ребер как знаки соответствующих пересечений. Диаграмма D называется *редуцированной*, если G_D не имеет ребер, удаление которых делает граф G_D несвязным. Обозначим через $d(D)$ сумму знаков всех ребер некоторого остовного дерева графа G_D , и пусть $w(D)$ — сумма знаков пересечений (writhe) диаграммы D .

Для зацепления L обозначим через $\sigma(L)$ и $\mathbf{n}(L)$ его сигнатуру и дефект (nullity) — последний определен как дефект симметризованной формы Зейферта, отвечающей *связной* поверхности Зейферта.

Теорема 3 (Traczyk [14]). *Пусть D — связная редуцированная альтернированная диаграмма зацепления L . Тогда $\sigma(L) = d(D) - w(D)$ и $\mathbf{n}(L) = 0$.*

Данная формула для $\sigma(L)$ приведена в [14, Thm. 2(1)] (множитель $1/2$ там ошибочен). То, что $\mathbf{n}(L) = 0$ (эквивалентно, $\det(L) \neq 0$), доказано в [9, Lem. 5.1] и в приложении к статье [14]. Это также легко вывести из [14, Thm. 1].

Доказательство теоремы 2. Пусть D — ДНЛ-диаграмма квазиположительного зацепления L . Очевидно, что каждая компонента связности диаграммы D — тоже ДНЛ-диаграмма, причем она задает квазиположительное зацепление в силу [12]. Поэтому мы будем рассматривать только тот случай, когда D связна.

Обозначим брэйд-индекс зацепления L через n . По определению ДНЛ-диаграмм, D имеет n окружностей Зейферта. Следовательно, по [15, Thm. 1] (см. обсуждение этой теоремы во введении статьи [15]), L представима косою из n нитей β_1 , причем

$$w(\beta_1) = w(D). \tag{1}$$

Согласно [7, Thm. 1.2] L представима квазиположительной косою из n нитей β_2 . Неравенство Мурасуги–Тристрама [9] для квазиположительной косы можно записать следующим образом (см. [11, Cor. 3.2]):

$$1 + \mathbf{n}(L) \geq |\sigma(L)| + n - w(\beta_2). \tag{2}$$

По теореме Дынникова–Прасолова [6] (обобщенная гипотеза Джонса),

$$w(\beta_1) = w(\beta_2) \tag{3}$$

Заметим, что все ДНЛ-диаграммы редуцированы. Поэтому из (1)–(3) и теоремы 3 вытекает, что $|d(D) - w(D)| \leq 1 - n + w(D)$, откуда $w(D) - d(D) \leq 1 - n + w(D)$, т. е. $d(D) \geq n - 1$. Напомним, что $d(D)$ есть сумма знаков всех ребер остовного дерева графа G_D . Любое остовное дерево имеет $n - 1$ ребро, следовательно, все его ребра положительны. Поскольку каждое ребро графа G_D лежит в некотором остовном дереве, мы заключаем, что все пересечения в D положительны. Теорема 2 доказана.

3. ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Пусть D — альтернированная диаграмма некоторого зацепления L . Обозначим через $b = b(L)$ брэйнд-индекс зацепления L , а через $s = s(D)$ — число окружностей Зейферта диаграммы D . Пусть $d^\pm = d^\pm(D)$ — число ребер соответствующего знака в остовном дереве графа G_D , тем самым $d = d(D) = d^+ - d^-$.

Пусть β — коса из b нитей, задающая L . По теореме Дынникова–Прасолова [6] $w(\beta)$ не зависит от выбора косы β , что позволяет нам определить числа $\mathbf{r}^\pm = \mathbf{r}^\pm(D)$ как решения системы уравнений

$$\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}^- = s - b, \quad \mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^- = w(D) - w(\beta).$$

Замечание 1. Определение чисел r^\pm , данное в [4], не вполне ясно, однако во всех случаях, когда эти числа найдены в [4], они совпадают с нашими \mathbf{r}^\pm ; ср. [4, Rem. 3.1–3.3].

Если D есть DNL-диаграмма, то $\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^- = 0$ (напомним, что в этом случае $w(D) = w(\beta)$ по [15, Thm. 1]), таким образом, следующее утверждение обобщает теорему 2.

Теорема 4. Пусть D — редуцированная альтернированная диаграмма квазиположительного зацепления L , причем

$$2\mathbf{r}^-(D) \leq d^-(D). \quad (4)$$

Тогда D положительна (а значит, L сильно квазиположительно в силу [10, 13]).

Доказательство. Поскольку все рассуждения почти те же, что и для теоремы 2, мы только приведем заключительные вычисления. Итак, мы имеем $w(D) - d \leq |\sigma| \leq 1 - b + w(\beta)$, следовательно,

$$d + 1 \geq w(D) - w(\beta) + b = (\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-) + s - (\mathbf{r}^+ + \mathbf{r}^-) = s - 2\mathbf{r}^- \geq s - d^-,$$

откуда $d^+ \geq s - 1$, и из этого вытекает требуемый результат.

Замечание 2. Во всех случаях, когда брэйнд-индекс редуцированной альтернированной диаграммы вычислен в [4], имеет место неравенство (4), в частности, оно выполнено для минимальных диаграмм зацеплений с двумя мостами и для альтернированных зацеплений Монтесиноса.

Вопрос 1. Выполнено ли (4) для всех редуцированных альтернированных диаграмм?

Замечание 3. Тецуя Ито [8] обобщил теорему 2 на однородные диаграммы, у которых число окружностей Зейферта равно брэйнд-индексу (отметим однако, что неизвестен алгоритм проверки этого условия). Некоторые другие близкие вопросы также обсуждаются в [8].

Благодарности. Я признателен Мишелю Буало за полезные обсуждения.

Цитированная литература

1. *Baader S.* Slice and Gordian numbers of track knots // Osaka J. Math. 2005. V. 42. P. 257-271.
2. *Boileau M., Boyer S., Gordon C. M.* Branched covers of quasi-positive links and L-spaces // J. of Topology. 2019. V. 12. P. 536-576.
3. *Boileau M., Orevkov S.* Quasipositivité d'une courbe analytique dans une boule pseudo-convexe // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2001. V. 332. P. 825-830.
4. *Diao Y., Ernst G., Heteyi G., Liu P.* A diagrammatic approach for determining the braid index of alternating links. Arxiv:1901.09778.
5. *Diao Y., Heteyi G., Liu P.* The braid index of reduced alternating links. Arxiv:1701.07366. ■
6. *Дынников И. А., Прасолов М. В.* Шунты для прямоугольных диаграмм. Доказательство гипотезы Джонса и связанные вопросы // Труды ММО. 2013. V. 74:1. P. 115-173.
7. *Hayden K.* Minimal braid representatives of quasipositive links // Pac. J. Math. 2018. V. 295. P. 421-427.
8. *Ito T.* On homogeneous quasipositive links. arxiv:2007.03962.
9. *Murasugi K.* On certain numerical invariant of link types // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 117. P. 387-422.
10. *Nakamura T.* Four-genus and unknotting number of positive knots and links // Osaka J. Math. 2000. V. 37. P. 441-451.
11. *Orevkov S. Yu.* Classification of flexible M -curves of degree 8 up to isotopy // GAFA – Geom. Funct. Anal. 2002. V. 12. P. 723-755.
12. *Оревков С. Ю.* Квазиположительные зацепления и связанные суммы // Функц. анализ и прилож. 2020. Т. 54:1. С. 81-86.
13. *Rudolph L.* Positive links are strongly quasipositive / In: Proceedings of the Kirbyfest, Berkeley, CA, USA, June 22-26, 1998. University of Warwick. Warwick, UK. Geom. Topol. Monogr. 2. 1999. P. 555-562.
14. *Traczyk P.* A combinatorial formula for the signature of alternating diagrams // Fundamenta Math. 2004. V. 184. P. 311-316.
15. *Yamada S.* The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link // Invent. Math. 1987. V. 89. P. 347-356.